

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Espaces fonctionnels</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Quelques notions de base préliminaires . . . . .	2
1.2.1 Les distributions . . . . .	2
1.2.2 Dérivée d'une distribution . . . . .	3
1.2.3 Espace de Sobolev . . . . .	3
1.2.4 L'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	3
1.2.5 Les sous espace de $H^1(\Omega)$ . . . . .	4
1.3 Les formes bilinéaires continues . . . . .	4
1.3.1 Formes linéaires . . . . .	4
1.3.2 Formes bilinéaires . . . . .	4
1.4 Théorèmes de Lax-Milgram et Stambachia . . . . .	5
1.5 La formule de Green . . . . .	6
1.5.1 Rappels . . . . .	6
1.6 Formulation variationnelle . . . . .	8
<b>2 Méthode des élément finis (MEF)</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 <b>La méthode de Galerkin</b> . . . . .	14
2.2.1 <b>Problème modèle est-il bien posé</b> . . . . .	15
2.2.2 <b>Principe de la méthode de Galerkin</b> . . . . .	15

2.3	<b>Méthode de Ritz</b>	16
2.3.1	<b>principes généraux</b>	16
2.4	<b>Principe général de la méthode des éléments finis</b>	18
2.5	<b>Éléments finis unidimensionnels</b>	20
2.5.1	<b>Équations différentielles d'ordre 2</b>	20
2.5.2	<b>Le maillage</b>	22
2.5.3	Méthode d'éléments finis de degré 1	23
2.5.4	Méthode de éléments finis de degré 2	25
2.5.5	Méthode d'éléments finis de degré $k$	26
2.6	<b>Éléments finis multidimensionnels</b>	27
2.6.1	Problème type	28
2.6.2	Le maillage	28
2.6.3	Les noeuds	29
2.7	<b>Éléments finis de lagrange triangulaires</b>	30
2.7.1	les éléments finis P1	30
2.7.2	Éléments triangulaires généraux	33
2.7.3	Éléments finis isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires	38
2.8	<b>Analyse de convergence</b>	46
<b>3</b>	<b>Application</b>	<b>49</b>
3.1	les éléments finis unidimensionnelle	49
3.1.1	Éléments finis de degré un: $P1$	49
3.1.2	2 <sup>ème</sup> application	56
3.2	Éléments finis multidimensionnelle	59
3.2.1	Les éléments finis triangulaire	59
3.2.2	Les éléments finis quadrilatère	64
	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

# Introduction

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont modélisés sous la forme des équations (EDO,EDP,...,etc) linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à résoudre dans la plupart des cas

Ce mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions des bases et des outils mathématiques

Dans le deuxième chapitre on expose brièvement de la méthode des éléments finis unidimensionnels, multidimensionnel et d'analyse de convergence

Dans le dernier chapitre on trouve les applications ( Implémentations ) de la méthode des éléments finis pour les équations différentielles (EDO) et équation aux dérivées partielles (EDP)

# Chapitre 1

## Espaces fonctionnels

### 1.1 Introduction

L'analyse de la méthode des éléments finis requiert une bonne dose d'analyse fonctionnelle, outil fondamentaux pour une véritable compréhension de cette méthode. C'est l'objet de ce chapitre. Précisons dans le départ que notre objectif n'est pas de donner un cours d'analyse fonctionnelle complet mais bien de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de la méthode des éléments finis .

Parmi les outils de base, on retrouve les notions de distributions, d'espaces de Hilbert, de Sobolev, etc... , Nous omettons toutefois beaucoup de détails et de subtilités qui ont bien sur leur importance mais qui ne sont pas essentielles à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Un espace fonctionnel est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions.

### 1.2 Quelques notions de base préliminaires

#### 1.2.1 Les distributions

Les distributions sont des fonctions ce que nombres irrationnels sont aux nombres rationnels. Les distributions sont en fait une généralisation de notion de fonction, ont notions essentielles comme la dérivation d'une distribution, Nous référons le lecteur à Gasque-Witomski pour un traitement simple et moderne de la théorie des distributions .

### 1.2.2 Dérivée d'une distribution

On définit la dérivation d'une distribution  $T$  par la relation suivante

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D([a, b]).$$

On définit de manière similaire, la dérivée d'ordre  $n$

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in D([a, b]).$$

### 1.2.3 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev  $W^{1,p}$  est défini par

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi indice } \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

dans cette définition la dérivée partielle  $D^\alpha$  est entendu au sens de distributions

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

### 1.2.4 L'espace $H^1(\Omega)$

On note par  $H^1(\Omega)$  l'espace fonctionnel linéaire défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3 \right\},$$

que l'on munit du produit scalaire noté  $((u; w))_{1,\Omega}$

$$((u; w))_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left( uw + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u \partial w}{\partial x_i \partial x_i} \right) dv.$$

et par le fait même d'une norme induite

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left( ((u; u))_{1,\Omega} \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \left( u^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dv \right)^{1/2}.$$

#### Remarque 1.2.1

1. Si  $p = 2$  on a  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ .

2.  $H^1$  est un espace Hilbert.

### 1.2.5 Les sous espace de $H^1(\Omega)$

On a quelques sous-espaces de  $H^1$  sont extrêmement utiles en pratique, il s'agit l'espace  $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

## 1.3 Les formes bilinéaires continues

### 1.3.1 Formes linéaires

#### Définition 1.3.1 (forme linéaire)

On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert  $V$ . Une forme linéaire  $l$  vérifie donc les propriétés suivantes

- $l(\alpha u) = \alpha l(u) \quad \forall u \in V \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- $l(u_1 + u_2) = l(u_1) + l(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V.$

#### Définition 1.3.2 (forme linéaire continue)

Une forme linéaire  $l$  sur l'espace de Hilbert  $V$  muni de la norme  $\|\cdot\|_V$  est dite continue s'il existe une constante  $C$ , telle que

$$\|l(u)\| \leq C \|u\|_V \quad \forall u \in V,$$

### 1.3.2 Formes bilinéaires

#### Définition 1.3.3 (Forme bilinéaire)

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert  $V$  est une application  $a$  qui associe à un couple  $(u, w) \in V \times V$  un scalaire noté  $a(u, w)$  satisfaisant

- $a(\alpha u_1 + \beta u_2, w) = \alpha a(u_1, w) + \beta a(u_2, w), \quad \forall u_1, u_2, w \in V \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $a(u, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha a(u, w_1) + \beta a(u, w_2), \quad \forall u, w_1, w_2 \in V \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses deux arguments.

#### Définition 1.3.4 (Forme bilinéaire continue)

Une forme bilinéaire  $a$  est dite continue sur  $V \times V$  s'il existe une constante  $C$ , telle que

$$\|a(u, w)\| \leq C \|u\|_V \|w\|_V \quad \forall u, w \in V,$$

**Définition 1.3.5**

Une forme bilinéaire  $a$  est dite symétrique si

$$a(u, w) = a(w, u), \forall u, w \in V,$$

**Définition 1.3.6**

Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive  $\alpha$ , telle que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \forall u \in V,$$

**Remarque 1.3.2**

Les formes bilinéaires coercives sont une généralisation de la notion de matrice définie positive.

## 1.4 Théorèmes de Lax-Milgram et Stambachia

**Théorème 1.4.1 (Lax-Milgram)**

Soit  $V$  un espace de Hilber et soient  $l$  est une formes linéaire continues sur  $V$  et  $a$  est une forme bilinéaire continues et coercive sur  $V \times V$ . alors il existe une unique solution  $u$  du problème variationnel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, w) = l(w), \forall w \in V \end{array} \right. .$$

**Théorème 1.4.2 (Stambachia)**

Soit  $V$  un espace de Hilber et soient  $l$  est une formes linéaire continues sur  $V$  et  $a$  est une forme bilinéaire continues, coercive et symétrique, alors le problème suivant

$$a(u, w) = l(w), \forall w \in V.$$

Admit une unique solution  $u$  sous la forme

$$J(u) = a(u, w) - 2l(w),$$

qui représente le minimum de la fonction

## 1.5 La formule de Green

### 1.5.1 Rappels

#### Opérateurs différentiels en dimension deux

- Soit  $u$  une fonction de deux variables  $(x, y)$  à valeurs réelles définie sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle gradient de  $u$  et on note  $\text{grad}(u)$  ou  $\nabla u$ , le vecteur

$$\text{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Soit  $v$  une fonction de deux variables  $(x, y)$  définie sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs  $v_1, v_2$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle divergence du vecteur  $v$  et on note  $\text{div}(v)$  ou  $\nabla \cdot v$ , le scalaire

$$\text{div}(v) = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

- Soit  $u$  une fonction de deux variables  $(x, y)$  à valeurs réelles définie sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle laplacien de  $u$  et on note  $\Delta u$  ou  $\nabla^2 u$ , le scalaire

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

#### Intégrales doubles et changement de variables

On appelle que pour un changement de variables correspondant à une transformation  $(x, y) \in \Omega \longrightarrow (s, t) \rightarrow D$  définie par

$$x = f_1(s, t) \quad y = f_2(s, t)$$

on appelle déterminant jacobien de la transformation le déterminant

$$J(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

que l'on note également :  $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$

On a alors l'égalité

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int \int_D f(x(s, t), y(s, t)) \left| \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \right| ds dt$$

### Intégrales curvilignes

Soit une courbe  $C$  d'extrémités  $A$  et  $B$  et de longueur  $L$ , orientée de  $A$  vers  $B$ .

On note  $s(M)$  l'abscisse curviligne d'un point  $M$  de  $C$ . Soit  $f$  une fonction qui à tout point  $M$  de  $C$  associe le réel  $f(M) = f(s)$ . On définit l'intégrale curviligne de  $f$  sur  $C$  par l'intégrale simple suivante

$$\int_C f(M) ds = \int_0^L f(s) ds$$

Si  $C$  admet une représentation paramétrique de paramètre  $t$ , nous aurons, en posant  $f(s(t)) = g(t)$

$$\int_C f(M) ds = \int_{t_A}^{t_B} g(t) \frac{ds}{dt} dt$$

où  $t_A$  et  $t_B$  sont respectivement les valeurs du paramètre  $t$  associées aux points  $A$  et  $B$  de la courbe  $C$ .

### Formules de Green

**Formule de base** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$ ,  $C^1$  par morceaux, et  $u$  et  $v$  fonctions de  $H^1(\Omega)$ , on a l'égalité suivante pour chaque composante  $i = 1, 2$

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx_1 dx_2 = - \int \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} w_i v d\gamma$$

avec  $w_i$ ,  $i^{\text{ieme}}$  composante du vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  orienté vers l'extérieur de  $\Omega$  et noté  $w$  et  $\gamma$  abscisse curviligne sur  $\Gamma$  orientée dans le sens direct.

**Conséquences** En notant en caractère gras les vecteurs ( en particulier  $u$  désigne ici un vecteur ), on déduit aisément les formules suivantes

$$\int \int_{\Omega} \operatorname{div} u v dx dy = - \int \int_{\Omega} u \operatorname{grad} v dx dy + \int_{\Gamma} u w v d\gamma$$

et en posant  $u = a \operatorname{grad} u$  où  $a$  es une fonction  $L^\infty(\Omega)$  et  $\frac{\partial u}{\partial w} = \operatorname{grad} u \cdot w$

$$\int \int_{\Omega} \operatorname{div} (a \operatorname{grad} u) v dx dy = - \int \int_{\Omega} a \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v dx dy + \int_{\Gamma} a \frac{\partial u}{\partial w} v d\gamma$$

Enfin dans le cas  $a = 1$  on obtient la formule classique

$$- \int \int_{\Omega} \Delta u v dx dy = \int \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial w} v d\gamma$$

## 1.6 Formulation variationnelle

### Cas 1D

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où  $f$  et  $c$  sont des fonctions données continues sur  $[a, b]$ . On supposera de plus que la fonction  $c$  est strictement positive sur  $[a, b]$ . Un tel problème est appelé problème aux limites.

#### Définition 1.6.7

Une solution classique (solution forte) de 1.1 est une fonction de  $C^2([a, b])$ , telle que

$$u(a) = u(b) = 0$$

et  $\forall x \in ]a, b[$ ,

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

En faisant le produit scalaire  $L^2(]a, b[)$  de l'équation différentielle avec une fonction -test  $v \in D(]a, b[)$  (c'est à dire intégrant sur  $[a, b]$ ), on a

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

en intégrant par parties le premier terme

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

car  $v(a) = v(b) = 0$  puisque  $v \in D(]a, b[)$ . chaque terme de cette équation a en fait un sens dès lors que  $v \in H_0^1(]a, b[)$ . De plus  $D(]a, b[)$  étant dense dans  $H_0^1(]a, b[)$ , cette équation est vérifiée pour tout  $v \in H_0^1(]a, b[)$ .

On peut donc définir le nouveau problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(]a, b[) \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce problème est la formulation variationnelle ( ou formulation faible ) du problème 1.1.

Toute solution de 1.2 est appelée solution faible . il est immédiat que toute solution forte de 1.1 est aussi une solution faible .

### Cas 2D

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On veut résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = f, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

Une solution classique de ce problème est une fonction de  $C^2(\bar{\Omega})$  vérifiant 1.3 en tout point de  $\Omega$ . Au passage, on voit que ceci impose que  $f$  soit  $C^0(\bar{\Omega})$ . Toute solution classique vérifie donc

$$\forall v \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \int_{\Omega} -\Delta uv + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$$

on utilise la formule de Greene

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv$$

puisque  $\partial_n u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Or,  $\bar{C}^1(\Omega) = H^1\Omega$ . On peut donc définir le nouveau problème

$$(2) \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

C'est la formulation variationnelle de 1.3. On voit aussi que problème est défini dès lors que  $f \in L^2(\Omega)$ .

### Cas général

Les cas précédents montre que, d'une façon générale, la formulation variationnelle sera obtenue en faisant le produit scalaire de l'équation avec une fonction  $v$  appartenant à un espace  $V$  à préciser ( c'est à dire en multipliant par  $v$  et en intégrant sur  $\Omega$  ), et en intégrant par parties (ou utilise la formule de Gréen) les termes d'ordre les plus élevés en tenant

compte des conditions aux limites du problème. On arrive alors à une formulation du type.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où  $a(., .)$  est une forme bilinéaire sur  $V \times V$  et  $l(.)$  est une forme linéaire sur  $V$

### Remarque 1.6.3

*Une formulation plus générale est la suivante*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in W. \end{array} \right.$$

*Où  $a(., .)$  est une forme bilinéaire sur  $V \times W$  et  $l(.)$  est une forme linéaire sur  $W$ .  $V$  est alors appelé espace des solutions et  $W$  espace des fonction de tests. La formulation précédente correspond donc au cas particulier  $V = W$ .*

# Chapitre 2

## Méthode des élément finis (MEF)

### 2.1 Introduction

Pour illustrer le fonctionnement de la méthode des éléments finis et pour justifier l'introduction d'un certain nombre d'outils mathématiques, nous allons considérer un exemple très simple et effectuer une comparaison avec la méthode des différences finies.

Soit donc l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \forall x \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

où  $f(x)$  est une fonction connue. On cherche donc à obtenir une approximation de la solution  $u(x)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , pour ce faire, la subdivisons cet intervalle en  $N$  sous-intervalles de longueur  $h = 1/N$  ( les sous-intervalles peuvent éventuellement être de longueurs différentes). On obtient ainsi  $N + 1$  points  $x_i$  vérifiant  $x_0 = 0, x_N = 1$  et pour les points intermédiaires

$$x_i = \frac{i}{N}, x_{i+1} - x_i = h$$

On note  $u_i$ , l'approximation de  $u(x_i)$  au point  $x_i$ . Les conditions aux limites imposent que  $u_0 = u_N = 0$ , La méthode de différences finies consiste à discrétiser directement l'équation différentielle en remplaçant les dérivées de  $u(x)$  par des différences finies, en chaque point  $x_i$ . On peut utiliser par exemple une différence centrée d'ordre 2

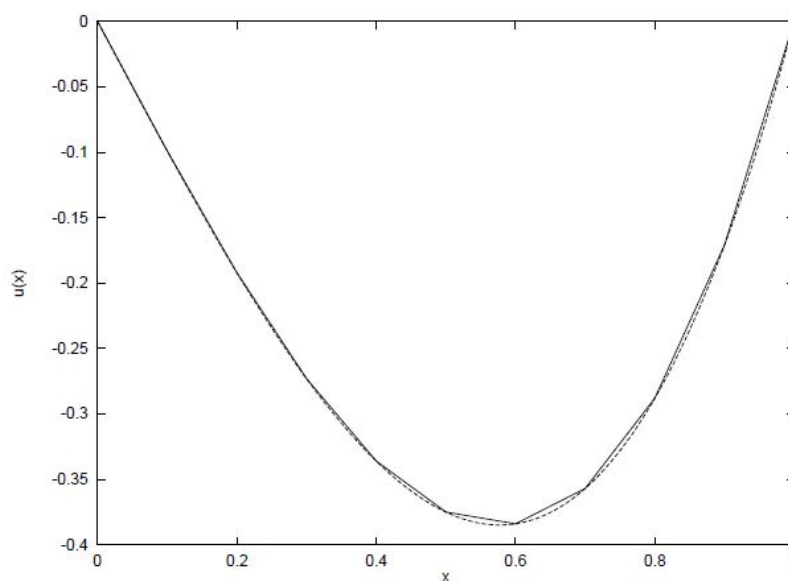


Figure 2.1.1 : Solution par différence finies

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + O(h^2) \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

L'équation différentielle s'écrit en chaque point  $x_i$

$$-u''(x_i) = f(x_i)$$

de sorte qu'en remplaçant par la différence centrée, on obtient

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

et ce pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $N - 1$ . Dans l'équation précédente, on a bien sûr négligé le terme d'erreur  $O(h^2)$  et il en résulte une approximation d'ordre deux. On obtient ainsi un système linéaire de  $(N - 1)$  équations en  $(N - 1)$  inconnues de la forme

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système linéaire tridiagonal est simple et fournit une solution approximative de l'équation différentielle de départ aux points  $x_i$ . on peut voir la solution numérique obtenue avec 10 intervalles ( $h = 0.1$ ) et la fonction  $f(x) = -6x$ . Dans ce cas, on vérifie facilement que la solution analytique est  $u(x) = x^3 - x$ . On peut dès lors constater que la solution numérique est une bonne approximation de la solution analytique .

La méthode des éléments finis procède tout autrement. Nous allons donc reprendre l'exemple précédent par cette méthode, mais sans justifier toutes les étapes puisque nous ne sommes pas encore en mesure de le faire. Multiplions l'équation différentielle 2.1 par une fonction dite test  $w(x)$  que nous supposons pour l'instant quelconque et intégrons sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On obtient

$$\int_0^1 -u''(x) w(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx$$

Intégrons maintenant par parties (en supposant que  $w(x)$  soit suffisamment régulière) pour obtenir :

$$\int_0^1 u'(x) w'(x) dx - (u'(1) w(1) - u'(0) w(0)) = \int_0^1 f(x) w(x) dx$$

Si on suppose maintenant que  $w(0) = w(1) = 0$ , on obtient une formulation variationnelle qui consiste à déterminer une fonction  $u(x)$ , vérifiant  $u(0) = u(1) = 0$  et telle que

$$\int_0^1 u'(x) w'(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx, \quad \forall w(x) \quad (2.2)$$

$$w(0) = w(1) = 0 \quad (2.3)$$

Il est évident que toute solution de 2.1 vérifie la formulation variationnelle 2.2. Par contre, l'inverse n'est pas aussi évident. Soit donc  $u(x)$  une solution de la formulation variationnelle 2.2. Essayons de refaire le chemin inverse, jusqu'à l'équation différentielle 2.1

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 -u''(x) w(x) dx + u'(1) w(1) - u'(0) w(0) = \int_0^1 f(x) w(x) dx,$$

c-à-d,

$$\int_0^1 (-u''(x) - f(x)) w(x) dx = 0,$$

qui est valide pour toute fonction  $w(x)$  qui s'annule en 0 et 1. Il nous faut déduire de cette équation que

$$-u''(x) - f(x) = 0,$$

Pour arriver, il faut effectuer un choix judicieux de fonction  $w(x)$ . Considérons d'abord la fonction  $\phi(x) = x(1-x)$  qui est positive dans l'intervalle  $]0, 1[$  et qui s'annule en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Choisissons en suite

$$w(x) = \phi(x)(-u''(x) - f(x)),$$

Cette fonction de test  $w(x)$  s'annule bien en  $x = 0$  et en  $x = 1$  et est donc admissible. On obtient ainsi.

Puisque l'intégrand est toujours positif et que son intégrale est nulle, on conclut que

$$(-u''(x) - f(x))^2 \phi(x) = 0,$$

Puisque  $\phi(x)$  ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle, on peut affirmer que

$$-u''(x) = f(x), \text{ dans } ]0, 1[,$$

et donc que  $u(x)$  vérifie l'équation différentielle. Il y a donc une équivalence entre l'équation différentielle 2.1 et la formulation variationnelle 2.2. La formulation variationnelle 2.2 ne fait apparaître que la dérivée d'ordre 1 de la fonction  $u(x)$  (et de la fonction test  $w(x)$ ) et demande donc moins de régularité que l'équation différentielle elle-même qui est dans le cas d'ordre 2. On parle alors de formulation faible par opposition à l'équation différentielle dite formulation forte.

## 2.2 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution de problèmes modèles dont la formulation abstraite est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u \in V, \text{ tel que} \\ a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in W \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où  $V$  et  $W$  sont des espaces fonctionnels (des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions).  $a$  est une forme bilinéaire définie sur  $V \times W$  et  $l$  est une forme linéaire définie sur  $W$ . On dit que  $V$  est l'espace de solution et que  $W$  est l'espace de test. Les éléments de  $W$  sont appelés des fonctions test.

Les espaces fonctionnels  $V$  et  $W$  sont équipés par de normes, notées  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_W$  respectivement, qui leur confèrent une structure d'espace de Banach.

### 2.2.1 Problème modèle est-il bien posé

L'objet de cette section est de rappeler brièvement les deux principaux résultats qui permettent d'étudier le caractère bien posé du problème 2.4. La notion de problème bien posé est entendue au sens de la définition suivante.

**Définition 2.2.1 (Hadamard)** *On dit que le problème 2.4 est bien posé s'il admet une seule solution.*

### 2.2.2 Principe de la méthode de Galerkin

On considère le problème modèle 2.4 et on suppose qu'il est bien posé.

La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution  $u$  de ce problème.

L'idée consiste à remplacer dans 2.4 les espaces fonctionnels  $V$  et  $W$  par des espace de dimension finie, notés  $V_h$  et  $W_h$ , ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = l_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h \end{array} \right. \quad (2.5)$$

On dit que 2.5 est le problème approché ou le problème discret et  $u_h$  est la solution approchée. On notera que sous sa forme la plus générale, le problème approché 2.5 fait intervenir une forme bilinéaire  $a_h \in \mathcal{L}(V_h \times W_h; \mathbb{R})$  qui est une approximation de la forme linéaire  $l$ . L'espace  $V_h$ , qu'on appellera espace d'approximation, et l'espace  $W_h$ , qu'on appellera espace test discret.

Un choix particulier dans (2.9) consiste utiliser le même espace  $V_h$  comme espace d'approximation et comme espace test discret, ce qui conduit au problème approché suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, w_h) = l_h(w_h), \quad \forall w_h \in V_h \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Dans ce cas, on parle de méthode de Galerkin standar, alors si les espaces discrets  $V_h$  et  $W_h$  sont différents, on parle de la méthode de Galerkin non-standar (dans la littérature, on rencontre également la terminologie Petrov-Galerkin).

## 2.3 Méthode de Ritz

### 2.3.1 principes généraux

Une fois le problème formulé sous forme variationnelle, il reste à le discrétiser c-à-d. à le faire passer d'un problème de dimension infinie à un problème approché de dimension finie. Ce problème discrétisé sera ensuite résolu par des techniques d'algèbre linéaire classiques: résolution de systèmes algébriques linéaires ou non linéaires, de problèmes aux valeurs propres, ect...

La méthode de Ritz est une technique de discrétisation de problèmes variationnels et est en quelque sorte le précurseur de la méthode des éléments finis. Soit donc un problème variationnel vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ telle que} \\ \alpha(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où la fonction  $u$  vérifie les conditions aux limites essentielles homogènes (le cas des conditions aux limites non homogènes nécessite la construction d'une fonction de relèvement  $u_g$  mais ne pose pas de difficultés théoriques supplémentaires). On se donne maintenant  $N$  fonctions  $\phi_j \in V$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  appelées fonctions d'interpolation de Ritz ou plus simplement fonctions de Ritz vérifiant elles aussi les conditions essentielles homogènes. On suppose ensuite que l'on peut écrire

$$u(x) \simeq u^N(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) \quad (2.8)$$

Dans cette expression, les  $N$  coefficients  $u_j$  sont à déterminer et le problème est maintenant de dimension finie  $N$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions  $\phi_j$  forme un sous-espace de dimension  $N$  de  $V$  noté  $V^N$  ( toujours en supposant que les fonctions  $\phi_j$  sont choisies dans  $V$  dès le départ et qu'elles sont linéairement indépendantes). On considère donc l'approximation suivante du problème variationnel 2.7

$$\begin{cases} \text{trouver } u^N \in V^N & \text{telle que} \\ \alpha(u^N, w^N) = l(w^N) \quad \forall w^N \in V^N \end{cases} \quad (2.9)$$

ou encore

$$\alpha\left(\sum_{j=1}^N u_j \phi_j, w^N\right) = l(w^N), \quad \forall w^N \in V^N$$

La bilinéarité de  $\alpha$  nous permet d'écrire

$$\sum_{j=1}^N u_j \alpha(\phi_j, w^N) = l(w^N), \quad \forall w^N \in V^N$$

On va maintenant construire un système linéaire (par ce que le problème de départ 2.7 est linéaire) dont les inconnues sont les coefficients  $u_j$ . Soit donc  $N$  nouvelles fonctions  $\tilde{\phi}_i, i = 1, 2, \dots, N$  appartenant à l'espace  $V^N$ . Puisque l'équation précédente est vraie quelle que soit la fonction  $w^N \in V^N$ , elle est valide pour chacune des fonctions  $\tilde{\phi}$  et on a

$$\sum_{j=1}^N u_j \alpha(\phi_j, \tilde{\phi}_i) = l(\tilde{\phi}_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

qui est un système linéaire  $N$  sur  $N$  de la forme :

$$AU = F$$

où la matrice  $A$  et les vecteurs  $U$  et  $F$  ont pour coefficients :

$$\begin{bmatrix} \alpha(\phi_1, \tilde{\phi}_1) & \alpha(\phi_2, \tilde{\phi}_1) & \cdots & \alpha(\phi_N, \tilde{\phi}_1) \\ \alpha(\phi_1, \tilde{\phi}_2) & \alpha(\phi_2, \tilde{\phi}_2) & \cdots & \alpha(\phi_N, \tilde{\phi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(\phi_1, \tilde{\phi}_N) & \alpha(\phi_2, \tilde{\phi}_N) & \cdots & \alpha(\phi_N, \tilde{\phi}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\tilde{\phi}_1) \\ l(\tilde{\phi}_2) \\ \vdots \\ l(\tilde{\phi}_N) \end{bmatrix}$$

Si les fonctions  $\phi_j$  et  $\tilde{\phi}_i$  sont bien choisies, ce système linéaire est inversible et on peut dès lors déterminer les inconnues  $u_i$  et ainsi obtenir une approximation  $u^N(x)$  de la fonction  $u$

par la relation 2.7. Un choix naturel pour les fonction  $\tilde{\phi}_i$  consiste à prendre tout simplement  $\tilde{\phi}_i = \phi_i$ , et ce pour tout  $i$ . C'est la méthode de Ritz ou méthode de Rayleigh-Ritz. Dans le cas où  $\tilde{\phi}_i \neq \phi_i$ , on parle de la méthode de petrov-Galerkin.

## 2.4 Principe général de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP ou EDO à résoudre sur un domaine  $\Omega$ . On écrit la formulation variationnelle de cette EDP ou EDO, et on se ramène donc à un problème du type

$$(P) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in W \end{cases}$$

On va chercher une approximation de  $u$  par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du domaine  $\Omega$ , grâce au quel on va définir un espace d'approximation  $V_h$ , s.e.v de  $V$  de dimension finie  $N_h$  ( par exemple  $V_h$  sera l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  et affines sur chaque maille). Le problème approché est alors

$$(P_h) \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Soit  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$  une base de  $V_h$ . En décomposant  $u_h$  sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \tag{2.10}$$

le problème  $(P_h)$  devient

$$\begin{cases} \text{trouver } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tels que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.11}$$

ou encore par linéarité de  $a$  et  $l$ :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tels que} \\ \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N \end{cases}$$

c'est à dire résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ \vdots \\ l(\varphi_N) \end{pmatrix}$$

ou simplement

$$Au = b$$

avec la matrice  $A$  est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base  $\varphi_i$  dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction  $\varphi_i$  sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  seront le plus souvent nuls, car correspondant à de fonction  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  de supports disjoints. La matrice  $A$  sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les  $\varphi_i$  de telle sorte que  $A$  soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.

A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les  $\varphi_i$  et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de  $A$ , On peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales.

1. **Le principe d'unisolvance:** On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de  $V_h$ .

Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points . Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

2. **Définition des  $\varphi_i$ :** On définira les fonction de base par  $\varphi_i = 1$  sur le  $i^{\text{ème}}$  ddl, et auront par les autres ddl. La manipulation des  $\varphi_i$  sera alors très simplifiée, et les  $\varphi_i$  auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

3. **La notion de famille affine d'éléments:** Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur un seule maile référence, par un simple changement de variable.

## 2.5 Éléments finis unidimensionnels

Nous allons maintenant établir comment construire les fonction  $\phi_i(x)$  de la méthode de Ritz de manière efficace, et ce sur des domaines de forme quelconque. Cette efficacité proviendra de l'introduction de formes géométriques simples (des sous-intervalles en dimension 1) nommés éléments qui permettent une construction locale de ces fonctions. C'est certainement en dimension 2 ou 3 que l'introduction de ces éléments prend toute son importance car les géométries son de toute évidence beaucoup plus complexes. Nous commencerons tout de même le développement en dimension 1 en tâchant d'utiliser une présentation la plus générale possible de sorte que le passage en dimension supérieure soit direct.

Nous choisissons une approche qui se veut la plus pédagogique possible. Nous présenterons aussi quelques aspects informatiques en indiquant quelques tableaux nécessaires à la bonne mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis. Nous ne chercherons cependant pas à obtenir une présentation optimale sur le plan informatique. Le lecteur doit rester conscient qu'il existe plusieurs façons de présenter la méthode des éléments finis et que celle que nous avons retenue à l'avantage d'être relativement simple et suffisamment générale.

### 2.5.1 Équations différentielles d'ordre 2

#### Problème type (Modèle)

Pour fixer les idées, nous commencerons par la résolution d'un problème classique d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme

$$\begin{cases} p(x)u - \frac{d}{dx} \left( q(x) \frac{du}{dx} \right) = r(x), & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0) = c, \quad q(L) \frac{du}{dx}(L) = d \end{cases} \quad (2.12)$$

On suppose connues les fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  de même que les constantes  $c$  et  $d$ .

Si dans cette équation on prend  $p(x) = 0$ , la variable dépendante  $u(x)$  peut entre autres choses désigner la déformation longitudinale d'une tige métallique de longueur  $L$ . À ce moment,  $q(x) = EA$ , où  $E$  est le module de Young et  $A$  l'aide de la section de la lige qui peut être variable. Enfin,  $r(x)$  est une force de contact sur la surface de la tige et  $d$  est une force axiale appliquée à l'une des extrémités de la tige. On peut aussi interpréter  $u(x)$

comme une température, une pression hydrostatique, un potentiel, ect., suivant le domaine qui nous intéresse . Le problème 5.1 est donc suffisamment général pour couvrir bon nombre d'applications.

Sur le plan théorique, si on suppose que la fonction  $p(x)$  es positive ou nulle et que  $0 < c \leq q(x) \leq C$  dans l'intervalle  $]0, L[$ , il est facile d'assurer que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. La solution, à un relèvement des conditions essentielles près, est dans l'espace

$$V = \{w \in H^1(]0, L[) \mid w(0) = 0\}$$

Rappelons que pour cette équation différentielle d'ordre 2, la seule condition essentielle est l'imposition de la variable  $u(x)$  à la frontière. Dans cet exemple,  $u$  n'est pas imposée qu'en  $x = 0$  d'où cette définition de l'espace  $V$  .

Il est donc nécessaire de construire des fonction  $\phi_i(x)$  dans la méthoode de Ritz qui soient dans  $V$  . On utiliserons des approximations polynômiales il suffit de s'assurer que ces fonctions soient continues et s'annulent en  $x=0$ .

On pose ensuite  $u = u_0 + u_g$  et la formulation variationnelle est,

$$\begin{cases} \text{trouver } u_0 \in V, & \text{telle que} \\ a(u_0, w) = l(w) - a(u_g, w), & \forall w \in V \end{cases} \quad (2.13)$$

où

$$a(u_0, w) = \int_0^L (p(x) u_0(x) w(x) + q(x) u_0'(x) w'(x)) dx,$$

et

$$l(w) = d w(L) + \int_0^L r(x) w(x) dx,$$

La méthode de Ritz consiste à poser

$$u(x) = u_g(x) + \sum_{j=0}^n u_j \phi_j(x),$$

et nécessite la construction d'un système linéaire global de la forme

$$AU = F.$$

où

$$a_{ij} = a(\phi_j(x), \phi_i(x)) \quad \text{et} \quad f_i = l(\phi_i(x)) - a(u_g(x), \phi_i(x))$$

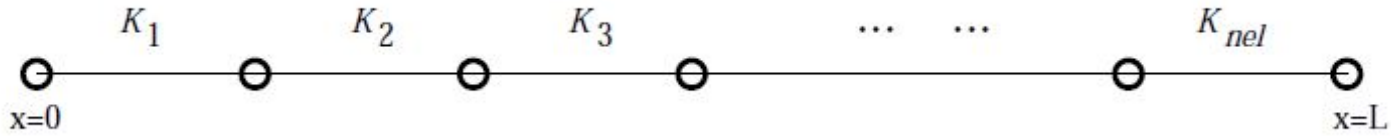


Figure 2.5.2 : Maillage en dimension 1

la fonction  $u_g(x)$  est le relèvement des conditions aux limites essentielles et doit donc vérifier dans ce cas  $u_g(0) = c$  doit de plus appartenir à l'espace  $H^1(]0, L[)$ .

## 2.5.2 Le maillage

### Les éléments

Considérons une partition de l'intervalle  $]0, L[$  comme celle de la Figure (2.5.2). cette partition en sous-intervalles constitue de maillage. Les sous-intervalles  $K_i$  sont appelés éléments dont le nombre total est noté  $nel$ . La frontière des éléments correspond aux cercles en trait gras. Les éléments peuvent être de longueur variable.

### Les noeuds

Sur chaque élément, on identifie  $n_G$  noeuds géométriques qui permettent de définir la géométrie de l'élément. En dimension 1, les noeuds géométriques sont les bornes de l'élément et alors  $n_G = 2$ . On notera  $K = [x_1^K, x_2^K]$  un élément générique et  $h^K$  sa taille qui en dimension 1, est tout simplement la longueur  $h^K = x_2^K - x_1^K$  (on s'assurera bien sûr que  $x_2^K > x_1^K$  de sorte que  $h^K$  soit strictement positif). Ce sont ces noeuds géométriques qui définissent localement la géométrie de l'élément et globalement, celle du domaine en entier. En dimension 1, cela paraît futile mais en dimension supérieure, ce sera fondamental.

Dans chaque élément  $K$  on identifie également voir la Figure (2.5.3) un nombre  $n_C$  de noeuds de calcul souvent appelés noeuds d'interpolation où les variables essentielles du problème seront éventuellement calculées. Ces noeuds d'interpolation peuvent ou non coïncider avec les noeuds géométriques. L'ensemble des noeuds de l'élément comprend donc les noeuds géométriques et les noeuds de calcul. On note  $n_T$  le nombre total de noeuds de

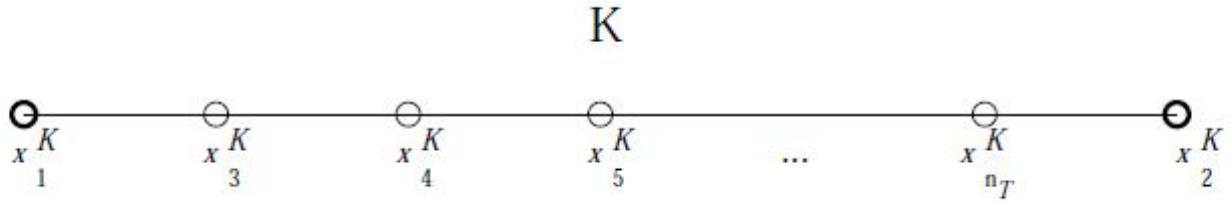


Figure 2.5.3 : Noeuds géométriques et de calcul de l'élément K

l'élément  $K$  et  $(x_1^K, x_2^K, \dots, x_{n_T}^K)$  les noeuds de l'élément  $K$  en commençant par les noeuds géométriques, suivis des autres noeuds de calcul.

### 2.5.3 Méthode d'éléments finis de degré 1

Divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N + 1$  parties ( $N$  étant un entier positif) et posons  $h = 1/(N + 1)$ ,  $x_i = ih$  avec  $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ . On définit, pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , les fonctions suivantes

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.14)$$

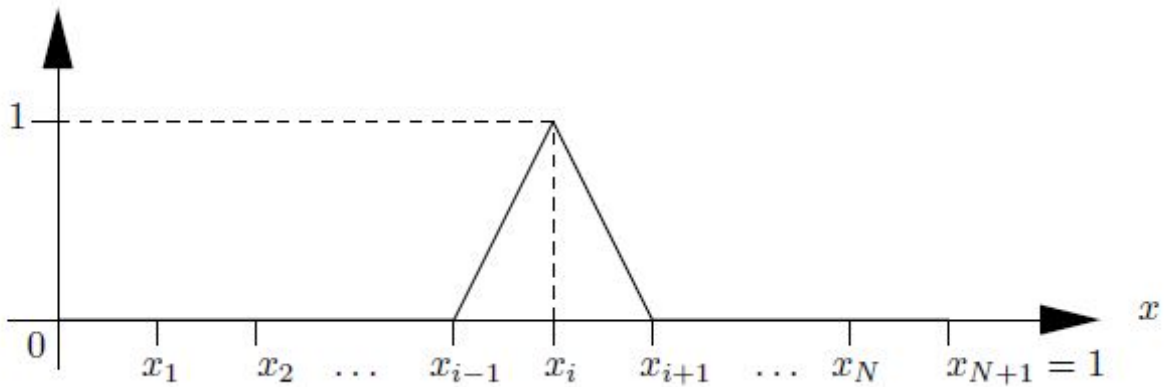
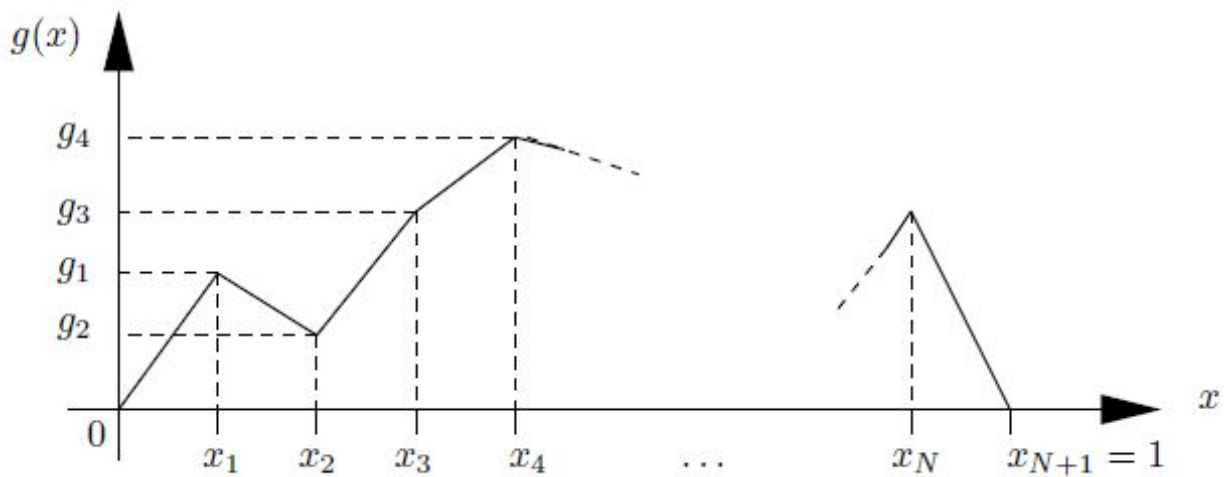
Le graphe de la fonction  $\varphi_i$  est représenté dans la Figure (2.5.4) clairement la fonction  $\varphi_i$  est telle que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 0 \leq j \leq N + 1 \quad (2.15)$$

$\varphi_i|_{[x_{j-1}, x_j]}$  est un polynôme de degré  $1 \leq j \leq N + 1$

Ainsi la fonction  $\varphi_i$  appartient à  $V$ . Les fonction  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  sont linéairement indépendantes et nous les choisissons pour engendrer l'espace  $V_h$ . Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$  sont les noeuds de la discrétisation ,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$  sont les éléments géométriques,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  sont les fonctions de base du sous-espace  $V_h$  de type éléments finis de degré 1 associées aux noeuds intérieurs  $x_1, x_2, \dots, x_N$  .

Figure 2.5.4 : Le graphe de la fonction  $\varphi_i$ Figure 2.5.5 : Graphe d'une fonction  $g$  éléments de  $V_h$ 

Si  $g \in V_h$ , alors  $g$  est une combinaison linéaire des  $\varphi_i$ , i.e.

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x)$$

et le graphe de  $g$  est représenté dans la Figure(2.5.5). En particulier, nous remarquons  $g(x_j) = g_j, 1 \leq j \leq N$ , que  $g(0) = g(1) = 0$  et que  $g$  est une fonction affine sur chaque élément géométrique.

Si  $u \in V$ , alors la fonction définie par

$$u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i$$

est l'interpolant de degré 1 par intervalle de la fonction  $u$ ,

### 2.5.4 Méthode de éléments finis de degré 2

Divisons l'intervalle  $[0, l]$  en  $N + 1$  parties égales ( $N$  étant un entier positif), posons  $h = 1/(N + 1)$ ,  $x_i = ih$ , avec  $i = 0, 1, \dots, N + 1$  et  $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ , avec  $i = 0, 1, \dots, M$ . On définit pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , les fonctions suivantes

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.16)$$

et pour  $i = 0, 1, \dots, N$ , les fonctions suivantes

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Le graphe des fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1/2}$  est représenté dans la Figure(2.5.6). Clairement les fonctions  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1/2}$  sont telles que :

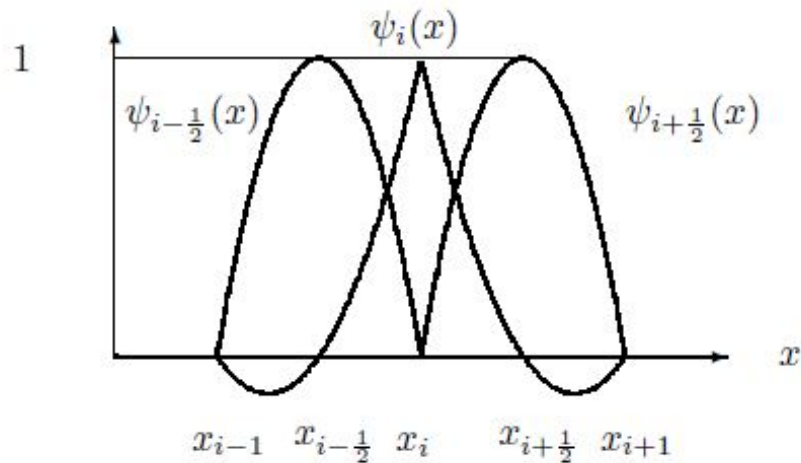
$$\begin{cases} \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq N + 1 \\ \varphi_i(x_{j+\frac{1}{2}}) = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \\ \varphi_i|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ est un polynôme de degré 2}, \quad 1 \leq j \leq N + 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq N, \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq N + 1. \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ est un polynôme de degré 2}, \quad 1 \leq j \leq N + 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Si nous posons maintenant  $M = 2N + 1$ ,  $\psi_1 = \varphi_{1/2}$ ,  $\psi_2 = \varphi_1$ ,  $\psi_3 = \varphi_{3/2}$ ,  $\psi_4 = \varphi_2$ ,  $\psi_5 = \varphi_{5/2}$ ,  $\psi_6 = \varphi_3$ ,  $\dots$ ,  $\psi_{2N} = \varphi_N$ ,  $\psi_{2N+1} = \varphi_{N+1/2}$ , alors les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$  appartiennent à  $V$  et sont linéairement indépendantes.

Nous choisissons pour engendrer l'espace  $V_h$  que nous appelons ici encore espace de type éléments finis. Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$  sont les **noeuds principaux de la discrétisation**,  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$  sont les *éléments géométriques*,


 Figure 2.5.6 : Graphe des fonctions  $\psi_{i-1/2}, \psi_i$  et  $\psi_{i+1/2}$ 

- $x_{1/2}, x_{3/2}, x_{5/2}, \dots, x_{N+1/2}$  sont les *noeuds intérieurs aux éléments géométriques*,
- $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$  sont les fonctions de base du sous-espace  $V_h$  de type *éléments finis de degré deux* associées aux noeuds de la discrétisation.

Si  $g \in V_h$ , alors  $g$  est une combinaison linéaire des  $\varphi_i$ , i.e.

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x)$$

est le graphe de  $g$  est représenté dans la Figure(2.5.7). En particulier nous remarquons, en vertu de 2.18, 2.19, que  $g(x_j) = g_{2j}, 1 \leq j \leq N$ , que  $g(x_{j+1/2}) = g_{2j+1}, 0 \leq j \leq M$ , que  $g(0) = g(1) = 0$  et que  $g$  est un polynôme de degré deux sur chaque élément géométrique.

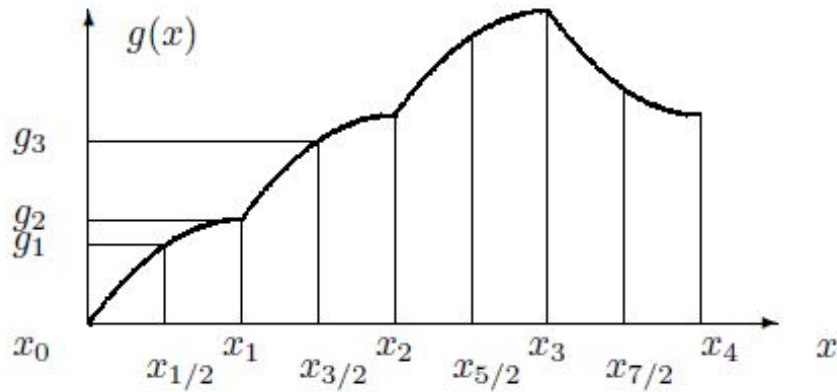
Si  $u \in V$ , alors la fonction définie par

$$u = \sum_{j=1}^N u(x_j) \varphi_{2j} + \sum_{j=0}^N u\left(x_{j+1/2}\right) \varphi_{2j+1}$$

### 2.5.5 Méthode d'éléments finis de degré $k$

Comme dans les cas  $P1$  et  $P2$ , considérons une discrétisation de l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  sous-intervalles ou éléments  $T_i$ .

Choisissons comme espace  $V_h$  d'approximation, l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ , et polynomiales de degré  $k$  sur chaque sous-intervalle. Un polynôme de degré  $k$  est fixé par

Figure 2.5.7 : Graphe d'une fonction  $g$  éléments de  $V_h$  dans le cas où  $M = 3$ 

ses valeurs en  $k + 1$  points. On prend les extrémités et discrétisation globale en  $kN + 1$  points ou noeuds  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, kN$ . L'erreur d'interpolation en norme  $H^1$  est cette fois un infiniment petit en  $O(h^k)$ , si  $h$  est la mesure du plus grand des sous-intervalles.

**Remarque 2.5.1** *Quel que soit le degré du polynôme d'interpolation utilisé dans chaque élément, les fonctions de  $V_h$  ne se raccordent, dans le cas d'éléments de Lagrange, que par leurs valeurs aux extrémités des éléments. On a donc uniquement la continuité des valeurs de la fonction inconnue et non celles de ses dérivées.*

*On parle d'éléments  $C^0$*

## 2.6 Éléments finis multidimensionnels

Notre présentation de la méthode des éléments finis unidimensionnels était suffisamment générale pour passer facilement au cas multidimensionnel. Bien sûr quelques difficultés supplémentaires se présenteront mais rien de franchement nouveau. Il faudra par exemple accorder une attention accrue à la numérotation des degrés de liberté pour éviter des matrices exigeant trop d'espace-mémoire.

Il est de plus évident que la taille des problèmes augmentera de manière significative, sur tout en dimension trois.

### 2.6.1 Problème type

Nous considèrerons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} p(x) u(x) - \nabla \cdot (q(x) \nabla u) = r(x), \text{ dans } \Omega \\ u(x) = g(x), \text{ sur } \Gamma_0 \\ q(x) \frac{\partial u}{\partial n} = h(x), \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

On suppose que la fonction  $p(x)$  est positive ou nulle et que  $0 < q_1 \leq q(x) \leq q_2$  sur le domaine  $\Omega$ .

Nous supposerons de plus que les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  constituent une partition de la frontière  $\Gamma$  du domaine c-à-d.  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ . Il faut de plus spécifier la régularité des conditions aux limites. Puisqu'il s'agit d'un problème d'ordre deux, on travaillera dans  $H^1(\Omega)$  et l'imposition de  $u(x)$  sera l'unique condition essentielle. Il s'en suit que l'espace fonctionnel approprié est l'espace  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ .

On doit donc supposer que  $g(x) \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  ce qui nous permettra d'effectuer le relèvement de la condition aux limites essentielle par une fonction  $u_g(x)$  de  $H^1(\Omega)$ .

Sous ces conditions, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. On obtient de plus la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{trouver } u_0(x) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \alpha(u_0, w) = l(w) - \alpha(u_g, w) \quad \forall w(x) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{cases}$$

où

$$\alpha(u_0, w) = \int_{\Omega} (p(x) u_0(x) w(x) + q(x) \nabla u_0 \cdot \nabla w) dv$$

et

$$l(w) = \int_{\Omega} r(x) w(x) dv + \int_{\Gamma_1} h(x) w(x) ds$$

### 2.6.2 Le maillage

Il est toute évidence plus difficile de concevoir un maillage en dimension deux ou trois. En effet, découper un domaine de forme quelconque en sous-domaines de formes géométriques simples n'est pas une mince tâche. Plusieurs techniques de génération de maillage existent avec des avantages et inconvénients de toutes sortes.

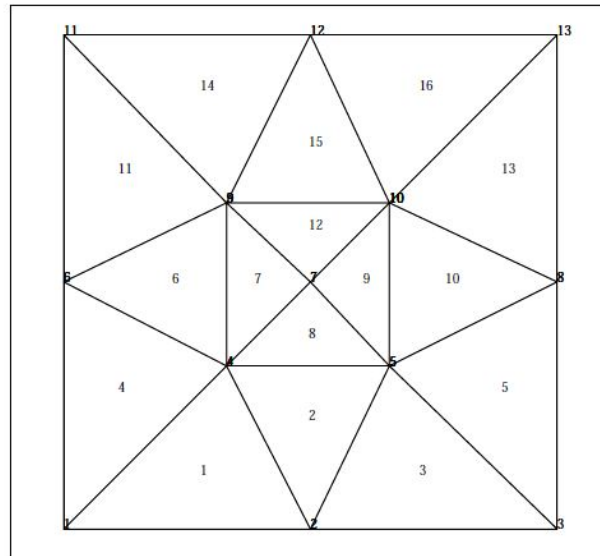


Figure 2.6.8 : Numérotation des éléments et des noeuds

Dans la majeure partie de ce partie de chapitre, nous nous limiterons à des maillages très simples comportant peu d'éléments.

Avant de parler de maillages, il faut décider de la forme géométrique des éléments. En dimension un, ce choix est facile mais déjà en dimension deux, des variantes existent. Il faut choisir une forme géométrique simple. En dimension deux nous considérons les triangles et les quadrilatères tandis qu'en dimension trois nous nous limiterons aux tétraèdres. En fait, la vaste majorité des maillages modernes produisent des triangles en dimension deux et des tétraèdres en dimension trois. Il est en effet beaucoup plus difficile de décomposer un domaine en quadrilatères ( en dimension deux) et en hexaèdres (en dimension trois).

La forme géométrique des éléments étant choisie, on suppose que nous avons un maillage comportant  $nel$  éléments tel qu'illustré à la Figure(2.6.8).

### 2.6.3 Les noeuds

Sur chaque élément  $k$ , on définit  $n_G$  noeuds géométriques. Généralement, les noeuds géométriques correspondent aux sommets du triangle, du quadrilatère ou du tétraèdre. Le choix des noeuds géométriques déterminera la transformation à l'élément de référence.

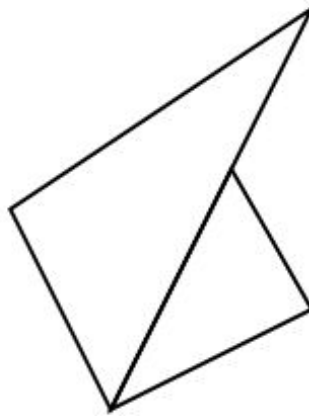


Figure 2.7.9 : Configuration interdite

Comme en dimension un, on introduit également les  $n_G$  noeuds de calcul où on évaluera les valeurs des variables essentielles du problème. On supposera ici encore, bien que soit pass absolument nécessaire, que les noeuds de calcul comprennent les noeuds géométriques. Le nombre total de noeuds de l'élément  $K$  est noté  $n_T$ .

On place les coordonnées de tous les noeuds. (géométriques et/ ou de calcul) du maillage dans la table *coor* de dimension  $n$  noeuds multipliée par la dimension d'espace  $d$  ( $d = \text{deux ou } d$ ). Enfin, la noeuds (en plaçant les noeuds géométriques en premier).

## 2.7 Éléments finis de lagrange triangulaires

### 2.7.1 les éléments finis P1

Dans ce cas l'espace d'approximation  $V_h$  est un espace de fonctions affines par éléments triangulaires. Dans chaque triangle, la restriction des fonction de  $V_h$  est donc un polynôme de degré un de la forme  $a_0 + a_1x + a_2y$  qui est donc déterminé de façon unique par ses valeurs en trois points distincts.

On choisit les trois sommets du triangle. Ceci assure la continuité globale des fonctions de  $V_h$  sur le domaine polygonal  $\Omega$ . En effet sur chaque arête commune à deux triangles adjacents, les restrictions des fonctions de  $V_h$  sont des fonctions affines fixées de manière

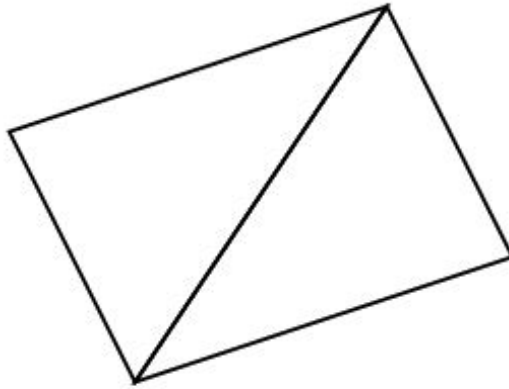


Figure 2.7.10 : Deux éléments adjacents

unique par la donnée de leurs valeurs aux deux sommets sur l'arête. Globalement les fonctions de  $V_h$  seront uniquement déterminées par leurs valeurs aux sommets ou noeuds de la triangulation.

*La dimension totale de  $V_h$  est donc égale au nombre de noeuds du maillage.* Dans la cas de conditions aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière, la dimension de  $V_h$  est évidemment réduite au nombre des noeuds associés à une valeur inconnue de la solution. Elle est donc égale au nombre de noeuds total moins le nombre de noeuds où la solution est fixée par une condition de Dirichlet.

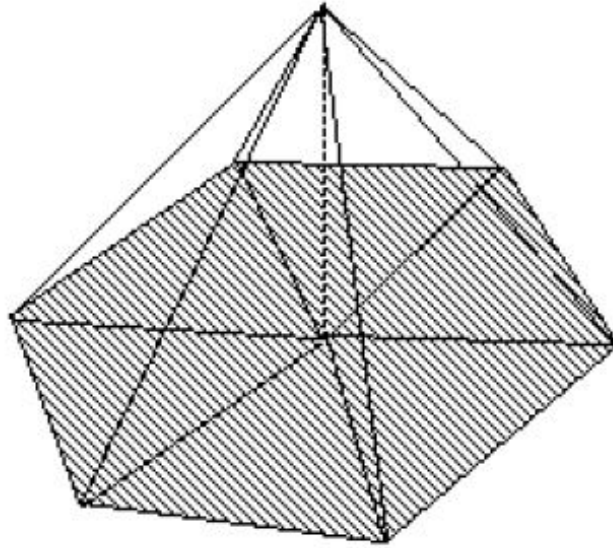
### Les fonctions de base $P1$

La construction d'une base de  $V_h$  se fait selon la technique classique de lagrange. On prend comme fonctions de base les  $N$  fonctions  $w_i$  de  $V_h$  définies par les  $N$  conditions suivantes aux  $N$  noeuds  $(x_i, y_i)$  du maillage :

$$w_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

On remarquera que ses fonctions ont un support réduit à l'union des triangles dont le point  $(x_i, y_i)$  est un sommet. Dans cette base une fonction de  $V_h$  s'écrit :

$$u_h(x, y) = \sum_i u_i w_i(x, y)$$

Figure 2.7.11 : Une fonction de base  $P1$ 

### Les fonctions de forme $P1$

On appellera fonctions de forme les restrictions des fonctions de base dans un élément. Dans chaque triangle  $T$  de sommets  $A_1, A_2, A_3$ , il n'y a que 3 fonctions de base non-nulles. Les restrictions de ces fonctions de base  $w_1, w_2, w_3$  sont les trois fonction polynomiales de degré un prenant la valeur un en un des sommets et nulles aux deux autres sommets. Notons les respectivement  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

$\lambda_1$  est le polynôme de degré un prenant la valeur un en  $A_1$  et nul en  $A_2$  et  $A_3$ .

$$\lambda_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

$\lambda_1$  est donc déterminé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1, y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 = 1 \\ \lambda_1(x_2, y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 = 0 \\ \lambda_1(x_3, y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \text{Aire}(T)$$

est différent de zéro si les points  $A_1, A_2, A_3$  ne sont pas alignés.

En résolvant le système  $3 \times 3$  ci-dessus et les systèmes analogues pour  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  on obtient les formules suivantes :

$$\lambda_1(x, y) = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)}{2\text{Aire}(T)}$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)}{2\text{Aire}(T)}$$

$$\lambda_3(x, y) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)}{2\text{Aire}(T)}$$

On en déduit les expressions suivantes des gradients :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2\text{Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2\text{Aire}(T)}$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2\text{Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2\text{Aire}(T)}$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2\text{Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2\text{Aire}(T)}$$

Les trois fonctions  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  s'appellent les coordonnées barycentriques du triangle  $T$ . On les désigne sous le nom "area coordinates" en anglais car elles représentent en chaque point  $M$  de coordonnées  $x, y$  le rapport des aires algébriques des triangles  $MA_I A_j$  et  $T$ .

Par exemple

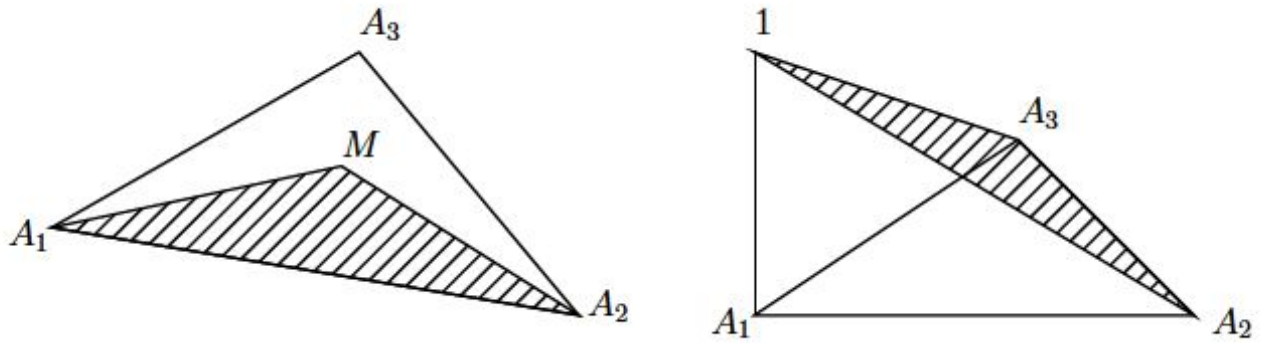
$$\lambda_1(M) = \frac{\text{Aire}(A_2 A_3 M)}{\text{Aire}(T)}$$

Une fonction quelconque de  $V_h$  prenant les valeurs  $u_1, u_2, u_3$  aux sommets  $A_1, A_2, A_3$  du triangle  $T$  s'écrit dans  $T$  sous la forme

$$u_h(x, y) = u_1 \lambda_1(x, y) + u_2 \lambda_2(x, y) + u_3 \lambda_3(x, y)$$

## 2.7.2 Éléments triangulaires généraux

Considérons un maillage du domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  en triangles  $T_l$  pour  $l = 1, \dots, N$  satisfaisant aux critères énoncés précédemment. Le choix d'une approximation par éléments finis  $P_K$  correspond au choix d'une espace  $V_h$  d'approximation constitué de fonction continues sur  $\bar{\Omega}$ , polynomiales de degré  $k$  par éléments triangulaires.

Figure 2.7.12 : Deux représentations de fonction  $\lambda_1$ 

Notons que ce choix, associé à une triangulation correcte assure l'inclusion  $V_h \subset H^1(\Omega)$ .

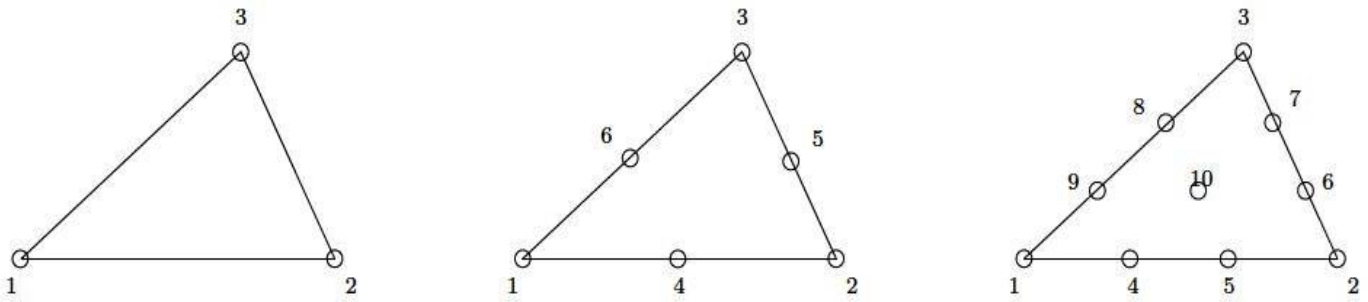
Un polynôme de degré  $k$  à deux variables  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  coefficients. On devra donc imposer  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  conditions dans chaque élément triangulaire pour  $y$  fixer les restrictions des fonctions de  $V_h$ . Soit  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  paramètres ou degré de liberté locaux. Dans le cas d'éléments de lagrange, ces degrés de liberté sont exclusivement les valeurs de la fonction en certains points du triangle.

Pour assurer la continuité globale sur  $\bar{\Omega}$  des fonctions de  $V_h$ , il faut (et cela suffit) assurer le raccordement aux frontières entre éléments triangulaires. La restriction des polynômes  $P_k$  à deux variables sur les côtés des triangles est un polynôme de degré  $k$  à une seule variable. Il faut  $k + 1$  conditions pour le fixer de manière unique. Donc pour assurer le raccordement des fonctions de  $V_h$  entre éléments adjacents, il faut disposer, dans le cas d'éléments de lagrange,  $k + 1$  points sur leur arête commune.

En définitive les éléments triangulaires de lagrange de degré  $k$  comprennent  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  points par triangles, dont  $k + 1$  points sur chaque côté.

### Éléments P1

L'élément triangle P1 comporte *trois* degrés de liberté, donc *trois* points nodaux, et *deux* points par côtés. Il y a une seule possibilité : le choix des 3 sommets du triangle

Figure 2.7.13 : Éléments triangulaires:  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ 

### Éléments $P_2$

L'élément triangle  $P_2$  comporte *six* degrés de liberté, donc *six* points nodaux, *trois* points par côtés. On choisit les *trois* sommets et les *trois* milieux des côtés du triangle.

### Éléments $P_3$

L'élément triangle  $P_3$  comport *dix* degrés de liberté, donc *dix* points nodaux, *quatre* points par côtés. On choisit les *trois* sommets du triangle, plus *deux* points au un tiers, deux tiers de chaque côté et le barycentre.

### Fonction de base $P_k$

Globalement sur  $\bar{\Omega}$  les fonction de  $V_h$  sont définies par leurs valeurs aux noeuds de la triangulation, c'est à dire sur l'ensemble des points constituant l'union des ensembles de points nodaux élémentaires.

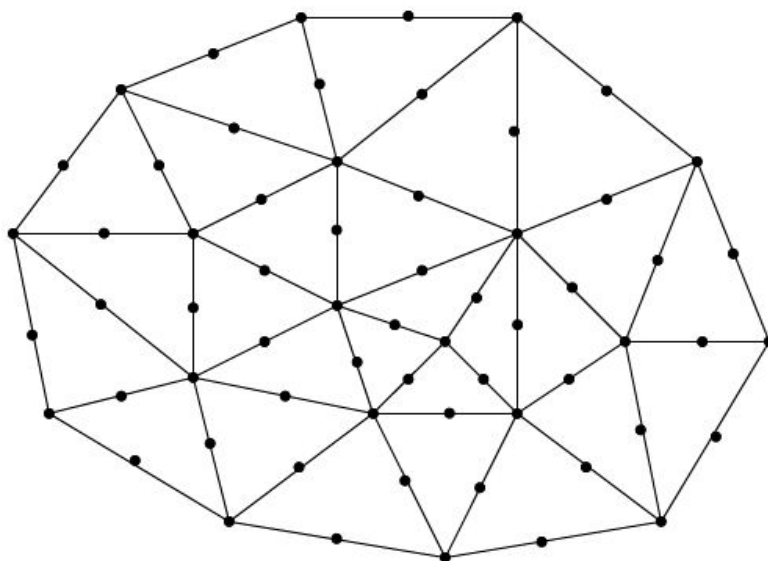
Par exemple dans le cas d'éléments  $P_2$  les noeuds  $X_I$  du maillage seront les sommets des triangles et les milieux des côtés des arêtes. La base globale de lagrange sera la base des fonctions  $w_I$  définies par les conditions :

$$w_J(x_I, y_I) = \delta_{I,J}$$

pour tout indice  $I$  et tout indice  $J$  correspondants à un noeud de la triangulation.

### Fonctions de forme $P_k$

Ce sont les restrictions des fonctions de base  $w_i$  dans un élément triangulaire.

Figure 2.7.14 : Maillage en triangles  $P2$  droits

Notons les  $N_i$  pour  $i = 1, \dots, n_k$  avec  $n_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

On les définit localement selon la technique de lagrange:

$$N_i(A_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n_k$$

où les  $A_j$  dénotent dans un triangle  $T_l$  les noeuds  $X_l$  du maillage .

Les fonctions de forme  $N_i$  s'expriment simplement en fonctions des coordonnées barycentriques  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  du triangle.

**Fonction de forme  $P1$**  En exprimant les conditions de lagrange on retrouve que les  $N_i$  coïncident avec les  $\lambda_i$ . On a donné leur expression analytique ainsi que celles de leurs gradient

**Fonctions de forme  $P2$**  On obtient pour les noeuds aux sommets correspondants aux indices locaux 1, 2, 3 :

$$N_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

et

$$\text{grad } N_i = (4\lambda_i - 1) \text{ grad } \lambda_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$



Figure 2.7.15 : Fonctions de forme  $P_2$

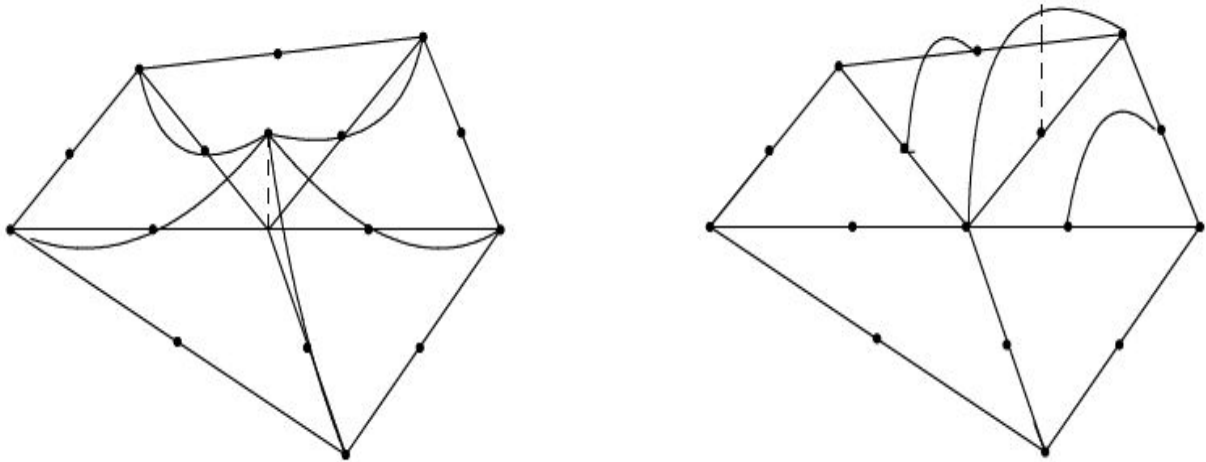


Figure 2.7.16 : Fonctions de base  $P_2$  et leur support

Pour les noeuds aux milieux des côtés correspondants aux indices locaux 4, 5, 6 :

$$N_4 = 4\lambda_1\lambda_2$$

$$N_5 = 4\lambda_2\lambda_3$$

$$N_6 = 4\lambda_3\lambda_1$$

et

$$\text{grad } N_4 = 4(\lambda_1 \text{ grad } \lambda_2 + \lambda_2 \text{ grad } \lambda_1)$$

$$\text{grad } N_5 = 4(\lambda_2 \text{ grad } \lambda_3 + \lambda_3 \text{ grad } \lambda_2)$$

$$\text{grad } N_6 = 4(\lambda_3 \text{ grad } \lambda_1 + \lambda_1 \text{ grad } \lambda_3)$$

**Fonctions de forme P3** On obtient pour les noeuds aux sommets correspondants aux indices locaux 1, 2, 3 :

$$N_i = \frac{\lambda_i (3\lambda_i - 1) (3\lambda_i - 2)}{2}, \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

Pour les noeuds, aux un tiers et deux tiers des côtés, correspondants aux indices locaux 4 à 9 :

$$N_4 = \frac{9\lambda_1 (3\lambda_1 - 1) \lambda_2}{2}, \text{ etc. } \dots, \text{ pour } i = 5, 6, 7, 8, 9$$

Enfin, pour le noeud 10 au barycentre, on obtient la fonction “bulle”, nulle sur les côtés du triangle et souvent utilisée dans les formulations mixtes.

$$N_{10} = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

### 2.7.3 Éléments finis isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires

Les éléments finis isoparamétriques sont des éléments dont les fonctions de forme sont définies à partir de fonctions de forme mères construites sur un élément de référence. Les fonctions de forme l'élément réel sont les transformées des fonctions de forme mères dans la transformation géométrique faisant passer de l'élément de référence à l'élément réel. *Si cette transformation géométrique s'exprime dans la base des fonctions de formes mères construites sur l'élément de référence, on parle d'élément isoparamétrique.* Car, dans ce cas, les même fonctions servent à définir la base de l'espace d'approximation et la géométrie des éléments. A l'inverse. dans le cas des éléments P2 droits. par exemple, les fonctions de formes mères sont des polynômes de degré deux alors que la transformation qui fait passer du triangle de référence au triangle réel est affine. On parle alors d'élément sous-paramétrique.

#### Les éléments quadrilatéraux bilinéaires de lagrange : les éléments Q1

Considérons un maillage du domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  en quadrangles  $C_l$  pour  $l = 1, \dots, N$ , satisfaisant aux critères caractérisant un maillage par éléments finis. Essayons de construire une approximation par éléments finis correspondant au choix d'un espace  $V_h$  d'approximation constitué de fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$  régulière et d'expression simple sur chaque élément

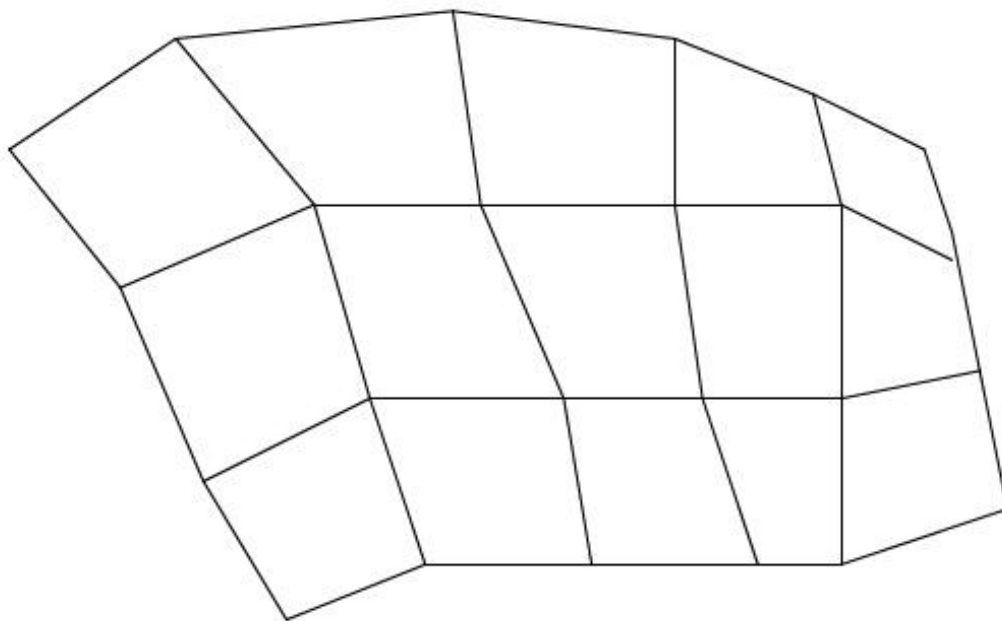


Figure 2.7.17 : Maillage en quadrangles

quadrangulaire. La première idée qui vient à l'esprit consisterait à choisir des polynômes dans chaque quadrangle.

Prenons par exemple un quadrangle droit et choisissons comme degrés de liberté dans ce quadrangle les valeurs de la fonction inconnue aux 4 sommets du quadrangle. Ces *quatre* valeurs définissent de façon unique un polynôme à *quatre* coefficients de la forme

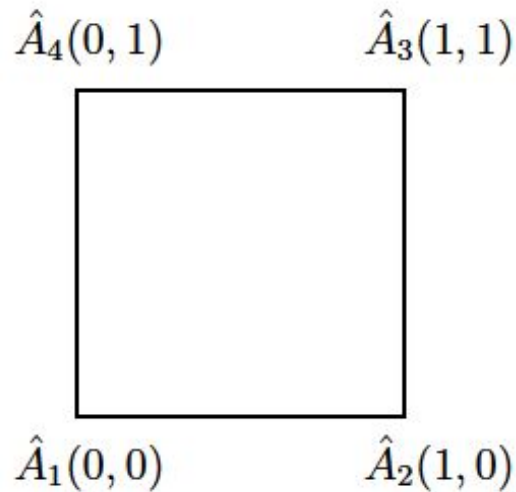
$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

Mais ce choix d'espace d'approximation  $V_h$  constitué des fonctions polynomiales de la forme ci-dessus par quadrangles ne fournit pas de méthode d'éléments finis conformes acceptable.

En effet, sur chaque côté commun à deux quadrangles adjacents (d'équation  $y = mx + p$ ), la restriction des polynômes de la forme:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

est un polynôme de degré *deux* en  $x$ . Et *deux* points ne suffisent pas à fixer de manière unique un polynôme de degré *deux* à une variable donc à assurer la continuité inter-éléments et la continuité globale des fonctions de cet espace d'approximation.

Figure 2.7.18 : Élément de référence  $Q_1$ : le carré unité

**Remarque 2.7.2** *Par contre, dans le cas de maillages par des éléments rectangulaires (ce qui conduit nécessairement à des maillages structurés et ne s'applique qu'à des domaines simples décomposables en rectangles), en prenant les côtés des rectangles parallèlement aux axes de coordonnées, le choix d'un espace d'approximation  $V_h$  de fonctions continues polynomiales de la forme  $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$  par élément rectangulaire est cohérent. Dans ce cas les côtés des éléments ont des équations de la forme  $x = cste$  ou  $y = cste$  et les restrictions des fonctions de base sur un côté sont des fonctions affines à une variable complètement déterminées par leurs valeurs aux deux extrémités de ce côté. On laisse au lecteur le développement complet de cette méthode d'éléments finis rectangulaires. Signalons que l'on retrouve ainsi des méthodes classiques de discrétisation par différences finies. En particulier dans le cas du laplacien on retrouve, avec ces éléments rectangulaires bilinéaires et la formule d'intégration approchée des trapèzes, la chéma à 5 points usuel.*

Voyons maintenant la solution au problème évoqué plus haut: comment construire un espace d'approximation acceptable avec une discrétisation géométrique du domaine de calcul en quadrangles.

On choisit comme élément de référence le caré unité et comme points nodaux les *quatre* sommets. On note  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  les coordonnées d'un point du caré unité.

On choisit comme espace de fonctions de forme dans l'élément de référence l'espace des polynômes bilinéaires de la forme

$$a_0 + a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{x}\hat{y}$$

Sur ce carré unité, les fonctions de forme mères sont définies classiquement par les conditions de lagrange

$$\hat{N}_i(\hat{A}) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, 4$$

Ce qui donne les formules suivantes

$$\begin{aligned}\hat{N}_1 &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ \hat{N}_2 &= \hat{x}(1 - \hat{y}) \\ \hat{N}_3 &= \hat{x}\hat{y} \\ \hat{N}_4 &= (1 - \hat{x})\hat{y}\end{aligned}$$

Ces quatre fonctions forment une base de l'espace des fonctions bilinéaires et toute fonction bilinéaire est déterminée uniquement par la donnée de ses valeurs aux *quatre* sommets du carré unité. Considérons alors l'application  $F$

$$(\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow{F} (x, y)$$

du carré unité dans un quadrilatère quelconque de sommets

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4)$$

définie par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}x &= x_1\hat{N}_1 + x_2\hat{N}_2 + x_3\hat{N}_3 + x_4\hat{N}_4 \\ y &= y_1\hat{N}_1 + y_2\hat{N}_2 + y_3\hat{N}_3 + y_4\hat{N}_4\end{aligned}$$

Cette application fait correspondre aux quatre sommets du carré unité numérotés dans le sens direct les quatre sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  du quadrilatère également pris dans le sens direct. On va montrer que c'est une transformation inversible si le quadrilatère est convexe. Pour cela on calcule le déterminant Jacobiene de cette transformation.

$$\det(J) = \frac{\partial x \partial y}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \frac{\partial x \partial \hat{y}}{\partial \hat{x} \partial x}$$

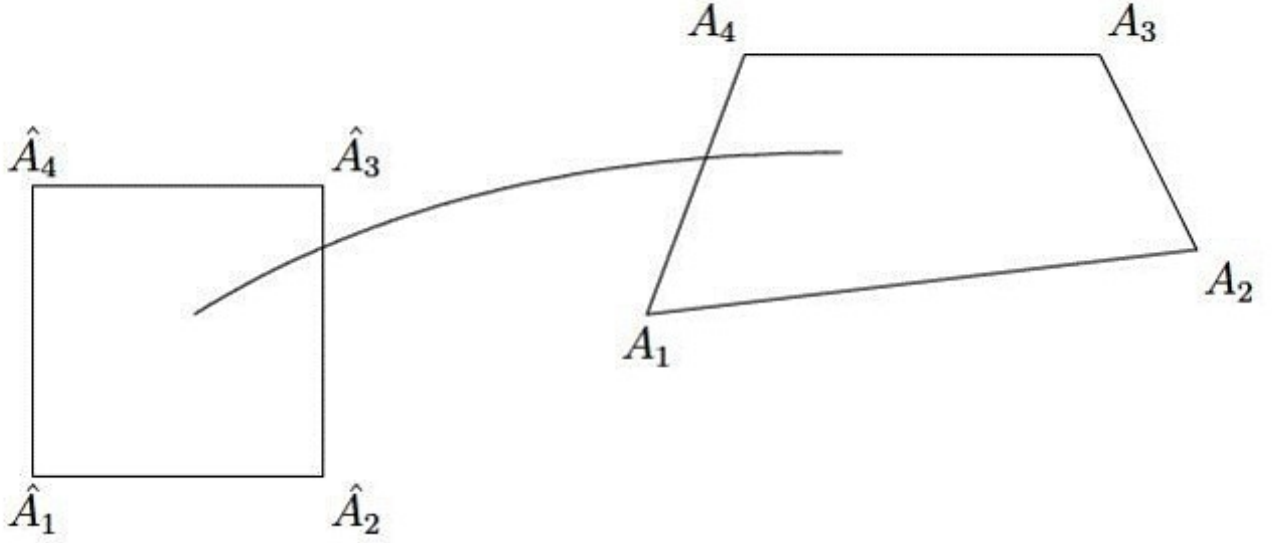


Figure 2.7.19 : Transformation du carré unité en quadrangle quelconque

On trouve:

$$\begin{aligned} \det(J) = & [(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)] (1 - \hat{x}) (1 - \hat{y}) \\ & + [(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2)] \hat{x} (1 - \hat{y}) \\ & + [(x_4 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_4 - y_3)] \hat{x} \hat{y} \\ & + [(x_1 - x_4)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_4)] (1 - \hat{x}) \hat{y} \end{aligned}$$

Les coefficients de  $\det(J)$  dans la base des  $\hat{N}_i$  sont les aires algébriques des *quatre* parallélogrammes construits sur deux côtés adjacents du quadrilatère. Ces aires sont toutes positives si le quadrilatère est convexe. En effet en notant  $L_{ij}$  la longueur du côté  $A_iA_j$  et  $\theta_i$  l'angle interne au sommet  $A_i$  on a :

$$\det(J) = L_{12}L_{14} \sin(\theta_1) \hat{N}_1 + L_{12}L_{23} \sin(\theta_2) \hat{N}_2 + L_{23}L_{34} \sin(\theta_3) \hat{N}_3 + L_{14}L_{34} \sin(\theta_4) \hat{N}_4$$

Si le quadrilatère est convexe, les angles  $\theta_i$  sont strictement inférieurs à  $\pi$  et leur sinus strictement positifs. Les coefficients de  $\det(J)$  dans la base des  $\hat{N}_i$  sont tous quatre strictement positifs et par conséquent  $\det(J)$  est toujours strictement positif dans la carré unité. D'ailleurs on peut également remarquer que les termes en  $\hat{x} \hat{y}$  s'annulent dans le développement de  $\det(J)$ . Donc le jacobien est une fonction affine ( $P1$ ). Comme il prend des valeurs

strictement positives en quatre points distincts et non alignés, il est toujours strictement positif.

### Fonction de forme $Q1$

Les fonctions de forme choisies dans un quadrilatère quelconque du maillage sont les transformées des fonctions de forme mères  $\hat{N}_i$  selon:

$$N_i(x, y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$$

On considère les fonctions  $q$  obtenues par la transformation inversible précédente  $F$  à partir des fonctions bilinéaires  $\hat{q}$  sur le carré de référence.

$$(x, y) \longrightarrow q(x, y) = \hat{q}(\hat{x}, \hat{y}), \text{ avec } (\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow{F} (x, y)$$

Une fonction  $q \in Q1$  prenant les valeurs  $q_i$  aux sommets  $A_i$  du quadrilatère s'écrira dont

$$q(x, y) = \sum_{i=1, \dots, 4} q_i N_i(x, y) = \sum_{i=1, \dots, 4} q_i \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y})$$

Notons, en effet, que les fonctions de formes mères sont des fonctions de base (locales) des polynômes de type  $Q1$  sur l'éléments de référence.

### Fonction de base $Q1$

Ce sont les fonctions  $w_I$ , prenant la valeur 1 en un noeud (d'indice  $I$ ) du maillage et la valeur zéro en tous les autres noeuds, dont les restrictions dans chaque quadrilatère sont des fonctions de forme  $Q1$ .

Toute fonction de  $V_h$  s'écrira comme combinaison linéaire des  $w_I$ . Remarquons que  $V_h$  est bien cette fois un espace de fonctions continues. Toute fonction de  $V_h$  est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds du maillage, sommets des quadrilatères. Deux fonctions de  $V_h$  égales en deux sommets adjacents  $A_i$  et  $A_j$  sont égales sur l'arête  $A_i A_j$  joignant ces sommets. Car, par transformation continue inverse, les fonctions correspondantes sont égales sur 2 sommets adjacents du carré de référence  $\hat{A}_i$  et  $\hat{A}_j$  et par construction des fonctions de forme mères, elles sont égales sur tout le côté  $\hat{A}_i \hat{A}_j$  qui s'applique lui-même sur l'arête  $A_i A_j$ .

### Calcul des gradients des fonctions de base Q1

Les restrictions des fonctions de base dans les quadrangles élémentaires  $C_l$  sont les fonctions de forme  $N_i$ . Rappelons que les  $N_i$  sont définies à partir de fonctions de forme  $\hat{N}_i$  dans le carré de référence  $\hat{C}$  par la transformation  $F$

$$N_i(x, y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$$

Le calcul de leur gradients se remène donc à ceux des fonctions de forme mères sur l'élément de référence.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\text{grad } N_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \text{grad } \hat{N}_i$$

Les expressions données des  $\hat{N}_i$  permettent le calcul aisé de leur gradient. Il nous reste donc à calculer la matrice des dérivées partielles ci-dessus. Or on obtient facilement la matrice jacobienne inverse  $J$  donnant :

$$\text{grad } \hat{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \text{grad } N_i$$

par

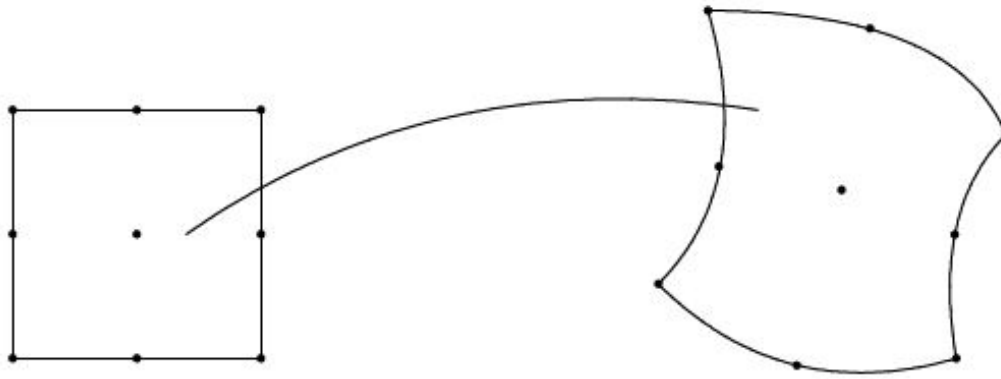
$$\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = \sum_{i=1, \dots, 4} x_i \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}}$$

etc...

On en déduit

$$\text{grad } N_i = J^{-1} \text{grad } \hat{N}_i = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} & -\frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \end{pmatrix} \text{grad } \hat{N}_i$$

Notons que les gradients des fonctions de forme  $N_i$  sont des fractions rationnelles (le numérateur est un polynôme de degré deux et le dénominateur  $\det(J)$  un polynôme  $P1$ ). On aura donc besoin de formules de quadrature numérique.

Figure 2.7.20 : Transformaion du carré unité  $Q2$  en quadrangle courbe

**Remarque 2.7.3** *Le calcul des gradient qui précède est général. Nous le présentons à propos des fonctions  $Q1$  mais on peut l'appliquer à tous les cas de fonctions de base éléments finis. Dans le cas d'éléments  $Pk$  nous avons trouvé plus simple de passer par les coordonnées barycentriques.*

### Éléments isoparamétriques $Q2$

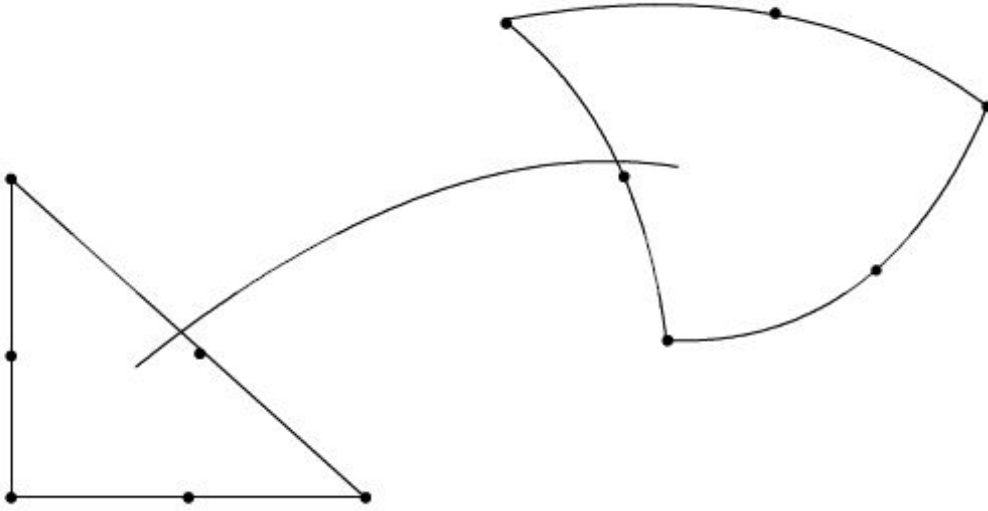
Les développements précédents peuvent être repris dans le cas d'éléments biquadratiques obtenus par transformation isoparamétrique à partir du carré unité à 9 noeuds sur lequel on définit des fonctions de forme mères de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

**Éléments isoparamétriques  $P2$**  On considère cette fois des triangles curvilignes obtenus par transformation isoparamétrique  $P2$  à partir du triangle de référence isocèle rectangle unité à six noeuds. Les fonctions de forme utilisées dans l'élément de référence sont les fonctions de forme  $P2$ . La transformation s'exprime dans la base des fonctions de forme  $P2$ , polynômes de degré 2 dans les variables  $\hat{x}, \hat{y}$  selon

$$x = \sum_{i=1,\dots,6} x_i \hat{N}_i$$

$$y = \sum_{i=1,\dots,6} y_i \hat{N}_i$$

Figure 2.7.21 : Transformation du triangle unité  $P2$  en triangle curviligne

## 2.8 Analyse de convergence

Nous avons vu au chapitre un les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $u$  d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \text{trouver une fonction } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, w) = l(w), \forall w \in V \end{cases} \quad (2.21)$$

Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées à savoir que la forme linéaire  $l$  est continue et que la forme bilinéaire  $a$  est continue et coercive sur  $V$ .

Nous avons vu comment construire des solutions numériques par la méthode des éléments finis pour obtenir une approximation  $u_h$  de cette solution unique. Cela revient à construire un sous-espace de dimension finie  $V_h$  de  $V$  et à calculer  $u_h \in V_h$  solution de

$$a(u_h, w_h) = l(w_h), \forall w_h \in V_h \quad (2.22)$$

**Définition 2.8.2** On dit que la solution numérique  $u_h$  converge vers  $u$  dans  $V$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la taille de tous les éléments tend vers 0. Il est important de remarquer que la norme utilisée est celle de l'espace  $V$ .

**Définition 2.8.3** On dit que la solution numérique  $u_h$  converge à l'ordre  $p$  vers  $u$  dans  $V$  s'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|u - u_h\|_V \simeq Ch^p$$

lorsque  $h$  tend vers 0.

**Théorème 2.8.1** Si  $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive et si  $u$  et  $u_h$  dénotent les solutions respectives, alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que:

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$$

**Preuve.** On a immédiatement en vertu des des problèmes 2.21 et 2.22

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in V$$

$$a(u_h, w_h) = l(w_h), \quad \forall w_h \in V_h$$

Puisque  $V_h \subset V$ , on peut prendre  $w = w_h$  dans la première équation et soustraire pour obtenir

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in V_h$$

En particulier

$$a(u - u_h, u_h) = 0$$

et on en conclut que

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h), \quad \forall w_h \in V_h$$

La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire  $a$  nous permettent alors d'écrire

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq C \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V, \quad \forall w_h \in V_h$$

ce qui entraîne que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - w_h\|_V, \quad \forall w_h \in V_h$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie quelque soit  $w_h \in V_h$ ,

L'interprétation de ce résultat est fondamentale. Nous venons en fait de ramener l'analyse de convergence de la solution éléments finis à un problème classique d'interpolation.

En effet, le théorème (2.8.1) affirme qu'à une constante près, l'erreur commise  $\|u - u_h\|_V$  est plus petite que la meilleure interpolation possible de  $u$  par des fonctions de  $V_h$ .

Notre intuition de départ se précise donc. En effet, plus l'espace  $V_h$  est riche, meilleure est la qualité de l'interpolation de  $u$  par des fonctions de  $V_h$  et par le théorème (2.8.1), meilleure sera notre solution par éléments finis. La richesse de l'espace discret est bien sûr fonction du nombre d'éléments du maillage mais aussi du nombre de noeuds de calcul de chaque élément. Il est en effet clair que pour un même nombre d'éléments, une interpolation linéaire sera moins riche qu'une interpolation quadratique qui sera elle-même moins riche qu'une interpolation cubique, ect... La différence entre ces différentes approximations se manifestera au niveau de l'ordre de convergence. ■

**Théorème 2.8.2** *Si  $a$  est une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive et si  $u$  et  $u_h$  dénotent les solutions respectives de 2.21 et 2.22, alors on a :*

$$I(u) = \inf_{w \in V} I(w) \quad \text{et} \quad I(u_h) = \inf_{w_h \in V_h} I(w_h)$$

où  $I(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w)$ . De plus, on a :

$$I(u) \leq I(u_h)$$

*Terminons enfin avec le résultat le plus important qui porte sur l'ordre de convergence d'une solution élément finis*

**Théorème 2.8.3** *Soit  $u$  et  $u_h$  les solutions respectives des problèmes continue ?? et discret 2.22. On suppose de plus que la solution  $u$  du problème continu soit suffisamment régulière. Supposons enfin que l'espace  $V_h \subset H^m(\Omega)$  soit tel que sa restriction à chaque élément  $K$  contienne les polynômes de degré  $k$ , alors*

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|u\|_{k+1,\Omega}$$

# Chapitre 3

## Application

### 3.1 les éléments finis unidimensionnelle

#### 3.1.1 Éléments finis de degré un: $P_1$

##### 1<sup>ère</sup> application

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = x^2, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Cet problème admet une solution exacte telle que

$$u(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{1}{3}x$$

Premier cas :  $[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$

**1<sup>ère</sup> étape :** On recherche le problème variationnel, tel que

$$V_h = \{u \in H^1([0, 1]), \text{ avec } u(0) = 0\}$$

on multiplie l'équation 3.1 par une fonction de test  $v$ , tel que  $v \in V_h$

$$-\int_0^1 u'' v dx = \int_0^1 x^2 v dx$$

par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 x^2 v dx,$$

finalment

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_h, \text{ tel que} \\ a(u, v) = \int_0^1 u'v'dx = l(v) = \int_0^1 x^2vdx \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Pour justifier l'équation 3.2 admet une unique solution on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram.

1)

a-  $l(v) = \int_0^1 x^2vdx$ , est une forme linéaire, car

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h, \text{ on a} \\ l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_0^1 x^2(\alpha v_1 + \beta v_2) dx \\ &= \int_0^1 (x^2\alpha v_1 + x^2\beta v_2) dx \\ &= \int_0^1 x^2\alpha v_1 dx + \int_0^1 x^2\beta v_2 dx \\ &= \alpha \int_0^1 x^2v_1 dx + \beta \int_0^1 x^2v_2 dx \\ &= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2) \end{aligned}$$

b-  $l(v)$  est continue car

$$\begin{aligned} l(v) &= \left| \int_0^1 x^2v dx \right|, \quad \forall v \in V_h \\ &\leq \int_0^1 x^2 dx \left( \int_0^1 v^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall v \in V_h \\ &\leq C \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

2)

a)  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall u_1, u_2 \in V_h, \text{ on a} \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \int_0^1 (\alpha u_1 + \beta u_2)' v' dx \\
 &= \int_0^1 (\alpha u_1' + \beta u_2') v' dx \\
 &= \int_0^1 \alpha u_1' v' dx + \int_0^1 \beta u_2' v' dx \\
 &= \alpha \int_0^1 u_1' v' dx + \beta \int_0^1 u_2' v' dx \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h \text{ on a} \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_0^1 (u)' (\alpha v_1 + \beta v_2)' dx \\
 &= \int_0^1 u' (\alpha v_1' + \beta v_2') dx \\
 &= \int_0^1 \alpha u' v_1' dx + \int_0^1 \beta u' v_2' dx \\
 &= \alpha \int_0^1 u' v_1' dx + \beta \int_0^1 u' v_2' dx \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2)
 \end{aligned}$$

b-continuité

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u' v' dx \right|, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq \left( \int_0^1 (u')^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 (v')^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \leq \|u\|_{V_h} \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h \\
 |a(u, v)| &\leq \|u\|_{V_h} \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h
 \end{aligned}$$

c-coercivité

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \left| \int_0^1 (u')^2 dx \right| \\
 &= \|u'\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2 \\
 &\geq C \|u\|_{V_h}^2
 \end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème 3.2 admet une unique solution  $u_h \in V_h$ , telle que

$$u_h = \sum_{i=0}^1 u_i \varphi_i, \quad i = 0, 1/2, 1$$

**2<sup>ème</sup> étape : les fonctions de base** on a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} < x \leq x_i \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et on a

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} -2x + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \varphi_{1/2}(x) &= \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x + 2, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \varphi_1(x) &= \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

La solution  $u(x)$  s'écrit

$$u(x) \simeq u_h(x) = u_0 \varphi_0 + u_{1/2} \varphi_{1/2} + u_1 \varphi_1,$$

alors

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(u_0 \varphi_0 + u_{1/2} \varphi_{1/2} + u_1 \varphi_1, v) \\ &= u_0 a(\varphi_0, v) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, v) + u_1 a(\varphi_1, v), \end{aligned}$$

on prend  $v = \varphi_j$  avec  $j = 0, 1/2, 1$

$$a(u, v) = u_0 a(\varphi_0, \varphi_j) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, \varphi_j) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_j)$$

donc

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_j) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, \varphi_j) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_j) = l(\varphi_j)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_0) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, \varphi_0) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_0) = l(\varphi_0)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_{1/2}) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, \varphi_{1/2}) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_{1/2}) = l(\varphi_{1/2})$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_1) + u_{1/2} a(\varphi_{1/2}, \varphi_1) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_1) = l(\varphi_1)$$

$$u_0 a_{0,0} + u_{1/2} a_{0,1/2} + u_1 a_{0,1} = l_0$$

$$u_0 a_{1/2,0} + u_{1/2} a_{1/2,1/2} + u_1 a_{1/2,1} = l_{1/2}$$

$$u_0 a_{1,0} + u_{1/2} a_{1,1/2} + u_1 a_{1,1} = l_1$$

on a  $u_0 = u(x_0) = u(0) = 0$  donc

$$u_{1/2} a_{0,1/2} + u_1 a_{0,1} = l_0 \tag{3.3}$$

$$u_{1/2} a_{1/2,1/2} + u_1 a_{1/2,1} = l_{1/2}$$

$$u_{1/2} a_{1,1/2} + u_1 a_{1,1} = l_1$$

**3<sup>ème</sup> étape : détermine la solution approchée:** on peut trouver la solution de cet système

$$u_{1/2} a_{0,1/2} + u_1 a_{0,1} = l_0$$

$$u_{1/2} a_{1/2,1/2} + u_1 a_{1/2,1} = l_{1/2}$$

$$a_{0,1/2} = -2, a_{0,1} = 0, a_{1/2,1/2} = 4, a_{1/2,1} = -2$$

$$l_0 = \frac{1}{96}, l_{1/2} = \frac{7}{48}$$

donc

$$\begin{aligned} -2u_{1/2} &= \frac{1}{96} \implies u_{1/2} = -\frac{1}{192} \\ 4u_{1/2} - 2u_1 &= \frac{13}{48} \implies u_1 = -\frac{7}{48} \end{aligned}$$

alors

$$u(x) = -\frac{1}{192}u_{1/2} - \frac{7}{48}u_1$$

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{96}x, & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -\frac{13}{96}x + \frac{13}{96}, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**4<sup>eme</sup> étape : Comparaison avec la solution exact et la solution approchée**

$x_i$	sol exact	sol app	erreur
0	0	0	0
0.25	0.083	-0,0026	0.0856
0.35	0.1154	-0.00036	0.1157
0.5	0.041	0.067	0.026
0.75	0.223	0.0338	0.1892
0.9	0.3546	0.01354	0.34106

**Deuxiem cas:**  $[0, 1] = [0, 1/4] \cup [1/4, 2/4] \cup [2/4, 3/4] \cup [3/4, 1]$  les fonction de base

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_{1/4} = \begin{cases} 2 - 4x, & \text{si } 1/4 \leq x \leq 2/4 \\ 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_{2/4} = \begin{cases} 3 - 4x, & \text{si } 2/4 \leq x \leq 3/4 \\ 4x - 1, & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_{3/4} = \begin{cases} 4 - 4x, & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1 \\ 4x - 2, & \text{si } 2/4 \leq x \leq 3/4 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 4x - 3, & \text{si } 1/4 \leq x \leq 2/4 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

donc pour  $j = 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1$ .

$$a(u, v) = a(u_0\varphi_0 + u_{1/4}\varphi_{1/4} + u_{2/4}\varphi_{2/4} + u_{3/4}\varphi_{3/4} + u_1\varphi_1, \varphi_j),$$

alors

$$a(u_0\varphi_0 + u_{1/4}\varphi_{1/4} + u_{2/4}\varphi_{2/4} + u_{3/4}\varphi_{3/4} + u_1\varphi_1, \varphi_j) = l(\varphi_j)$$

$$u_0a_{j,0} + u_{1/4}a_{j,1/4} + u_{2/4}a_{j,2/4} + u_{3/4}a_{j,3/4} + u_1a_{j,1} = l_0$$

on a  $u_0 = u(0) = 0$ , donc

$$u_{1/4}a_{j,1/4} + u_{2/4}a_{j,2/4} + u_{3/4}a_{j,3/4} + u_1a_{j,1} = l_j$$

$$u_{1/4}a_{0,1/4} + u_{2/4}a_{0,2/4} + u_{3/4}a_{0,3/4} + u_1a_{0,1} = l_0$$

$$u_{1/4}a_{1/4,1/4} + u_{2/4}a_{1/4,2/4} + u_{3/4}a_{1/4,3/4} + u_1a_{1/4,1} = l_{1/4}$$

$$u_{1/4}a_{1/4,1/4} + u_{2/4}a_{2/4,2/4} + u_{3/4}a_{2/4,3/4} + u_1a_{2/4,1} = l_{2/4}$$

$$u_{1/4}a_{3/4,1/4} + u_{2/4}a_{3/4,2/4} + u_{3/4}a_{3/4,3/4} + u_1a_{3/4,1} = l_{3/4}$$

$$a_{0,1/4} = -4, a_{0,2/4} = 0, a_{0,3/4} = 0, a_{0,1} = 0$$

$$a_{1/4,1/4} = 8, a_{1/4,2/4} = -4, a_{1/4,3/4} = 0, a_{1/4,1} = 0$$

$$a_{2/4,1/4} = -4, a_{2/4,2/4} = 8, a_{2/4,3/4} = -4, a_{2/4,1} = 0$$

$$a_{3/4,1/4} = 0, a_{3/4,2/4} = -4, a_{3/4,3/4} = 8, a_{3/4,1} = -4$$

et

$$l_0 = \frac{1}{768}, l_1 = \frac{7}{384}, l_2 = \frac{53}{768}, l_3 = \frac{55}{384}$$

finalemment

$$u_{1/4} = -\frac{1}{3072}, u_{2/4} = -\frac{1}{192}, u_{3/4} = \frac{21}{768}, u_1 = \frac{37}{96}$$

alors

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{768}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{15}{768}x - \frac{7}{1536}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{4} \\ \frac{25}{192}x - \frac{27}{384}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{275}{192}x - \frac{53}{192}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$x_i$	sol exact	sol app	erreur
0	0	0	0
0.25	0.083	-0.0094	0.0924
0.35	0.1154	-0.0011	0.1165
0.5	0.041	0.005	0.036
0.75	0.223	0.798	0.575
0.9	0.3546	0.0130	0.3416

### 3.1.2 2<sup>ème</sup> application

soit le probleme

$$\begin{aligned} -u'' + u &= 1, \quad 0 < x < 2 \\ u(0) &= 0, \quad u(2) = 0 \end{aligned}$$

où  $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$

la solution exacte de cet équation

$$u(x) = \frac{1}{\exp(-2) - \exp(2)} ((1 - \exp(-2)\exp(x)) - (\exp(1) - 1)\exp(-x)) - 1$$

**1<sup>ère</sup> étape :** On recherche le probleme variationnel telle que

$$V_h = \{u \in H^1([0, 2]), \text{ avec } u(0) = u(2) = 0\} = H_0^1([0, 2])$$

on multiplier l'équation par une fonction de test  $v$  tel que  $v \in V_h$

$$\int_0^2 (-u'' + u)v dx = \int_0^2 v dx$$

par intégral par partie on obtient

$$\int_0^2 (u'v' + uv) dx = \int_0^2 v dx$$

finalmment

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_h \text{ tel que} \\ a(u, v) = \int_0^2 (u'v' + uv) dx = l(v) = \int_0^2 v dx \\ u(0) = 0, \quad u(2) = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

on a  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire continue coercive et  $l(v)$  est une forme linéaire continue alors d'après le théorème de Lax-Milgram. le problème suivant admet une unique solution

**2<sup>ème</sup> étape : les fonction de base** on a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} < x \leq x_i \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et on a

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La solution  $u(x)$  s'écrit

$$u(x) = u_0\varphi_0 + u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$$

alors

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(u_0\varphi_0 + u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2, v) \\ &= u_0a(\varphi_0, v) + u_1a(\varphi_1, v) + u_2a(\varphi_2, v) \end{aligned}$$

on prend  $v = \varphi_j$  avec  $j = 0, 1, 2$

$$a(u, v) = u_0a(\varphi_0, \varphi_j) + u_1a(\varphi_1, \varphi_j) + u_2a(\varphi_2, \varphi_j)$$

donc

$$u_0a(\varphi_0, \varphi_j) + u_1a(\varphi_1, \varphi_j) + u_2a(\varphi_2, \varphi_j) = l(\varphi_j)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_0) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_0) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_0) = l(\varphi_0)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_1) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_1) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_1) = l(\varphi_1)$$

$$u_0 a(\varphi_0, \varphi_2) + u_1 a(\varphi_1, \varphi_2) + u_2 a(\varphi_2, \varphi_2) = l(\varphi_2)$$

$$u_0 a_{0,0} + u_1 a_{0,1} + u_2 a_{0,2} = l_0$$

$$u_0 a_{1,0} + u_1 a_{1,1} + u_2 a_{1,2} = l_1$$

$$u_0 a_{2,0} + u_1 a_{2,1} + u_2 a_{2,2} = l_2$$

on a  $u_0 = u(x_0) = u(0) = 0$  et  $u_2 = u(x_2) = u(2) = 1$  donc

$$u_1 a_{0,1} = l_0 \tag{3.5}$$

$$u_1 a_{1,1} = l_1$$

$$u_1 a_{2,1} = l_2 \tag{3.6}$$

**3<sup>eme</sup> étape : détermine la solution approchée** on peut trouve la solution de cette system

$$u_1 a_{0,1} = l_0$$

$$a_{0,1} = -\frac{5}{6}$$

$$l_0 = \frac{1}{2}$$

donc

$$\left\{ -\frac{5}{6}u_1 = \frac{1}{2} \right\} \implies \left\{ u_1 = -\frac{3}{5} \right\}$$

alors

$$u(x) = -\frac{3}{5}\varphi_1$$

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{3}{5}x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{5}(2-x), & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

4<sup>ème</sup> étape : la comparaison avec la solution exact et la solution approchée on a la solution exacte de cette equation

$x_i$	sol exact	sol app	erreur
0	0	0	0
0.25	-0.16	-0.15	0.01
0.5	-0.27	-0.3	0.03
0.75	-0.332	-0.45	0.118
1	-0.35	-0.6	0.25
1.25	-0.332	-0.45	0.118
1.5	-0.27	-0.3	0.03
1.75	-0.16	-0.15	0.01
2	0	0	0

## 3.2 Éléments finis multidimensionnelle

### 3.2.1 Les éléments finis triangulaire

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \Omega = 89678 \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 = 6789 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 1, & \text{sur } \partial\Omega_1 = 96 \end{cases}$$

$$A(1, -1), B(1, 1), C(-1, 1), D(-1, -1)$$

1<sup>ère</sup> étape : On recherche le problème variationnel telle que

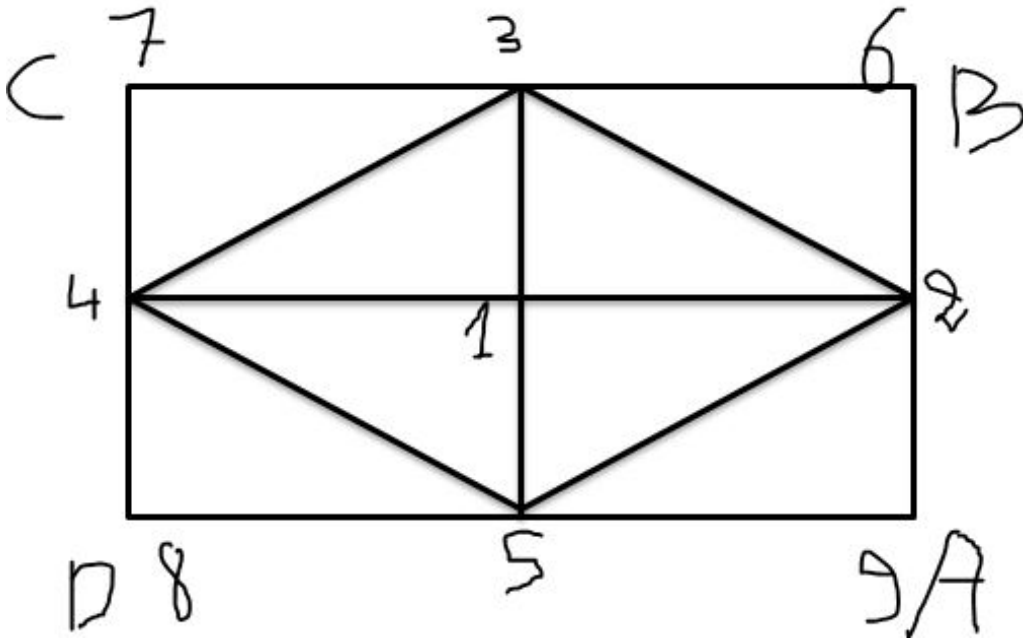
$$V_h = \{u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (3.7)$$

On multiplier l'équation 3.7 par une fonction de test  $v$  avec  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} v dx dy$$

et on utilise la formule de Gréen, telle que

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy - \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x} v d\partial\Omega_2,$$



et on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \text{ sur } \partial\Omega_2$$

donc d'après la formule de green

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy = \iint_{\Omega} v \, dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v \, d\partial\Omega_2$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_h \text{ tel que} \\ a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy = l(v) = \iint_{\Omega} v \, dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v \, d\partial\Omega_2 \end{array} \right.$$

Pour justifier l'équation 3.7 admet une unique solution on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram.

1)

a-  $l(v) = \iint_{\Omega} v dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v d\partial\Omega_2$  est une forme linéaire car

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h \text{ on a} \\
 l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \iint_{\Omega} (\alpha v_1 + \beta v_2) dx dy + \int_{\partial\Omega_2} (\alpha v_1 + \beta v_2) d\partial\Omega_2 \\
 &= \iint_{\Omega} \alpha v_1 dx dy + \iint_{\Omega} \beta v_2 dx dy + \int_{\partial\Omega_2} \alpha v_1 d\partial\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_2} \beta v_2 d\partial\Omega_2 \\
 &= \alpha \left( \iint_{\Omega} v_1 dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v_1 d\partial\Omega_2 \right) + \beta \left( \iint_{\Omega} v_2 dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v_2 d\partial\Omega_2 \right) \\
 &= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2)
 \end{aligned}$$

b-  $l(v)$  est continue car

$$\begin{aligned}
 l(v) &= \left| \iint_{\Omega} v dx dy + \int_{\partial\Omega_2} v d\partial\Omega_2 \right|, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq C \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h
 \end{aligned}$$

2)

a)  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall u_1, u_2 \in V_h \text{ on a} \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \iint_{\Omega} (\alpha \nabla u_1 + \beta \nabla u_2) \nabla v dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \alpha \nabla u_1 \nabla v dx dy + \iint_{\Omega} \beta \nabla u_2 \nabla v dx dy \\
 &= \alpha \iint_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v dx dy + \beta \iint_{\Omega} \nabla u_2 \nabla v dx dy \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h \text{ on a} \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \iint_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v_1 + \beta \nabla v_2) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v_1 + \beta \nabla v_2) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla v_1 dx dy + \iint_{\Omega} \beta \nabla u \nabla v_2 dx dy \\
 &= \alpha \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v_1 dx dy + \beta \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v_2 dx dy \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2)
 \end{aligned}$$

b-continuité

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy \right|, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq \left( \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\Omega} (\nabla v)^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \forall v \in V_h \\
 |a(u, v)| &\leq \|u\|_{V_h} \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h
 \end{aligned}$$

c-coercivité

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \left| \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy \right| \\
 &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2 \\
 &\geq C \|u\|_{V_h}^2
 \end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème admet une unique solution  $u_h \in V_h$  avec

$$u_h = \sum_{i=1}^3 u_i \varphi_i$$

**2<sup>ème</sup> étape : Les fonctions de base** on a

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda(x, y) = ax + by + c$$

on pose

$$A(0, 0), A_2(1, 0), A_3(0, 1)$$

et on a

$$\varphi_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = \lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\lambda_1(x_1, y_1) = 1 \implies c = 1$$

$$\lambda_1(x_2, y_2) = 0 \implies a = -1$$

$$\lambda_1(x_3, y_3) = 0 \implies b = -1$$

alors

$$\lambda_1(x, y) = 1 - x - y$$

et

$$\Delta\lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2(x_1, y_1) = 0 \implies c = 0$$

$$\lambda_2(x_2, y_2) = 1 \implies a = 1$$

$$\lambda_2(x_3, y_3) = 0 \implies b = 0$$

$$\lambda_2(x, y) = x$$

$$\Delta\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3(x_1, y_1) = 0 \implies c = 0$$

$$\lambda_3(x_2, y_2) = 0 \implies a = 0$$

$$\lambda_3(x_3, y_3) = 1 \implies b = 1$$

$$\lambda_3(x, y) = y$$

$$\Delta\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution  $u(x)$  s'écrit

$$u(x) = \sum_{i=1}^9 u_i \lambda_i = u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + u_3 \lambda_3 + u_4 \lambda_4 + u_5 \lambda_5 + u_6 \lambda_6 + u_7 \lambda_7 + u_8 \lambda_8 + u_9 \lambda_9$$

alors

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a\left(\sum_{i=1}^9 u_i \lambda_i, v\right) \\ &= a(u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2 + u_3 \lambda_3 + u_4 \lambda_4 + u_5 \lambda_5 + u_6 \lambda_6 + u_7 \lambda_7 + u_8 \lambda_8 + u_9 \lambda_9, v) \\ &= u_1 a(\lambda_1, v) + u_2 a(\lambda_2, v) + u_3 a(\lambda_3, v) + u_4 a(\lambda_4, v) + u_5 a(\lambda_5, v) + u_6 a(\lambda_6, v) + u_7 a(\lambda_7, v) + u_8 a(\lambda_8, v) + u_9 a(\lambda_9, v) \end{aligned}$$

on a

$$u_i = 0, \text{ si } i = 3, \dots, 9$$

donc

$$a(u, v) = a(u_1 \lambda_1 + u_2 \lambda_2, v)$$

on prend  $v = \lambda_j$  avec  $j = 1, \dots, 9$

$$u_1 a(\lambda_1, \lambda_j) + u_2 a(\lambda_2, \lambda_j) = (\lambda_j)$$

$$u_1 a_{1,1} + u_2 a_{1,2} = l_1 \tag{3.8}$$

$$u_1 a_{2,1} + u_2 a_{2,2} = l_2$$

**3<sup>ème</sup> étape : détermine la solution approchée**

$$a_{1,1} = 4, a_{1,2} = -1, a_{2,1} = -1, a_{2,2} = 2$$

$$l_1 = \frac{11}{6}, l_2 = 2$$

donc

$$\begin{cases} 4u_1 - u_2 = \frac{11}{6} \\ -u_1 + 2u_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} u_1 = \frac{17}{21} \\ u_2 = \frac{59}{42} \end{cases}$$

, alors

$$u_h(x) = \frac{17}{21}(-x - y + 1) + \frac{59}{42}x$$

finalemt la solution approcher de cette problem

$$u_h(x) = -\frac{15}{42}x - \frac{17}{21}y + 1$$

### 3.2.2 Les éléments finis quadrilatère

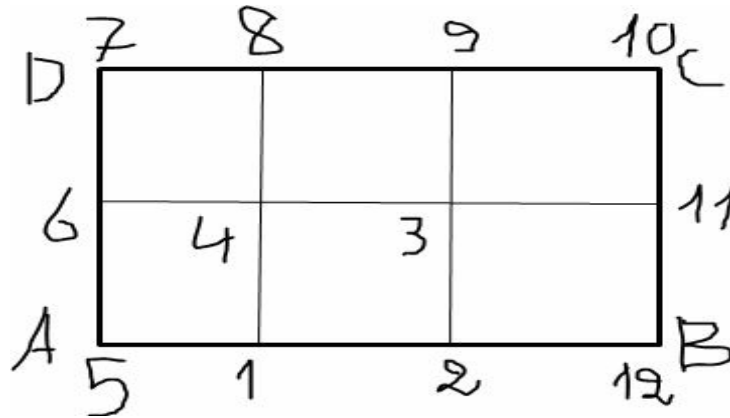
Soit le probleme

$$\begin{cases} -\Delta u = 2, \quad \Omega = ABCD \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_1 = ADCB \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_1 = AB \end{cases}$$

$$A(-1, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(-1, -1)$$

**1<sup>ere</sup> étape: On recherche le problème variationnel telle que**

$$V_h = \{u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} = H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$



On multiplie l'équation 3.9 par une fonction de test  $v$ , avec  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} 2v dx dy$$

et on utilise la formule de Gréen telle que

$$\iint_{\Omega} -\Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy - \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x} v d\Omega_2$$

et on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ sur } \partial\Omega_2$$

donc d'après la formule de Gréen

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = \iint_{\Omega} 2v dx dy$$

alors

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V_h \text{ tel que} \\ a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = l(v) = \iint_{\Omega} 2v dx dy \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour justifier l'équation 3.10 admet une unique solution on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram.

1)

a-  $l(v) = \iint_{\Omega} 2v dx dy$ , est une forme linéaire, car

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h \text{ on a} \\
 l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \iint_{\Omega} 2(\alpha v_1 + \beta v_2) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} 2\alpha v_1 dx dy + \iint_{\Omega} 2\beta v_2 dx dy \\
 &= \alpha \left( \iint_{\Omega} 2v_1 dx dy + \int_{\partial\Omega_2} 2\alpha v_1 d\partial\Omega_2 \right) \\
 &= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2)
 \end{aligned}$$

b-  $l(v)$  est continue car

$$\begin{aligned}
 l(v) &= \left| \iint_{\Omega} 2v dx dy \right|, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq C \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h
 \end{aligned}$$

2)

a)  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall u_1, u_2 \in V_h \text{ on a} \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \iint_{\Omega} (\alpha \nabla u_1 + \beta \nabla u_2) \nabla v dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \alpha \nabla u_1 \nabla v dx dy + \iint_{\Omega} \beta \nabla u_2 \nabla v dx dy \\
 &= \alpha \iint_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v dx dy + \beta \iint_{\Omega} \nabla u_2 \nabla v dx dy \\
 a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \text{ et } \forall v_1, v_2 \in V_h \text{ on a} \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \iint_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v_1 + \beta \nabla v_2) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v_1 + \beta \nabla v_2) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla v_1 dx dy + \iint_{\Omega} \beta \nabla u \nabla v_2 dx dy \\
 &= \alpha \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v_1 dx dy + \beta \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v_2 dx dy \\
 a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2)
 \end{aligned}$$

b-continuité

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy \right|, \quad \forall v \in V_h \\
 &\leq \left( \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\Omega} (\nabla v)^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \forall v \in V_h \\
 |a(u, v)| &\leq \|u\|_{V_h} \|v\|_{V_h}, \quad \forall v \in V_h
 \end{aligned}$$

c-coercivité

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \left| \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy \right| \\
 &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 \\
 &\geq C \|u\|_{V_h}^2, \quad \forall C \geq 1
 \end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème admet une unique solution  $u_h \in V_h$ , avec

$$u \simeq u_h = \sum_{i=1}^{12} u_i \varphi_i$$

**2<sup>ème</sup> étape : les fonction de base**

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

on pose

$$A(0, 0), A_2(1, 0), A_3(1, 1), A_3(0, 1)$$

et on a

$$\varphi_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = \lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\lambda_1(x_1, y_1) = 1 \implies a = 1$$

$$\lambda_1(x_2, y_2) = 0 \implies b = -1$$

$$\lambda_1(x_3, y_3) = 0 \implies c = 1$$

$$\lambda_1(x_4, y_4) = 0 \implies d = -1$$

$$\lambda_1(x, y) = 1 - x - y + xy$$

et

$$\nabla \lambda_1 = \begin{pmatrix} y - 1 \\ x - 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2(x_1, y_1) = 0 \implies a = 0$$

$$\lambda_2(x_2, y_2) = 1 \implies b = 1$$

$$\lambda_2(x_3, y_3) = 0 \implies b = -1$$

$$\lambda_2(x_4, y_4) = 0 \implies d = -1$$

$$\lambda_2(x, y) = x(1 - y)$$

$$\nabla \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 - y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3(x_1, y_1) = 0 \implies a = 0$$

$$\lambda_3(x_2, y_2) = 0 \implies b = 0$$

$$\lambda_3(x_3, y_3) = 1 \implies c = 0$$

$$\lambda_3(x_4, y_4) = 0 \implies d = 1$$

$$\lambda_3(x, y) = xy$$

$$\nabla \lambda_3 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4(x_1, y_1) = 0 \implies a = 0$$

$$\lambda_4(x_2, y_2) = 1 \implies b = -1$$

$$\lambda_4(x_3, y_3) = 0 \implies b = 1$$

$$\lambda_4(x_4, y_4) = 1 \implies d = -1$$

$$\lambda_4(x, y) = y(1 - x)$$

$$\nabla \lambda_4 = \begin{pmatrix} -y \\ 1 - x \end{pmatrix}$$

La solution  $u(x)$  s'écrit

$$u(x) = \sum_{i=1}^{12} u_i \lambda_i$$

donc

$$a(u, v) = a\left(\sum_{i=1}^{12} u_i \lambda_i, v\right)$$

on a

$$u_i = 0, \text{ si } i = 5, \dots, 12$$

donc

$$a(u, v) = a\left(\sum_{i=1}^4 u_i \lambda_i, v\right) + a\left(\sum_{i=5}^{12} u_i \lambda_i, v\right)$$

donc

$$\sum_{i=1}^4 u_i a(\lambda_i, \lambda_j) + \sum_{i=5}^{12} u_i a(\lambda_i, \lambda_j) = l(\lambda_j)$$

on a

$$\sum_{i=5}^{12} u_i a(\lambda_i, \lambda_j) = 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^4 u_i a(\lambda_i, \lambda_j) = l(\lambda_j)$$

alors

$$u_1 a_{j,1} + u_2 a_{j,2} + u_3 a_{j,3} + u_4 a_{j,4} = l_j$$

on prend  $v = \lambda_j$  avec  $j = 1, \dots, 12$

$$u_1 a_{1,1} + u_2 a_{1,2} + u_3 a_{1,3} + u_4 a_{1,4} = l_1$$

$$u_1 a_{2,1} + u_2 a_{2,2} + u_3 a_{2,3} + u_4 a_{2,4} = l_2$$

$$u_1 a_{3,1} + u_2 a_{3,2} + u_3 a_{3,3} + u_4 a_{3,4} = l_3$$

$$u_1 a_{4,1} + u_2 a_{4,2} + u_3 a_{4,3} + u_4 = l_4$$

donc

$$a_{1,1} = 4, a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = 0$$

$$a_{2,2} = 4, a_{2,1} = a_{2,3} = a_{2,4} = 0$$

$$a_{3,3} = 8, a_{3,1} = a_{3,2} = a_{3,4} = 0$$

$$a_{4,4} = 8, a_{4,1} = a_{4,2} = a_{4,3} = 0$$

$$l_1 = \frac{1}{4}, l_2 = 0$$

$$l_3 = \frac{1}{4}, l_4 = \frac{1}{4}$$

donc

$$\begin{cases} 4u_1 = \frac{1}{4} \\ 4u_2 = 0 \\ 8u_3 = \frac{1}{4} \\ 8u_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} u_1 = \frac{1}{16} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \frac{1}{32} \\ u_4 = \frac{1}{32} \end{cases}$$

alors

$$u(x) = \frac{1}{16}\lambda_1 + \frac{1}{32}\lambda_3 + \frac{1}{32}\lambda_4$$

$$u(x) = \frac{1}{16}(xy - x - y + 1)$$

# Conclusion

2

Dans ce mémoire on étudie le cadre générale d'une méthode de type projection, notamment la méthode des éléments, et on essaye d'appliquer cette méthode sur une classe d'équations pour trouver la solution approchée de ces équations.

# Bibliographie

- [1] J-H SAIAC, *Analyse numérique des Équations aux dérivées partielles*, 8 juin 2006.
- [2] ANDRÈ FORTIN PROFESSEUR TITULAIRE AND ANDRE GARON PROFESSEUR AGREGE,  
*Les éléments finis de la théorie à la pratique*, Montréal 1997-1998-1999-2000.
- [3] ALEXANDRE ERN, *Aide-mémoire Éléments finis*, Paris 2005.
- [4] JACQUES RAPPAZ AND MARCO PICASSO, *Introduction à l'analyse numérique*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne..
- [5] SUSANNE C.BRENNER AND L.RIDGAWAY SCOTT , *On The mathematical theory of Finite*, University of chicago USA
- [6] A.J DAVIES, *The finite element method* ,oxford.