UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Algèbre et Mathématiques Discrète

Par

Djaidja Messaouda

Sujet

Semi-groupes de transformations et décomposition d'un automate fini

Devant le jury :

Mr. N. GHADBAN	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. D. MIHOUBI	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. L. HEBOUB	MAA. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

- Avant tout, je tiens remercier lieu ALLAH qui m'a donné la force de rédiger ce travail modeste.

- Je tiens à remercie Mr. D.MIHOUBI directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

- Je tiens à exprimer tout mes respects à mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé.

- Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublies aussi mes collègues et amies, tous les étudiants et étudiantes de ma promotion, ainsi tous ceux qui participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

- Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Dédicaces

- *Je dédie ce modeste travail :*

-A mes parents ma mère et mon père.

-A mes frères.

- A toute la famille.

-A toute mes amies.

Module sur Semi-groupes de transformations et décomposition des auomates finis

Djaidja Messaouda

27 juin 2018

NOTATIONS

Σ	Alphabet.
Σ^*	Ensemble des mots sur un alphabet Σ.
AFD	Automate fini déterministe.
$AFND$	Automate fini non déterministe.
$C(w)$	Contexte de mot w.
S/L	L'ensemble quotient.
Q^Q	L'ensemble des applications d'un ensemble de Q vers lui même.
$\tilde{q}$	Application constante définir par l'élément q.
$\tilde{Q}$	Ensemble de toutes les applications constantes sur Q.
$T^\bullet$	Monoïde de transformations associé à T.
S_Q	Groupe des permutations de l'ensemble Q.
S^P	Ensemble de tout les applications de P vers S.
$[g]$	Classe d'équivalence de g.
1_Q	Applications identité de Q vers Q.
$S \times T$	Produit direct de S et T.
$X \circ Y$	Produit en couronne de X et Y.
$S \times_\theta T$	Produit semi direct de S et T relativement a θ.
$M \wedge M'$	Produit direct de semi automates M et M'.
$M \omega M'$	Produit en cascade de semi automates M et M'.
$X \preccurlyeq Y$	Y couvre X.

Table des matières

Introduction

En algèbre, un semi-groupe de transformation est un ensemble de fonctions d'un ensemble vers lui-même muni de la composition de fonctions. Si de plus, ce semi-groupe contient la fonction d'identité, il est dit un monoïde de transformations.Un semi groupe de transformations d'un ensemble définit une action de semi groupe sur cet ensemble.

Dans la théorie des automates, certains auteurs utilisent le terme semi-groupe de transformations pour se référer à un semi-groupe agissant fidèlement sur un ensemble d'états différents de l'ensemble de base du semi-groupe.

Le premier résultat de la décomposition algébrique de semi-groupes de transformations est dû à Krohn et Rhodes en 1965. Depuis lors de nombreuses versions de preuves de ce résultat ce sont apparues. Certaines de ces résultats sont placées dans le contexte des semi-automates finis, machines de Mealy et bien sûr aussi certains ce sont apparues dans la théorie des semigroupes de transformations.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des semi-groupes de transformations et la décomposition d'un automate fini en éléments plus simples. Plus précisement : semi-groupe et monoïde de trasformations, produit direct et semi direct de semi- groupes, semi-groupes de transformations, et semi automates.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre : nous rappelons les notions de base tels que : (Groupes,Sous groupes,Semi-groupes,Monoïdes,...etc) nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Dans le deuxième chapitre : on s'intéresse aux notions semi-groupe, groupe de transformations et leurs compositions.

Finalement, le troisième chapitre est consacré à la présentation des automates finis, le produit en couronne, en cascade des semi automates et on citant à la fin de ce chapitre la définition générale de la décomposition.d'automate fini.

Chapitre 1

Préliminaires algébriques

1.1 Notions sur les Groupes

1.1.1 Groupe

Définition 1.1

Soit G un ensemble non vide et $* : G \times G \to G, (a, b) \to a * b$ une application. $(G, *)$ est un groupe si :

a) La loi " $*$ " est associative dans G i.e,$\forall a, b, c \in G,\ a * (b * c) = (a * b) * c$;

b) G possède un élément neutre e pour $*$ c.à.d.$\exists\ e \in G, \forall a \in G, a * e = e * a = a$;

c) Tout élement de G admet un symétrique i.e, $\forall a \in G, \exists\ b \in G, a * b = b * a = e$.

Définition 1.2

On appelle groupe commutatif, ou groupe abélien. Tout groupe G dont la loi " $*$" vérifie de plus la condition supplémentaire de commutativité :

$$x * y = y * x \text{ pour tout } x, y \in G.$$

Exemples 1.1

1. $(\mathbb{Z}; +), (\mathbb{Q}; +), (\mathbb{R}; +)$ et $(\mathbb{C}; +)$ sont des groupes commutatifs d'élément neutre 0.

2. $(\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs d'élément neutre 1.

3. $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un groupe commutatif fini, il est d'ordre n.

1.1.2 Sous-Groupe

Définition 1.3

Soit $H \subset G$ un sous-ensemble non vide d'un groupe G. On dit que H est un sous-groupe de G si

i) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$;

ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

On notera $H \prec G$.
Les conditions i) et ii) sont évidemment équivalentes à l'unique condition

iii) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

Exemples 1.2

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3. Soeint $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$, alors $(U_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1.1.3 Sous-groupe engendré par un ensemble

Définition 1.4

Soit X un sous-ensemble d'un groupe G. L'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X est un sous-groupe appelé sous-groupe engendré par X, on le notera $gr(X)$ ou bien $\langle X \rangle$. On dit que X est un système de générateurs de $gr(X)$. Il est clair que $gr(X)$ est le plus petit sous-groupe de G contenant X (il est l'un des termes de l'intersection).

1.1.4 Actions de groupes

Définition 1.5

On dit qu'un groupe G opère (à gauche) sur un ensemble E, si on a une fonction $f : G \times E \to E$, on écrit habituellement $g \cdot x$ pour $f(g, x)$, telle que pour tout $x \in E$, et tous $g_1, g_2 \in G$ on ait

(1) $e \cdot x = x$,où e désigne le neutre de G,et

(2) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

On dit aussi que f est une action de G sur E, ou encore que G agit sur E par f. Bien entendu, il peut y avoir plusieurs actions différentes d'un groupe sur le même ensemble. Pour G agissant sur E, et x dans E, l'orbite de x notée $Orb(x)$, est l'ensemble de tous les points de E de la forme $g \cdot x$, pour g parcourant G. En formule,

$Orb(x) = \{y \in E : \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x\}$.

Il y a deux cas extrêmes. Le premier est le cas où il y a une seule orbite, on dit alors que l'action est transitive. Le deuxième cas est celui où chaque orbite ne contient qu'un seul élément, on dit alors que l'action est triviale. On désigne par E/G l'ensemble des orbites de l'action, c-à-d.

$$E/G = \{Orb(x) \ / \ x \in E\}.$$

1.2 Semi-groupe

Définition 1.6

un semi-groupe est un ensemble S muni d'une loi interne, i.e, d'une application "$\cdot$" : $S \times S \to S$, qui satisfait à la condition suivante : l'opération "$\cdot$" est associative :

$$\forall x, y, z \in S : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Exemple 1.3

1- $(\mathbb{N},+)\,,(\mathbb{Z},+)$ sont des semi-groupes.

2- $(\mathbb{N},\times)\,;(\mathbb{R},\times)\,,(\mathbb{Z},\times)$ sont des semi-groupes.

3- Soit $(L,\leq)$ un treillis ; $(L,\wedge)$ est un semi-groupes.

1.2.1 Sous semi-groupe

Définition 1.7

Soit $(S,\cdot)$ un semi-groupe. Une partie non vide B de S appelée sous semi-groupes de S si elle "stable" pour l'opération $"\cdot"$, c'est -à- dire si :

$$\forall a,b\in B : a\cdot b\in B$$

Exemple 1.4

L'ensemble $2\mathbb{Z}$ est un sous semi-groupe de $(\mathbb{Z},\times)$.

1.2.2 Congruence sur un semi-groupe

Définition 1.8

Soit S un semi-groupes, une congruence sur S est une relation d'équivatence R stable par multiplication à droite et à gauche, i.e,

$$\forall x,y,z,t\in S : xRy \text{ et } zRt\Rightarrow xzRyt.$$

L'ensemble quotient $S\diagup R$ est alors naturellement muni d'une structure de semi-groupe dit semi-groupe quotient.

1.3 Monoĭde

Définition 1.9

Un monoĭde est un ensemble muni d'une loi interne, i.e, d'une application $"\cdot" : M\times M\rightarrow M$, qui satisfait aux conditions suivantes :

* L'opération " $\cdot$ "est associative : $\forall x, y, z \in S : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

* Il existe un neutre (unique) $1_M \in M$ tel que $\forall x \in M : x \cdot 1_M = 1_M \cdot x$.

Exemple 1.5

1- Le semi-groupe $(\mathbb{N}, +)$ d'élément neutre 0 est un monoïde.

2- Le semi-groupe $(\mathbb{N}, \times)$ d'élément neutre 1 est un monoïde.

3- L'ensemble des parties d'un ensembles E, muni de l'union d'ensembles $(P(E), \cup)$ est un monoide dont l'ensemble vide $\varnothing$ est l'élément neutre. Le même ensemble muni de l'intersection d'ensemble$(P(E), \cap)$ est aussi un monoïde, dont l'ensemble E est l'élément neutre.

4- L'ensemble des application d'un ensemble Q vers lui même $Q^Q = \{f/f : Q \to Q\}$ muni de la composition des applications " $\left(Q^Q, \circ\right)$ " est un monoïde d'élément neutre l'application identité id_Q.

Définition 1.10

Soit X un ensemble et M un monoïde, une application $M \times X$ dans X est une action à gauche de M sur X si :

1- $\forall x \in X, 1_M \cdot x = x;$

2- $\forall x \in X, \forall m_1, m_2 \in M : (m_1 m_2) \cdot x = m_1 \cdot (m_2 \cdot x)\,.$

Définition 1.11

On appelle alphabet un ensemble fini A non vide de symboles appelés lettres. Un mot sur A est le résultat du produit (la concaténation) d'éléments de A. Le monoïde libre engendré par A, que l'on note A^*, correspond à l'ensemble des mots sur l'alphabet A. Étant donné l'unicité du produit (ici la concaténation), il est logique de parler de la i-ième lettre d'un mot w que l'on note w_i.

L'élément neutre de ce monoïde est le mot vide que l'on note 1_{A^*}. Si l'élément neutre est absent, on parle du semigroupe libre engendré par A que l'on note A^+.

Définition 1.12

La longueur d'un mot correspond à la taille de la suite de lettres qui constituent le mot (chaque lettre à donc une taille de 1). De cette façon, la longueur d'un mot $u = u_1 ... u_n$ dans A^*, que l'on note $|u|$,est égale à n et on a pour tout mot v de A^* :

$$|uv| = |u| + |v|$$

Le mot vide 1_{A^*} est le seul mot de A^* de taille nulle. Cette notion de taille est également utilisée de façon plus subtile en se concentrant sur une lettre précise. De cette façon, on note $|w|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a présentes dans le mot w. Ainsi, pour tout mot u et v de A^*, on a :

$$|u| = \sum_{a \in A} |u|_a \text{ et } |uv|_a = |u|_a + |v|_a.$$

Exemple 1.6

Soit $A = \{a, b\}$ et $u = abbab$ un mot de A^*. On a $|u| = 5, |u|_a = 2$ et $|u|_b = 3$.

Dans ce qui suit, la loi multiplicative étant clairement la concaténation, nous notons simplement uv le produit de deux éléments u et v. Grâce à l'unicité de la décomposition dans ce monoïde libre, on peut définir certaines notions qui n'auraient pas de sens autrement.

Définition 1.13

Soient u et v deux mots sur A. On dit que :

- u est un préfixe (ou facteur gauche) de v s'il existe w dans A^* tel que : $v = uw$.
- u est un suffixe (ou facteur droit) de v s'il existe w dans A^* tel que : $v = wu$.
- u est un facteur de v s'il existe w et w' dans A^* tels que $v = wuw'$.
- la suite de mots $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une factorisation de u si $u = x_1 x_2 ... x_n$.
- u est un sous-mot de v s'il existe $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ dans A^* tels que $u = u_1 ... u_n$ et $v = v_0 u_1 v_1 u_2 ... x_n v_n$. Autrement dit, u s'obtient àpartir de v en supprimant des lettres dans v.
- $u = u_1 ... u_n$ est l'image miroir de v si $v = u_n ... u_1$où $u_1, ..., u_n$ sont dans A.

Exemple 1.7

Pour le mot $u = abbab$ sur A^*, ab est à la fois un suffixe et un préfixe de u, bba est un facteur de u, bbb est un sous-mot de u, $babba$ est l'image miroir de u et (ab, ba, b) est une factorisation de u.

Définition 1.14

On appelle langage sur A tout ensemble de mots écrits sur l'alphabet A ou, autrement dit, tout sous-ensemble de A^*. Le langage complémentaire d'un langage L, noté $\bar{L}$, est l'ensemble des mots de A^*qui n'appartiennent pas à L.

De la même façon que pour les mots, il n'y a pas de notion de sémantique dans le concept de langage tel que nous l'avons décrit plus haut. Ici un langage est une partie de A^* c'est-à-dire un élément de $P(A^*)$, il est donc naturel d'utiliser toutes les opérations ensemblistes "classiques" comme l'union,l'intersection, la complémentation,...

Exemple 1.8

Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet :

– l'ensemble $L_1 = \{u \in A^* | \ |u|_a mod\ 2 = 0\}$ est le langage des mots contenant un nombre pair de a.

– l'ensemble $L_2 = \{u \in A^* | \ |u|_b mod\ 2 = 1\}$ est le langage des mots contenant un nombre impair de b.

– l'ensemble $L_1 \cap L_2$ +(resp.$L_1 \cup L_2$) qui est l'intersection (resp. l'union) des langages L_1 et L_2est le langage des mots qui contiennent un nombre pair de a et (resp. ou) un nombre impair de b.

– l'ensemble $\bar{L}_1$ qui est le complémentaire du langage L_1 est le langage des mots contenant un nombre impair de a.

1.3.1 Sous monoïde

Définition 1.15

Un sous-monoïde S d'un monoïde M est un sous-ensemble de M qui contient l'élément neutre de M et stable pour la multiplication i.e,

* $S \subset M$.

* $1_M = 1_N$.

* $\forall a, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$.

♣ L'ensemble $\{0, ..., 10\}$ muni de la loi $min(x+y, 10)$ est un monoïde d'élément neutre 0. Avec cette même loi mais en restreignant l'ensemble à $\{0, 1, 3, 6, 8, 10\}$, on obtient un sous-monoïde du monoïde de départ.

♣ L'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs est un monoide de $(\mathbb{Z}, +)$.

♣ Pour tout monoide $(M, \cdot, 1_M)$,les parties $\{1_M\}$ et M sont des sous monoides dits "triviaux".

1.4 Homomorphisme

1.4.1 Homomorphisme de semi-groupes

Définition 1.16

Soient $(S, \cdot)$ et $(T, *)$ deux semi-groupes et $f : S \to T$ une application. Nous appelons f un homomorphisme de semi_groupes si :

$$f(ab) = f(a) * f(b) \text{ pour tout } a, b \in S.$$

1.4.2 Homomorphisme de monoïdes

Définition 1.17

Soient $(S, \cdot)$ et $(T, *)$ deux monoïdes d'élément neutres respectif e et e' . Une application $f : S \to T$ est un homomorphisme de monoïdes si :

* pour tout $a, b \in S \quad : f(ab) = f(a) * f(b)$

* $f(e) = e'$.

1.4.3 Homomorphisme de groupes

Définition 1.18

Une application $f : G \rightarrow G'$ d'un groupe G dans un groupe G' est un homomorphisme de groupes si $\forall x, y \in G,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Si les lois des groupes sont notées ainsi $(G, \top)$ et $(G', \perp)$, alors la condition s' ecrit $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

Ainsi, en notation additive, elle devient $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En particulier, si la premiére est notée $\cdot$ et la deuxième $+$, par exemple : $log : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, on a $log(xy) = log(x) + log(y)$. L'application log est donc un homomorphisme de groupes.

1.4.4 Isomorphisme

Définition 1.19

- Un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes si f est bijectif. On dit alors que G et G' sont isomorphes.
- Un isomorphisme de G dans lui-même est appelé automorphisme.
- Remarquons que si $f : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme, l'application réciproque $f^{-1} : G' \rightarrow G$ est encore un homomorphisme de groupes.
- Un semi-groupes (*monoïde*) est isomorphe si il est bijectif.

Chapitre 2

Semi-groupes de transformations et leurs compositions

2.1 Semi-groupes de transformations

Définition 2.1

Soit Q un ensemble fini , on note par $\left(Q^Q, \circ\right)$ le monoïde de toutes les fonctions de Q vers Q muni de la composition des fonctions. La fonction identité notée 1_Q est l'élément de l'unité. Un semi-groupe de transformation est le couple (Q, S) où S est un sous semi groupe de $\left(Q^Q, \circ\right)$.

Les éléments de Q sont appelés états et Q lui-même est appelé l'ensemble fondamentale

Les élements de S sont appelés transformation de (Q, S).

Remarque 2.1

La fonction vide notée θ dite le zéro de monoide $\left(Q^Q, \circ\right)$ et on a

$$\text{pour tout } s \in Q^Q : s \circ \theta = \theta \circ s = \theta.$$

Exemples 2.1

1- Pour tout ensemble fini Q, le couple (Q, ϕ) est un semi-groupe de transformation noté Q où ϕ désigne l'ensemble vide.

2- Pour chaque entier $k \geqslant 0$, on note par $Q_k = \{0, 1..., k-1\}$. En particulier $Q_0 = \theta, Q_1 = \{0\}, Q_2 = \{0, 1\}$.

(Q_2, S_2) avec $Q_2 = \{0, 1\}$ et $S_2 = \{\theta, \sigma\}$ où σ est définie par $\sigma(1) = 0$ et $\sigma(0) = \phi$, est un semi- groupe de transformations. De plus on a $\sigma \circ \sigma = \sigma^2 = \theta$.

2.2 Monoïde et groupe des transformations

Définition 2.2

Le semi-groupe de transformations (Q, S) est appelé monoïde de transformations si la transformation d'identité $1_Q \in S$, ainsi S, dans ce cas, est un sous monoïde de $(Q^Q, \circ)$.

Exemple 2.2

1- $0 = (0, \theta)$ est le plus petit monoïde de transformations.

2- Soit $Q_2 = \{0, 1\}$ et $S = \{1_{Q_2}, f, g; h\}$ avec $(f(0) = 0, f(1) = 0), (g(0) = 1, g(1) = 0)$ et $(h(0) = 1, h(1) = 1)$. Le couple (Q_2, S) est un monoide de transformation.

Définition 2.3

Un semi-groupe de transformation (Q, S) est appelé groupe de transformations si S est un groupe.

Exemple 2.3

► Le semi-groupe de transformation $\mathbb{Z}_2$ est un groupe de transformations.

Soit $Q = \{1, 2, 3\}$ et $S = S_Q$ où S_Q est le groupe de permutations de Q. Le couple (Q, S_Q) est un groupe de transformations.

Définition 2.4

Soient Q un ensemble fini et q un élément de Q, on définit une application

$\tilde{q} : Q \to Q$ par : pour tout $\acute{q} \in Q, \tilde{q}(\acute{q}) = q$, $\tilde{q}$ est l'application constante définie par l'élément q.

L'ensemble de tous les applications constantes sur Q noté $\tilde{Q}$. On a $\left(\tilde{Q},\circ\right)$ est un sous semi-groupe de $\left(Q^Q,\circ\right)$ et par conséquent $\left(Q,\tilde{Q}\right)$ est un semi groupe de transformations.

Exemple 2.4

Pour $Q_2=\{0,1\}$, les applications constantes sur Q_2 sont : $\tilde{Q}_2=\left\{\tilde{0},\tilde{1}\right\}$.

Définition 2.5

Soit (Q,S) un semi-groupe de transformations.
-$\left(Q,S\cup\tilde{Q}\right)$ est la fermeture de (Q,S).
-(Q,S) est dit complet si $s(q)\neq\phi$ pour tout $q\in Q$ et $s\in S$.

2.3 Morphisme de monoïdes de transfomations

Définition 2.6 .

Un morphisme entre deux semi-groupes de transformations (Q,S) et (P,T) est une pair (φ,ψ) où $\varphi:Q\to P$ est une application et $\psi:S\to T$ est un morphisme de semi-groupes tel que $\varphi(s(q))=\psi(s)(\varphi(q))$ pour tout $q\in Q$ et $s\in S$. Il est appelé surjectif (resp.injectif) si les deux applications φ et ψ sont surjectifs (resp.injectifs). Il est un isomorphisme si φ et ψ sont des bijections.

Théorème 2.1 *(Théorème de Cayley)*

Chaque semi-groupe est isomorphe à un semi-groupe de transformations.

Preuve.

Soit $(S,\cdot)$ un semi-groupe, pour $s\in S$ on considère l'application $f_s:S\to S$ définie par $f_s(x)=s\cdot x$, pour tout $x\in S$. L'ensemble $K=\{f_s,s\in S\}$ est un sous semi-groupe de $(S^s,\circ)$ et par conséquent (S,K) est un semi-groupe de transformations. On considère l'application $\varphi:S\to K$ définie par :$\varphi(s)=f_s$, pour tout $s\in S$.
φ est un morphisme de semi-groupes car : pour tous $s,\acute{s}$ et $x\in S$, on a
$\varphi(s\circ s)(x)=f_{s\cdot\acute{s}}(x)=(s\acute{s})\cdot x=(f_s\circ f_{\acute{s}})(x)=(\varphi(s)\circ\varphi(\acute{s}))(x)$.
On montre que φ est injectif, soient $s,\acute{s}\in S$ tels que $\varphi(s)=\varphi(\acute{s})$, i.e, $f_s=f_{\acute{s}}$ donc $s\cdot x=\acute{s}\cdot x$,alors $s=\acute{s}$.

Par définition l'application φ est surjectif. Finalement φ est un isomrphisme et $S \cong K$. ■

Définition 2.7

Soit (Q, S) un semi groupe de transformations. L'action S sur Q est la donnée d'une application $\alpha : Q \times S \to Q$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $\alpha(\alpha(q, s), s') = \alpha(q, ss')$ pour tous $q \in Q, s, s' \in S$.

(ii) $\alpha(q, s) = \alpha(q, s')$ pour tout $q \in Q, s, s' \in S$ implique $s = s'$.

Exemple 2.5

Soit (Q, S) un semi-groupe de transformations commutatif. Le semi groupe S opère sur Q par
$\alpha : Q \times S \to Q$ définie comme suit : $\alpha(q, s) = s(q)$.

2.4 Produit de semi-groupes de transformations

2.4.1 Produit direct de semi-groupes

Définition 2.8

Le produit direct $S \times T$ de deux semi-groupes $(S, \cdot)$ et $(T, *)$ est l'ensemble des couples (s, t), où $s \in S$ et $t \in T$, muni de la loi interne :

$$(s, t)(s', t') = (s \cdot s', t * t'); t, t' \in T, s, s' \in S.$$

D'où la loi sur $S \times T$ est associative.

Exemple 2.6

Soient $S = (\mathbb{N}, +)$ et $T = (\mathbb{N}, \times)$ deux semi-groupes. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la loi : $(n, r)(m, s) = (n + m, r \times s)$ est un produit direct de semi-groupes.

Produit direct de semi-groupes de transformations

Définition 2.9

Soient $X = (Q_1, S_1)$ et $Y = (Q_2, S_2)$ deux semi-groupes de transformatins, on définit le produit direct par $X \times Y = (Q_1 \times Q_2, S_1 \times S_2)$ Où l'action de $S_1 \times S_2$ sur $Q_1 \times Q_2$ donné par :
$(q_1, q_2)(s_1, s_2) = (q_1 s_1, q_2 s_2)$; pour tout $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2, (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

2.4.2 Produit semi direct

Produit semi direct de semi-groupes

Soient S et T deux semi-groupes et soit θ un homomorphisme de T dans $End(S)$.

Proposition 2.1

L'ensemble $S \times T$ muni de la loi interne $(s,t) \circledast (s', t') = (s\ \theta(t)(s'), tt')$ est un semi-groupe.

Preuve. Montrons que la loi $\circledast$ est associative.

Soient s, s' et $s'' \in S$ et t, t' et $t'' \in T$

$$\begin{aligned}
((s,t) \circledast (s',t')) \circledast (s'',t'') &= (s\ \theta(t)(s'), tt') \circledast (s'',t'') \\
&= (s\ \theta(t)(s')\,\theta(tt')(s''), tt't'') \\
&= (s\ \theta(t)(s')\,\theta(t)(\theta(t')(s'')), tt't''), && \text{car } \theta \text{ est homomorphisme} \\
&= (s\ \theta(t)\, s'(\theta(t')(s'')), tt't''), && \text{car } \theta(t) \in End(S) \\
&= (s,t) \circledast (s'(\theta(t')(s''))), t't'') \\
&= (s,t) \circledast ((s',t') \circledast (s'',t''))
\end{aligned}$$

D'ou la loi $\circledast$ est associative sur $S \times T$. ∎

Définition 2.10

Le semi-groupe $S \times T$ muni de la loi $(s,t) \circledast (s',t') = (s\ \theta(t)(s'), tt')$ est appelé produit semi direct de S et T relativement à θ et on le note $S \times_\theta T$.

Produit en couronne

Produit en couronne de semi groupes Etant données deux semi-groupes S et T. On note par $S^{T^\bullet}$ l'ensemble des application de $T^\bullet$ dans S (avec $T^\bullet = T \cup \{e\}$).

Proposition 2.2

L'ensemble $S^{T^\bullet} \times T$ muni de la loi interne $(f,t) \circ (g,t') = (f \circ g, tt')$, où $f \circ g \in S^T$ est définie par $(f \circ g)(x) = f(x)\, g(xt)$, $x \in T; t, t' \in T; f, g \in S^{T^\bullet}$ est un semi-groupe.

Preuve.

Si $f, g, h \in S^{T^\bullet}$ et $t, t', t'' \in T$

$$\begin{aligned}((f,t) \circ (g,t')) \circ (h,t'') &= (f \circ g, tt') \circ (h,t'') \\ &= ((f \circ g) \circ h, tt't'')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(f,t) \circ ((g,t') \circ (h,t'')) &= (f,t) \circ (g \circ h, t't'') \\ &= (f \circ (g \circ h), tt't'')\end{aligned}$$

Si $x \in T$:

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(x)\, h(xt\ t') \\ &= f(x)\, g(xt)\, h(xt\ t')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= f(x)\,(g \circ h)(xt) \\ &= f(x)\, g(xt)\, h(xtt')\end{aligned}$$

Alors la loi sur $S^{T^\bullet} \times T$ est associative. ■

Définition 2.11

L'ensemble $S^{T^\bullet} \times T$ (ou $S \circ T$) muni de la loi interne est un semi groupe appelé produit en couronne (wreath product en anglais) de S et T.

Produit en couronne de semi groupes de transformation

Définition 2.12

Soient $X = (Q,S)$, $Y = (P,T)$ deux semi groupes de transformations. Le produit en couronne de X et Y est :

$$X \circ Y = (Q \times P, S^p \times T)$$

telque : S^P est l'ensemble de tout les applications de P vers S. Où l'action de $S^P \times T$ sur $Q \times P$ donné par :

$$(q,p)(f,t) = (q(f(p)), pt)\,; \text{ pour tout } (q,p) \in Q \times P, (f,t) \in S^P \times T.$$

Pour tout $(q,p) \in Q \times P$. Remarquons que si $(q,p) \in Q \times P$, Alors

$$\begin{aligned} ((q,p)(f,t))(g,t') &= (q(f(p)), pt)(g,t) \\ & (q(f(p))(g(pt)), ptt'). \end{aligned}$$

Exemple 2.7

Soient $X = \bar{2} = (Q,S) = (\{0,1\}, \{\tilde{0},\tilde{1}\})$, $Y = X = (P,T) = (\{0,1\}, \{\tilde{0},\tilde{1}\})$ deux semi groupes de transformations. Le produit en couronne de X et Y est :

$$\bar{2} \circ \bar{2} = (Q \times P, S^P \times T) = \left(\{0,1\} \times \{0,1\}, \{\tilde{0},\tilde{1}\}^{\{0,1\}} \times \{\tilde{0},\tilde{1}\}\right).$$

Les éléments de $S^P \times T$ sont les couples (f,t) où $f \in \{\tilde{0},\tilde{1}\}^{\{0,1\}}$; $t \in \{\tilde{0},\tilde{1}\}$.

$S^P = \{f,g,h,l\}$ avec

x	0	1
$f(x)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$g(x)$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$h(x)$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$
$l(x)$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$

On peut écrire (f,t) comme un triple $(f(0), f(1), t)$,Donc les transformation de $S^P \times T$ sont :

		00	01	10	11
$(f,\tilde{0})$	$(\tilde{0},\tilde{0},\tilde{0})$	00	00	00	00
$(f,\tilde{1})$	$(\tilde{0},\tilde{0},\tilde{1})$	01	01	01	01
$(g,\tilde{0})$	$(\tilde{0},\tilde{1},\tilde{0})$	00	10	00	10
$(g,\tilde{1})$	$(\tilde{0},\tilde{1},\tilde{1})$	01	11	01	11
$(h,\tilde{0})$	$(\tilde{1},\tilde{0},\tilde{0})$	10	00	10	00
$(h,\tilde{1})$	$(\tilde{1},\tilde{0},\tilde{1})$	11	01	11	01
$(l,\tilde{0})$	$(\tilde{1},\tilde{1},\tilde{0})$	10	10	10	10
$(l,\tilde{1})$	$(\tilde{1},\tilde{1},\tilde{1})$	11	11	11	11

Par exemple $(0,1)(f,\tilde{0}) = (0(f(1)), 1\tilde{0}) = (0\tilde{0}, 1\tilde{0}) = (0,0) = 00.$

Chapitre 3

Automates finis et décompositions

3.1 Les automates finis

Les automates que nous allons introduire ici sont des "machines" permettant de reconnaītre exactement des langages. En d'autres termes, l'ensemble des langages acceptés par automate fini coĭncide avec l'ensemble des langages réguliers.

3.1.1 Automate fini Déterministe

Définition 3.1

Un automate fini déterministe (ou AFD) est la donnée d'un quintuple

$$A = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta).$$

oű

- Q est un ensemble fini dont les éléments sont les etats de A,
- $q_0 \in Q$ est un état privilégié appelé état initial,
- $F \subseteq Q$ désigne l'ensemble des états finaux,
- Σ est l'alphabet de l'automate,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de A.

Nous supposerons que δ est une fonction totale, i.e., que δ est défini pour tout couple $(q, \sigma) \in Q \times \Sigma$ (on parle alors d'AFD complet).

Nous représentons un AFD A de la manière suivante. Les états de A sont les sommets d'un graphe orienté et sont représentés par des cercles. Si $\delta(q,\sigma) = q'$ avec $q, q' \in Q$ et $\sigma \in \Sigma$, alors on trace un arc orienté de q vers q'et de label σ

$$q \xrightarrow{\sigma} q'.$$

Les états finaux sont repérés grâce à un double cercle et l'état initial est désigné par une flèche entrante sans label. Enfin si deux lettres σ et σ' sont telles que $\delta(q,\sigma) = q'$ et $(q,\sigma') = q'$, on s'autorise a dessiner un unique arc portant deux labels séparés par une virgule,

$$q \xrightarrow{\sigma,\sigma'} q'.$$

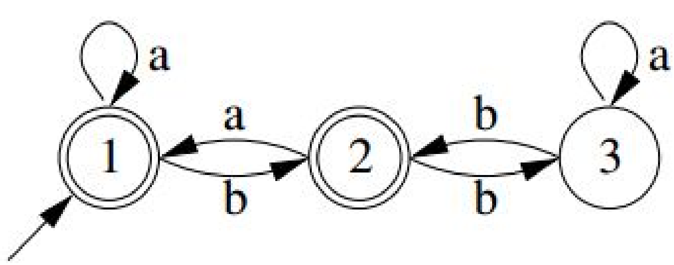
Cette convention s'adapte aisément a plus de deux lettres.

Exemple 3.1

L'automate $A = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ où $Q = \{1,2,3\}$, $q_0 = 1, F = \{1,2\}$, $\Sigma = \{a,b\}$ et où la fonction de transition est donnée par

δ	a	b
1	1	2
2	1	3
3	3	2

est représent à la figure



Définition 3.2

Soit $A = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ un AFD. On étend naturellement la fonction de transition δ à $Q \times \Sigma^*$ de la manière suivante :

$$\delta(q, \varepsilon) = q$$

et

$$\delta(q, \sigma w) = \delta(\delta(q, \sigma), w), \quad \sigma \in \Sigma, w \in \Sigma^*.$$

Le langage accepté par A est alors

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* / \delta\,(q_0, w) \in F\}\,.$$

Si $w \in L(A)$, on dit encore que A accepte le mot w (ou que w est accepté par A). Ainsi, le rôle fondamental d'un automate est d'accepter ou de rejeter des mots. Un automate partitionne l'ensemble des mots sur Σ en deux sous-ensembles

$$L(A) \; et \; \Sigma^* \diagdown L(A).$$

Exemple 3.2

Si on poursuit l'exemple précédent, l'automate A de la figure accepte le mot *abbab* car on a, partant de l' état initial, le parcours suivant au sein de A :

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 2 \in F.$$

Par contre, *bba* n'est pas accepté

$$1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \notin F.$$

3.1.2 Automate fini non Déterministe

Le modèle d'automate fini non déterministe généralise le cas des AFD. Comme nous le verrons bientôt, le non-déterminisme permet une plus grande souplesse bien utile dans certaines situations.

Définition 3.3

Un automate fini non déterministe (AFND) est la donnée d'un quintuple

$$A = (Q, I, F, \Sigma, \Delta)$$

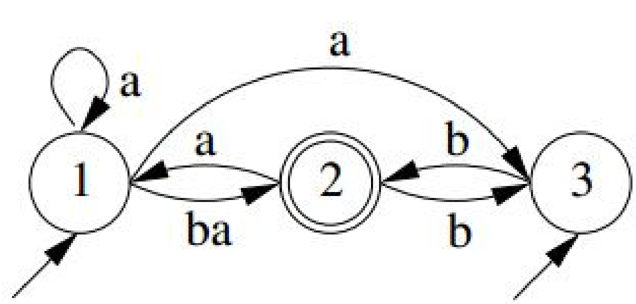
où

- ▶ Q est un ensemble fini dont les éléments sont les etats de A,
- ▶ $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- ▶ $F \subseteq Q$ désigne l'ensemble des états finaux,
- ▶ Σ est l'alphabet de l'automate,
- ▶ $\Delta \subset Q \times \Sigma^* \times Q$ est une relation de transition (qu'on supposera finie).

On peut dés à présent noter plusieurs différences entre les AFD et AFND. Dans le cas non déterministe, il est possible d'avoir plus d'un état intial ; les labels des arcs ne sont plus nécessairement des lettres mais bien des mots de Σ^* et enfin, on n'a plus une fonction de transition mais une relation de transition. Pour représenter les AFND, nous utilisons les mêmes conventions que pour les AFD.

Exemple 3.3

L'automate de ce figure est un AFND ayant 1 et 3



Définition 3.4

Un mot $w = w_1 ... w_k$ est accepté par un AFND $A = (Q, I, F, \Sigma, \Delta)$ s'il existe $q_0 \in I, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_1, ..., v_l \in \Sigma^*, q_1, ..., q_l \in Q$ tels que

$$(q_0, v_1; q_1), (q_1, v_2, q_2), ..., (q_{l-1}, v_l, q_l) \in \Delta,$$

$$w = v_1 ... v_l et q_l \in F.$$

En d'autres termes, cette condition signifie qu'il existe un chemin dans le graphe associé à A débutant dans un état initial, de label w et se terminant dans un état final. Naturellement, le langage accepté par un AFND A est l'ensemble des mots acceptés par A et se note encore $L(A)$. Enfin, deux AFND A et B sont dits equivalents si $L(A) = L(B)$.

Définition 3.5 (Langage reconnaissable)

Le langage reconnu par un automate fini déterministe $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ est

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \setminus \delta(q_0, w) \in F\}$$

Un langage L sur Σ^*est reconnaissable s'il existe un automate fini déterministe sur Σ tel que $L = L(A)$. L'ensemble des langages reconnaissables sur Σ^* est noté $Rec(\Sigma^*)$.

Définition 3.6 (Reconnaissance par monoide)

On dit qu'un langage $L \subset \Sigma^*$ est reconu par le morphisme $\mu : \Sigma^* \to M$ s'il existe une partie Pde M telle que $L = \mu^{-1}(P)$. Par extension, on dit qu'un monoide M reconnait le langage L s'il existe un morphisme $\mu : \Sigma^* \to M$ qui reconnait L.

Proposition 3.1

Soit L un langage sur l'alphabet Σ Alors L est reconnaissable si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini.

Définition 3.7 (Congruence de monoide) .

Une relation d'équivalence $\sim$ définie sur un monoïde M est appelée congruence de monoïde si pour tous $a, \grave{a}, b$ et $\grave{b}$ dans M vérifiant $a \sim \grave{a}$ et $b \sim \grave{b}$, on a $ab \sim \grave{a}\grave{b}$. De manière équivalente, il suffit que pour tous $y, \grave{y} \in M$,l'implication
$y \sim \grave{y} \Rightarrow \forall x, z \in M; xyz \sim x\grave{y}z$
soit satisfaite.

Définition 3.8 (Congruence syntaxique) .

Pour tout langage L, on appelle contexte de $w \in \Sigma^*$ l'ensemble

$$C(w) = \left\{(u, v) \in (\Sigma^*)^2 \setminus uwv \in L\right\}.$$

La relation $\sim_L$définie par

$$w \sim_L \grave{w} \Leftrightarrow C(w) = C(\grave{w}) \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*; (uwv \in L \Leftrightarrow uw'v \in L)$$

est appelée congruence syntaxique de L.

3.2 Semi-automate

Un semi-automate est un triple $M = (Q, \Sigma, \delta)$,où Σ et Q des ensembles finis et δ est une fonction.

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

Un semi automate $M = (Q, \Sigma, \delta)$ est dit complet si δ est une application.

Exemple 3.4

Soit $M = (Q, \Sigma, \delta)$ un semi-automate avec $Q = \{p, q, r\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$; et définie le tableau

δ	p	q	r
a	q	q	r
b	p	p	$\varnothing$
c	q	r	$\{p, r\}$

3.2.1 Le monoide de semi automate

Soit $M = (Q, \Sigma, \delta)$ un semi automate complet, pour tout $\sigma \in \Sigma$, on définit l'application $\delta_\sigma : Q \to Q$ par $\delta_\sigma(q) = \delta(q, \sigma)$, si $w \in \Sigma^*$ avec $w = \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_n$, alors $\delta_w(q) = (\delta_{\sigma_n} \circ ... \delta_{\sigma_1})(q)$.
L'application $h : (\Sigma^*, \cdot) \to \left(Q^Q, \circ\right)$ défine par $h(w) = \delta_w$, est un morphisme de monoide.
La relation R définie sur Σ^* par : $wRw' \Leftrightarrow h(w) = h(w')$ est une congruence.
Le monoide quotient $(\Sigma^*/R, \odot)$ est dit le monoide de semi automate $M = (Q, \Sigma, \delta)$.avec "$\odot$"est le produit de concaténation des classes.

3.3 Produit des semi-automates

3.3.1 Produit direct

Définition 3.9

Soient $M = (Q, \Sigma, \delta)$ et $M' = (Q', \Sigma', \delta')$ deux semi-automates alors leurs produit direct est l'automate :

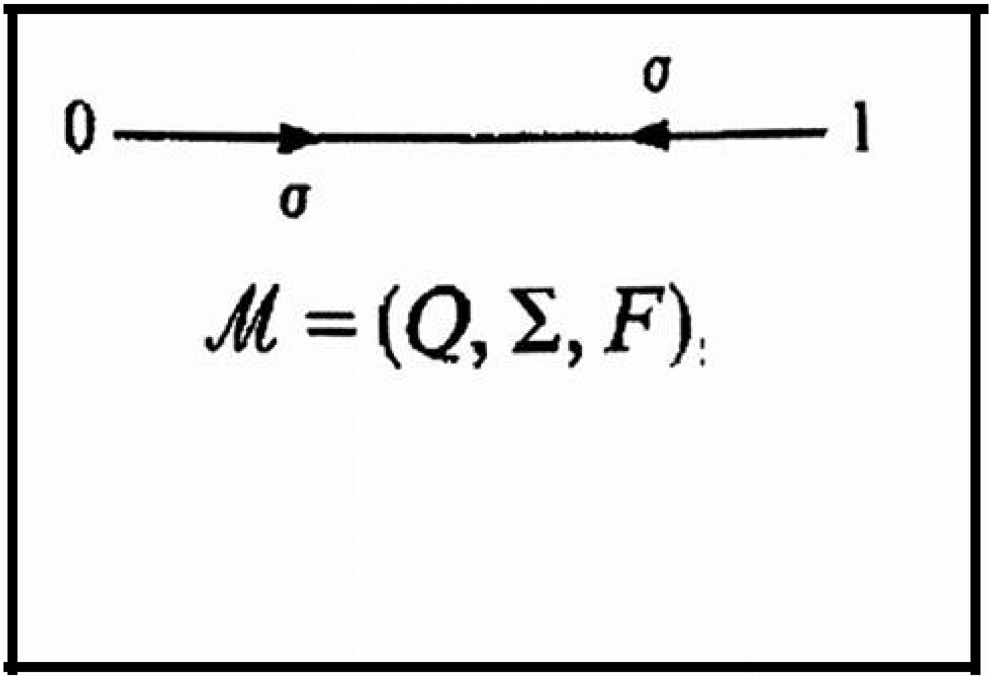
$$M \wedge M' = (Q \times Q', \Sigma, \delta \wedge \delta') \text{,dans le cas } \Sigma = \Sigma'$$

définir par :

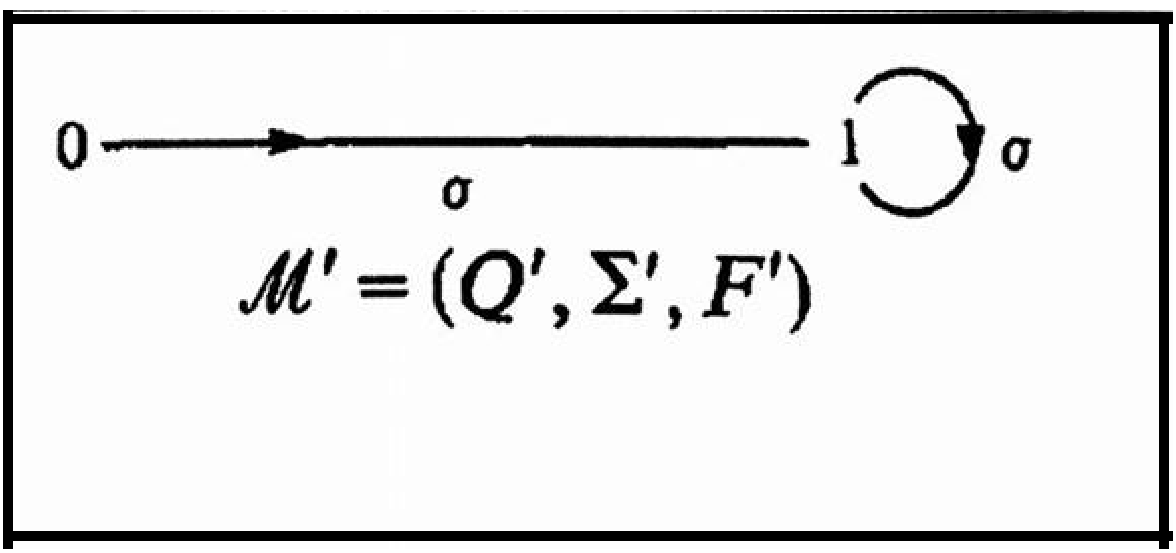
$$(\delta \wedge \delta')((q, q'), \sigma) = (\delta(q, \sigma), \delta'(q', \sigma))$$

Pour $\sigma \in \Sigma$, $(q, q') \in Q \times Q'$.

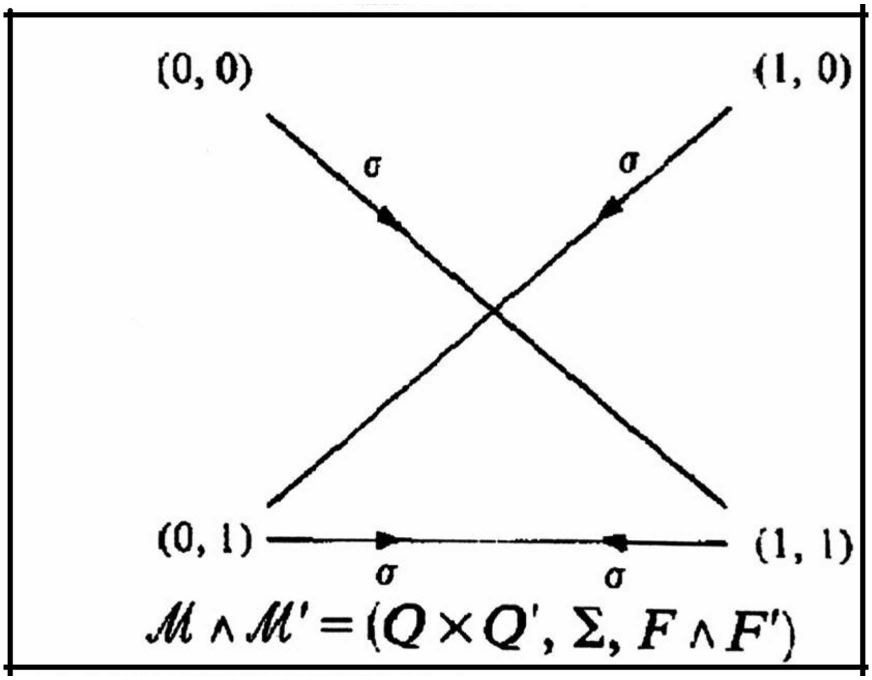
Exemple 3.5



Semi automate M.



Semi automate $M\prime$.



Le produit direct $M \wedge M'$.

3.3.2 Produit direct général

Définition 3.10

Soient $M = (Q, \Sigma, \delta)$ et $M' = (Q', \Sigma', \delta')$ deux semi-automates on défini leurs produit direct général dans le cas $\Sigma \neq \Sigma'$ par :

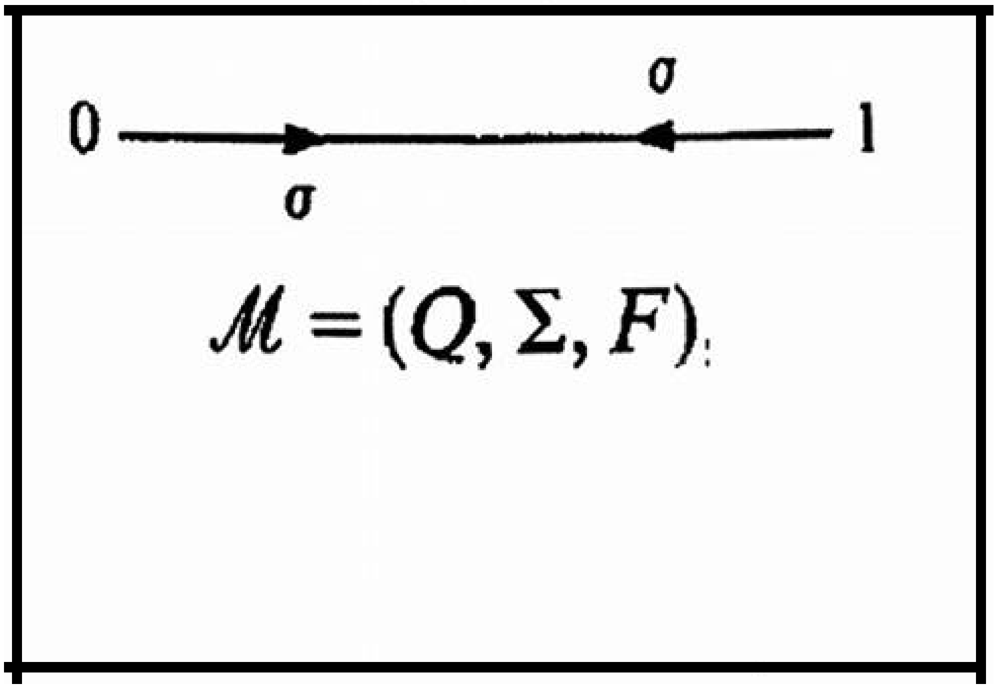
$$M \times M' = (Q \times Q', \Sigma \times \Sigma', \delta \times \delta')$$

Tels que

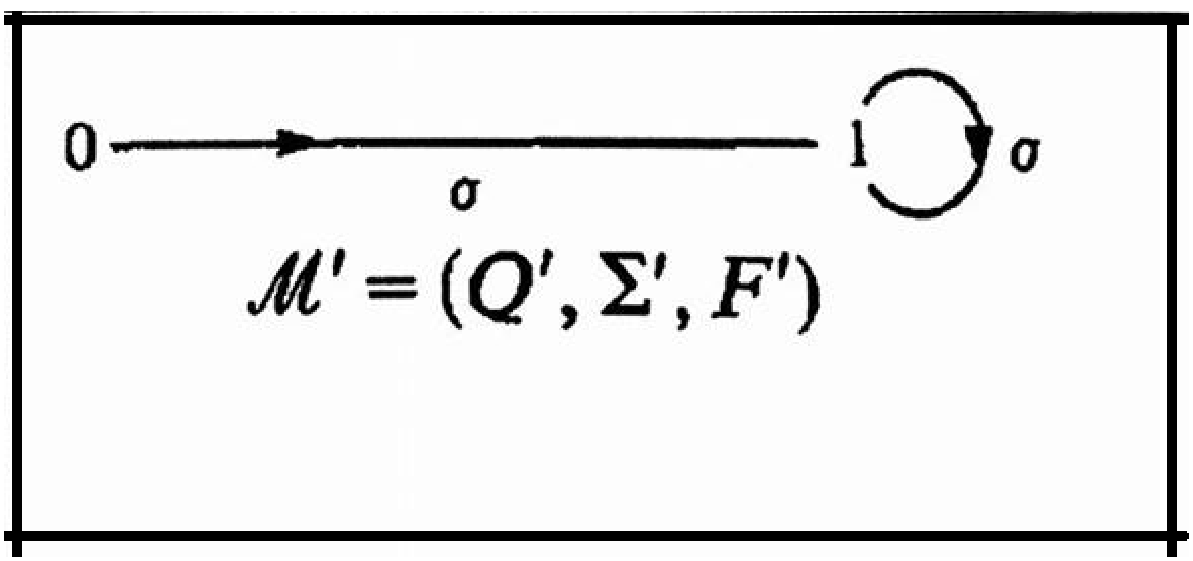
$$(\delta \times \delta')\left((q, q'), (\sigma, \sigma')\right) = \left(\delta(q, \sigma), \delta'(q', \sigma')\right)$$

Avec $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma'$, $(q, q') \in Q \times Q'$.

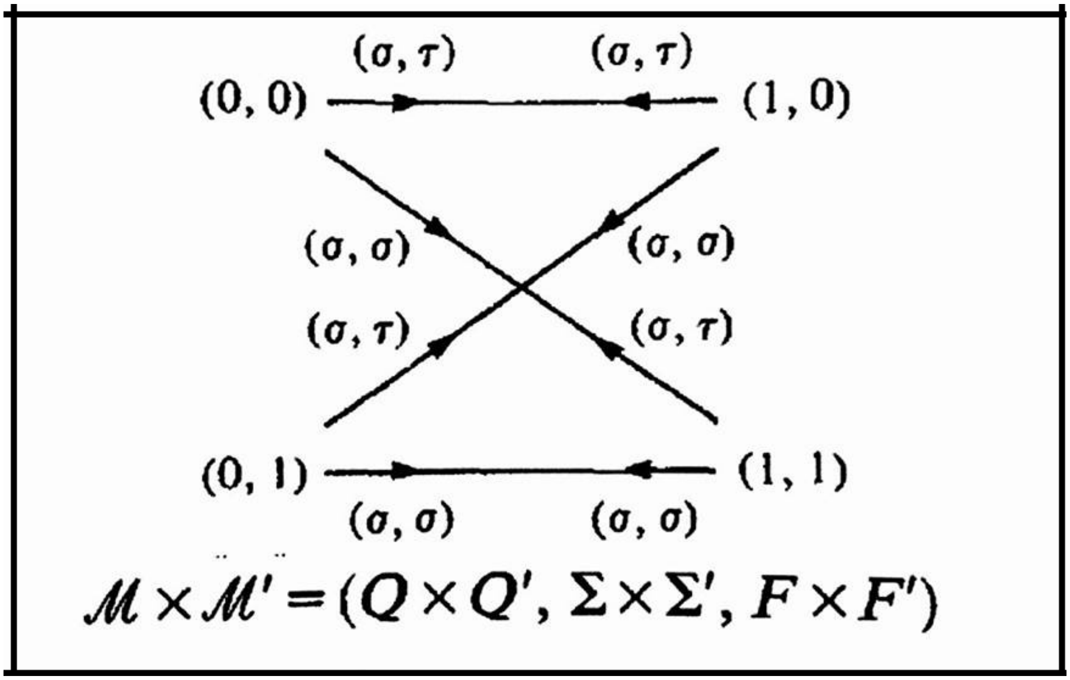
Exemple 3.6



Semi automate M



Semi automate $M\prime$.



Le produit direct général $M \times M$.

3.3.3 Produit en cascade

Définition 3.11

Soient $M = (Q, \Sigma, \delta)$ et $M' = (Q', \Sigma', \delta')$ deux semi-automates on va définir leurs produit en cascade par :

$$M\omega M' = (Q \times Q', \Sigma', \delta^{\omega}) \text{ avec } \omega : Q \times \Sigma' \to \Sigma$$

tel que

$$\delta^{\omega}\left((q, q'), \sigma'\right) = \left(\delta\left(q, \omega\left(q', \sigma'\right)\right), \delta'\left(q', \sigma'\right)\right)$$

pour tout $\sigma' \in \Sigma'$, $(q, q') \in Q \times Q$.

3.3.4 Produit en couronne

Définition 3.12

Soient $M=(Q,\Sigma,\delta)$ et $M'=(Q',\Sigma',\delta')$ deux semi-automates on va définir leurs produit en couronne par :

$$M\circ M'=\left(Q\times Q',\Sigma^{Q'}\times\Sigma',\delta^{\circ}\right)$$

$$\delta^{\circ}\left(\left(q,q'\right),\left(f,\sigma'\right)\right)=\left(\delta\left(q,f\left(q'\right)\right),\delta'\left(q',\sigma'\right)\right)\ \text{pour } \sigma'\in\Sigma, f\in\Sigma^{Q'},\left(q,q'\right)\in Q\times Q'.$$

Exemple 3.7

Soit $M=(Q,\Sigma,F)$ et $M'=(Q',\Sigma',F')$ avec $Q=Q'=\{0,1\};\Sigma=\{\sigma,\tau\};$ $\Sigma'=\{\sigma\}$

F	0	1
$\to\sigma$	1	1
$\to\tau$	0	0

F'	0	1
$\to\sigma$	1	0

Et soit

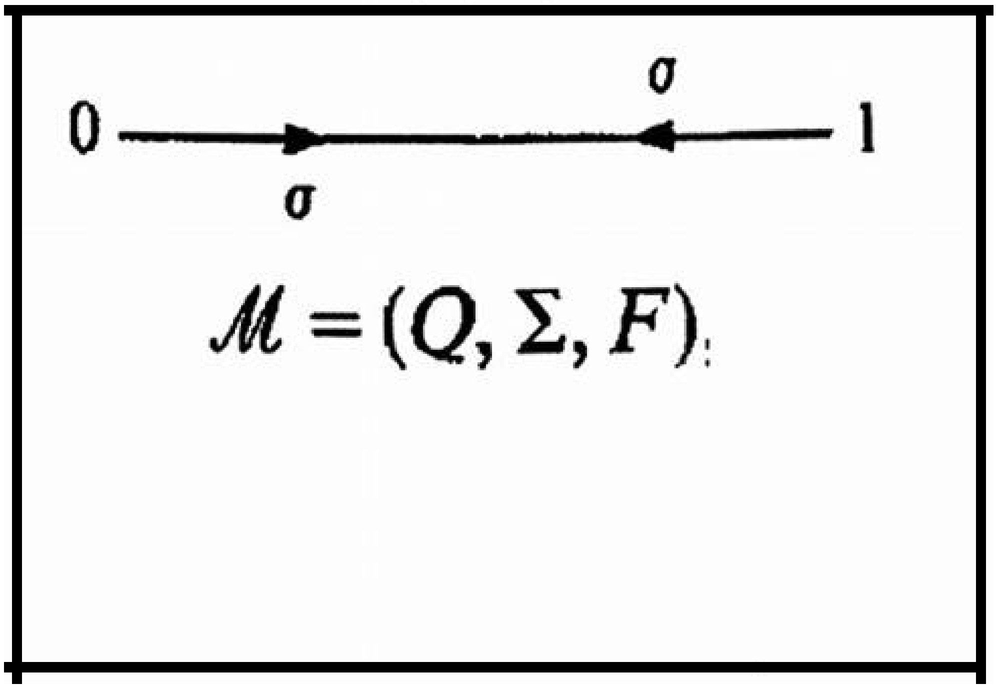
$$\omega:Q'\to\Sigma'\to\qquad\Sigma$$

$$\left(q',\sigma'\right)\quad\to\ \omega\left(q',\sigma'\right)=\left\{\begin{array}{c}\omega\left(0,\sigma\right)=\sigma\\ \omega\left(1,\sigma\right)=\tau\end{array}\right\}$$

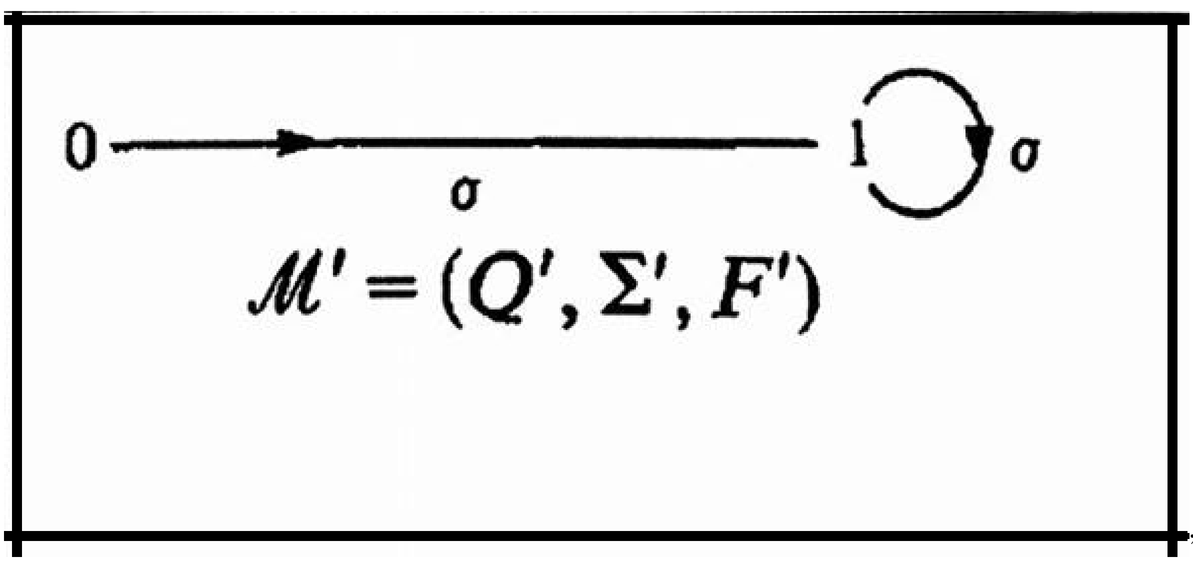
$M\omega M'=(Q\times Q',\Sigma',F^{w})$ avec

$F^{\omega}\left(\left(q,q'\right),\sigma'\right)=\left(F\left(q,\omega\left(q',\sigma'\right)\right),F'\left(q',\sigma'\right)\right);\forall\sigma'\in\Sigma',\left(q,q'\right)\in Q\times Q'.$

(q,q')	σ'	$\omega\left(q',\sigma'\right)$	$F\left(q,\omega\left(q',\sigma'\right)\right)$	$F\left(q',\sigma'\right)$	$F^{\omega}\left(\left(q,q'\right),\sigma'\right)$
$(0,0)$	σ	$\omega(0,\sigma)=\sigma$	$F(0,\omega(0,\sigma))=F(0,\sigma)=1$	$F'(0,\sigma)=1$	$(1,1)$
$(0,1)$	σ	$\omega(1,\sigma)=\tau$	$F(0,\omega(1,\sigma))=F(0,\tau)=0$	$F'(1,\sigma)=0$	$(0,0)$
$(1,0)$	σ	$\omega(0,\sigma)=\sigma$	$F(1,\omega(0,\sigma))=F(0,\sigma)=1$	$F'(0,\sigma)=1$	$(1,1)$
$(1,1)$	σ	$\omega(1,\sigma)=\tau$	$F(1,\omega(1,\sigma))=F(0,\tau)=0$	$F'(1,\sigma)=0$	$(0,0)$

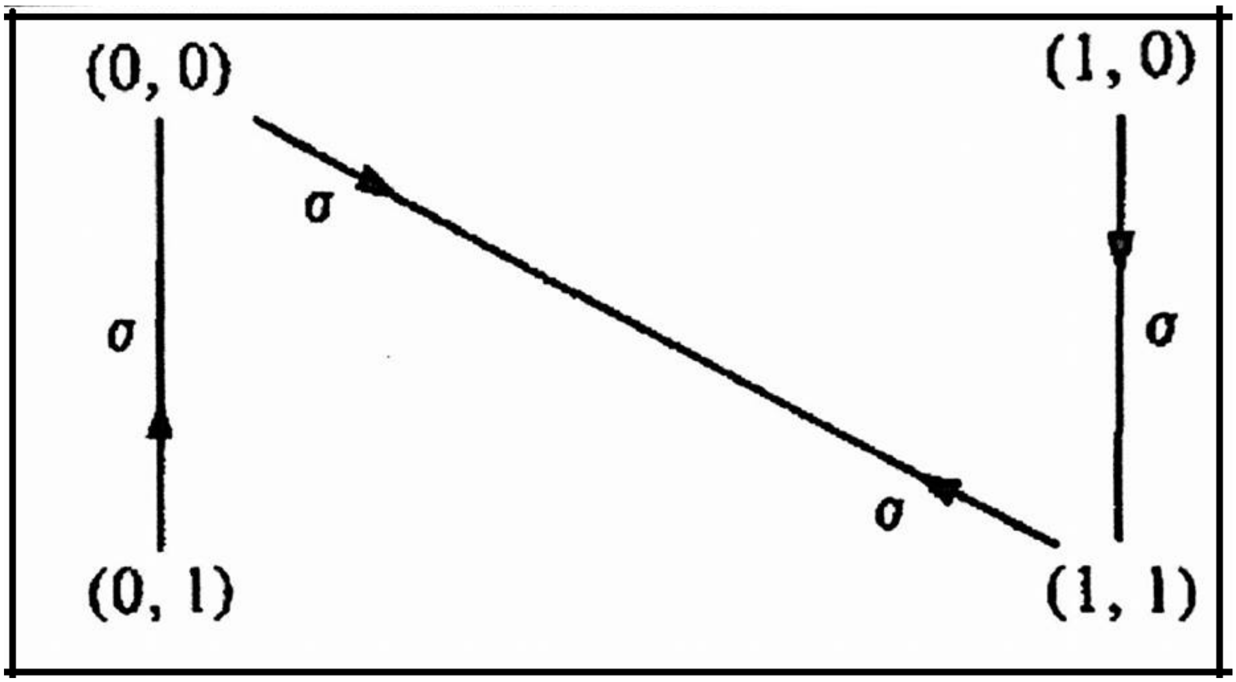


Semi automate M



”

Semi automate M’



Le produit en cascade $M\omega M$

3.4 Recouvrement

Définition 3.13

Soient $X = (Q, S)$ et $Y = (P, T)$ deux semi-groupes des transformations ; s'il y'a une fonction $\eta : P \to Q$ surjective qui vérifie pour tout $s \in S$ il existe $t_s \in T$ telque :

$$\eta(p) \cdot s \subseteq \eta(p \cdot t_s), \text{pour tout } p \in P$$

Nous dirons que Y couvre X , et écrire $X \preceq Y$,et η est un recouvrement de X par Y.

3.5 Décomposition

Définition 3.14

Soit $M = (Q, \Sigma, \delta)$ un semi automate. Une décomposition en cascade pour M est une couverture

$$M \leq N_1\omega_1 N_2\omega_2 ... \omega_{n-1} N_n$$

où $N_1, N_2, ..., N_n$ sont des semi-automates, de sorte que ces semi-automates sont plus simples que M ; habituellement, cela signifie que les ensembles d'états de $N_1, N_2, ..., N_n$ sont tous "plus petits" que l'ensemble d'états de M, ou les semi-groupes de $N_1, ..., N_n$ sont plus simples que le semi-groupe de M.
Une décomposition de la forme

$$M \leq N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n,$$

où $M, N_1, ..., N_n$ sont des semi-automates est appelée une décomposition en couronne de M. Et on a $M \leq N_1\omega_1 N_2\omega_2 ... \omega_{n-1} N_n$ implique $M \leq N_1 \circ N_2 \circ ... \circ N_n$.
Soit A un semi groupe de transformations, une décomposition en couronne pour A est une couverture

$$A \leq B_1 \circ B_2 \circ ... \circ B_n$$

où $B_1, ..., B_n$ sont des semi-groupes de transformations.
Dans de nombreux cas, les semigroupes de $B_1, ... B_n$ sont plus petits que le semigroupe de A.

Conclusion

Au terme de ce travail, nous pouvons dire que dans la théorie des automates, on utilise le terme semi-groupe de transformations pour se référer à un semigroupe agissant fidèlement sur un ensemble d '"états" différents de l'ensemble de base du semigroupe. Nous avons présenté les notions algébriques suivantes : semi groupes et monoĭde de transformations,groupe de transformations,produit de semi-groupes de transformations,l'automate fini, produit des semi automates et la décomposition.

Bibliographie

[1] **B.MONMEGE** et **S.SCHMITZ**, Notes de révision :Automates et langages,Version du 24 octobre 2011, http,// Créative Commons .org.

[2] **François.Bergeron,** *Introduction à la théorie des groupes,Université du Québec à Montréal, 13 décembre 2015.*

[3] **Holcomb,W.M.L**, *Algebraic automata theory,Combridge University Press,1982.*

[4] **Ghadbanne.N**, *Cours Master 2, Semi-groupe de transformations et décomposition d'un automate fini*, Université M.Boudiaf de Msila. Année univ 2017-2018.

[5] **Michel.Rigo**, *Théorie des automates et langages formels,Université de Liége,* 2009-2010.

[6] **Schaub.D,** *Elements de la théorie des groupes, université d'Angers, 1997.*

[7] **Vincent.Carnino,** *Autour des automates : génération aléatoire et contribution à quelques extensions, Université Paris-Est.*

ملخص:

في هذه المذكرة نهتم بدراسة تأثير أشباه الزمر على شبه زمرة التحويلات ونركز على مختلف تطبيقاتها الجبرية : الجداء المباشر، الجداء شبه المباشر،

كما نقدم أيضا لمحة على تفكيك آلة الحالة إلى عناصر بسيطة

الكلمات المفتاحية :

شبه زمرة التحويلات، نصف زمرة التحويلات، آلة الحالة، الجداءات الجبرية

Résumé:

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'action d'un semi-groupe sur un ensemble fini dit semi-groupe de transformations. Une attention particulier sera donnée aux opérations algébriques telle que : Produit direct, Produit semi direct, Produit en couronne…

On présente aussi un aperçu sur la décomposition d'un automate fini en éléments plus simples.

Mots clés:

Semi-groupe de transformations, Monoïde de transformations, Semi-automate, Produit en couronne, produit en cascade.

Abstract:

In this memory, we are interested in the study of the action of a semi-group on a finite set called transformation semi groups. Particular attention will be given to algebraic operations such as: Direct product, Semi direct product, Wreath product..

We also present an overview on the decomposition of a finite automaton into simpler elements.

Key words:

Transformation semi groups, Transformation monoid, State machine, Wreath product, Cascade product.