

**Université Mohamed Boudiaf – M’sila**

**Faculté des Mathématiques et de L’Informatique**

**Département de Mathématiques**



Numéro d'ordre : .....

## **THÈSE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

### **DOCTORAT EN SCIENCES**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse Fonctionnelle et Numérique**

Par

**Mustapha DILMI**

**Thème**

**Sur la convergence des méthodes spectrales  
pour les équations intégrales**

Soutenue publiquement le : 12/04/2018, devant le jury composé de :

B. BOUDERAH	Prof.	Université de M'sila	Président
M. NADIR	Prof.	Université de M'sila	Rapporteur
L. ZEDAM	Prof.	Université de M'sila	Examineur
A. MEROUANI	Prof.	Université de B.B.A	Examineur
A. RAHMOUNE	M.C.A.	Université de B.B.A	Examineur
M. CHEMCHAM	M.C.A.	Université de Biskra	Examineur

Année Universitaire : 2017/2018

---

# Remerciement

*Avant toutes choses, je remercie **Allah**, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.*

*J'exprime d'abord mes profonds remerciements et ma vive connaissance à mon directeur de thèse, le professeur Mostefa **NADIR**, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide, sa patience, ses conseils, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.*

*Je remercie le Professeur Brahim **BOUDERAH** qui a accepté de présider le jury de thèse.*

*Je suis également redevable à Azzedine **RAHMOUNE** Maître de conférence à l'université de B.B.A de m'avoir invité à l'université de B.B.A et de ses conseils très précieux.*

*Je tiens à remercier Mr. Lemnaouar **ZEDAM**, Professeur à l'université de M'sila, Mr. Abdelbaki **MEROUANI** Professeur à l'université de B.B.A, Mr. Madani **CHEM-CHEM**, Maître de conférence à l'université de Biskra pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je voudrais également remercier toute ma famille, et mes collègues.*

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية حيث قمنا بإعطاء طرق تقريبية لحل هذه المعادلات أين قمنا بتطوير بعض الطرق الطيفية لتفريق بعض أنواع المعادلات التكاملية، و استندت هذه الأساليب إلى خيارات مختلفة من كثيرات الحدود المتعامدة، لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذه المعادلات خاصة في فضاء الدوال المستمرة.

وأخيراً، تم إجراء دراسة مقارنة يليها تحليل يستند إلى تفسير النتائج التي تم الحصول عليها.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية، معادلات فريدولم، طرق طيفية، طريقة جالركين، كثيرات الحدود المتعامدة.

---

# Abstract

The main objective of this work is to study linear and nonlinear integral equations. We have applied approximate methods to solve these equations. Also we have developed some spectral methods to differentiate some types of integral equations. These methods were based on different orthogonal polynomials, these equations are especially in the space of continuous functions.

Finally, a comparative study was conducting followed by an analysis based on the interpretation of the obtained results.

**Keywords :** Integral equation, Fredholm equation, Spectral method, Galerkin method, orthogonal polynomial.

---

# Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier les équations intégrales linéaires, et non linéaires. Nous avons donné des méthodes approximatives pour résoudre ces équations. Nous avons développé des méthodes spectrales pour différencier certains types d'équations intégrales. Ces méthodes étaient basées sur différents polynômes orthogonaux, ces équations sont notamment dans l'espace des fonctions continues.

Enfin, une étude comparative a été menée suivie d'une analyse basée sur l'interprétation des résultats obtenus.

**Mots clés :** Equation intégrale, équation de Fredholm, méthode spectrale, méthode de Galerkin, polynômes orthogonaux.

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction et notions fondamentales</b>	<b>5</b>
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles . . . . .	5
1.2 Equations intégrales . . . . .	8
1.2.1 Classification des équations intégrales . . . . .	8
1.2.2 Rappels et notions sur les opérateurs . . . . .	13
1.2.3 Propriétés des opérateurs compacts . . . . .	14
1.3 Opérateur intégral . . . . .	17
<b>2 Existence et unicité des solutions pour les EI</b>	<b>19</b>
2.1 Existence et unicité des solutions des équations intégrales linéaires . . . . .	19
2.2 Existence et unicité des solutions des équations intégrales non linéaires . . . . .	24
2.2.1 Existence et unicité de la solution . . . . .	24
<b>3 Méthodes de résolution des équations intégrales</b>	<b>30</b>
3.1 Méthodes analytiques . . . . .	30
3.1.1 Méthode du noyau dégénéré . . . . .	31
3.1.2 Méthode de décomposition d’Adomian . . . . .	35
3.1.3 Méthode des approximations successives . . . . .	37
3.2 Méthodes numériques . . . . .	42

3.2.1	Méthodes de projection . . . . .	42
3.2.2	Méthode de Nyström . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Méthodes d'approximations spectrales</b>	<b>50</b>
4.1	Polynômes orthogonaux . . . . .	50
4.1.1	Orthogonalité . . . . .	52
4.1.2	Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	52
4.2	Polynômes orthogonaux classiques . . . . .	53
4.3	Méthodes d'approximations spectrales . . . . .	56
4.4	Résolution numérique des équations intégrales de frontière finie . . . . .	57
4.5	Solutions des équations intégrales linéaires par la série d'Euler . . . . .	59
4.6	Résultats numériques . . . . .	63
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>

# Liste des tableaux

1	coefficients rationnels de polynôme d'Euler.....	.....62
2	solutions exactes et approximatives de l'equation de Volterra. Exemple 4.6	.....64
3	solutions exactes et approximatives de l'equation de Volterra. Exemple 4.7	.....65
4	solutions exactes et approximatives de l'equation de Fredholm. Exemple 4.8	.....65
5	solutions exactes et approximatives de l'equation de Fredholm. Exemple 4.9	.....66
6	solutions exactes et approximatives de l'equation de Volterra. Exemple 4.10	.....67
7	solutions exactes et approximatives de l'equation de Volterra. Exemple 4.11	.....67

# Notations

$C[a, b]$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
$C^k[a, b]$	espace des fonctions $k$ fois continument dérivables
$L^1(\Omega)$	espace des fonctions intégrables sur $\Omega$ à valeur dans $R$
$\bar{U}$	la fermeture de $U$
$f$	terme libre dans l'équation intégrale
$A$	opérateur linéaire
$I$	opérateur identique
$\oplus$	somme directe
$G$	noyau de Green
$r$	nombre de Riesz
$Ker(A)$	noyau de l'opérateur
$Im(A)$	image de l'opérateur
$A_n$	suite d'opérateurs continus de rangs finis
$H$	opérateur de Hammerstein
$\ \cdot\ _M$	norme sur $M$
$P$	opérateur de projection
$r_n$	le résidu
$L_n$	polynômes de Legendre
$w$	fonction de poids
$\langle, \rangle$	le produit scalaire
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker ( $= 0$ si $i \neq j$ , $= 1$ si $i = j$ )
$E_n$	polynôme d'Euler
$k(x, t)$	noyau de l'équation intégrale
$u$	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
$u_n$	solution approchée
$\lambda$	paramètre numérique
$(I - A)^{-1}$	inverse de l'opérateur intégral
$EI$	equation intégrale

# Introduction

Les scientifiques ont apporté une importance particulière à l'étude des phénomènes naturels à travers les sciences, dites complexes. Les équations intégrales de divers types jouent un grand rôle dans différents domaines scientifiques tels que la biologie, chimie quantiques ou la physique pour trouver des solutions analytiques ou numériques.

Les équations intégrales ont une importance spéciale parmi les différentes branches des mathématiques, telles que des équations aux dérivées partielles, analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs...etc

Il est entendu que les équations intégrales sont les équations dans lesquelles l'inconnu sous le signe d'intégration comble est inconnu a également ajouté à une extrémité de l'équation.

Bien que la plupart des problèmes physiques peuvent être formulés et analysés par les équations différentielles, il peut souvent possible de remplacer des équations différentielles par des équations intégrales, et peuvent donc être résolus de façon très efficace en utilisant les méthodes d'équations intégrales. Nous utilisons ici, la technique des méthodes spectrales où nous dépendons beaucoup les polynôme orthogonaux de la frontière pour trouver les solutions des équations intégrales.

Les méthodes spectrales sont introduites par D.Gottlieb et S.Orszag [25, 45] pour approximer la solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles, elles furent initialement par l'utilisation des séries de Fourier.

Plusieurs auteurs utilisons la technique des méthodes spectrales pour résoudre certaine type de ces équations ou se trouve par exemple le polynôme de Bernstein [12] ainsi le polynôme de Legendre [14], polynôme de Tchebychev [51,52]...etc.

Notre travail s'inscrit aussi dans le même sens mais cette fois, en utilisant le polynôme d'Euler, donc la démarche de cette technique est basée sur l'écriture de la solution  $u$  sous la forme d'une série, telle que

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k(x)$$

La résolution des équations intégrales par les méthodes spectrales est récente est joue un rôle important ce jour de problème.

Dans cette étude nous avons traité les points suivants :

Le **premier** chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale. Ainsi, nous y exposons certaines méthodes de résolution exacte des équations intégrales

Dans le **deuxième** chapitre nous exposons la théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de connaître l'existence et l'unicité de la solution.

Le **troisième** chapitre est consacré essentiellement à présenter diverses méthodes de résolution numérique, et analytique des équations intégrales, surtout d'exhiber des méthodes d'approximation, telles que les méthodes de projection, de collocation, de Galerkin, de Nyström, approximation successive..., et d'illustrer la validation de ces méthodes par des exemples instructifs.

Le **quatrième** chapitre contient, l'utilisation des méthodes spectrales pour l'approximation des modèles mathématiques. Les méthodes d'approximations spectrales (Tau, Galerkin, pseudo-spectrale ou collocation) sont des méthodes qui recherchent la solution comme une combinaison linéaire finie de polynômes de degré  $\mathbf{N}$ . En effet, il est connu que, les polynômes orthogonaux possèdent des propriétés intéressantes d'approximation. Ils sont utilisés depuis longtemps dans l'approximation des équations aux dérivées partielles. L'avantage principal des méthodes spectrales réside dans leur convergence rapide et dans leur implémentation numérique relativement plus simple que les autres méthodes [52], surtout si on se place dans un intervalle.

# Chapitre 1

## Introduction et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on introduit et on donne des notions générales sur la théorie des équations intégrales linéaires, et non linéaires. Ainsi on donne quelques définitions et, des théorèmes nécessaires

### 1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K$ , on appelle norme sur l'espace  $X$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $X$  a valeurs dans  $R^+$  vérifiant les conditions suivantes :

$$1-\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2-\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$3-\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

on a  $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$  est une norme sur  $C([a, b], R)$ .

Tout espace vectoriel normé complet est un espace de Banach.

#### Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (i.e une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $R$ , symétrique et définie positive), et qui est complet pour la norme associée.

$$\forall u \in H, \quad \|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

**Espace  $C[a, b]$**

est l'espace des fonctions continues sur  $[a, b] = I$ , avec la norme  $\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$ .

**Espace  $C^k[a, b]$**

est l'espace des fonctions  $k$  fois continûment dérivables avec la norme  $\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in I} |x^{(i)}(t)|$ .

**Espace  $L^1(\Omega)$**

est l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeur dans  $R$ ,

où

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

L'espace  $L^p(\Omega)$  est définie comme suit :

si  $1 \leq p < +\infty$  on a

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow R \text{ mesurable, } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

de norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$  on dit que  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow R$  mesurable, tel que

$$\exists c > 0, |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega,$$

de norme notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{ c > 0, |f(x)| \leq c, \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Si

$$f \in L^\infty(\Omega),$$

alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty = \inf \{c > 0, |f(x)| \leq c, p.p \text{ sur } \Omega\}.$$

**Théorème 1.1** Si  $1 \leq p < \infty$  alors,  $L^p$  est un espace de Banach.

**Théorème 1.2 (convergence dominée)**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ , supposons que

1-  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p sur  $\Omega$ .

2- il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p sur  $\Omega$ .

Alors

$$f \in L^1, \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

### Inégalités nécessaires

#### 1-Holder

Soient  $p, q$  deux exposants conjugués tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , et  $f \in L^p, g \in L^q$

Alors

$$f \cdot g \in L^1, \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

#### 2-Cauchy Schwartz

Si  $p = q = 2$  on a

$$\int |fg| \leq \left( \int |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

#### 3- Minkowski

Soient  $f, g$  deux fonctions dans  $L^p, p \geq 1$  alors  $f + g \in L^p$  et on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

#### 4- Young

Soient  $p, q$  deux exposants réels conjugués alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

## 1.2 Equations intégrales

### 1.2.1 Classification des équations intégrales

#### Equations intégrales linéaires

Dans cette section, nous organisons des équations intégrales générales, pour donner la forme générale de l'équation intégrale qui contient des opérateurs linéaires.

On appelle équation intégrale une équation où la fonction inconnue  $u$  est définie comme suit.

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

ou

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Où  $u$  est l'inconnu et la fonction  $K(x, t)$  est appelée le noyau avec le terme libre  $f$  les équations précédentes s'écrivent successivement sous une autre forme en termes d'opérateurs comme suit :

$$\lambda Au = f \quad , \quad u(x) - \lambda Au = f$$

Une équation de la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

est dite équation de Fredholm de première espèce.

L'équation de la forme

$$f(x) = u(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

est dite équation de Fredholm de seconde espèce où  $\lambda$  est un paramètre numérique.

L'équation de Volterra première espèce est :

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

L'équation de la forme

$$f(x) = u(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

est appelée équation de Volterra de deuxième espèce.

Encore, une classe liée à ces deux équations de Fredholm et de Volterra est qu'elles peuvent être homogènes si,  $f(x) = 0$  sur  $[a, b]$ , et inhomogènes sinon.

On doit noter aussi qu'une équation de Fredholm peut être réduite en une équation de Volterra si son noyau vérifie :

$$K(x, t) = 0 \quad , \quad a \leq x \leq t \leq b.$$

On peut aussi dire que dans cette partie de la classification qu'il y aura une relation entre les équations du type Volterra-Fredholm qui prend la forme suivante :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b_1(x)} K(x, t)u(t)dt + \mu \int_a^{b_2(x)} L(x, t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

Et  $b_i$  sont des fonctions connus de  $x$ , et  $K, L$  qui s'appellent des noyaux avec le terme libre  $f$  sont donnés.  $a$  un fixe connu,  $\lambda, \mu$  des facteurs dans ces équations, la fonction  $u$  est l'inconnue.

Donc l'équation intégrale (1.1) est de Fredholm si la condition suivante est vérifiée :

1-  $b_1(x) = b_1, b_2(x) = b_2$  où  $b_1, b_2$  sont connus dans ce cas l'équation intégrale (1.1) contient deux opérateurs intégraux et s'écrit sous la forme :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b_1} K(x, t)u(t)dt + \mu \int_a^{b_2} L(x, t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

2- si  $b_1(x) = b_1$  ou  $b_2(x) = b_2$  et,  $L = 0$  ou  $K = 0$ , dans ce cas l'équation (1.1) contient un seul opérateur intégrale de type Fredholm et s'écrit sous la forme :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b_1} K(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Ou

$$v(x)u(x) = f(x) + \mu \int_a^{b_2} L(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

D'autre part l'équation (1.1) est de type Volterra si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1-si  $b_1(x) = x$ ,  $b_2(x) = x$ , dans ce cas l'équation (1.1) constituée de plus d'opérateur intégrale de type Volterra et devient :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt + \mu \int_a^x L(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

2-si  $b_1(x) = x$  ou  $b_2(x) = x$  et,  $L = 0$  ou  $K = 0$ , alors l'équation (1.1) contient un seul opérateur intégrale de type Volterra s'écrit sous la forme :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Ou

$$v(x)u(x) = f(x) + \mu \int_a^x L(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Nous disons aussi que l'équation intégrale (1.1) est de type Volterra-Fredholm si :

$b_1(x) = x$ ,  $b_2(x) = b_2$ , où  $b_2$  constante connue dans ce cas l'équation (1.1) devient :

$$v(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt + \mu \int_a^{b_2} L(x,t)u(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (1.2)$$

et par conséquent l'équation intégrale (1.2) est de type Volterra si  $L = 0$  pour  $a \leq x \leq t \leq b$ , et de type Fredholm si :  $K = 0$ , pour  $a \leq x \leq t \leq b$ .

Et puis l'équation intégrale (1.2) est une équation de Volterra de première espèce si  $v(x) = 0$ , et de seconde espèce si  $v(x) = 1$ .

De plus (1.2) est dite homogène si  $f(x) = 0$  sur  $[a, b]$ , et inhomogène sinon.

Puis prendre la forme générale de l'équation non linéaire qui contient deux opérateurs comme suit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b_1(x)} K(x, t, u(t)) dt + \mu \int_a^{b_2(x)} L(x, t, u(t)) dt \quad a \leq x \leq t \leq b \quad (1.3)$$

Dans ce cas et dans le même contexte peuvent être classées comme des équations non linéaires de premier, et second type de Volterra-Fredholm comme l'équation non linéaire de Volterra qui s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x) = \int_a^x K(x, t, u(t)) dt \quad a \leq x \leq b. \quad (1.4)$$

Où  $K(x, t, u(t))$  appelée le noyau, et  $u(x)$  l'inconnu tel que  $a \leq x \leq b$

L'équation (1.4) on peut dire que c'est une équation de Volterra forme Uryshon.

Aussi l'équation

$$f(x) = u(x) - \int_a^x K(x, t, u(t)) dt. \quad (1.5)$$

Est dite équation de Volterra deuxième espèce de forme Uryshon.

Dans l'équation (1.4) si on pose  $K(x, t, u(t)) = K(x, t)\varphi(t, u(t))$  où les fonctions  $K(., .)$ ,  $\varphi(., .)$  sont des fonctions connus alors on trouve une équation intégrale de Volterra de forme Hammerstein qui s'écrit sous la forme

$$F(x, u(x)) = \int_a^x K(x, t)\varphi(t, u(t)) dt. \quad (1.6)$$

Encore toute équation de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t, u(t)) dt. \quad (1.7)$$

Est dite équation de Volterra de second espèce de forme Hammerstein.

Une équation de la forme

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t, u(t))dt, \quad (1.8)$$

Où les bornes d'intégration sont des constantes, dans ce cas l'équation (1.8) est dite équation de Hammerstein de première espèce.

Donc l'équation de Hammerstein de seconde espèce est définie par

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\varphi(t, u(t))dt,$$

Alors l'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Uryshon.

## Notions d'analyse fonctionnelle

L'étude des diverses classes des équations fonctionnelles nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels. Ces espaces sont généralement les espaces de Banach ou de Hilbert.

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach muni d'un produit scalaire. Ce concept permet d'étendre à des espaces fonctionnels de dimension infinie le raisonnement de la géométrie euclidienne classique. Les systèmes orthogonaux et les bases hilbertiennes ont un rôle essentiel dans l'Analyse Numérique.

Les espaces de Hilbert sont une classe particulière des espaces vectoriels normés complets dont la norme dérive d'un produit scalaire, ce qui leur confère une structure très riche. L'ensemble des propriétés spécifiques aux espaces de Hilbert reposent sur un résultat fondamental : c'est le théorème de la projection qui prouve l'existence d'un opérateur de projection sur un sous-ensemble fermé. Une conséquence importante est le théorème d'identification de Riesz qui prouve qu'un espace de Hilbert est isomorphe à son dual, ce qui conduit dans la plus part des cas à identifier l'espace et son dual voir [27].

-Un espace métrique est dit compact si de toute suite  $(\varphi_n)$  on peut extraire une sous-suite convergente. En d'autre terme, il existe une suite d'entiers naturel  $(n_k)$  tels que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_{n_k})$  existe.

-Soit  $X$  un espace métrique un ensemble  $U \subset X$  est dit compact s'il est compact au sens de la définition précédente où lui même soit considéré comme un espace métrique  $(U, d)$ .

-Un ensemble  $U \subset X$  est dit relativement compact si sa fermeture  $\bar{U}$  est compacte.

## 1.2.2 Rappels et notions sur les opérateurs

### Notions sur les opérateurs

**Définition 1.3** *Un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$  d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$  est dit compact s'il transforme tout sous-ensemble borné de  $X$  en un ensemble relativement compact de  $Y$*

**Théorème 1.4** *Un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$  est compact si et seulement si, pour toute suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $X$ , on peut extraire de la suite  $(A\varphi_n)$  de  $Y$  une sous suite convergente, i.e., si toute suite de l'ensemble  $\{A\varphi, \varphi \in X, \|\varphi\| \leq 1\}$  contient une sous suite convergente*

**Définition 1.5** *Un espace métrique  $(X, d)$  est pré compact si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  admet un recouvrement fini par des boules de rayon  $\varepsilon$ .*

### Théorème 1.6 (Arzela-ascoli)

*Une famille de fonctions continues définies sur l'intervalle compact  $[a, b]$ , est compacte dans  $C[a, b]$  si cette famille est uniformément bornée et équicontinue.*

**Preuve.** Pour la preuve voir [8]. ■

### Théorème 1.7 (Riesz)

*soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur compact, alors*

- 1) *Le noyau de l'opérateur  $A : \ker(A)$  est un sous espace de dimension finie.*
- 2) *L'image de l'opérateur  $A : \text{Im}(A)$  est un sous espace linéaire fermé.*
- 3) *Il existe un entier positif non nul  $r$ , appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$  tel que*

$$\begin{aligned} \{0\} &= \text{Ker}(A) \subsetneq \text{Ker}(A^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(A^r) = \text{Ker}(A^{r+1}) = \dots \\ X &\supsetneq \text{Im}(A) \supsetneq \text{Im}(A^2) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(A^r) = \text{Im}(A^{r+1}) = \dots \end{aligned}$$

*D'autre part, on a la somme directe*

$$X = \text{Ker}(A^r) \oplus \text{Im}(A^r)$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [23]. ■

### 1.2.3 Propriétés des opérateurs compacts

**Corollaire 1.8** Soit  $(A_n)$  une suite d'opérateurs continus de rangs finis de  $X$  dans  $Y$  et soit  $A$  un opérateur linéaire tel que  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  alors  $A$  est un compact.

**Preuve.** Pour la preuve voir [7]. ■

**Théorème 1.9** Si  $(A_n)$  est une suite d'opérateurs compacts dans un espace de Banach  $X$ , convergeant en norme vers un opérateur  $A$ , alors l'opérateur  $A$  est aussi compact.

**Preuve.** En effet pour prouver la compacité de l'opérateur  $A$ , il suffit de montrer que, pour toute suite bornée  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  d'éléments de  $X$ , de la suite  $(Ax_n)$  on peut extraire une sous-suite convergente.

Il est facile de vérifier qu'une combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte. Par conséquent, dans l'espace  $B(X, Y)$  de tous les opérateurs linéaires bornés, définis sur  $X$  l'ensemble  $K(X, Y)$  forment un sous-espace fermé. ■

**Théorème 1.10** Si  $A$  est un opérateur compact et  $S$  un opérateur borné, les opérateurs  $AS$  et  $SA$  sont compacts.

**Théorème 1.11** Soit  $I$  ensemble fermé dans  $R^n$  et soit l'opérateur défini par

$$A : C(I) \rightarrow C(I)$$

$$A(\varphi) = \int_I K(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$1- \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\|x-z\| \leq h} \int_I |k(x, t) - k(z, t)| dt = \lim_{h \rightarrow 0} w(h) = 0 \quad x, z \in I$$

$$2- \sup_{x \in I} \int_I |k(x, t)| dt < \infty$$

Alors  $A$  est compact.

**Preuve.** Par le théorème d'Arzéla-Ascoli

Par 1- si  $t \rightarrow \varphi(t)$  borné et intégrable alors  $A\varphi(t)$  est continue avec

$$\left| A(\varphi(t)) - A\varphi(t') \right| \leq w(\|t - t'\|)(\|\varphi\|_{\infty}) \quad (1.10)$$

Utilisons la condition 2- donc  $A$  est borné et

$$\|A\| = \max_{x \in I} \int_I |K(x, t)| dt$$

pour montrer  $A$  est compact on considère l'ensemble  $L$  tel que

$$L = \{A\varphi, \varphi \in C(I), \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$$

$L$  est borné puisque

$$\|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \|\varphi\|_\infty \leq \|A\|$$

$L$  est equicontinu par (1.10), et  $L$  relativement compact donc  $A$  est compact ■

**Théorème 1.12** *Si le noyau de l'opérateur  $A$  définie de  $C[a, b]$  dans lui même continu Alors l'opérateur est compact.*

**Théorème 1.13** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $A_n : X \longrightarrow Y$  ( $n \geq 1$ ) une suite d'opérateurs linéaires bornés. Supposons que  $A_n u \longrightarrow u \in X$ . Alors la convergence est uniforme sur les sous ensembles compacts de  $X$*

**Preuve.** Puisque les opérateurs sont uniformément bornés  $M = \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty$ . Les opérateurs  $A_n$  sont equicontinus  $\|A_n u - A_n f\| \leq M \|u - f\|$ , si  $F$  est un compact de  $X$ . Alors la suite d'opérateurs  $A_n$  est une famille uniformément bornée, et équicontinue sur  $F$ , par le théorème d'Ascoli alors  $(A_n u)$  converge uniformément vers  $u \in F$ . ■

**Définition 1.14 (Opérateur de Hammerstein)**

*La fonction  $f$  étant une fonction de Carathéodory, on suppose  $\Omega$  compact et considérons un noyau de Green  $G$  associé a la fonction  $f$ .*

*Alors l'opérateur  $H$  définie par*

$$(Hu)(x) = \int_{\Omega} G(x, t) f(t, u(t)) dt.$$

*Est appelé opérateur de Hammerstein.*

### Les opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.15** Soient  $X, Y$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  définie sur  $X$  dans  $Y$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

1-  $Au \in Y$

2-  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$ .

**Définition 1.16** Un opérateur linéaire  $A$  définie sur  $X$  dans  $Y$  est dit borné s'il existe une constante positive  $c$ , telle que :

$$\|Au\|_Y \leq c \|u\|_X \quad \forall u \in X$$

**Proposition 1.17** Le plus petit nombre  $c$  vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur  $A$  et noté par  $\|A\|$ . Alors

$$\|A\|_Y = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [31]. ■

**Proposition 1.18** Soient  $X, Y$  deux espaces normés et  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes

1-  $A$  est continu sur  $X$ .

2-  $A$  est continu au point  $0_X$ .

3-  $A$  borné.

**Preuve.** Pour la preuve voir [50,11]. ■

**Théorème 1.19** Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach  $X$  dans lui même avec  $\|A\| < 1$ ,  $I$  l'opérateur identique dans  $X$ .

Alors, l'opérateur  $I - A$  admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Preuve.** puisque  $\|A\| < 1$ , et par la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(X)$ , par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec  $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$ , de plus  $S$  est l'inverse de  $I - A$ .

En effet, en utilisant les notations  $A^0 = I$ ,  $A^k = AA^{k-1}$

On peut voir que

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

Aussi

$$S(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , alors  $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}$ , est tend vers 0. ■

## 1.3 Opérateur intégral

**Définition 1.20** *Un opérateur intégral linéaire  $A$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante*

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt.$$

Où  $K$  étant appelé noyau de l'opérateur.

**Remarque 1.21** *Soit  $K$  est une fonction continue de  $[a, b] \times [a, b]$ , Alors  $A$  est appelé opérateur intégral à noyau continu.*

**Définition 1.22** *Soient  $X, Y$  deux espace normés, et  $A : X \rightarrow Y$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans  $X$  à un ensemble relativement compact dans  $Y$ .*

**Remarque 1.23** 1- L'opérateur  $A$  est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

2-  $A$  est compact  $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset X$ , borné, la suite  $(Ax_n)$  admet une sous suite convergente dans  $Y$ .

**Définition 1.24** Soit  $A$  un opérateur d'un espace de Banach  $X$  dans lui-même,  $A$  est une contraction, s'il existe une constante  $0 \leq k < 1$  telle que, pour tout  $x, y \in X$ , on ait

$$\|A(x) - A(y)\| \leq k\|x - y\| \quad (1.11)$$

**Définition 1.25** Si  $k \geq 0$  dans la relation (1.11),  $A$  est dit Lipschitzienne. L'application Lipschitzienne est nécessairement continue.

Si  $k < 1$  dans la relation (1.11),  $A$  est dite contraction.

Si  $k = 1$  dans la relation (1.11),  $A$  est dit non expansive.

### **Théorème 1.26**

Soit  $X$  un espace de Banach et  $F$  un sous-ensemble fermé de  $X$ .

Soit  $f$  une application contractante de  $F$  dans  $X$ , alors il existe un unique  $z \in F$ , tel que

$$f(z) = z.$$

**Théorème 1.27** Soit  $F$  un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit  $A : F \rightarrow F$  une application contractante, alors

(a) L'équation  $Ax = x$ , a une seule solution unique.

(b) La solution unique  $x$  peut être obtenue par la limite de la suite  $\{x_n\}$  de  $F$  définie par  $x_n = Ax_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , où  $x_0$  est un élément arbitraire de  $F$ ,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x_0$$

**Preuve.** Pour la preuve voir [17]. ■

# Chapitre 2

## Existence et unicité des solutions pour les EI

Dans ce chapitre, nous donnons certaines conditions qui assurent l'existence de la solution unique des équations intégrales.

### 2.1 Existence et unicité des solutions des équations intégrales linéaires

**Théorème 2.1** *Soit l'équation suivante*

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = g(x)$$

*si le noyau  $k$  est continu sur  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $g \in L^2([a, b])$ , et  $|\lambda|B < 1$ , où*

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt}$$

*Alors l'équation admet une solution unique  $u \in L^2([a, b])$ .*

**Preuve.** On considère l'équation

$$(Tu)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \tag{2.1}$$

Puisque  $g \in L^2([a, b])$ ,  $Tu \in L^2([a, b])$  si

$$\int_a^b k(x, t)u(t)dt \in L^2([a, b]).$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k(x, t)u(t)dt \right| &\leq \int_a^b |k(x, t)u(t)| dt \\ &\leq \left( \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_a^b k(x, t)u(t)dt \right|^2 \leq \left( \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right) \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right),$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b k(x, t)u(t)dt \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right) \left( \int_a^b |u(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |u(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx < \infty, \text{ et } \int_a^b |u(t)|^2 dt < \infty,$$

Alors l'équation (2.1) est satisfaisante et  $T$  de  $L^2([a, b])$  dans lui-même.

Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(Au)(x) = \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

Est borné, donc par le théorème (1.27) l'équation  $Tu = u$  admet une solution unique, pour  $|\lambda|B < 1$ . ■

**Lemme 2.2** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts. L'ensemble des fonctions continues de  $X$  vers  $Y$  muni de la norme uniforme est complet.

**Théorème 2.3** Soit  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ , et  $f : [a, b] \rightarrow R$ , deux fonctions continues. Alors si  $\lambda$  est suffisamment petit, l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur  $[a, b]$ .

**Preuve.** Nous considérons l'ensemble  $F$  des fonctions continues  $[a, b] \rightarrow [a, b]$ , muni de la norme uniforme, donc par le lemme (2.2) implique que  $F$  est complet.

Nous considérons l'application

$\phi : F \rightarrow F$  donnée par

$$\phi(u)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

Nous montrons que  $\phi^p$ , est une application contractante pour un certain  $p$ . Pour tout  $x \in [a, b]$

nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \phi(u) - \phi(u') \right\|_{\infty} &\leq \left\| \phi(u)(x) - \phi(u')(x) \right\| \\ &= |\lambda| \left\| \int_a^b k(x, t)(u(t) - u'(t))dt \right\| \\ &\leq |\lambda| \|k\|_{\infty} |b - a| \left\| u - u' \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Si  $\lambda$  est assez petit, et si  $p$  est assez grand, l'application  $\phi^p$ , est donc une contraction. Elle possède donc un unique point fixe.

ce point c'est la solution de l'équation linéaire. ■

**Théorème 2.4** On considère l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt = g(x) \quad (2.2)$$

On suppose que  $g \in L^2([0, 1])$  et le noyau  $k$  vérifié

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, t)| dx dt < \infty \quad (2.1)$$

Alors l'équation (2.2) admet une solution unique dans  $L^2([0, 1])$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$

**Preuve.** On pose

$$A(x) = \int_0^x |k(x, t)|^2 dt, \quad B(t) = \int_t^1 |k(x, t)| dx$$

Avec la condition

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, t)| dx dt < \infty$$

Les fonctions  $A$  et  $B$  sont intégrables, de sorte qu'il existe une constante  $M$ , telle que

$$\int_0^1 A(x)dx \leq M \text{ et } \int_0^1 B(t)dt \leq M$$

On définit la fonction  $\xi$  sur  $[0, 1]$ , par

$$\xi(x) = \int_0^x A(t)dt$$

il est clair que  $\xi(1) \leq M$ . On considère l'opérateur suivant

$$(Tu)(x) = \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt + g(x)$$

Si  $T$  a un point fixe, alors ce point doit être une solution unique de l'équation (2.2).

Pour démontrer que, si le point fixe existe pour certains  $n \in \mathbb{N}$ , il suffit de montrer que  $T^n$  est contractant.

Par le théorème (1.26), l'opérateur  $T$  admet un seul point fixe.

On écrit  $Tu = \lambda Wu + g$ , avec

$$(Wu)(x) = \int_0^x k(x, t)u(t)dt.$$

Alors

$$T^n u = \lambda Wg + \lambda^2 W^2 g + \dots + \lambda^n W^n g + g,$$

Et

$$(W^n u)(x) = \int_0^x k_m(z, t)u(t)dt,$$

Où

$$\begin{aligned} k_1(x, t) &= k(x, t) \\ k_m(x, t) &= \int_t^x k(x, z)k_{m-1}(z, t)dz, \quad (m = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Pour estimer la valeur  $\|W\|$ , nous examinons  $k_m$  pour  $m = 2$ , on a

$$k_2(x, t) = \int_t^x k(x, z)k_1(z, t)dz$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz, on trouve

$$|k_2(x, t)|^2 \leq \int_t^x |k(x, z)|^2 dz \int_t^x |k_1(z, t)|^2 dz \leq A(x)B(t),$$

même pour

$$\begin{aligned} |k_3(x, t)|^2 &\leq \int_t^x |k(x, z)|^2 dz \int_t^x |k_2(z, t)|^2 dz \\ &\leq A(x)B(t) \int_t^x A(z) dz = A(x)B(t) (\xi(x) - \xi(t)). \end{aligned}$$

Par induction, nous pouvons montrer que

$$|k_m(x, z)|^2 \leq A(x)B(t) \frac{[\xi(x) - \xi(t)]^{m-2}}{(m-2)!}, \quad m \geq 2,$$

Donc

$$\begin{aligned} |T^m u_1 - T^m u_2|^2 &= |\lambda|^{2m} \left| \int_0^x k_m(x, t) [u_1(t) - u_2(t)] dt \right|^2 \\ &\leq |\lambda|^{2m} \left[ \int_0^x \frac{A(x)B(t) [\xi(x) - \xi(t)]^{m-2}}{(m-2)!} dt \int_0^x |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt \right] \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2m} A(x) [\xi(x)]^{m-2}}{(m-2)!} \int_0^x B(t) dt \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2m} A(x) [\xi(x)]^{m-2} M}{(m-2)!} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

En intégrant, avec  $x$  dans  $(0, 1)$ , on obtient

$$\|T^m u_1 - T^m u_2\|^2 \leq \frac{|\lambda|^{2m} M^m}{(m-2)!} \|u_1 - u_2\|^2, \quad m \geq 2,$$

Donc, puisqu'il existe  $n \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\frac{|\lambda|^{2n} M^n}{(n-1)!} < 1.$$

$T^n$  est contractant, ce qui implique que l'équation (2.2) admet une solution unique. ■

**Théorème 2.5** *On considère l'équation suivante*

$$u(x) = \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad x \in [0, 1] \tag{2.3}$$

*cette équation admet seulement la solution triviale  $u = 0$ .*

**Preuve.** Soit l'équation homogène de deuxième espèce de Volterra

$$u(x) = \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

Alors

$$|u(x)| = |\lambda| \left| \int_0^x k(x, t)u(t)dt \right| \leq |\lambda|Mp, \quad (2.4)$$

Où

$$p = \int_0^1 |u(t)|dt,$$

Et

$$|k(x, t)| \leq M, \text{ pour } x, t \in [0, 1].$$

Par conséquent, et si on remplace la relation (2.4) dans (2.3), on obtient

$$|u(x)| = |\lambda| \int_0^x |k(x, t)| |\lambda| Mp dt \leq |\lambda|^2 M^2 px$$

En continuant le processus, on obtient

$$|u(x)| \leq |\lambda|^n M^n p \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{|\lambda|^n M^n p}{(n-1)!} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Ceci montre que  $u = 0$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ . ■

## 2.2 Existence et unicité des solutions des équations intégrales non linéaires

Dans cette partie, on a étudié l'existence et l'unicité des équations intégrales non linéaires dans les espaces de Banach par le moyen de la théorie du point fixe avec quelques modifications.

### 2.2.1 Existence et unicité de la solution

Nous considérons d'abord les équations de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, u(t))dt \quad (2.5)$$

où  $f : [a, b] \rightarrow R^n$ ,  $k : [a, b] \times [a, b] \times R^n \rightarrow R^n$ . Sont des fonctions continues

Pour cela, nous avons besoin des deux lemmes suivants. Le premier lemme est apparu dans [45] sans preuve. Nous en donnons ici la preuve.

**Lemme 2.6** Soit  $\lambda$  un nombre positif fixe,  $I = [a, b]$ , et  $M = \{u/u : I \rightarrow R^n \text{ est un ensemble de fonctions continues et il existe } N \geq 0, \text{ tel que } \|u(x)\| \leq \frac{N}{\lambda} e^{(x-a)} \forall x \in I\}$   
 Alors  $(M, \|\cdot\|_M)$  est un espace de Banach, où  $\|u\|_M = \max_{x \in I} (\|u(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)})$

**Preuve.** Soit  $u_1, u_2 \in M$ , alors il existe  $N_1 \geq 0$ , et  $N_2 \geq 0$  tel que

$$\|u_1(x)\| \leq \frac{N_1}{\lambda} e^{(x-a)} \forall x \in I, \text{ et } \|u_2(x)\| \leq \frac{N_2}{\lambda} e^{(x-a)} \forall x \in I$$

Donc

$$\|(u_1 + u_2)(x)\| \leq \|u_1(x)\| + \|u_2(x)\| \leq \frac{(N_1 + N_2)}{\lambda} e^{(x-a)} = \frac{N}{\lambda} e^{(x-a)}$$

Et cela implique que

$$u_1 + u_2 \in M$$

Il est clair que  $0 \in M$ ,  $0$  désigne la fonction zéro et,  $-u \in M, \forall u \in M$

D'autre part, soit  $\mu \in R, u \in M$ , puis

$$\|(\mu u)(x)\| = \|\mu u(x)\| = |\mu| \|u(x)\| \leq |\mu| \frac{N}{\lambda} e^{(x-a)}, \forall x \in I$$

Donc

$$\mu u \in M$$

La preuve des autres conditions pour que  $M$  soit un espace vectoriel est facile à Satisfait, nous les avons donc omis.

Pour prouver que  $M$  est un espace normé, on définit :

$$\|\cdot\|_M : M \rightarrow R^+ \cup \{0\} \text{ par } \|u\|_M = \max_{x \in I} \left\{ \|u(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\}$$

Pour prouver :  $\|\cdot\|_M$  est une norme sur  $M$ , il faut prouver les conditions suivantes :

(1)  $\|u\|_M = 0$  si et seulement si  $u = 0$

Pour ce faire, supposons que  $\|u\|_M = 0$ ,

Puis

$$0 \leq \|u(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \leq \|u\|_M = 0, \forall x \in I$$

Donc  $\|u(x)\| = 0, \forall x \in I$  et donc  $u(x) = 0, \forall x \in I$ .

Inversement, supposons que  $u(x) = 0, \forall x \in I$ , donc  $\|u(x)\| = 0, \forall x \in I$ , et donc  $\|u\|_M = 0$ .

(2) Soit  $\mu \in R$  et  $u \in M$ , Alors nous devons prouver  $\|\mu u\|_M = |\mu| \|u\|_M$ . Pour ce faire, supposons

$$\begin{aligned} \|\mu u\|_M &= \max_{x \in I} \left\{ \|(\mu u)(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} \\ &= \max_{x \in I} \left\{ |\mu| \|u(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} \\ &= |\mu| \max_{x \in I} \left\{ \|u(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} \\ &= |\mu| \|u\|_M \end{aligned}$$

(3) Soit  $u_1, u_2 \in M$  puis

$$\begin{aligned} \|(u_1 + u_2)(x)\|_M &= \max_{x \in I} \left\{ \|(u_1 + u_2)(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} \\ &\leq \max_{x \in I} \left\{ \|u_1(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} + \max_{x \in I} \left\{ \|u_2(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \right\} \\ &\leq \|u_1\|_M + \|u_2\|_M \end{aligned}$$

Donc  $\|\cdot\|_M$  est une norme sur  $M$ , et ce  $(M, \|\cdot\|_M)$  est un espace normé. La preuve de la complétude pour l'espace normé  $(M, \|\cdot\|_M)$  est semblable à la preuve de la Complétude de l'espace normé  $C[a, b]$ . Ainsi nous l'avons omis. ■

Ensuite, nous donnons le lemme suivant.

**Lemme 2.7** Soit  $u : [a, b] \rightarrow R^+$ , et  $q : [a, b]^2 \rightarrow R^+$ .

Sont des fonctions continues,  $q$  est une fonction non décroissante par rapport à la seconde variable. si

$$u(x) \leq c + \int_a^b q(x, t)u(t)dt, x \in I = [a, b].$$

Où  $c$  est une constante. Alors

$$u(x) \leq \frac{c}{1 - d(x)}, \forall x \in I.$$

Où

$$d(x) = \int_a^b q(x, t)dt < 1, x \in I.$$

Maintenant, nous donnons le théorème d'existence qui apparut dans [46].

**Théorème 2.8** *Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites*

(i)

$$\|k(x, t, z_1) - k(x, t, z_2)\| \leq q(x, t) \|z_1 - z_2\| \quad (2.6)$$

où  $q = I^2 \rightarrow R^+$ , est une fonction continue et le noyau  $k$  satisfait la condition de Lipschitz.

(ii) Il existe une constante non négative  $\alpha$  telle que  $\alpha < 1$  et ;

$$\int_a^b q(x, t) \frac{1}{\lambda} e^{(t-a)} dy \leq \frac{\alpha}{\lambda} e^{(x-a)}, x \in I$$

Où  $\lambda$  est définie dans le lemme (2.5)

(iii) Il existe une constante  $\beta$  non négative telle que

$$\|f(x)\| + \int_a^b \|k(x, t, 0)\| dy \leq \frac{\beta}{\lambda} e^{(x-a)}, \forall x \in I$$

Alors l'équation (2.5) admet une solution unique dans  $M$ .

**Preuve.** Pour  $u \in M$ , on définit l'opérateur  $T$  par

$$(Tu)(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, u(t)) dt$$

Ensuite, nous montrons que  $T$  envoie  $M$  dans lui-même. Evidemment  $Tu$  est continue sur  $I$  et  $Tu \in R^n$ . Soit  $u \in M$ , puis  $\|u\|_M \leq N$ . Par conséquent

il suit que  $Tu \in M$ . Ceci prouve que  $T$  envoie de  $M$  dans lui-même

Maintenant, on vérifie que l'opérateur  $T$  est une contraction. Pour ce faire, soit  $u, v \in M$

puis

$$\begin{aligned}
 \|(Tu)(x) - (Tv)(x)\| &\leq \int_a^b \|k(x, t, u(t)) - k(x, t, v(t))\| dt \\
 &\leq \int_a^b q(x, t) \|u(t) - v(t)\| dt \\
 &\leq \int_a^b q(x, t) \|u(t) - v(t)\| \lambda^2 \frac{1}{\lambda} e^{-(t-a)} \frac{1}{\lambda} e^{(t-a)} dt \\
 &\leq \int_a^b q(x, t) \max_{y \in I} \left\{ \|u(t) - v(t)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(t-a)} \right\} \lambda^2 \frac{1}{\lambda} e^{(t-a)} dt \\
 &\leq \lambda^2 \|u - v\|_M \left\{ \int_a^b q(x, t) \frac{1}{\lambda} e^{(t-a)} dt \right\} \\
 &= \lambda^2 \frac{\alpha}{\lambda} e^{(x-a)} \|u - v\|_M, x \in I
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|(Tu)(x) - (Tv)(x)\| \frac{1}{\lambda} e^{-(x-a)} \leq \alpha \|u - v\|_M$$

Et cela implique que

$$\|(Tu)(x) - (Tv)(x)\|_M \leq \alpha \|u - v\|_M \quad \forall u, v \in M$$

Car  $\alpha < 1$  en résulte que  $T$  est une application contractant. A partir du théorème de points fixe de Banach, il en résulte que  $T$  a un point fixe unique dans  $M$ . Ce point fixe de  $T$  est la solution unique de l'équation (2.5). ■

Ensuite, le théorème suivant donne les conditions pour l'unicité de la solution pour l'équation intégrale (2.5).

**Théorème 2.9** *Supposons que la fonction  $k$  satisfasse aux conditions données par l'inégalité(2.6)*

*Supposons que les conditions suivantes soient également satisfaites :*

(i)  $q$  est une fonction non décroissantes dans  $t \in I$ .

(ii)  $e(x) = \int_a^b q(x, t) dt < 1, \forall x \in I$

*Alors l'équation (2.5) admet une solution unique.*

**Preuve.** Soit  $u$  et  $v$  deux solutions de l'équation (2.5), et soit  $\varphi(x) = \|u(x) - v(x)\|$ ,  
Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq \int_a^b \|k(x, t, u(t)) - k(x, t, v(t))\| dt \\ &\leq \int_a^b q(x, t) \|u(t) - v(t)\| dt \\ &= \int_a^b q(x, t) \varphi(t) dt\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2) sur l'inégalité ci-dessus, on peut avoir :  $\|u(x) - v(x)\| \leq 0, \forall x \in I$ .

Et donc  $u(x) = v(x), \forall x \in I$  qui prouve l'unicité de la solution de l'équation (2.5). ■

# Chapitre 3

## Méthodes de résolution des équations intégrales

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de la deuxième espèce, mais d'abord nous énonçons certains Théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution.

### 3.1 Méthodes analytiques

Certaines équations intégrales ont une solution et d'autres n'ont pas de solution ou qu'il a un nombre infini des solutions.

**Remarque 3.1** *Il est important de dire que nous discuterons des méthodes analytiques dans l'espace  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .*

#### **Théorème 3.2**

*Si l'équation intégrale homogène de Fredholm*

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (3.1)$$

N'a que la solution triviale  $u(x) = 0$ , alors l'équation de Fredholm non homogène correspondante

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (3.2)$$

A toujours une solution unique. Ce théorème est connu par le théorème alternative de Fredholm .

**Théorème 3.3** Si le noyau  $k(x, t)$  dans l'équation intégrale de Fredholm (3.2) est continu, le réel Fonction évaluée, bornée dans le carré  $a \leq x \leq b$  et,  $a \leq t \leq b$ , et si  $g(x)$  est une Fonction continue, puis une condition nécessaire à l'existence d'une solution unique pour l'équation intégrale de Fredholm (3.2) est donnée par

$$|\lambda| M(b - a) < 1 \quad (3.3)$$

Où

$$|k(x, t)| \leq M, M \in R \quad (3.4)$$

Au contraire, si la condition nécessaire (3.3) ne tient pas, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm. Pour illustrer ceci,

**Exemple 3.4** Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = 2 - 3x + \int_0^1 (3x + t)u(t)dt \quad (3.5)$$

Il est clair que si  $\lambda = 1$ ,  $|k(x, t)| \leq 4$ , et  $(b - a) = 1$ . Cela donne

$$|\lambda| M(b - a) = 4 \quad (3.6)$$

Cependant, l'équation de Fredholm (3.5) a une solution exacte donnée par

$$u(x) = 6x$$

### 3.1.1 Méthode du noyau dégénéré

Dans cette section, la méthode du noyau dégénéré sera appliquée pour équations intégrales de Fredholm avec des noyaux séparables. des équations intégrales de Fredholm

d'une manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non pas sous forme de série, cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérées ou des noyaux séparables de la forme

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(x)v_i(t) \quad (3.7)$$

Où les fonctions  $w_1(x), \dots, w_n(x)$ , et les fonctions  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  sont linéairement indépendantes. Avec un tel noyau, l'intégrale de Fredholm du second type.

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (3.8)$$

Devient

$$u(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^n w_i(x) \int_a^b v_i(t)u(t)dt \quad (3.9)$$

La technique de résolution de cette équation dépend essentiellement du choix du paramètre complexe  $\lambda$  et sur la définition de

$$\alpha_i = \int_a^b v_i(t)u(t)dt \quad (3.10)$$

Chaque intégrale du côté droit ne dépend que de la variable  $t$  avec des limites constantes d'intégration pour  $t$ . Cela signifie que chaque intégrale est équivalente à une constante. En se fondant sur ce point, la substitution de (3.10) à (3.9) donne

$$u(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \quad (3.11)$$

Et le problème se réduit à trouver les quantités  $\alpha_i$ . Pour ce faire, on place la valeur de  $u(x)$  donnée par (3.11) dans (3.9) et on obtient

$$\sum_{i=1}^n w_i(x) \left\{ \alpha_i - \int_a^b v_i(t) \left( g(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(t) \right) dt \right\} = 0 \quad (3.12)$$

Mais les fonctions  $w_i(x)$  sont linéairement indépendantes, donc

$$\left\{ \alpha_i - \int_a^b v_i(t) \left( g(t) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(t) \right) dt \right\} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Utilisation de la notation simplifiée

$$\int_a^b v_i(t)g(t)dt = h_i \quad , \int_a^b v_i(t)w_k(t) = c_{ik} \quad (3.14)$$

Où  $h_i$  et  $c_{ik}$  sont des constantes connues, l'équation (3.13) devient

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_{ik}\alpha_k = h_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

C'est-à-dire un système de  $n$  équations algébriques pour les inconnues  $\alpha_i$  Le déterminant  $D(\lambda)$  de ce système est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1 - \lambda c_{22} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n1} & \dots & 1 - \lambda c_{nn} \end{vmatrix}$$

Qui est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$  au maximum. en outre, il n'est pas identique à zéro, puisque, quand  $\lambda = 0$ , il se réduit à l'unité. Pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $D(\lambda) \neq 0$ , le système algébrique (3.15) admet une solution unique même pour l'équation intégrale (3.8). D'autre part, pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $D(\lambda)$  devient égal à zéro, le système algébrique (3.15), et l'équation intégrale (3.8), soit est insoluble, soit a un nombre infini de solutions. Remarque Que nous n'avons considéré que l'équation intégrale du second type, où seule cette méthode est applicable.

**Exemple 3.5** Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale suivante dans le noyau dégénéré

$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t)u(t)dt \quad (3.16)$$

Maintenant le noyau  $k(x, t) = \cos(x - t)$ , peut être écrit comme  $k(x, t) = \cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t)$ . qui est un noyau séparable tel que

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n w_i(x)v_i(t) \quad (3.17)$$

Où

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \cos(x) & v_1(t) &= \cos(t) \\ w_2(x) &= \sin(x) & v_2(t) &= \sin(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Maintenant, en utilisant les techniques de la section (3.1.1) dans une domaine  $[a, b]$  et les relations

$$\int_a^b v_i(t)g(t)dt = h_i \quad , \quad \int_a^b v_i(t)w_k(t) = c_{ik} \quad (3.19)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} c_{11} &= \int_a^b v_1(t)w_1(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$c_{12} = c_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(t)dt = \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

$$c_{22} = \frac{\pi}{4} \quad (3.22)$$

$$h_1 = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)dt = -\frac{1}{2} \quad , \quad h_2 = \frac{-1}{\pi}$$

Maintenant pour trouver  $\alpha_i$  dans la relation

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_{ik}\alpha_k = h_i \quad (3.23)$$

Lorsque cela peut être écrit sous la forme matricielle comme

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation

$$u(x) = g(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x) \quad (3.24)$$

Puis

$$u(x) = \sin(x)$$

Qui est la solution exacte.

### 3.1.2 Méthode de décomposition d'Adomian

L'idée principale de la méthode d'Adomian est de décomposer la fonction inconnue  $u(x)$  de l'équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.25)$$

Ou équivalent

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots \quad (3.26)$$

Où les composants.  $u_{n \geq 0}(x)$ , doivent être déterminés de manière récursive. La méthode de décomposition se préoccupe de la réalisation des composants  $.u_0, u_1, \dots$ . Individuellement. La détermination de ces composantes peut être réalisée de manière simple par une relation de fréquence qui implique habituellement des intégrales simples qui peuvent être facilement évaluées. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons (3.25) dans l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt \quad (3.27)$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt \quad (3.28)$$

Ou équivalent

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt \quad (3.29)$$

La composante  $u_0(x)$  est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus Sous le signe intégral. Cela signifie que les composantes  $u_j(x)$  de l'inconnu la fonction  $u(x)$  sont complètement déterminée en définissant la relation de récurrence

$$u_0(x) = g(x) , \quad u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt \quad (3.30)$$

Ou équivalent

$$\begin{aligned} u_0(x) &= g(x) \\ u_1(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_0(t) dt \\ u_2(x) &= \lambda \int_a^b k(x, t) u_1(t) dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

Et ainsi de suite pour les autres composantes. En conséquence, les composantes  $u_0(x), u_1(x), \dots$  Sont complètement déterminées. Il en résulte que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Fredholm (3.27) est facilement obtenue sous forme de série en utilisant l'hypothèse de la série dans (3.25). La méthode de décomposition a converti l'équation intégrale en une élégante détermination des composantes calculables, si une solution exacte existe pour le problème, alors la série obtenue converge très rapidement vers cette solution exacte. Cependant, pour les problèmes concrets, lorsqu'une solution de forme fermée n'est pas obtenue, un nombre tronqué de termes est habituellement utilisé à des fins numériques. Plus nous utilisons de composants, plus nous obtenons de précision.

**Exemple 3.6** Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale suivante

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 t u(t) dt \quad (3.32)$$

La méthode de décomposition adomienne suppose que la solution  $u(x)$  a une forme de série donnée en (3.25). En remplaçant la série de décomposition (3.25) Dans les deux côtés de (3.32) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x \int_0^1 t \left[ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt. \quad (3.33)$$

Ou équivalent

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots = e^x - x + x \int_0^1 t [u_0(t) + u_1(t) + \dots] dt. \quad (3.34)$$

Nous identifions la composante zéro par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral. Par conséquent, on obtient la relation de récurrence suivante

$$u_0(x) = e^x - x, \quad u_{k+1}(x) = x \int_0^1 t [u_k(t)] dt. \quad (3.35)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x. \\ u_1(x) &= x \int_0^1 t [u_0(t)] dt = x \int_0^1 t [e^t - t] dt = \frac{2}{3}x. \\ u_2(x) &= x \int_0^1 t \left[ \frac{2}{3}t \right] dt = \frac{2}{9}x. \end{aligned}$$

Et L'utilisation de (3.25) donne la solution en série

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots \right) = e^x. \quad (3.36)$$

### 3.1.3 Méthode des approximations successives

La méthode d'approximation successive fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeur initiale ou des équations intégrales. Cette méthode résout

tout problème en trouvant des approximations successives à la solution en commençant par une approximation initiale comme  $u_0(x)$  appelée approximation zéro qui peut être toute fonction réelle  $u_0(x)$ , qui sera utilisée dans une relation de récurrence à déterminer les autres approximations. Compte tenu des équations intégrales de Fredholm du second type

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

Et selon le choix de  $u_0(x)$  il existe deux méthodes des approximations successives

**i) La méthode de Picard**

Est obtenu pour  $u_0(x) = 0, 1$  ou  $x$  est un réel quelconque

**ii) La méthode de la série de Neumann**

La méthode de la série de Neumann est obtenue lorsque  $u_0(x) = g(x)$  dans les autres termes, tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégrale

$$\begin{aligned} u_1(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u_0(t)dt \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)g(t)dt \\ &= g(x) + \lambda\varphi_1(x) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Où

$$\varphi_1(x) = \int_a^b k(x, t)g(t)dt$$

La seconde approximation  $u_2(x)$  peut être obtenue comme

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt \\
&= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)(g(t) + \lambda\varphi_1(t))dt \\
&= g(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Où

$$\varphi_2(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)dt \tag{3.39}$$

En procédant de cette manière, on peut obtenir la solution finale  $u(x)$

$$u(x) = g(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\varphi_n(x)$$

Où

$$\varphi_n(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt \tag{3.40}$$

La série (3.39) est connue sous le nom de série Neumann. Cette série infinie est absolument et uniformément convergente, puisque

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt}}$$

Si en plus nous avons

$$\int_a^b k^2(x,t)dt \leq A$$

Où  $A$  est une constante, alors la série de Neumann converge absolument et uniformément sur  $[a, b]$ . La solution finale  $u(x)$  est obtenue par

$$u(x) = g(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda^k \varphi_k(x) \quad (3.41)$$

**Exemple 3.7** Soit l'équation Intégrale de seconde espèce

$$u(x) = 1 + \int_0^1 xu(t)dt$$

En utilisant la méthode d'approximation successive (méthode de la série de Neumann). Pour la solution, considérons que l'approximation zéro est  $u_0(x) = g(x) = 1$ , et alors la première approximation peut être calculée comme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \int_0^1 xu_0(t)dt \\ &= 1 + \int_0^1 xdt = 1 + x \end{aligned}$$

En procédant ainsi, nous trouvons

$$\begin{aligned} u_2(x) &= 1 + \int_0^1 xu_1(t)dt \\ &= 1 + \int_0^1 x(1+t)dt = 1 + \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$u_n(x) = 1 + x \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right]$$

Et donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 1 + 2x \end{aligned}$$

C'est la solution.

### Convergence de la méthode des approximations successives

**Théorème 3.8** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur continue sur un espace de banach  $X$  dont le rayon spectral vérifie  $r(A) < 1$ . Alors la méthode des approximations successive définie par :

$$\forall n \in N, u_{n+1} = Au_n + f$$

converge pour tout  $u_0 \in X$ , et  $f \in X$  vers l'unique solution de  $u - Au = f$ .

**Remarque 3.9** Ce résultat est très naturel en dimension finie où le rayon spectral peut être interprété comme la plus grande valeur de  $N(A)$  pour l'ensemble des normes d'algèbre  $N$ , et on a déjà vu qu'un critère de convergence est justement qu'une de ces norme vérifie  $N(A) < 1$ .

### Equation intégrale de Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt \quad (3.42)$$

où  $g(x)$  est une fonction continue dans  $[0, a]$ ,  $k(x, t)$  est une fonction continue pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$

prenons une fonction  $u_0$  continue dans  $[0, a]$ . Remplaçons à  $u(x)$  du second membre de l'équation (3.42)

$$\begin{aligned} u_1(x) &= g(x) + \int_0^x k(x, t)u_0(t)dt \\ u_2(x) &= g(x) + \int_0^x k(x, t)u_1(t)dt \\ &\vdots \\ u_n(x) &= g(x) + \int_0^x k(x, t)u_{n-1}(t)dt \end{aligned}$$

Les fonction  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont ainsi définie et continue elles aussi sur le segment  $[0, a]$  sur les hypothèses faite sur  $g(x)$  et  $k(x, t)$  et d'après la théorème de point fixe  $u_n$  converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers la solution  $u$  de l'équation intégrale.

**Exemple 3.10** Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$$

On pose  $u_0 = 0$  donc  $u_1 = 1$

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$u_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$\vdots$

$$u_n(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donc  $u(x) = e^x$ .

## 3.2 Méthodes numériques

### 3.2.1 Méthodes de projection

**Définition 3.11** Soit  $X$  un espace de Banach, un opérateur  $P \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $P^2 = P$  est appelé un opérateur de projection.

Si  $X$  est un espace de Hilbert l'opérateur  $P$  est un opérateur de projection orthogonal i.e  $\forall u, v \in X : \langle Pv, (I - P)u \rangle = 0$ .

**Proposition 3.12** Soit  $X$  un espace vectoriel,  $X = X_1 \oplus X_2$  si et seulement s'il existe un opérateur linéaire  $P : X \rightarrow X$  tel que  $P^2 = P$  avec  $v_1 = P(v)$  et  $v_2 = (I - P)(v)$  et aussi  $X_1 = P(X)$  et  $X_2 = (I - P)(X)$

#### Principe des méthodes de projection.

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_D k(x, t) u(t) dt = g(x) \quad (3.43)$$

Avec toutes les méthodes de projection, nous envisageons de résoudre (3.43)

Dans le cadre d'un espace de fonction complet, en général  $C(D)$  ou  $L^2(D)$  Nous choisissons une séquence de sous-espaces approximatifs dimensionnels finis  $X_n \subset X$ ,  $n \geq 1$ . Avec  $X_n$  de dimension  $k_n$  finie Soit  $X_n$  de base  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_n}\}$  donc le principe de la méthode de projection consiste a trouver une suite de fonction  $u_n \in X_n$ . Ce qui peut être écrit comme

$$u_n = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x), \quad x \in D \quad (3.44)$$

Pour déterminer les coefficients  $(c_j)$ , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.43), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - \lambda \int_D k(x, t) u_n(t) dt - g(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_D k(x, t) \varphi_j(t) dt \right\} - g(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour  $x \in D$ . C'est ce qu'on appelle le résidu dans l'approximation de l'équation

Lors de l'utilisation de  $u \simeq u_n$  Maintenant, nous écrivons (3.43) en notation d'opérateur comme

$$(I - \lambda k)u = g \quad (3.46)$$

En suite, le résidu peut être écrit comme

$$r_n(x) = (I - \lambda k)u_n - g$$

Les coefficients  $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$  sont choisis en forçant  $r_n(x)$  à être approximativement nul dans un certain sens. L'espoir et l'attente, c'est que la fonction résultante  $u_n(x)$  sera une bonne approximation de solution exacte  $u(x)$ .

Nous avons différents types de méthodes de projection. Les plus utilisées sont :

**Méthodes de collocation**

**Méthodes de Galerkin**

### Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation de Fredholm de seconde espèce.

$$u(x) - \lambda \int_D k(x, t)u(t)dt = g(x) \quad (3.47)$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.47) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation  $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\} \in D$  telle que

$$r_n(x) = 0 \quad n = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$  comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x_i) - \lambda \int_D k(x_i, t)\varphi_j(t)dt \right\} = g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n \quad (3.48)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t)\varphi_j(t)dt + g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

Nous introduisons un opérateur de projection  $P_n : X \rightarrow X_n$ ,  $X = C(D)$  soit  $u \in C(D)$  on définit  $P_n u$  comme élément de  $X_n$  l'interpolation de  $u$  aux points  $x_i$ .

$$P_n u(x) = u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x) \quad (3.49)$$

Donc

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t)\varphi_j(t)dt + g(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i)$$

Alors les coefficients  $c_j$  sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = u(x_i) \quad (3.50)$$

Mais ce système admet une solution unique si

$$\det |\varphi_j(x_i)| \neq 0$$

donc  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$  constituent un système linéairement indépendant.

### Méthode de Galerkin

Soit  $X = L^2(D)$  ou un autre espace de fonctions de Hilbert, et donne  $\langle \cdot \rangle$  muni d'un produit scalaire pour. Exiger le résiduel  $r_n$  pour satisfaire

$$\langle r_n, \varphi_i \rangle = 0 \quad (3.51)$$

Le côté gauche est le coefficient de Fourier de  $r_n$  associé à  $\varphi_i$ . Si  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$  se compose des membres principaux d'une famille orthonormée  $\phi = (\varphi_i)_{i \geq 1}$  qui s'étend sur  $X$ , alors (3.51) nécessite les termes avancés à être zéro dans l'expansion de Fourier de  $r_n$  par rapport à  $\phi$ .

Pour trouver  $u_n$ , appliquer (3.51) à (3.43) écrit comme  $(\lambda - k)u = g$ . Cela donne le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle - \lambda \langle k\varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle g, \varphi_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k_n \quad (3.52)$$

C'est la méthode de Galerkin [7]. Pour obtenir une solution approximative à (3.43) ou (3.46). Le système a-t-il une solution? Si c'est le cas, est-ce unique? La suite résultante de solutions approximatives  $u_n$  converge-t-elle en  $u$  dans  $X$  La converge-t-elle en  $C(D)$ , c'est-à-dire que  $u_n$  converge uniformément en  $u$ . Notez également que la formulation ci-dessus contient des intégrales doubles  $\langle k\varphi_j, \varphi_i \rangle$ , Ceux-ci doivent être calculés numériquement.

Dans le cadre de l'écriture (3.52) sous une forme plus abstraite, nous rappelons l'opérateur de projection orthogonale  $P_n$  de Proposition (3.12) de la section (3.2.1), qui envoie  $X$  sur  $X_n$ .

Rappeler que

$$P_n h = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \langle h, \varphi_i \rangle = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k_n \quad (3.53)$$

À l'aide de la projection orthogonale  $P_n$ , nous pouvons réécrire (3.51) comme

$$P_n r_n = 0$$

Ou équivalent

$$P_n(I - \lambda k)u_n = P_n g, \quad u_n \in X_n \quad (3.54)$$

Les polynômes de Legendre sont utilisés comme fonctions d'essai dans la base. Pour cela, nous proposons une brève introduction des polynômes de Legendre d'abord. Ensuite, nous dérivons une formulation matricielle par la technique de la méthode Galerkin.

**Exemple 3.13** Soit l'équation Intégrale de seconde espèce

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)u(t)dt$$

Prenant pour système complet sur  $[-1, 1]$  un système de polynômes de Legendre  $\{l_i(x)\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  avec  $l_1(x) = 1, l_2(x) = x, l_3(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ .

On cherche la solution sous la forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Le résidu est égale a

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1)(c_1 + c_2t + c_3(\frac{3t^2 - 1}{2}))dt.$$

En calculant l'intégrale on obtient

$$r_3(x) = \frac{4}{3}x + 3c_1 - \frac{2}{3}xc_1 + xc_2 - \frac{4}{15}xc_3 + c_3 \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) - 1$$

d'après l'orthogonalité du résidu  $r_3$  au système  $\left\{ 1, x, \frac{3x^2-1}{2} \right\}$  on a

$$\begin{aligned} \langle r_3, 1 \rangle &= 6c_1 - 2 = 0 \\ \langle r_3, x \rangle &= \frac{8}{9} + \frac{2}{3}c_2 - \frac{8}{45}c_3 - \frac{4}{9}c_1 = 0 \\ \left\langle r_3, \frac{3x^2 - 1}{2} \right\rangle &= \frac{2}{5}c_3 = 0 \end{aligned}$$

On obtient

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = -\frac{10}{9}, c_3 = 0$$

Donc la solution est

$$u_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x$$

**Exemple 3.14** Soit l'équation Intégrale de seconde espèce

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 xt u(t) dt \quad (3.55)$$

Choisissons pour système complet sur  $[-1, 1]$  un système de polynômes de Legendre  $L_n(x)$   $(0, 1, 2, \dots, n)$ , et cherchons une solution approchée  $u_n(x)$  de la forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Portons dans (3.55)  $u_3(x)$  à la place de  $u(x)$ , il vient

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^1 xt (c_1 + c_2t + c_3 \frac{3t^2 - 1}{2}) dt$$

Où

$$c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x \frac{2}{3} c_2$$

En multipliant successivement les deux membres de la dernière équation par 1,  $x$ ,  $\frac{3x^2-1}{2}$ , et en intégrant par rapport à  $x$  de  $-1$  à  $1$ , nous obtenons.  $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$

### 3.2.2 Méthode de Nyström

Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour aboutir à un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau  $K$  par un opérateur de dimension fini, i.e une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution d'équation numérique. [6], [28]

On souhaite approximer l'opérateur à noyau  $A$  défini par :

$$\forall x \in D, (A\varphi)(x) := \int_D K(x, y) \varphi(y) dy \quad (3.56)$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature ( $Q_n$ ) pour calculer l'intégrale du noyau via des points  $(x_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$  ainsi que des poids  $(\alpha_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$  d'où l'introduction d'un nouvel opérateur

$$A_n : \forall x \in D, (A_n \varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)}) \varphi(x_k^{(n)}) \quad (3.57)$$

**Remarque 3.15** On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs  $Q_n : C(D) \rightarrow C(D)$ . On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, i.e si :

$$\forall f \in C(D), Q_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_D f \quad (3.58)$$

Alors, on va approcher la solution  $\varphi$  de l'équation  $\varphi - A\varphi = f$  par la solution  $\varphi_n$  du problème

$$\varphi_n - A_n \varphi_n = f \quad (3.59)$$

Ceci mène, une fois le problème discrétisé une seconde fois, à la résolution d'un système linéaire. Ce qui est remarquable, c'est qu'une fois ce système résolu, on peut construire une solution de notre problème d'approximation original (3.59). Tout ceci est résumé par le théorème suivant :

**Théorème 3.16** Soit  $\varphi_n$  comme décrit précédemment. Alors les valeurs  $\varphi_j^{(n)} = \varphi_n(x_j^{(n)})$  sont solution du système linéaire suivant, où l'on a noté  $k_{ij} = k(x_i^{(n)}, x_j^{(n)})$

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 k_{11} & -\alpha_2 k_{12} & \dots & -\alpha_n k_{1n} \\ -\alpha_1 k_{21} & 1 - \alpha_2 k_{22} & \dots & -\alpha_n k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_1 k_{n1} & -\alpha_2 k_{n2} & \dots & 1 - \alpha_n k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \dots \\ \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1^{(n)}) \\ f(x_2^{(n)}) \\ \dots \\ f(x_n^{(n)}) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Réciproquement, si on se donne une solution  $(\varphi_j^{(n)})_{1 \leq j \leq n}$  du système (3.60), alors la fonction  $\varphi_n$  définie par :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} k(x, x_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)} \quad (3.61)$$

vérifie l'équation (3.59).

**Remarque 3.17** Une variante consisterait à prendre des méthodes de quadratures différente pour chaque  $x$ , ceci menant aux même calcul, avec un indice de plus au niveau des poids  $\alpha_i$ . Pour mémoire, on se contentera de citer un théorème de convergence, que l'on peut retrouver dans [28].

### Convergence de la méthode de Nyström

**Théorème 3.18** On suppose que les règles de quadrature  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de notre méthode de Nyström sont convergentes. Dans ce cas la méthode Nyström est convergente point à point, i.e

$$\forall \varphi \in C(D), A_n \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \varphi$$

mais ne converge pas nécessairement en norme.

**Preuve.** Pour la preuve voir [49]. ■

# Chapitre 4

## Méthodes d'approximations spectrales

### Introduction

Dans ce chapitre on expose mon travail qui consiste comment utiliser les méthodes spectrales pour la résolution certaine type des équations intégrales linéaires, cette technique est basée sur l'approximation de la solution (inconnue) sous la forme d'une série, notamment la série d'Euler.

### 4.1 Polynômes orthogonaux

Nous considérerons dans toute la suite un intervalle  $I$  de  $R$ , borné ou non, et une fonction  $w > 0$  sur  $I$ , appelée fonction de poids, qui vérifie  $\int_a^b x^n w(x) dx < +\infty$ , pour tout entier  $n \in N$ . Tout polynôme est donc intégrable pour la mesure de densité  $w$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $I$ . Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet alors de construire à partir de la base naturelle  $1, X, \dots, X^n$ , de  $P_n$  une famille orthogonale de polynômes  $P_n$ , qu'on peut supposer unitaires. Si on veut une base orthonormée, il suffit de diviser les  $P_n$  par leur norme. On obtient ainsi une famille

$\tilde{P}_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire. Ces familles vérifient alors les relations de récurrence qui s'écrivent :

$$P_n(X) = (X - \lambda_n)P_{n-1}(X) - \mu_n P_{n-2}(X), (n \geq 1)$$

Où

$$\lambda_n = \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}, \quad \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}$$

En particulier  $\mu_n > 0$  pour tout  $n \geq 2$  dans le cas des polynômes unitaires  $P_n(X) = X^n + \dots$  en posant  $P_{-1} = 0$ . Plus généralement, on montre que toute famille orthonormée  $P_n$  de polynômes orthogonaux de degré  $n$  vérifie une relation de récurrence du même type :

$$xP_{n-1} = \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1} + \gamma_n P_{n-2}$$

Cette remarque est utile, car on est parfois amené à utiliser d'autres familles orthogonales que celles normalisées par leur norme ou leur terme de plus haut degré ; c'est en particulier le cas pour les polynômes de Tchebychev  $T_n$ , qui interviennent naturellement sous la forme  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ . Les  $P_n$  sont normalisés par leur coefficient de plus haut degré si  $\alpha_n = 1$  pour tout  $n$  à condition d'avoir pris  $P_0 = 1$  et par leur norme euclidienne si  $\gamma_n = \alpha_{n-1}$  pour tout  $n$ . De plus, les racines du polynôme  $P_n$  sont, pour tout  $n \geq 1$ , réel, à l'intérieures de l'intervalle  $I$  et distinctes. Les démonstrations détaillées se trouvent dans [18]

### Définition et propriétés

On désigne par  $I = [a, b]$ ,  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ , l'intervalle de  $R$  et par  $w(x)$  la mesure réelle positive, telle que

$$\int_a^b x^n w(x) dx < +\infty, \quad n \in N$$

où  $w$  est la fonction de poids,  $C([a, b])$  l'espace des fonctions continues sur  $I$ .

**Remarque 4.1** *Au lieu de travailler avec des fonctions à valeurs réelles, on aurait aussi pu travailler avec des fonctions à valeurs complexes, en introduisant le produit scalaire hermitien.*

Soit  $f, g \in C(I)$ , le produit scalaire est défini comme suit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$$

### 4.1.1 Orthogonalité

**Définition 4.2** On dit que la famille de polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux si quelque soit  $P_i, P_j$  de  $C(I)$  on a

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b P_i(x) \overline{P_j(x)} w(x) dx = 0$$

généralement on dit que la famille de polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux sur  $I$  au poids  $w$  si

le degré de  $P_i$  est  $i$  pour tout entier  $i$  et

$$\langle P_i, P_j \rangle_w = 0, \quad i \neq j$$

la famille  $(P_i)_{i \geq 0}$  est orthogonale si

$$\langle P_i, P_j \rangle_w = \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### 4.1.2 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit  $X$  un espace préhilbertien, on considère alors une suite de vecteurs libres  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $X$  une base orthogonale  $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  de vecteurs de  $X$  définie par :

$\forall i = 1, \dots, n : v'_i \in \text{Vect} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  on pose  $v'_1 = v_1$  et on cherche  $v'_2$  tel que  $v_2 + \alpha_{1,2} v'_1$  on veut  $\langle v'_1, v'_2 \rangle = 0$  est réalisé si et seulement si :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\langle v'_1, v_2 \rangle}{\|v'_1\|^2}$$

les vecteurs  $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  étant construits ; on cherche  $v'_k$  sous la forme  $v_k + \alpha_{1,k} v'_1 + \dots + \alpha_{k-1,k} v'_{k-1}$  et on veut  $\langle v'_i, v'_k \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, k-1$  ce qui sera réalisé

si et seulement si :

$$\alpha_{i,k} = -\frac{\langle v'_i, v_k \rangle}{\|v'_i\|^2}$$

## 4.2 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux classiques qui constituent la classe la plus importante des polynômes orthogonaux, sont définis selon les valeurs des bornes d'intégrations de l'intervalle  $I$  et selon l'expression de la mesure de densité  $w$ , le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt conduit à diverses familles de polynômes orthogonaux.

### Formule de d'Olinde Rodrigues.

La formule d'Olinde Rodrigues est une formule simple, permettant de calculer directement une suite de polynômes orthogonaux  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas des polynômes orthogonaux classiques en fonction de la fonction poids  $w$  et du polynôme

$$P_n(x) = \frac{1}{w} \frac{d^n}{dx^n} (Q^n w)$$

### Fonction génératrice et polynômes orthogonaux classiques

On appelle fonction génératrice du système de fonctions  $\varphi_n(x)$ , une fonction  $\phi(x, t)$  dont le développement en série suivant les puissances de  $t$  dans un certain domaine  $D$  est le suivant

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) t^n$$

On suppose que les fonctions  $\varphi_n(x)$  sont des polynômes  $P_n(x)$  de degré  $n$

**Théorème 4.3** *Une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes  $P_n(x)$  définis par le développement :*

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$$

*soient orthogonaux sur l'intervalle  $[a, b]$  relativement à la fonction de densité au poids  $w(x)$  est que l'intégrale*

$$I = \int_a^b \phi(x, t) \phi(x, t') w(x) dx$$

*ne dépend que du produit  $tt'$ .*

**Preuve.** En effet

$$I = \int_a^b \sum_{n,m=0}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)t^n t^m \omega(x) dx = \sum_{n,m=0}^{+\infty} t^n t^m \langle P_n, P_m \rangle$$

Donc si  $n \neq m$  alors  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$  et on a

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n t^n \langle P_n, P_n \rangle.$$

■

### Polynômes de Laguerre

La famille des polynômes de Laguerre généralisée est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes.

1- La suite des polynômes de Laguerre généralisée  $L_n^\alpha(x)$  est donnée par la fonction génératrice

$$\varphi_\alpha(x, t) = \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)$$

Avec

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha+n)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k$$

Si  $\alpha = 0$  on a  $L_n^0(x) = L_n(x)$  avec  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$ . Cette suite  $L_n(x)$  des polynômes de Laguerre est une base orthonormée dans  $L^2([0, +\infty[)$ . Par conséquent  $\langle L_n, L_m \rangle = 0$ , et  $\|L_n\|_{L^2([0, +\infty[)} = 1$

2- Les polynômes  $L_n^\alpha(x)$  sont définies par formule d'Olinde Rodrigues  $L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x})$

3- La suite des polynômes de Laguerre généralisée vérifie la relation de récurrence

$$L_{n+1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$

### Polynômes d'Hermite

La famille des polynômes d'Hermite est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes :

1- les polynômes d'Hermite  $H_n(x)$  sont donnés par la fonction génératrice

$$\varphi(x, t) = e^{-2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t^n$$

2- Les polynômes d'Hermite  $H_n(x)$  sont définis par formule d'Olinde Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{d^n(x)}(e^{-x^2})$$

3- La suite des polynômes d'Hermite  $(H_n)_{n \geq 1}$  vérifie la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

est orthogonale dans  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

4- La famille  $\tilde{H}_n(x) = H_n(x)/2^n n! \sqrt{\pi}$  est une base orthonormée dans  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

### Polynômes de Legendre

La famille des polynômes de Legendre est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1- Les polynômes de Legendre  $l_n(x)$  sont donnés par la fonction génératrice

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(x)t^n$$

2- Les polynômes de Legendre  $l_n(x)$  sont définies par formule d'Olinde Rodrigues

$$l_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d^n(x)}((x^2 - 1)^n)$$

3- La suite des polynômes de Legendre  $(l_n(x))_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$l_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x l_n(x) - \frac{n}{n+1} l_{n-1}(x)$$

La famille  $(l_n(x))_{n \geq 0}$  est orthogonale dans  $L^2([-1, 1])$

### Polynômes de Tchebychev

La famille des polynômes de Tchebychev est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1- Les polynômes de Tchebychev  $T_n(x)$  sont donnés par la fonction génératrice

$$\varphi(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)t^n$$

2- Les polynômes de Tchebychev  $T_n(x)$  sont définis par formule d'Olinde Rodrigues

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1} (n-1)!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})$$

3- La suite  $(T_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

aussi est une base orthonormée sur  $L^2([-1, 1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx)$ , et vérifie la relation

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

### Polynômes de Jacobi

Intervalle fondamental :  $[-1, 1]$ .

Mesure :  $d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$ ,  $\alpha, \beta > -1$

Normalisation standard (si  $\alpha \neq 0$ )

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n! \Gamma(1+\alpha)}$$

Carré de la norme du polynôme normalisé :

$$\frac{\pi 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+1+\alpha) \Gamma(n+1+\beta)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

## 4.3 Méthodes d'approximations spectrales

### Introduction

Les méthodes spectrales introduites par D.Gottlieb, et S.Orszag [25, 45] ont été utilisées pour l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Elles furent initialement introduites par l'utilisation des séries de Fourier tronquées qui ont été essentiellement utilisées pour l'approximation des problèmes avec des conditions aux limites périodiques,

ensuite par l'utilisation des polynômes de haut degré formant des bases tensorisées des espaces d'approximations qui est une propriété fondamentale dans la construction des méthodes spectrales. L'approximation par les méthodes spectrales généralement fait appel à des polynômes de la famille des polynômes de Jacobi,

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^k \binom{k+\alpha}{l} \binom{k+\beta}{k-l} (x-1)^l (x+1)^{k-l}, \forall x \in [-1, 1]$$

par rapport à la fonction poids  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ .

Bien sûr, la nature et le choix des polynômes d'approximation dépendent particulièrement du domaine sur lequel on cherche la solution. On fait appel par exemple aux polynômes de Legendre (pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ ), ou aux polynômes de Tchebycheff de première espèce (pour  $\alpha = -\frac{1}{2}$  et  $\beta = -\frac{1}{2}$  à un facteur multiplicatif près qui dépend essentiellement du degré  $k$ ) si on se place sur le segment  $I = [-1, 1]$ .

Numériquement. Par exemple, les méthodes spectrales [25,53] font appel à l'utilisation des polynômes de Tchebycheff sont parfois difficiles à mettre en œuvre et analyser numériquement en particulier lorsqu'il s'agit des problèmes des méthodes spectrale. Il faut savoir aussi que la définition et l'analyse numérique des méthodes spectrale reposent en grande partie sur les propriétés des polynômes orthogonaux. Pour une brève introduction aux méthodes spectrale, on considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce de frontière finie

$$u(x) = g(x) + \int_{-1}^1 k(x,t)u(t)dt \quad (4.1)$$

telle que  $g(x)$  une fonction numérique continue pour  $x \geq 0$  et le noyau  $k(x,t)$  une fonction définie sur  $I = \{(x,t), x \geq -1, t \leq 1\}$ ,  $u(x)$  une fonction qui doit être déterminée.

## 4.4 Résolution numérique des équations intégrales de frontière finie

**Proposition 4.4** *Considérons le systèmes de fonctions suivantes*

$$\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$$

Où

$$l_0(x) = 1, l_1(x) = x, \dots, l_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} x^{k-2j}$$

ce système forme une base orthonormée dans  $L^2([-1, 1])$ .

En effet on vérifie que

$$\langle l_m(x), l_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 l_m(x) l_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Les propriétés pertinentes sont

$$\|l_k(x)\| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} l_k(\pm 1) &= (\pm 1)^k \\ \left\| l'_k(x) \right\| &\leq \frac{1}{2} k(k+1), \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-1}^1 l_k^2(x) dx &= \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Où  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  désigne la partie intégrante de  $\frac{k}{2}$

Les polynômes de Legendre satisfont la relation récurrente

$$l_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x l_k(x) - \frac{k}{k+1} l_{k-1}(x)$$

Pour résoudre l'équation itégrale (4.1) nous utilisons la méthode de projection par l'approximation de  $u_n(x)$  qui est une combinaisons linéaire finie de polynôme orthogonaux  $l_n(x)$ , et aussi solution de l'équation intégrale(4.1)

$$u_n(x) = g(x) + \int_{-1}^1 k(x, t) u_n(t) dt \quad (4.2)$$

En prenant la combinaison linéaire des polynômes de Legendre

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n C_j l_j(x) \quad (4.3)$$

En remplaçant (4.3) dans (4.2) on trouve

$$\sum_{j=0}^n C_j l_j(x) = g(x) + \int_{-1}^1 k(x,t) \sum_{j=0}^n C_j l_j(t) dt \quad (4.4)$$

Soit

$$b_j(x) = \int_{-1}^1 k(x,t) l_j(t) dt$$

Donc (4.4) écrit comme suit

$$\sum_{j=0}^n C_j (l_j(x) - b_j(x)) = g(x) \quad (4.5)$$

En multipliant (4.5) par  $l_i(x)$  on trouve

$$\sum_{j=0}^n C_j \langle l_j(x) - b_j(x), l_i(x) \rangle = \langle g(x), l_i(x) \rangle \quad (4.6)$$

Par la condition d'orthogonalité dans (4.6) on obtient

$$C_i - \sum_{j=0}^n C_j \langle b_j(x), l_i(x) \rangle = \langle g(x), l_i(x) \rangle, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

Le déterminant de ce système est le suivant

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \langle b_0, l_0 \rangle & -\lambda \langle b_1, l_0 \rangle & \dots & -\lambda \langle b_n, l_0 \rangle \\ -\lambda \langle b_0, l_1 \rangle & 1 - \lambda \langle b_1, l_1 \rangle & \dots & -\lambda \langle b_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda \langle b_0, l_n \rangle & -\lambda \langle b_1, l_n \rangle & \dots & 1 - \lambda \langle b_n, l_n \rangle \end{vmatrix}$$

Si  $D(\lambda) \neq 0$ , le système (4.7) admet une solution unique.

## 4.5 Solutions des équations intégrales linéaires par la série d'Euler

### Introduction

L'équation intégrale apparaît naturellement dans de nombreuses applications physiques liées à la propagation des ondes et aux phénomènes de vibration. Il est souvent utilisé pour

décrire le problème de la cavité acoustique, la diffusion d'une onde et l'onde de rayonnement. La résolution numérique des équations intégrales de Fredholm et de Volterra a été étudiée par de nombreux auteurs [1, 12, 29]. Pour les méthodes qui utilisent la règle en quadrature, la collocation et l'interpolation, les noyaux dégénérés, la série Chebyshev, la série Haar et ainsi de suite [32, 37, 44]. Dans ce travail, nous considérons l'approximation de la série d'Euler pour la solution de ces équations intégrales, certainement cette technique nous conduit aux meilleures approximations

$$u(x) - \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in \Omega \quad (4.8)$$

où les fonctions  $f(x)$  et  $k(x, t)$  sont donnée et continues dans  $\Omega$ , et  $\Omega \times \Omega$  (respectivement), la fonction  $u(t)$  doit être déterminée comme fonction continue dans  $\Omega$ . Selon le domaine  $\Omega = [a, t]$  ou  $[a, b]$ , l'équation (4.8) décrit l'équation intégrale de Volterra ou de Fredholm, (respectivement).

L'équation (4.8) peut être mise sous la forme d'une équation à opérateur linéaire

$$u(x) - Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec l'opérateur linéaire  $A$  donné par

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, t)u(t)dt.$$

Pour la solution de l'équation (4.8) dans les espaces de fonction complets, prenez habituellement  $C(\Omega)$ ; nous choisissons une suite de sous-espaces dimensionnels complets  $V_n$ ,  $n \geq 1$ , ayant  $n$  fonctions de base  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  avec dimension de  $V_n = n$ .

La recherche de la fonction approximative  $u_n \in V_n$  de la fonction  $u$  est donnée par

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k(x) \quad (4.9)$$

où l'expression (4.9) décrit la série tronquée d'Euler de la solution de l'équation (4.8); avec les fonctions  $\{E_k\}_{0 \leq k \leq n}$  représentent les polynômes d'Euler et  $\{\alpha_k\}_{0 \leq k \leq n}$  les coefficients à déterminer. En d'autres termes, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 r_n(x) &= u_n(x) - A_n u(x) - f(x), \\
 r_n(x) &= u_n(x) - \int_{\Omega} k(x, t) u_n(t) dt - f(x), \\
 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{\Omega} k(x, t) E_k(t) dt - f(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( E_k(x) - \int_{\Omega} k(x, t) E_k(t) dt \right) - f(x), \quad x \in \Omega.
 \end{aligned}$$

### Solution avec méthode de collocation

Choisissez une sélection de points distincts  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$  et exigeons que

$$r_n(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

La condition (4.10) nous conduit à déterminer les coefficients  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  solution du système linéaire

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \left( E_k(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t) E_k(t) dt \right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Définir les matrices

$$E = (E_{kj}) = E_k(x_j)$$

et

$$K = (K_{kj}) = \int_{\Omega} k(x_j, t) E_k(t) dt.$$

Si le  $\det(E - K) \neq 0$ , nous pouvons assurer qu'il existe une solution du système linéaire (4.11), et par conséquent la solution approximative  $u_n(x)$  en tant que combinaison linéaire

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k(x),$$

Pour qui

$$u_n(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t) u_n(t) dt = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(E - K)\alpha = F, \quad (4.12)$$

Où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$  et  $F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T$  Pour le le déterminant du système (4.12) est différent de zéro  $\det(E - K) \neq 0$ , alors il est admet une solution unique

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = (E - K)^{-1}F.$$

La solution approximative correspondante

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_k(x),$$

a la propriété que  $r_n(x)$  soit nul aux noeuds choisis  $x_j$ .

### Polynômes d'Euler

Les n<sup>ième</sup> Polynômes d'Euler  $E_n(x)$  sont définis par  $E_0(x) = 1$  et la relation de récurrence suivante

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Notant que, le polynôme d'Euler  $E_n(x)$  est un polynôme à Coefficients rationnels.

$E_0(x)$	$E_1(x)$	$E_2(x)$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_5(x)$
1	$x - \frac{1}{2}$	$x^2 - x$	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$	$x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x$	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}$

**Tableau.1** présente coefficients rationnels de polynôme d'Euler

et admet aussi les égaux

$$E_n(x + s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) s^{n-k} \quad \text{et} \quad E_n(x + 1) + E_n(x) = 2x^n .$$

**Erreur d'analyse**

**Théorème 4.5** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur compact et l'équation

$$(I - A)u = f, \quad (4.13)$$

admet une solution unique. Supposons que les projections  $P_n : X \rightarrow X_n$  satisfait à  $\|P_n A - A\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Alors, pour une valeur suffisante  $n$ , l'équation approximative

$$u_n - P_n A u_n = P_n f, \quad (4.14)$$

a une solution unique pour tout  $f \in X$ , et il existe une estimation d'erreur

$$\|u - u_n\| \leq M \|u - P_n u\|, \quad (4.15)$$

.avec une constante  $M$  dépendant de  $A$

**Preuve.** Comme il est connu pour tous les  $n$  suffisamment grands les opérateurs inverse  $(I - P_n A)^{-1}$  existent et sont uniformément borné. Pour vérifier l'erreur liée, nous appliquons l'opérateur de projection  $P_n$  à l'équation (4.13) et obtenons

$$P_n u - P_n A u = P_n f,$$

ou encore

$$u - P_n A u = P_n f + u - P_n u.$$

En soustrayant ceci de (4.14) nous voulons

$$(I - P_n A)(u - u_n) = (I - P_n)u.$$

D'où l'estimation (4.15). ■

**4.6 Résultats numériques**

**Exemple 4.6** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$u(x) + \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \cos(x).$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 2.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.6 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et comparée avec celles traitées dans [32]

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur [32]
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.00e+00	0.0e+00
0.200000	9.800666e-001	9.800666e-001	2.07e-09	1.8e-04
0.400000	9.210610e-001	9.210610e-001	8.11e-09	8.3e-04
0.600000	8.253356e-001	8.253356e-001	1.76e-08	2.3e-03
0.800000	6.967067e-001	6.967067e-001	2.99e-08	7.8e-03
1.000000	5.403023e-001	5.403023e-001	4.38e-08	5.7e-03

**Exemple 4.7** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1 - x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 1 - \sinh(x).$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 3.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.7 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et com-

parée avec celles traitées dans[9].

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur [9]
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.00e+00	0.0e+00
0.200000	7.986640e-001	7.986640e-001	2.80e-08	2.2e-05
0.400000	5.892477e-001	5.892477e-001	5.81e-08	8.3e-05
0.600000	3.633464e-001	3.633465e-001	9.22e-08	1.7e-04
0.800000	1.118940e-001	1.118942e-001	1.32e-07	2.9e-04
1.000000	-1.752012e-001	-1.752010e-001	1.82e-07	4.3e-04

**Exemple 4.8** Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$u(x) - \int_0^\pi (\cos t + \cos x)u(t)dt = \sin x, \quad 0 \leq x, t \leq \pi,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \sin x + \frac{4}{2 - \pi^2} \cos x + \frac{2\pi}{2 - \pi^2}.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 4.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.8 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 8$  est calculée et comparée avec celles traitées dans [12]

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur [12]
0.000000	-1.306697e+000	-1.306872e+000	1.75e-04	5.2e-01
0.785398	-4.507167e-001	-4.508725e-001	1.55e-04	2.1e-02
1.570796	2.015882e-001	2.014807e-001	1.07e-04	3.6e-01
2.356194	2.681065e-001	2.680475e-001	5.90e-05	1.1e-01
3.141593	-2.901271e-001	-2.901661e-001	3.90e-05	7.5e-01

**Exemple 4.9** Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$u(x) - \int_0^1 (\sqrt{t} + \sqrt{x})u(t)dt = 1 + x, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = -\frac{129}{70} - \frac{141}{35}\sqrt{x} + x.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 5.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.9 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et comparée avec celles traitées dans [12]

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur [12]
0.000000	-1.842857e+000	-1.851789e+000	8.93e-03	6.9e-01
0.250000	-3.607143e+000	-3.620560e+000	1.34e-02	8.2e-02
0.500000	-4.191487e+000	-4.207458e+000	1.59e-02	3.7e-02
0.750000	-4.581702e+000	-4.599243e+000	1.75e-02	6.4e-02
1.000000	-4.871429e+000	-4.890259e+000	1.88e-02	9.5e-02

**Exemple 4.10** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$u(x) - \int_0^x (-16x + 0.1x(x^2 - 3t^2)) u(t) dt = 1 + 16x^2 + x^3 + 4x^5 + 0.025x^7, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 1 + x^3.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 6.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.10 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et comparée

avec celles traitées dans [54]

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur max [54]
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	4.88e-15	8.03e-02
0.200000	1.008000e+000	1.008000e+000	7.14e-08	
0.400000	1.064000e+000	1.064000e+000	3.61e-07	
0.6.00000	1.216000e+000	1.215999e+000	7.08e-07	
0.800000	1.512000e+000	1.511999e+000	9.87e-07	
1.000000	2.000000e+000	1.999999e+000	1.25e-06	

**Exemple 4.11** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1+x, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction  $f(x)$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \exp(x).$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série d'Euler.

**Tableau 7.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 4.11 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et comparée avec celles traitées dans [54]

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$	Erreur	Erreur max [54]
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	2.22e-16	5.49e-06
0.200000	1.221403e+000	1.221402e+000	3.81e-07	
0.400000	1.491825e+000	1.491824e+000	7.92e-07	
0.600000	1.822119e+000	1.822117e+000	1.34e-06	
0.800000	2.225541e+000	2.225539e+000	2.08e-06	
1.000000	2.718282e+000	2.718279e+000	2.99e-06	

**Algorithme**

```

K(x, t) = ..... ;%écrire le noyau
F(x) = ..... ;

U(x) = ..... ;% la solution de ce équation

n = ... ; n degré de polynôme
%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%

Ei = [1, x - 1/1, ...] ; les polynômes n-ème premières d'Euler

z = a + (b - a)/(n - 1); (i = 1 : n); % a et b sont les bornes d'intégration

Pour i = 1 à n faire
G(x) = E(x) - ∫ K(x, y)E(y)dy ;
A(i, :) = G(z) ;
Fin pour

B = F(z^T);

C = (A.T)^(-1) * B;

Uap(x) = E(x) * C;

Err = |U(s) - Uap(s)| % S une quelque vector de [a, b].

```

# Conclusion générale et perspectives

Dans notre travail on a traité l'aspect numérique des équations intégrales dans un cadre fonctionnel. Ainsi, nous avons donné les principaux types des méthodes d'approximation numérique, telles que les méthodes spectrales.

Nous présenterons quelques méthodes analytiques importantes pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce, telles que les méthodes, noyau dégénéré, décomposition Adomian, approximation successive (Picard, Série de Neuman). Ainsi, nous avons donné les principaux types des méthodes d'approximation numérique. comme la Méthodes de Nyström, Méthodes de projection, (collocation, Galerkin).

En suite nous allons développer quelques méthodes spectrales pour la discrétisation de quelques types d'équations intégrales, ces méthodes seront basées sur différents choix des polynômes orthogonaux.

Nous proposons une méthode numérique cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement des équations intégrales linéaires, basée sur la série tronquée d'Euler de la solution, est présentée. Si le résidu  $r_n(x_j) = 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$  alors la solution approximative  $u_n(x)$  sera sensiblement proche de la solution  $u(x)$  sur l'intervalle entier  $\Omega$ . L'efficacité de cette méthode est testée en résolvant quelques exemples pour lesquels la solution exacte est connue. Cela nous permet d'estimer l'exactitude avec nos résultats numériques et de comparer ceux avec d'autres résultats traités par d'autres auteurs [9, 12, 32, 54].

Le but de notre travail étant à approximer la solution d'une équation intégrale sous d'une série tronquée. A cette fin nous proposons et ce notre futur travail de suivre le même axe et la même technique décrite ci-dessus pour les polynômes orthogonaux de domaine non borné.

# Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in *Numer Algor*, 56, (2011) 27–43.
- [2] W. Abdul-Majid, *Linear and Nonlinear Integral Equations : Methods and Applications*, Springer Heidelberg, Dordrecht London, 2011.
- [3] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [4] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method*, Kluwer, Boston, 1994.
- [5] G. Arfken, *Laguerre Functions, Mathematical Methods for Physicists*, 1985.
- [6] J. Arvo. *Linear operators and integral equations in global illumination*. Cornell University, 1993.
- [7] K. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, the press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, 1997.
- [8] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework*. Springer, 2001.
- [9] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [10] E. Babolian, H.R. Marzban, M. Salmani, Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, *App. Math. and Comput.*, 201, (2008) 452-464.
- [11] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*, Chealsea publishing company. 1978.

- 
- [12] A. Chakrabarti, S.C. Martha, Approximate solutions of Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 211, (2009) 459–466.
- [13] N. K. Basu, *SIAM J. Numer. Anal.*, 10, (1973) 496-505.
- [14] N. Bildik, A. Konuralp, S. Yalçınbas , Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 59 (2010) 1909–1917.
- [15] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, masson, 1983.
- [16] F. Bulbul, M. Islam, Investigation of the Solution of a Fredholm Integral Equation of First Kind with un symmetric Kernel by Using Fourier Series, *International Journal of Science and Technology*, Vol. 1, No.5, November (2011).
- [17] L. Debnath, P. Mikusninski, *Introduction to Hilbert spaces with application*, Academic press, New York, 1990.
- [18] J. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [19] A. Draux, *Polynômes orthogonaux et approximants de Padé*, Technip, 1987.
- [20] L. Fox, I. Parker, *Chebyshev polynomials in Numerical Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [21] A. Jerri. *Introduction to Integral Equations with Applications*, Marcel Dekker, INC ,New York and Bassel, 1985.
- [22] A. Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [23] E. Hille, J. Tamarkin, On the characteristic values of linear integral equations. *Acta Math*, 57, (1931) pp. 1-76.
- [24] B. Gagui, *Sur les équations intégrales dans les espaces d’Orlicz*, thèse de Doctorat, Université de Msila, 2015.
- [25] D. Gottlieb, S.A. Orzag, *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and applications*, Siam Publications, Philadelphia, 1977.

- 
- [26] A. Karoui, On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia. Appl.18 (2005) 299-305.
- [27] A. Kolmogorov, S. Fomine, éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition Mir, 1973.
- [28] R. Kress. Linear integral equations. Springer Verlag, 1999.
- [29] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [30] C. Kwang. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. Journal of Integer Sequences, volume 4 article, 01.1.6, issue 1 (2001), pp 1-7.
- [31] W. Lovitt. linear integral equation, Dover, NewYork. 1950.
- [32] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput, 161, (2005) 915–922.
- [33] K. Maleknejad, M. Karami, Using the WPG method for solving integral equations of the second kind, App. Math. and Comput., 166, (2005) 123-130.
- [34] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi, Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, Applied Mathematics and Computation, 193, (2007), 335-339.
- [35] F. Mirzaee, Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, no. 20, (2012), 969 - 974.
- [36] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, université M'sila 2008.
- [37] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, ( 2014), pp 37-44.
- [38] M. Nadir, Approximation solution for singular integral equations with logarithmic kernel using adapted linear spline, Journal of Theoretical and Applied Computer Science, Vol. 10, no. 1, (2016), pp. 19-25.
- [39] M. Nadir, A modified linear approximation for weakly singular integrals, Journal of Theoretical and Applied Computer Science Vol. 9, no. 4, (2015), pp. 19-25.

- 
- [40] M. Nadir, M. Chemcham, A Numerical Approach For Solution Of Hammerstein Integral Equations in  $L^2$  Spaces, Applied Mathematics E-Notes, Vol. 14, (2014), pp. 127-134.
- [41] M. Nadir, A. Khirani, Adapted Newton-Kantorovich Methods for Nonlinear Integral Equations, Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 12, no. 3, (2016), pp. 176-181.
- [42] M. Nadir, B. Lakehali, Adapted Quadratic Approximation For Weakly Singular Integrals, Applied Mathematics E-Notes, Vol. 15, (2015), pp. 225-232.
- [43] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.
- [44] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.
- [45] S. A. Orszag, Comparison of pseudospectral and spectral Approximation, Studies in Applied Mathematics. L1, 1972.
- [46] B. Pachpatie, On a Certain Volterra-Fredholm type integral equation, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, Vol. 9, (2008), pp 1-12.
- [47] A. D. Polyanin, A.V. Manzhirov, Handbook of Integral Equations, CRC Press, 2008.
- [48] M. Rahman, Integral Equations and their Applications, Dalhousie University, Canada, 2007.
- [49] A. Rahmoune, Sur la Résolution Numérique des équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, thèse de Doctorat, Université Batna, 2011.
- [50] D. Robert Présentation du cours d'Analyse Fonctionnelle Nantes, 2005.
- [51] M. Sezer, S. Dogan, Chebyshev series solutions of Fredholm integral equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 27, 5, (1996), 649-657.
- [52] J. Shen, Efficient Spectral-Galerkin Method II. Direct Solvers for the Second and Fourth Order equations Using Chebyshev Polynomials, SIAM Journal of scientific computation. 16, (1), (1995), 74-87.
- [53] T. Tang, X. Xu, J. Cheng. On spectral methods for Volterra type integral equations and the convergence analysis, Journal of Computational Mathematics (2007).

- [54] V. I. Tivonchuk, Solution of linear Volterra integral equations by the method of averaging functional corrections in conjunction with splines, Dnepropetrovsk State University. Translated from *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol 32, No. 3, (1981), pp 423-431.
- [55] S. Yalcinbas, M. Aynigul, Hermite series solutions of Fredholm integral equations. *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 16, No. 2, (2011), pp 497-506.

**ملخص.** الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية حيث قمنا بإعطاء طرق تقريبية لحل هذه المعادلات أين قمنا بتطوير بعض الطرق الطيفية لتفريق بعض أنواع المعادلات التكاملية، و استندت هذه الأساليب إلى خيارات مختلفة من كثيرات الحدود المتعامدة، لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذه المعادلات خاصة في فضاء الدوال المستمرة.

وأخيراً، تم إجراء دراسة مقارنة يليها تحليل يستند إلى تفسير النتائج التي تم الحصول عليها.

**الكلمات المفتاحية.** المعادلات التكاملية، معادلات فريدولم، طرق طيفية، طريقة جالركين، كثيرات الحدود المتعامدة.

**Abstract.** The main objective of this work is to study linear and nonlinear integral equations. We have applied approximate methods to solve these equations. Also we have developed some spectral methods to differentiate some types of integral equations. These methods were based on different orthogonal polynomials; these equations are especially in the space of continuous functions.

Finally, a comparative study was conducting followed by an analysis based on the interpretation of the obtained results.

**Keywords.** Integral equation, Fredholm equation, Spectral method, Galerkin method, orthogonal polynomial.

**Résumé.** L'objectif principal de ce travail est d'étudier les équations intégrales linéaires, et non linéaires. Nous avons donné des méthodes approximatives pour résoudre ces équations. Nous avons développé des méthodes spectrales pour différencier certains types d'équations intégrales. Ces méthodes étaient basées sur différents polynômes orthogonaux, ces équations sont notamment dans l'espace des fonctions continues.

Enfin, une étude comparative a été menée suivie d'une analyse basée sur l'interprétation des résultats obtenus.

**Mots clés.** Equation intégrale, équation de Fredholm, méthode spectrale, méthode de Galerkin, polynômes orthogonaux.