



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Factorisation de Pietsch ; cas linéaire et non linéaire

Présenté par :
LAKEL Kamel

Devant le jury composé de :

| | | | |
|---|--------|----------------------|------------------|
| <i>M^r TIAIBA</i> Abdelmoumen | Prof., | Université de M'sila | Président |
| <i>M^r SAADI</i> Khalil | Prof., | Université de M'sila | Encadreur |
| <i>M^r BELAALA</i> Maatougui | M.C.B, | Université de M'sila | Examineur |

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Je remercie avant tous *ALLAH* pour son aide, se *ALLAH*
qui m'a donné la force, la volonté et la moral pour accomplir mon étude
en master en mathématique

Ainsi, je tiens également à ex
moteur **Mr SAADI Khalil** pour avoir d'abord pro
continuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et quelle n'pas ce
de me donner se

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr TIAIBA Abdelmoumen** et **Mr BELAALA
Maatougui** d'avoir acce

Je remercie évidemment me
qui de
de me

Enfin, je tiens à ex
collègue 2020 pour le
ensemble et nous le

A tous **MERCI**

Dédicaces

Je dédie ce mode

À ce qui le plus cher, à ma mère ce qui était un bon soutien pour moi.

à mon père qui m'a soutenu et m'aide pour arriver d'ici.

À me

À me

À toute ma famille.

et à tous ceux qui se fatiguent pour réussir leur avenir.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | 1 |
| 1 Préliminaires et théorème de Hahn-Banach | 2 |
| 1.1 Les espaces vectoriels | 3 |
| 1.2 Les espaces métriques et normés | 4 |
| 1.3 Les espaces de Banach | 6 |
| 1.4 Les espaces de Hilbert | 8 |
| 1.5 Les applications linéaires continues | 9 |
| 1.6 Les ensembles convexes et les fonctions convexes | 10 |
| 1.7 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences | 11 |
| 1.7.1 Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach | 12 |
| 1.7.2 Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de H-B . . . | 15 |
| 1.7.3 Forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach | 17 |
| 2 Factorisation de Pietsch des opérateurs linéaires | 19 |
| 2.1 Rappels sur les opérateurs linéaires | 20 |
| 2.2 Les opérateurs linéaires absolument p -sommants | 20 |
| 2.3 Théorème de domination et factorisation de Pietsch | 26 |
| 2.4 Quelques conséquences | 30 |
| 3 Factorisation de Pietsch des opérateurs : multilinéaires, non linéaires et Lipschitz multilinéaires | 32 |
| 3.1 Les opérateurs multilinéaires continues | 33 |
| 3.2 Factorisation de Pietsch des opérateurs m -linéaires | 34 |
| 3.2.1 Opérateurs multilinéaires absolument p -sommants | 35 |
| 3.2.2 Opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants | 35 |
| 3.2.3 Opérateurs multilinéaires p -dominés | 36 |
| 3.2.4 Opérateurs multilinéaires multi p -sommants | 37 |
| 3.2.5 Opérateurs m -linéaires fortement p -sommants | 38 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.2.6 | Les opérateurs m -linéaires de Hilbert-Schmidt | 38 |
| 3.2.7 | Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommants | 39 |
| 3.3 | Factorisation de Pietsch des opérateurs lipschitziens | 40 |
| 3.3.1 | Les opérateurs lipschitziens | 40 |
| 3.3.2 | Les opérateurs Lipschitz p -sommants | 41 |
| 3.3.3 | Opérateurs Lipschitz Cohen fortement p -sommants | 43 |
| 3.3.4 | Opérateurs Lipschitz Cohen p -nucléaires | 44 |
| 3.4 | Relations entre $\Pi_p^L(X, E)$, $\mathcal{D}_{st,p}^L(X, E)$ et $\mathcal{N}_p^L(X, E)$ | 45 |
| 3.5 | Opérateurs Lipschitz multilinéaires p -sommants | 46 |
| 3.5.1 | Représentation sur un produit tensoriel | 46 |
| 3.5.2 | Factorisation et domination de Pietsch | 47 |
| | Bibliographie | 50 |

Notation

| | |
|--|---|
| \mathbb{K} | Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). |
| e | Élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé. |
| (X, d) | Espace métrique. |
| $(X, \ \cdot\)$ | Espace vectoriel normé. |
| L^p | Espaces de Lebesgue. |
| $C(K)$ | L'espace des fonctions continues de K dans \mathbb{R} . |
| $\ell_p(X)$, (resp. $\ell_p^n(X)$) | Espace des suites (resp. finies) absolument p -sommables. |
| $\ell_{p,w}(X)$, (resp. $\ell_{p,w}^n(X)$) | L'espace des suites (resp. finies) faiblement p -sommables. |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Produit scalaire. |
| $L(X, Y)$ | L'espace des applications linéaires de X dans Y . |
| $\mathcal{L}(X, Y)$ | L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y . |
| X^* | Espace dual (topologique) de X . |
| p^* | L'exposant conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. |
| i_X | Injection canonique. |
| $\ell_\infty(X)$ | Espace des suites bornées de X dans \mathbb{R} . |
| B_X | La boule d'unité fermée de l'espace X : $B_X := \{x \in X, \ x\ \leq 1\}$. |
| $T : X \leftrightarrow Y$ | T est isométrie. |
| $\sigma(X, X^*)$ | Topologie faible définie sur X . |
| $\sigma(X^*, X)$ | Topologie $*$ -faible définie sur X^* . |
| $\Pi_p(X, Y)$ | L'espace des opérateurs linéaires p -sommable de X dans Y . |
| \mathcal{M}_0 | Ensemble des espaces métriques complets pointés. |
| $Lip(X, Y)$ | Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans Y . |
| $Lip_0(X, Y)$ | Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans Y , nulles au point e . |

$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R})$

Espace des formes lipschitziennes sur X .

$T^\#$

Adjoint de l'opérateur lipschitzien T .

Introduction générale

Ce mémoire est consacré au théorème de factorisation et domination de Pietsch dans les quatre opérateurs : linéaires, multilinéaires, non linéaires (Lipschitziens) et Lipschitz multilinéaires.

Notre travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons faire un rappel sur les espaces vectoriels normés, les espaces de Banach et les espaces de Hilbert et on va citer de quelques définitions, propriétés de bases qui nous sera utiles de notre travail, par exemple application linéaire continue, ensemble convexe et fonction convexe et le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences dans le cas linéaire. On donnera une démonstration très simple de ce théorème.

Dans le deuxième chapitre, on va faire un rappel de quelques notions d'opérateurs linéaires p -sommants et le théorème de factorisation et domination de Pietsch avec quelques propriétés fondamentaux.

Enfin, dans le troisième chapitre, on va présenter les notions et une sélection des résultats classiques concernant les opérateurs multilinéaires et les opérateurs non linéaires, puis on étudie de classes importantes d'opérateurs Lipschitz multilinéaires p -sommants.

PRÉLIMINAIRES ET THÉORÈME DE HAHN-BANACH

Dans ce chapitre d'introduction, on donnera quelques généralités sur les espaces vectoriels normés abstraits, les espaces de Banach, les Hilbert et quelques standards inégalités avec des exemples, qui nous sera utile a la suite de notre travail. C'est essentiellement un rappel des cours de Licence. Ce sera aussi l'occasion de fixer certaines notations.

1.1 Les espaces vectoriels

Un espace vectoriel est un ensemble formé des vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs x, y pour en former troisième $x + y$ (ou $x - y$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur x par un scalaire λ pour obtenir un vecteur λx .

Définition 1.1. (Espace vectoriel). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et X un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne et notée additivement

$$\begin{aligned} (+) : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y, \end{aligned}$$

l'autre externe et notée multiplicativement

$$\begin{aligned} (\cdot) : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x. \end{aligned}$$

On dit que $(X, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} si

- (1) $(X, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire
 - $\forall x, y \in X : x + y = y + x$ (commutatif).
 - $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = x$ (élément neutre).
 - $\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = y + x = e$ (élément symétrique).
 - $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ (associative).
- (2) Pour $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
 - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
 - $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 - $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Exemples 1.1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- (1) Pour $X = \mathbb{R}^2$, on a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- (2) Pour $X = \mathbb{R}_*^2$, on a $(\mathbb{R}_*^2, +, \cdot)$ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel, car $(0, 0) \notin \mathbb{R}_*^2$.
- (3) (Applications sur les fonctions). Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
 - (i) $\forall f, g \in \mathcal{F} : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
 - (ii) $\forall f \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Donc : $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 1.2. (Sous-espace vectoriel). Soit $(X, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit E une partie non vide de X ($E \subset X$). L'ensemble E est appelé un sous-espace vectoriel de X si, et seulement si

- (1) $e \in E$ (e est l'élément neutre de X);
- (2) $x + y \in E$ pour tout $x, y \in E$;
- (3) $\lambda \cdot x \in E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$.

Exemple 1.1. Soit \mathbb{R}^2 un \mathbb{R} -espace vectoriel. L'ensemble $E = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Remarque 1.1. Soit $(X, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Les deux ensembles X et $\{e\}$ sont des sous-espaces vectoriel de X .

Théorème 1.1. (Voir [12]). Soit X un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit $\{E_i\}_{i=1}^n$ une famille de sous-espaces vectoriels de X , alors $\bigcap_{i=1}^n E_i$ est un sous-espace vectoriel de X .

1.2 Les espaces métriques et normés

La notion d'espace métrique a été formalisé par Maurice Fréchet dans sa thèse de doctorat d'état en 1906. " Sur quelques points du calcul fonctionnel " a Palerme.

Définition 1.3. (Distance). On appelle distance (ou métrique) sur un ensemble X tout application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation);
- (2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
- (3) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Propriétés 1.1. Propriétés fondamentales d'une distance d .

- (1) $\forall x, y, z \in X : |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ (seconde inégalité triangulaire).
- (2) $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X : d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ (inégalité triangulaire généralisée).

Définition 1.4. (Espace métrique). Un espace métrique est un couple (X, d) où l'ensemble X est muni de la distance d .

Exemples 1.2. (1) Soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ l'ensemble des nombres réels, muni de la distance usuelle

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

est un espace métrique.

(2) Soit X un ensemble arbitraire. On le munit de la distance suivante

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

On obtient évidemment un espace métrique. Cet espace pourrait être appelé espace de points isolés ou l'espace métrique discret.

(3) Sur l'espace \mathbb{R}^n , on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit trois distances :

$$(i) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$(ii) \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (\text{distance euclidienne}).$$

$$(iii) \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Définition 1.5. (Norme). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). Une norme sur X est une application $\|\cdot\|$ de X dans \mathbb{R}_+ ayant les propriétés suivantes :

- (1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (défini);
- (2) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ (positivité);
- (3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité);
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le (1), on dit que $\|\cdot\|$ est une semi-norme.

Définition 1.6. Lorsqu'un espace vectoriel X est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un espace vectoriel normé, ou plus simplement, un espace normé.

Exemples 1.3. Soit \mathbb{R} -espace vectoriel normé.

- (1) Pour $X = \mathbb{R}$ avec la norme usuelle $\|x\| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ (valeur absolue).
- (2) Pour $X = \mathbb{R}^n$. Si x est dans X , on pose $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a :

$$(i) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$(ii) \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2};$$

$$(iii) \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Remarque 1.2. Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est un espace métrique dont la distance d est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Alors, les distances définies dans l'exemple 1.2, (3) sont toutes déduites des normes classiques $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 1.7. Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur un espace vectoriel X sont équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta \in]0, +\infty[, \forall x \in X : \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|.$$

Remarque 1.3. La même définition peut être adopter pour les distances équivalentes.

Exemple 1.2. Les trois normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{R}^n sont équivalentes.

Proposition 1.1. Soit X un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Les deux normes sont équivalentes.
- (2) Les distances associées aux normes sont équivalentes.

1.3 Les espaces de Banach

Depuis leur création par Banach en 1922, les espaces normés jouent un rôle central en analyse fonctionnelle. Les espaces de Banach sont des espaces normés complets. La complétude permet de prouver la convergence d'une suite ou d'une série sans connaître sa limite.

Définition 1.8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ (resp. espace métrique (X, d)).

- (1) On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point a de X si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \epsilon \text{ (resp. } d(x_n, a) \leq \epsilon).$$

- (2) On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ (resp. } d(x_n, x_m) \leq \epsilon).$$

Définition 1.9. (Espace complet). Un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ sera dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans $(X, \|\cdot\|)$. Par exemple :

- (1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sont complets.
- (2) $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet pour $1 \leq p \leq \infty$.
- (3) $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Théorème 1.2. (Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique X est compact si, et seulement si, toute suite de X admet une sous suite convergente dans X .

Définition 1.10. (Espace de Banach). On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Proposition 1.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :

- (1) Toute suite convergente est de Cauchy, mais l'inverse n'est pas vraie.
- (2) Si toute suite de Cauchy est convergente, alors $(X, \|\cdot\|)$ est complet.

Théorème 1.3. Un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet. Autrement dit X est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est une série convergente.

La boule unité fermée de l'espace X est définie par

$$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Remarque 1.4. Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach. De plus, tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

Exemples 1.4. (Exemples sur les espaces de Banach). Pour $p > 1$ on note p^* le conjugué de p défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On pose $p^* = +\infty$ si $p = 1$.

Nous avons rencontré des espaces de Banach :

- (1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ et \mathbb{C}^n munis des normes euclidiennes associées sont des espaces de Banach.
- (2) (L'espace $C(K)$). Soit K un espace topologique compact. L'espace de Banach $C(K)$ est défini par :

$$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue}\},$$

muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \forall f \in C(K).$$

- (3) (L'espace L^p). Soit (K, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(K)$ par

$$L^p(K, \mathcal{M}, \mu) := \left\{ f : K \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_K |f(x)|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

L^p est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$ nous avons $f \in L^\infty(\mu)$ s'il existe $C > 0$ telle que

$$|f| \leq C \mu\text{-p.p.} \quad (\mu\text{-presque partout}). \quad (1.1)$$

$L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (1.1)}\}.$$

- (4) (L'espace ℓ_p). Soit $1 \leq p < +\infty$ On note par ℓ_p l'espace de Banach des suites scalaires p -sommables

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|x\| := \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Pour $p = +\infty$

$$\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|x\| := \sup_{i \geq 0} |x_i| < +\infty \right\}.$$

- (5) $(\mathcal{C}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$, lorsque X est compact et Y complet.
- (6) $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$, l'espace des fonctions linéaires continues sur X , avec Y complet.

1.4 Les espaces de Hilbert

L'espace de Hilbert qui a été introduit par David Hilbert en 1909 pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite. On note en général par H .

Définition 1.11. (Produit scalaire). Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire et symétrique (resp. sesquilinéaire¹ et hermitienne) qui est définie positive.

On notera $\langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$ défini par l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : H \times H &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) := \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes : $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$(1) \begin{cases} \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle & \text{(symétrique, si l'espace est réel);} \\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} & \text{(hermitienne, si l'espace est complexe).} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{bilinéaire : } \begin{cases} \langle \lambda x + z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle & \text{(linéarité par rapport à la première variable);} \\ \langle y, \lambda x + z \rangle = \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, z \rangle & \text{(linéaire par rapport à la seconde variable).} \end{cases} \\ \text{sesquilinéaire : } \begin{cases} \langle \lambda x + z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle & \text{(linéarité par rapport à la première variable);} \\ \langle y, \lambda x + z \rangle = \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, z \rangle & \text{(antilinéaire par rapport à la seconde variable).} \end{cases} \end{cases}$$

$$(3) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ (positive), } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \text{ (définie).}$$

Définition 1.12. (Espace pré-hilbertien). Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace pré-hilbertien.

Proposition 1.3. Soit X un espace vectoriel de dimension fini ou infinie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ alors l'application :

$$u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|,$$

définit une norme sur X .

Définition 1.13. (Espace de Hilbert). Un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

Dans toute la suite, on considère que l'espace $L^2([a, b], \|\cdot\|_2)$ avec :

$$L^2([a, b], \|\cdot\|_2) = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

1. du latin "sesqui" qui signifie un demi en plus.

muni de la norme :

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.14. (Orthogonalité). Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. On dit que deux vecteurs u, v de H sont orthogonaux si :

$$\langle u, v \rangle = 0, \text{ et on note } u \perp v.$$

Une famille de vecteurs de H est dite orthogonale si tous les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Exemple 1.3. L'espace ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i y_i, \forall x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_2.$$

1.5 Les applications linéaires continues

Définition 1.15. (Application). On appelle application d'un ensemble X dans un ensemble Y , toute correspondance f entre les éléments de X et ceux de Y qui à tout élément $x \in X$ fait correspondre un unique élément $y \in Y$ noté $f(x)$.

Une correspondance entre X et Y est représentée par : $f : X \rightsquigarrow Y$.

Une application f entre X et Y est aussi représentée par :

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si :

$$\forall x, y \in X : ((x = y) \implies (f(x) = f(y))).$$

Exemples 1.5. (1) L'application $id_X : X \rightarrow X$ telle que $\forall x \in X, id_X(x) = x$ est appelée application identité sur X .

(2) (application constante). Soient X et Y deux ensembles non vides et b un élément de Y , alors la correspondance f de X dans Y définie par : $\forall x \in X, x \rightsquigarrow b$ est une application dite application constante.

Définition 1.16. (Fonction). On appelle fonction de X dans Y , toute application f d'un sous-ensemble $D_f \subset X$ dans Y . D_f est appelé ensemble de définition de f .

Remarque 1.5. Toutes les notions données pour les applications peuvent être adaptées pour les fonctions.

Définition 1.17. (Application linéaire). Soient X et Y des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On dit que l'application $T : X \rightarrow Y$ est linéaire si, pour tout x et tout y dans X , et pour tout λ dans \mathbb{K} :

$$(1) T(x + y) = T(x) + T(y);$$

$$(2) T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

On note $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes :

$$(1) \forall x \in X : (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x);$$

$$(2) \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda T)(x) = \lambda T(x).$$

Définition 1.18. (Application linéaire continue). Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés et soit $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire. Alors T est continue (borné) si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X. \quad (1.2)$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues. On définit une norme des opérateurs sur $\mathcal{L}(X, Y)$ par

$$\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y,$$

on a également

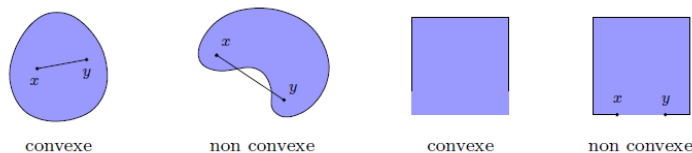
$$\|T\| = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (1.2)}\}.$$

1.6 Les ensembles convexes et les fonctions convexes

Définition 1.19. Soit X un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et $x, y \in X$. On appelle segment de X , un ensemble noté et défini comme suit

$$[x, y] := \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

Définition 1.20. (Ensemble convexe). On dit qu'une partie E de X est convexe si pour tout $x, y \in E$, le segment $[x, y]$ est contenu dans E .



- Exemples 1.6.** (1) La partie de \mathbb{R}^n définie par $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ est un convexe appelée orthant positif ($x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$).
- (2) La somme $E_1 + E_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$ de deux convexes E_1 et E_2 de X est un convexe.
- (3) Le produit $\lambda E := \{\lambda x : x \in E\}$ d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par un convexe E est un convexe.
- (4) Si $\{E_i\}_{i \in I}$ est une famille quelconque de convexes de X , alors leur intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un convexe (mais pas leur union).
- (5) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire. L'image directe $f(E)$ (resp. l'image réciproque $f^{-1}(E)$) d'un convexe E de X (resp. de Y) par f est un convexe.
- (6) Soient $E_1 \subset X_1$ et $E_2 \subset X_2$. Alors $E_1 \times E_2$ est convexe dans $X_1 \times X_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont convexes.

Définition 1.21. On rappelle que l'épigraphe de f est la partie de l'espace produit $X \times \mathbb{R}$ qui est au-dessus de son graphe :

$$\text{epi } f := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Quant à l'épigraphe stricte, il est obtenu en prenant l'inégalité stricte ci-dessus. On le note

$$\text{epi}_s f := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < \lambda\}.$$

Le domaine d'une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$ (elle peut y prendre la valeur $-\infty$, mais nous considérerons le plus souvent des fonctions ne prenant pas cette valeur). On le note

$$\text{dom } f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.22. On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si son épigraphe (ou son épigraphe stricte) est convexe dans $X \times \mathbb{R}$. On dit que $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est concave si $-f$ est convexe.

Proposition 1.4. Le domaine d'une fonction convexe est convexe. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \text{dom } f$ et tout $t \in]0, 1[$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1.7 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

Cette section est consacré au théorème de Hahn-Banach et ses applications dans le cas linéaire, la démonstration du théorème de Hahn-Banach est passer sur le lemme de Zorn.

Le théorème de Hahn-Banach est l'un des deux plus importants et fondamentaux en analyse fonctionnelle, l'autre théorème est celui de Baire et ses applications (le Théorème de Banach-Steinhaus, le théorème du graphe fermé, etc...). Sans le théorème de Hahn-Banach, l'analyse fonctionnelle serait très différente de la structure qu'on connaît maintenant. Hahn et Banach ont montré indépendamment le théorème pour le cas réel dans les années 1920 voir [4] et [17] (S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires, *Studia Mathematica* 1 (1929), 211-216, et H. Hahn, Ober linearer Gleichungssysteme in linearer Räumcn, *J. Reine Angew. Math.* 157 (1927), 214-229). Puis il y'avait eu l'extension de Murray dans le cas complexe. Est-ce-que tout opérateur linéaire continu peut s'étendre en un opérateur linéaire continu sur tout l'espace si on remplace \mathbb{R} ou \mathbb{C} par un espace de Banach quelconque? Banach et Mazur ont déjà montré que ce n'est pas le cas en 1933. Mais ce n'est qu'en 1950 que le résultat de Nachbin a répondu définitivement à la question et ainsi mettre fin à cette question. Pour plus d'informations, on peut consulter [19].

Pour l'histoire, le théorème de Hahn-Banach a été montré en premier en 1912 par le mathématicien autrichien Eduard Helly (1884 - 1943). Il a été découvert indépendamment dans les années 1920s par le mathématicien autrichien Hans Hahn (1879 - 1934) in 1927 et le mathématicien polonais Stefan Banach (1892 - 1945) en 1929.

1.7.1 Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

La forme analytique du Théorème de Hahn-Banach est un théorème permettant de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace vectoriel, en gardant un contrôle sur le prolongement quand il y en avait un sur la forme de départ, en particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la même norme.

Définition 1.23. (1) (Prolongement). Une fonction φ défini sur un ensemble X est dit prolongement d'une fonction φ_0 défini sur un sous-ensemble E de X , si

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

(2) (Forme linéaire). On appelle forme linéaire (fonctionnelle linéaire) tout opérateur linéaire T défini sur X à valeurs dans le corps des scalaires \mathbb{K} .

Théorème 1.4. (Théorème de Hahn-Banach, forme analytique) Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit p une semi-norme sur X .

Soit E un sous-espace vectoriel de X et $\varphi_0 : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que :

$$|\varphi_0(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \tilde{\varphi}_0 : X \rightarrow \mathbb{K}$ prolongeant φ_0 (i.e., $\varphi|_E = \varphi_0$) et telle que :

$$|\varphi(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{K} \\
 & \searrow i_X & \nearrow \varphi \\
 & & X.
 \end{array}$$

On aura en fait besoin d'une version un peu plus forte. Pour cela, on dira :

Définition 1.24. (Sous-norme). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On dit que $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application sous-norme si, pour tous $x, y \in X$:

- (1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, pour tout λ positif ou nul;
- (2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Exemple 1.4. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire, Alors $p(x) = |f(x)|$, pour tout $x \in X$, est une application sous-norme (ou sous-linéaire) sur X .

On a alors :

Théorème 1.5. (Théorème de Hahn-Banach, forme analytique forte). Soit X un espace vectoriel réel et p une application sous-norme sur X . Soit E un sous-espace vectoriel de X et $\varphi_0 : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant :

$$\varphi_0(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \tilde{\varphi}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ **prolongeant** φ_0 et vérifiant encore :

$$\varphi(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{R} \\
 & \searrow i_X & \nearrow \varphi \\
 & & X.
 \end{array}$$

Remarques 1.1. (1) Il faut noter que dans cette forme, l'inégalité concerne $\varphi_0(x)$ et $\varphi(x)$, et pas leur valeur absolue.

- (2) Toutefois, lorsque p n'est pas seulement une sous-norme, mais une semi-norme, on a $p(-x) = p(x)$; donc, lorsque l'espace X est réel, si l'on a :

$$\varphi(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

On a en fait :

$$|\varphi(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

- (3) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le Théorème 1.4 découle donc immédiatement du Théorème 1.5.

Définition 1.25. (1) (Relation d'ordre total). En général, une relation d'ordre sur un ensemble X ne permet pas de comparer tous les éléments de l'ensemble. Cependant, si pour n'importe quels deux éléments x et y de X ,

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x,$$

on dit que la relation est d'ordre total.

- (2) (Ensemble totalement ordonné). Un ensemble X est dit totalement ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre total (\leq).
- (3) (Majorant d'un ensemble). Un sous-ensemble E de X muni d'une relation d'ordre notée (\leq) est dit majoré s'il existe un élément $a \in X$ tel que,

$$\forall x \in E, \text{ on a } x \leq a,$$

a est appelé majorant de E .

- (4) (Maximal d'un ensemble). Soit E un sous-ensemble de X muni d'une relation d'ordre notée (\leq). Un élément b de E est dit maximal de E s'il n'existe pas un élément de E plus grand que l'élément b . Autrement dit

$$b \in E, \text{ si pour } x \in E, \text{ on a } b \leq x \text{ entraîne } b = x.$$

Lemme 1.1. (Lemme de Zorn). *Tout ensemble ordonné inductif, non vide, possède un élément maximal. Rappelons que l'ordre est inductif si toute partie totalement ordonnée possède un majorant.*

Démonstration du Théorème 1.5. (Théorème de H-B, forme analytique fort).

Soit E un sous-espace vectoriel de X et $G \subset E$, et soit

$$\mathfrak{R} := \{ \psi : E = D_\psi \longrightarrow \mathbb{R}; \psi \text{ linéaire, } \psi|_G = \varphi_0 \text{ et } \psi(x) \leq p(x), \forall x \in E \}.$$

On munit \mathfrak{R} de la relation d'ordre définie par :

$$\psi_1 \prec \psi_2 \iff (D_{\psi_1} \subseteq D_{\psi_2} \text{ et } \psi_2 \text{ prolonge } \psi_1).$$

Alors :

- (a) $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ car $\varphi_0 \in \mathfrak{R}$;
 (b) \mathfrak{R} est inductif car si \mathfrak{N} est une partie totalement ordonnée de \mathfrak{R} , on pose :

$$E_m = \bigcup_{\psi \in \mathfrak{N}} D_\psi$$

et :

$$\psi_m(x) = \psi(x) \text{ si } \psi \in \mathfrak{N} \text{ et } x \in D_\psi.$$

Comme \mathfrak{N} est totalement ordonné, E_m est un sous-espace vectoriel de X ; de plus, $\psi_m : E_m \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et est une forme linéaire sur E_m . Visiblement, ψ_m est un majorant de \mathfrak{N} .

Soit alors φ un élément **maximal** de \mathfrak{R} .

Il reste à voir que $D = D_\varphi$ est égal à X tout entier.

Supposons que non : $D \neq X$. On peut alors choisir un $x_0 \notin D$.

On va chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que, si l'on pose :

$$\begin{cases} E = D + \mathbb{R}x_0 := \{x + \lambda x_0; \forall x \in D, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}; \\ \psi(x + tx_0) = \varphi(x) + t\lambda, \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

alors $\psi \in \mathfrak{R}$. Cet élément ψ serait un majorant de φ , avec $\psi \neq \varphi$ (puisque $D_\psi = E$ contient x_0 qui n'est pas dans $D = D_\varphi$) : cela contredirait la maximalité de φ .

Cette contradiction montre que $D = X$ et donc le Théorème 1.5.

Pour obtenir cet λ , remarquons que $\psi \in \mathfrak{R}$ si et seulement si :

$$\varphi(x) + t\lambda \leq p(x + tx_0), \quad \forall x \in D, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mais, pour avoir cela, il suffit de l'avoir pour $t = 1$ et $t = -1$:

$$\begin{cases} \varphi(x) - \lambda \leq p(x - x_0) \\ \varphi(x) + \lambda \leq p(x + x_0) \end{cases} \quad \forall x \in D.$$

En effet, on aura alors :

$$\varphi(x) + t\lambda = \begin{cases} t \left[\varphi\left(\frac{x}{t}\right) + \lambda \right] \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0), & \text{si } t > 0 \\ (-t) \left[\varphi\left(-\frac{x}{t}\right) - \lambda \right] \leq (-t)p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) = p(x + tx_0), & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(et si $t = 0$: $\varphi(x) \leq p(x)$ car $\varphi \in \mathfrak{R}$).

Il suffit donc de pouvoir choisir λ tel que :

$$\sup_{x \in D} \{\varphi(x) - p(x - x_0)\} \leq \lambda \leq \inf_{y \in D} \{p(y + x_0) - \varphi(y)\},$$

ce qui est possible car :

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0),$$

pour tous $x, y \in D$.

Le Théorème 1.5 est donc prouvé. ■

1.7.2 Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de H-B

Nous allons donner une série de conséquences du Théorème de Hahn-Banach, toutes très importantes.

Dans tout ce qui suit, X sera désormais un espace vectoriel normé.

Théorème 1.6. *Toute forme linéaire continue sur un sous-espace E de X se prolonge en une forme linéaire continue sur X tout entier, avec la même norme.*

Preuve. Soit $\varphi_0 \in E^*$ et $C = \|\varphi_0\|_{E^*}$. Il suffit d'appliquer le Théorème de Hahn-Banach avec la semi-norme $p(x) = C \|x\|_X$. ■

Théorème 1.7. *Pour tout $x \in X$, non nul, il existe $\varphi \in X^*$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$.*

Preuve. Il suffit de prendre la norme pour p , $E = \mathbb{K}x$ et $\varphi_0(\lambda x) = \|\lambda x\| \lambda$. ■

Corollaire 1.1. *Pour $F \subseteq X$, on pose $F^\perp = \{\varphi \in X^*; \langle \varphi, x \rangle = 0, \forall x \in F\}$. Alors*

$$F^\perp = X^* \text{ si et seulement si } F = \{0\}.$$

Corollaire 1.2. *Pour tout espace vectoriel normé X , le dual X^* sépare les points de X .*

Preuve. Si $x \neq y$, alors $z = x - y \neq 0$; il existe alors (d'après le théorème 1.7) $\varphi \in X^*$ telle que $\varphi(z) = \|z\| \neq 0$; donc $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. ■

Remarque 1.6. Ce n'est pas le cas pour des espaces plus généraux : par exemple, l'espace $L^{1/2}(0, 1)$, muni de la distance :

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2} dt,$$

est un espace vectoriel topologique n'admettant aucune forme linéaire continue non nulle (voir [11, Chapitre 6, Exercice 15]).

Corollaire 1.3. *On a :*

$$\|x\|_X \stackrel{H-B}{=} \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|.$$

Corollaire 1.4. *L'application canonique :*

$$\begin{aligned} i : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto i(x) = \tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \end{array} \end{aligned}$$

est une isométrie.

Cette application i est donc en particulier injective. Par contre, elle n'est pas surjective en général.

Preuve. On a :

$$\|\tilde{x}\|_{E^{**}} := \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leq 1} |\tilde{x}(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leq 1} |\varphi(x)| \stackrel{\text{Corol.1.3}}{=} \|x\|_E. \blacksquare$$

Théorème 1.8. *Si E est un sous-espace vectoriel fermé de X et $x_0 \notin E$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi(x) = 0, \forall x \in E$ (c'est-à-dire que $E \subseteq \ker \varphi$).*

Preuve. Prenons $G = E + \mathbb{K}x_0$ et définissons une forme linéaire $\varphi_0 : G \rightarrow \mathbb{K}$ par $\varphi_0(x + \lambda x_0) = \lambda$, pour $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\varphi_0(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Comme F est fermé, on a $\delta = d(x_0, E) > 0$; donc :

$$|\varphi_0(x + \lambda x_0)| = \frac{1}{\delta} d(\lambda x_0, E) \leq \frac{1}{\delta} \|x + \lambda x_0\|,$$

de sorte que l'on peut prolonger φ_0 en $\varphi \in E^*$. ■

Corollaire 1.5. Soit E un sous-espace vectoriel de X . Alors $x_0 \in \overline{E}$ si et seulement si, pour toute $\varphi \in X^*$, on a :

$$\varphi(x) = 0, \forall x \in E \implies \varphi(x_0) = 0.$$

En particulier, E est dense dans X si et seulement si, pour toute $\varphi \in X^*$:

$$\varphi(x) = 0, \forall x \in E \implies \varphi \equiv 0.$$

Remarque 1.7. La condition " $\varphi(x) = 0, \forall x \in E$ " signifie que $\varphi \in E^\perp$ (voir Corollaire 1.1); la seconde assertion est donc que E est dense dans X si et seulement si $E^\perp = \{\emptyset\}$.

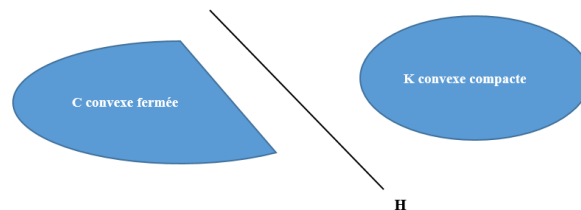
1.7.3 Forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Il y a plusieurs énoncés géométriques, avec différentes hypothèses. Bien que certains aient des versions "complexes" (pour les espaces vectoriels complexes), c'est essentiellement un théorème "réel". Il permet de séparer des convexes (compacts, fermés, ouverts, ...) disjointes par des hyperplans affines fermés.

Théorème 1.9. (Théorème de Hahn-Banach, forme géométrique). Soit X un espace vectoriel normé. Soit C et K deux parties non vides de X disjointes et telles que C soit convexe et fermée, et K soit convexe et compacte.

Alors, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in X^*$ telle que :

$$\sup_{x \in C} \operatorname{Re} \varphi(x) < \inf_{y \in K} \operatorname{Re} \varphi(y).$$



Remarque 1.8. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\sup_{x \in C} \operatorname{Re} \varphi(x) < \lambda < \inf_{y \in K} \operatorname{Re} \varphi(y),$$

on dit que l'hyperplan (affine, réel) fermé :

$$H_\lambda = \{x \in X; \operatorname{Re} \varphi(x) = \lambda\},$$

sépare, strictement, C et K .

Pour prouver le Théorème 1.9, on peut d'abord remarquer que l'énoncé ne fait intervenir que $\operatorname{Re} \varphi$; on peut supposer que l'espace X est réel.

On aura en fait besoin d'une autre forme géométrique.

Théorème 1.10. Soit X un espace vectoriel topologique réel. Soit C et Ω deux parties non vides disjointes de X telles que C soit convexe et fermée et Ω soit convexe et ouverte.

Alors, il existe une forme linéaire continue non nulle $\varphi \in X^*$ telle que :

$$\forall x \in C, \forall y \in \Omega : \varphi(x) < \varphi(y).$$

En particulier :

$$S = \sup_{x \in C} \varphi(x) \leq \inf_{y \in \Omega} \varphi(y) = I.$$

Preuve de la forme géométrique du Théorème 1.9 de H-B. L'ensemble K étant compact et C étant fermé et disjoint de K , on a :

$$d = \operatorname{dist}(K, C) = \inf_{y \in K} d(y, C) > 0.$$

Si l'on pose :

$$\Omega = \{x \in X; \operatorname{dist}(x, K) < d/2\},$$

alors Ω est convexe (car K l'est : $\Omega = K + \overset{\circ}{B}(0, d/2)$), ouvert, non vide (il contient K), et disjoint de C . Soit φ la forme linéaire continue non nulle donnée par le Théorème 1.10, on a :

$$\begin{aligned} y \in K \text{ et } \|z\| < 1 &\implies y + \epsilon(d/2)z \in \Omega \quad (\epsilon = \pm 1) \\ &\implies \varphi(y) = \varphi[y + \epsilon(d/2)z] - \epsilon(d/2)\varphi(z) \geq I - \epsilon(d/2)\varphi(z) \\ &\implies \varphi(y) \geq I + (d/2)|\varphi(z)|; \end{aligned}$$

donc, pour tout $y \in K$, on a, en prenant la borne supérieure pour tous les z de norme < 1 :

$$\varphi(y) \geq I + (d/2)\|\varphi\|.$$

Alors

$$\inf_{y \in K} \varphi(y) \geq I + (d/2)\|\varphi\| > I,$$

puisque φ n'est pas nulle. Cela donne le résultat puisque $I \geq S$. ■

FACTORISATION DE PIETSCH DES OPÉRATEURS LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on va faire un rappel de quelques notions d'opérateurs linéaires p -sommants et le théorème de factorisation et domination de Pietsch avec quelques propriétés fondamentaux.

2.1 Rappels sur les opérateurs linéaires

Définition 2.1. Soit T un opérateur linéaire entre deux espaces normés X et Y ($T \in L(X, Y)$).

T est de rang fini si $\dim T(X) < \infty$.

L'espace des opérateurs de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Exemples 2.1. (1) L'opérateur $T : X \rightarrow Y$ avec $T(x) = 0, \forall x \in X$, est de rang fini.

(2) si $\dim X = n < +\infty, (n \in \mathbb{N}^*)$ alors $\dim T(X) \leq \dim X = n$, donc $T \in \mathcal{L}_f(X, Y)$.

(3) Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire, alors $\varphi \in \mathcal{L}_f(X, \mathbb{K})$.

Proposition 2.1. Soit X et Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

$$T \in \mathcal{L}_f(X, Y) \iff \forall x \in X : T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i,$$

où $x_i^* \in X^*$ et $y_i \in Y; (1 \leq i \leq n)$.

Définition 2.2. Soient X, Y, E et F des espaces de Banach. Un idéal d'opérateur linéaire I une est classe d'opérateur telle que

(1) $I(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$;

(2) $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset I(X, Y)$;

(3) (propriété d'idéal). Soit

$$E \xrightarrow[\mathcal{L}(E, X)]{u} X \xrightarrow[\mathcal{L}(X, Y)]{T} Y \xrightarrow[\mathcal{L}(Y, F)]{v} F \text{ alors } v \circ T \circ u \in I(E, F).$$

De plus, si $\|\cdot\|_I : I \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfait

(i) $(I(X, Y), \|\cdot\|_I)$ est un espaces de Banach (resp. quassi-Banach);

(ii) $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; \lambda \mapsto \lambda\|_I = 1$;

(iii) $\|v \circ T \circ u\|_I \leq \|v\| \|T\|_I \|u\|$,

alors $(I(X, Y), \|\cdot\|_I)$ s'appelle idéal de Banach (resp. quassi-Banach).

Exemples 2.2. $\mathcal{L}_f(X, Y)$ et $\mathcal{L}(X, Y)$ sont des idéal linéaires.

2.2 Les opérateurs linéaires absolument p -sommants

Commençons cette section par quelques préliminaires nécessaire des définitions les espaces des suites p -sommables.

Définition 2.3. (L'espace $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$)). Soit X un espace de Banach et soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note par $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$) l'espace de Banach des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X absolument p -sommables, muni de la norme

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \sup_{i \geq 1} \|x_i\|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

resp.

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Lorsque $X = \mathbb{C}$ on note simplement $\ell_p, p \in [1, +\infty]$.

Définition 2.4. (L'espace $X(\ell_p^n)$). On note par $X(\ell_p^n)$, l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^n$ des éléments de X telles que

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{X(\ell_p^n)} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $X(\ell_p^n)$ muni de l'ordre naturel

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \forall 1 \leq i \leq n,$$

est un espace de Banach.

Définition 2.5. (L'espace $\ell_{p,w}(X)$ (resp. $\ell_{p,w}^n(X)$)). On note par $\ell_{p,w}(X)$ (resp. $\ell_{p,w}^n(X)$) l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X faiblement p -sommables, muni de la norme

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \begin{cases} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x_i, \varphi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{i \geq 1} |\langle x_i, \varphi \rangle|, & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

resp.

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} = \begin{cases} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, \varphi \rangle|, & \text{si } p = +\infty, \end{cases}$$

où X^* est le dual (topologique) de X . La boule d'unité fermée de X^* est notée B_{X^*} .

On a aussi si $1 < p \leq +\infty$ où p^* est le conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$) et $v : \ell_{p^*} \rightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ (i.e., $v = \sum_{i=1}^{+\infty} e_i \otimes x_i$, $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ est la base canonique de ℓ_{p^*}), alors,

$$\|v\| = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w}$$

Proposition 2.2. (1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a $\ell_{p,w}(X) \subseteq \ell_p(X)$, de plus on a

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w}.$$

(2) Si $p = \infty$, on a $\ell_{\infty}(X) = \ell_{\infty,w}(X)$, et

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty,w}.$$

En effet

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty,w} &:= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{1 \leq i \leq \infty} |\langle x_i, \varphi \rangle| \\ &= \sup_{1 \leq i \leq \infty} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle| \\ &\stackrel{H-B}{=} \sup_{1 \leq i \leq \infty} \|x_i\|_X =: \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

(3) $\ell_p(X) = \ell_{p,w}(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie. Aussi $(\ell_{p,w}(X), \|\cdot\|_{p,w})$ est un espace de Banach (voir [23, Proposition 2.3.4]).

(4) Soit X est un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$, on a $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Définition 2.6. (Opérateurs linéaires absolument p -sommants). Soit X et Y deux espaces de Banach et Soit $T \in L(X, Y)$. On dira que T est absolument p -sommant (ou simplement p -sommant) pour $1 \leq p < +\infty$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$, on a :

$$\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \leq C^p \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^p. \quad (2.1)$$

On voit donc que les opérateurs p -sommants transforment les suites faiblement p -sommants en suites fortement p -sommants.

L'espace des opérateurs p -sommants de X dans Y est noté $\Pi_p(X, Y)$ muni de la norme

$$\pi_p(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (2.1)}\},$$

est un espace de Banach (voir [11, page 38, Proposition 2.6]).

Pour tout $T \in \Pi_p(X, Y)$, on a :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \pi_p(T).$$

En effet : pour $n = 1$, on a :

$$\|T(x)\|^p \leq \pi_p(T)^p \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (|\langle x, \varphi \rangle|^p) \stackrel{H-B}{=} \pi_p(T)^p \|x\|^p,$$

i.e., $\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \|x\|$.

Définition 2.7. (Application adjoint). Soient X, Y deux espaces normés, et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

L'application

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ y^* &\longmapsto T^*(y^*) = y^* \circ T : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)), \end{aligned}$$

est appelée le transposée ou l'adjoint de T . (notée T^* ou T^t).

Notation 2.1. Si $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu, on définit $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ par la formule

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle \text{ et on a } \|T^*\| = \|T\|. \quad (2.2)$$

Proposition 2.3. (Propriété d'idéal voir [11]). Soient X, Y, E, F des espaces de Banach. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur p -sommant ; $u \in \mathcal{L}(E, X)$ un opérateur linéaire continu et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ un opérateur linéaire continu. Alors $v \circ T \circ u \in \Pi_p(E, F)$ et

$$\pi_p(v \circ T \circ u) \leq \|v\| \pi_p(T) \|u\|.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition des opérateurs p -sommants pour T .

Soit $(z_i)_{i=1}^n \subset E$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|v \circ T \circ u(z_i)\|^p &\stackrel{v \in \mathcal{L}(Y, F)}{\leq} \|v\|^p \sum_{i=1}^n \|T \circ u(z_i)\|^p \\ &\stackrel{T \in \Pi_p(X, Y)}{\leq} \|v\|^p \pi_p(T)^p \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle u(z_i), \varphi \rangle|^p \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \|v\|^p \pi_p(T)^p \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle z_i, u^*(\varphi) \rangle|^p \\ &\stackrel{u \in \mathcal{L}(E, X)}{=} \|v\|^p \pi_p(T)^p \|u\|^p \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \left| \langle z_i, \frac{u^*(\varphi)}{\|u\|} \rangle \right|^p \end{aligned}$$

posons $\psi = \frac{u^*(\varphi)}{\|u\|}$; $\|u^*\| = \|u\|$, on a $\|\psi\| \leq \|\varphi\| \leq 1$, donc

$$\sum_{i=1}^n \|v \circ T \circ u(z_i)\|^p \leq \|v\|^p \pi_p(T)^p \|u\|^p \sup_{\psi \in B_{E^*}} \sum_{i=1}^n |\langle z_i, \psi \rangle|^p. \blacksquare$$

Définition 2.8. (Ensemble normant). Soit X un espace de Banach. On dit qu'un sous-ensemble K de B_{X^*} est normant si $\|x\| = \sup_{x^* \in K} |\langle x^*, x \rangle|$, $\forall x \in X$.

Lemme 2.1. Soit X un espace de Banach. On suppose que $1 \leq p < \infty$. On note par p^* le conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Si K est un sous-ensemble normant de B_{X^*} et si $(x_i)_{i \geq 1} \in \ell_{p,w}$, alors on a :

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle \varphi, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 2.4. (Voir [11, Exemple 2.9, a]). Soient K un compact, μ une mesure régulière borélienne, positive et finie sur K et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $\varphi \in L_p(K, \mu)$, l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(K, \mu) \\ f &\longmapsto T_\varphi(f) = f \cdot \varphi, \end{aligned}$$

est linéaire p -sommant de plus, on a $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

Corollaire 2.1. (Voir [11, Exemple 2.9, b]). Soient K un compact, μ une mesure régulière positive et finie sur K et $1 \leq p < \infty$. L'injection canonique

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(K, \mu) \\ f &\longmapsto J_p(f) = f, \end{aligned}$$

est p -sommant de plus, on a $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi = \mathbf{1}$ dans la proposition précédente. ■

En utilisant l'inclusion des espaces L_p , il suit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2.1. (Théorème d'inclusion). Si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors

$$\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y).$$

De plus, on a $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$ pour tout $T \in \Pi_p(X, Y)$.

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_n \in X$ et posons $\lambda_i = \|T(x_i)\|^{\frac{q}{p}-1}$; ($1 \leq i \leq n$).

Donc $\|T(\lambda_i x_i)\|^p = \|T(x_i)\|^q$.

Si T est p -sommant, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n \|T(\lambda_i x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^p |\langle \varphi, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si de plus $p \leq q$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder sur les indices $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{qp}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, x_i \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \left(\|T(x_i)\|^{\frac{q}{p}-1} \right)^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{qp}} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} \\ &= \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ceci est équivalent à :

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w}.$$

Donc, on a :

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_q^n(Y)} \leq \pi_p(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{q,w}^n(X)}.$$

C'est à dire $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$. ■

Proposition 2.5. (Injectivité de Π_p). *si $i : Y \rightarrow Y_0$ est isométrique, alors $v \in \Pi_p(X, Y)$ si et seulement si $i \circ v \in \Pi_p(X, Y)$. Dans ce cas, nous avons $\pi_p(i \circ v) = \pi_p(i)$.*

Théorème 2.2. (Théorème de GrothendieK). *Si tout opérateur borné de X dans Y est 1-sommant i.e.,*

$$B(X, Y) = \Pi_1(X, Y),$$

avec $\Pi_1(X, Y) \leq K_G \|T\|$.

où K_G est la constant inversible de GrothendieK.

Lemme 2.2. (Lemme de Ky Fan). *Soient X un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de X . Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans $(-\infty, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.*

- (1) *Tout $f \in M$ est convexe et semi-continue inférieurement.*
- (2) *Si $g \in \text{conv}(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x), \forall x \in C$.*
- (3) *S'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in M, f(x) \leq r$. Alors il existe $x_0 \in C$ tel que $f(x_0) \leq r$ pour tout $f \in M$.*

Définition 2.9. (Opérateurs fortement p -sommants). *Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$, (X, Y sont des espaces de Banach arbitraires) est fortement p -sommant, $1 < p \leq +\infty$ si et seulement si, il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, et tout $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a*

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{X^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (2.4)$$

Encore une fois la classe des opérateurs fortement p -sommants de X dans Y , qui est notée par $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p(T) = \inf \{C, \text{vérifiant l'inégalité (2.4)}\}$$

2.3 Théorème de domination et factorisation de Pietsch

On va présenter le premier théorème de domination pour les applications linéaires p -sommants et on présente maintenant le théorème de factorisation concernant cette classe.

Théorème 2.3. (*Théorème de domination de Pietsch*). Soit X et Y deux espaces de Banach, $p \in [1, +\infty[$ et K un ensemble compacte $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes (LPSST) :

- (1) T est p -sommant.
- (2) Il existe une constante positive C et une mesure de probabilités régulière μ sur K telle que

$$\forall x \in X : \|T(x)\|^p \leq C^p \int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x^*). \quad (2.5)$$

Dans ce cas, le plus petite constante C qui vérifie (2.5) est égale à $\pi_p(T)$.

Preuve. (2) \Rightarrow (1). Supposons qu'il existe $C > 0$ et une mesure μ comme ci-dessus, telle que (2.5) est satisfaite. On prend $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ nous avons

$$\|T(x_i)\|^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_i \rangle|^p d\mu(x^*).$$

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^n \int_K |\langle x^*, x_i \rangle|^p d\mu(x^*) \\ &= C^p \int_K \sum_{i=1}^n |\langle x^*, x_i \rangle|^p d\mu(x^*) \\ &\leq C^p \int_K \sup_{x^* \in K} \sum_{i=1}^n |\langle x^*, x_i \rangle|^p d\mu(x^*) \\ &= C^p \sup_{x^* \in K} \sum_{i=1}^n |\langle x^*, x_i \rangle|^p \int_{B_{X^*}} d\mu(x^*) \\ &= C^p \sup_{x^* \in K} \sum_{i=1}^n |\langle x^*, x_i \rangle|^p. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que T est p -sommant et $\pi_p(T) \leq C$.

(1) \Rightarrow (2). Inversement, repose sur la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach et représentation de $C(K)^*$ comme l'espace des mesures régulières de Borel sur K .

On considère $\Psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Psi(x^*) := \sum_{i=1}^n (|\pi_p(T)|^p |\langle x^*, x_i \rangle|^p - \|T(x_i)\|^p).$$

Pour chaque nombre finie $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Psi \in C(K)$.

$$\text{Soient } Q := \left\{ \Psi \in C(K, \mathbb{R}) : \Psi(x^*) := \sum_{i=1}^n (|\pi_p(T)|^p |\langle x^*, x_i \rangle|^p - \|T(x_i)\|^p) \right\} \subset C(K, \mathbb{R}),$$

$$P := \left\{ \Phi \in C(K, \mathbb{R}) : \sup_{x^* \in K} \Phi(x^*) < 0 \right\} \subset C(K, \mathbb{R}).$$

Q est convexe, car pour tout Ψ_1, Ψ_2 dans Q et $\lambda \in [0, 1]$ on a : $\lambda\Psi_1 + (1 - \lambda)\Psi_2 \in Q$.

Une référence rapide à la définition de $\pi_p(T)$, montre que Q est disjoint du cône négative P , maintenant, P est clairement ouvert et convexe.

D'après la version géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe $\mu \in C(K)^*$ tel que, pour certains $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \mu, \Phi \rangle \leq \alpha < \langle \mu, \Psi \rangle, \forall \Phi \in P, \forall \Psi \in Q.$$

D'après la représentation de Riesz il existe une mesure borélienne régulière $\mu \in C(K, \mathbb{R})^*$ telle que

$$\int_K \Phi(x^*) d\mu(x^*) \leq \alpha < \int_K \Psi(x^*) d\mu(x^*), \forall \Phi \in P, \forall \Psi \in Q.$$

Cette inégalité est imperméable aux échelles positives de μ , de sorte que nous pouvons bien supposer que μ est une mesure de probabilité. Si nous testons maintenant par rapport aux fonctions en Q pour $n = 1$, on voit que

$$\int_K (\|T(x)\|^p - \pi_p(T) \cdot |\langle x^*, x \rangle|^p) d\mu(x^*) \leq 0.$$

puisque μ est une mesure de probabilité,

$$\|T(x)\|^p \leq \pi_p(T) \cdot \int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x^*). \blacksquare$$

Remarque 2.1. Soit X un espace de Banach, X est isométrie à sous-espace de $C(K)$ ($K = B_{X^*}$), par l'application

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow C(K) \\ x &\longmapsto i_X(x) = \tilde{x} = \langle x, \cdot \rangle, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{x} : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \tilde{x}(\xi) = \langle x, \xi \rangle. \end{aligned}$$

En effet

$$\|i_X(x)\| = \|\tilde{x}\|_{C(K)} \stackrel{\text{H-B}}{=} \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\tilde{x}(\xi)| = \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle| \stackrel{\text{H-B}}{=} \|x\|.$$

Donc : $\|\widehat{T}\| = \|\widetilde{T}\| = \pi_p(T)$, dans (4), on a considéré que $\|v\| = 1$ et $\|\widetilde{T}\| = \pi_p(T)$.

Démonstration. (1) \implies (2) : Si $T \in \pi_p(X, Y)$, alors d'après le théorème 2.3. de domination de Pietsch, il existe une mesure de probabilité Borel régulière μ sur K telle que :

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in X.$$

Soit $S = \text{Im}(j_p \circ i_X)$. L'application $\widetilde{T} : j_p \circ i_X(x) \mapsto T(x)$ est une application de S dans Y qui est bien définie :

$$\begin{aligned} \|(j_p \circ i_X)(x)\|_{L_p(K, \mu)}^p &= \int_K |i_X(x)(x^*)|^p d\mu(x^*) \\ &= \int_K |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu(x^*), \end{aligned}$$

car $(i_X(x))(x^*) := \langle x, x^* \rangle$. Autrement dit : Si $(j_p \circ i_X)(z) = 0$, alors $T(z) = 0$ d'après le théorème de domination de Pietsch. Ainsi $\forall x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} (j_p \circ i_X)(x) = (j_p \circ i_X)(y) &\Leftrightarrow (j_p \circ i_X)(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(x) - T(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(x) = T(y). \end{aligned}$$

L'application est donc bien définie.

De plus, cette application est continue et $\|T(x)\| \leq \pi_p(T)$. Soit X_p la fermeture de S dans $L_p(\mu)$. Alors il existe une extension $\widehat{T} : X_p \rightarrow Y$ telle que $\widehat{T} \circ j_p^X \circ i_X = T$ et $\|\widehat{T}\| \leq \pi_p(T)$.

Réciproquement (l'inégalité inverse), d'après la propriété idéale (Définition 2.2.) et la propriété d'injection (Proposition 2.5.), on a :

$$\begin{aligned} \pi_p(T) &= \pi_p(\widehat{T} \circ J_p^X \circ i_X) \\ &\leq \|\widehat{T}\| \pi_p(J_p) \|i_X\| \\ &\leq \|\widehat{T}\| \pi_p(J_p). \end{aligned}$$

Or $\pi_p(J_p) = (\mu(K))^{\frac{1}{p}}$ par le corollaire 2.1. et $\mu(K) = 1$ car μ est une mesure de probabilité Borel régulière, Donc $\pi_p(T) \leq \|\widehat{T}\|$.

(2) \implies (3) : Par définition : $B = B_{Y^*}(0, 1)$ et $\ell_\infty^B = \left\{ f : B \rightarrow \mathbb{C} : \text{tel que } \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty \right\}$.

On a le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\widehat{T}} & Y \\ & \searrow \widetilde{T} & \swarrow i_Y \\ & & \ell_\infty^B, \end{array}$$

car $i_Y(y)$ est effectivement une fonction bornée sur la boule unité de Y^* : $|i_Y(y)(y^*)| = |\langle y, y^* \rangle| \leq \|y\| \|y^*\| \leq \|y\|$. Donc on a :

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{\hat{T}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow i_Y \\ L_p(K, \mu) & \dashrightarrow & \ell_\infty^B. \end{array}$$

L'application \tilde{T} existe par l'injectivité de ℓ_∞^B (ceci est le lemme) qui préserve la norme

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \|i_Y \circ \hat{T}\| \\ &= \|\hat{T}\| \\ &= \pi_p(T) \text{ d'après(2).} \end{aligned}$$

(3) \implies (4) : Il est clair qu'on peut définir $j_p : C(K) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu)$ Donc en posant : $v = j_\infty \circ i_X$ dans (3), on obtient (4).

(4) \implies (1) : On sait que l'opérateur $i_p : L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ est p-sommant, $i_Y \circ T$ est donc p-sommant par la propriété d'idéal 2.5. Par définition des opérateurs p-sommants, et La propriété d'injection 2.5 est régler le problème.

2.4 Quelques conséquences

Corollaire 2.2. Soit K un espace de Hausdorff compact. Un opérateur $T : C(K) \rightarrow Y$ est p-sommant si et seulement s'il existe une mesure de probabilité Borel régulière μ sur K et un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_2(\mu), Y)$ telle que $\tilde{T} \circ j_p = T$:

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow j_p & \nearrow \tilde{T} \\ & & L_p(\mu). \end{array}$$

De plus, on a : $\|\tilde{T}\| = \pi_p(T)$.

pour $p = 2$, chaque sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est bien complété.

Corollaire 2.3. Soit $T : X \rightarrow Y$ est 2-sommant si et seulement s'il existe une mesure de probabilité μ sur un compact K et $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_2(\mu), Y)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow i_X & & \uparrow \tilde{T} \\ C(K) & \xrightarrow{j_2} & L_2(\mu). \end{array}$$

De plus, on a : $\|\tilde{T}\| = \pi_2(T)$.

Démonstration. On suppose que T est 2-sommant. D'après le théorème de factorisation de Pietsch, il existe une mesure régulière de probabilité μ sur K , un sous-espace vectoriel fermé X_2 de $L_2(\mu)$ et un opérateur $\hat{T} : X_2 \rightarrow Y$ tels que $\hat{T} \circ j_2 \circ i_X(x) = T(x), \forall x \in X$ et $\pi_2(T) = \|\hat{T}\|$. Soit P la projection orthogonale de $L_2(\mu)$ sur X_2 . Donc $\tilde{T} = \hat{T}P$ satisfait $\tilde{T} \circ j_2 \circ i_X = T$. D'une part,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow i_X & & \uparrow \hat{T} \\ i_X(X) & & X_2 \\ \downarrow & & \uparrow P \\ C(K) & \xrightarrow{j_2} & L_2(K; \mu) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \|\hat{T}P\| \\ &\leq \|\hat{T}\| \|P\| \\ &\leq \|\hat{T}\| \\ &= \pi_2(T), \end{aligned}$$

et d'autre part \tilde{T} est une extension de \hat{T} , donc $\|\tilde{T}\| \geq \|\hat{T}\| = \pi_2(T)$. ■

Corollaire 2.4. *Tout opérateur 2-sommant $T : X \rightarrow Y$ admet une factorisation de la forme $T : X \xrightarrow{v} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_2} L_2(\mu) \xrightarrow{\tilde{T}} Y$ où μ est une mesure de probabilité de Radon, v et \tilde{T} sont des opérateurs linéaires continus tels que $\|v\| = 1$ et $\|\tilde{T}\| = \pi_2(T)$.*

Démonstration. Utiliser (4). dans le théorème de factorisation de Pietsch puis faire la même démonstration que pour le corollaire 2.3.

Corollaire 2.5. *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach avec $X \subset Z$. Si $T : X \rightarrow Y$ est un opérateur 2-sommant, alors il existe une extension de T , notée $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ qui est aussi 2-sommant avec*

$$\pi_2(\tilde{T}) = \pi_2(T).$$

FACTORISATION DE PIETSCH DES OPÉRATEURS : MULTILINÉAIRES, NON LINÉAIRES ET LIPSCHITZ MULTILINÉAIRES

Dans ce chapitre, on va présenter les notions et une sélection des résultats classiques concernant les opérateurs multilinéaires. Puis, on discute les classes d'idéaux d'opérateurs multilinéaires, qui sont les opérateurs absolument p -sommants, p -dominés, multi p -sommants, fortement p -sommants et Hilbert-Schmidt et de leurs propriétés. Puis nous touchons les opérateurs non linéaire. La dernière partie sera consacrée à l'étude de classes importantes d'opérateurs Lipschitz multilinéaires p -sommants.

3.1 Les opérateurs multilinéaires continues

Définition 3.1. (Opérateur multilinéaire). Soient X_1, X_2, \dots, X_m et Y des espaces de Banach. Une application

$$T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y,$$

est dite opérateur (ou application) multilinéaire (ou m -linéaire) si

$$T(x^1, x^2, \dots, \alpha x^j + \beta y^j, \dots, x^m) = \alpha T(x^1, x^2, \dots, x^j, \dots, x^m) + \beta T(x^1, x^2, \dots, y^j, \dots, x^m),$$

pour tout $x^j, y^j \in X_j; (1 \leq j \leq m), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

- Si $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme multilinéaire.
- Si $m = 2$, T est dit bilinéaire (ou 2-linéaire).

On note par $L(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ dans Y . Définissons les opérations linéaires suivantes

- (i) $(T_1 + T_2)(x^1, x^2, \dots, x^m) = T_1(x^1, x^2, \dots, x^m) + T_2(x^1, x^2, \dots, x^m);$
- (ii) $(\alpha T)(x^1, x^2, \dots, x^m) = \alpha T(x^1, x^2, \dots, x^m).$

Ce qui donne à $L(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$ une structure d'espace vectoriel. Grâce à la formule

$$\begin{aligned} T(x^1, \dots, x^m) - T(y^1, \dots, y^m) &= T(x^1 - y^1, x^2, \dots, x^m) + \\ &+ T(y^1, x^2 - y^2, x^3, \dots, x^m) + \dots + T(y^1, \dots, y^{m-1}, x^m - y^m). \end{aligned}$$

Exemples 3.1. (1) L'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha\beta, \end{aligned}$$

est une application 2-linéaire.

(2) L'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha x, \end{aligned}$$

est une application 1-linéaire.

Proposition 3.1. (Multilinéaire borné). Pour $T \in L(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$, les affirmations suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est continue.
- (2) L'opérateur T est continue en $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{m\text{-fois}}$.
- (3) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \|x^1\| \dots \|x^m\|, \forall (x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m. \quad (3.1)$$

Dans ce cas, on dit que T est borné et on pose

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x^j\| \leq 1, 1 \leq j \leq m} \|T(x^1, \dots, x^m)\| \\ &\leq \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.1)}\}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'elle définit une norme sur $L(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$. L'espace des applications m -linéaires continues (ou bornées) de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y est un espace de Banach.

3.2 Factorisation de Pietsch des opérateurs m -linéaires

Pour généraliser les opérateurs linéaires p -sommants au cas multilinéaire, Pietsch [20] a introduit deux définitions : opérateurs multilinéaires absolument p -sommants et p -dominés.

Dans le premier cas, la généralisation était très naturelle et la norme a été définie pour que l'espace soit un espace de Banach. Quelques autres propriétés des opérateurs linéaires p -sommants restent vraies dans le cas multilinéaire. Cependant, il n'y a pas l'analogie du théorème de domination de Pietsch.

D'autre part, les opérateurs multilinéaires p -dominés ont été introduits pour qu'ils vérifient le théorème de domination de Pietsch, mais l'espace associé n'est pas un Banach si $p < m$. C'est un quasi-Banach (sauf si $p \geq m$ où l'espace associé est un Banach). Les deux espaces sont des idéaux d'opérateurs m -linéaires.

Définition 3.2. (Opérateurs m -linéaires de rang fini). Soient X_1, \dots, X_m et Y des espaces normés. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est de rang fini, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$; $\varphi_i^j \in X_j^*; y_i \in Y, \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ telle que

$$T(x^1, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^1(x^1) \times \dots \times \varphi_i^m(x^m) y_i.$$

L'espace des opérateurs m -linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Définition 3.3. (Idéal des opérateurs m -linéaires). Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) \mathcal{M} est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout X_1, \dots, X_m et Y des espaces de Banach on a :

- (1) $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $\mathcal{L}_f \subset \mathcal{M}$.

(2) (Propriété d'idéal). si $T \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j, X_j)$; ($1 \leq j \leq m$) et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$,

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{v} & F \\
 \uparrow u_1 & & & & \nearrow v \circ T \circ (u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 \uparrow u_2 & & & & \\
 \dots & & & & \\
 \uparrow u_m & & & & \\
 E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m, & & & &
 \end{array}$$

alors $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)$ est dans $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$.

où $(v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m))(e_1, \dots, e_m) = v \circ T \circ (u_1(e_1), \dots, u_m(e_m)), \forall e_i \in E_i; i = 1, \dots, m$.

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

(i) $(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (resp. de Banach);

(ii) $\|I_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}; (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \lambda_1 \times \dots \times \lambda_m\|_{\mathcal{M}} = 1$;

(iii) $\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \dots \|u_m\|$,

Alors $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (resp. de Banach) des opérateurs multilinéaires.

Exemples 3.2. $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$ sont des idéal multilinéaires.

3.2.1 Opérateurs multilinéaires absolument p -sommants

Définition 3.4. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est absolument p -sommant ($1 \leq p < \infty$) s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$, ($j = 1, \dots, m$)

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|(x_i^j)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,w}^n(X_j)}. \quad (3.2)$$

On note par $\mathcal{L}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m -linéaires absolument p -sommants muni de la norme

$$\|T\|_p = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.2)}\}$$

Remarque 3.1. L'espace $\mathcal{L}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un idéal de Banach (on vérifie facilement les conditions de la Définition 3.3.

3.2.2 Opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants

La définition suivante est une version généralisée de la définition précédente ($1 \leq p < \infty$).

Définition 3.5. Soient $p_1, \dots, p_m \in]0; \infty]$ avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ avec $(j = 1, \dots, m)$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|(x_i^j)_{i=1}^n\|_{\ell_{p_j, w}^n(X_j)}. \quad (3.3)$$

La classe des opérateurs m -linéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{L}_{(p; p_1, \dots, p_m)}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un Banach idéal pour la norme

$$\|T\|_{(p; p_1, \dots, p_m)} = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.3)}\}.$$

3.2.3 Opérateurs multilinéaires p -dominés

Définition 3.6. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ un opérateur m -linéaire borné. On dira que T est p -dominé ($1 \leq p < \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$, ($1 \leq j \leq m$), on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|(x_i^j)_{i=1}^n\|_{\ell_{p, w}^n(X_j)}. \quad (3.4)$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires p -dominés de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y . C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (3.4)}\}.$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$. Soulignons que

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y) = \underbrace{\mathcal{L}_{\left(\frac{p}{m}; p, \dots, p\right)}^m}_{m\text{-fois}}(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Théorème 3.1. (Factorisation et domination de Pietsch).

Soient $1 \leq p < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes (LPSST).

- (1) L'opérateur T est p -dominé.
- (2) Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ_j sur $K_j = B_{X_j^*}$, ($1 \leq j \leq m$) telles que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.5)$$

pour tout $x_j \in X_j$, De plus, on a $\delta_p(T) = \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (3.5)}\}$.

(3) Pour tout $1 \leq j \leq m$, il existe des probabilités de Radon μ_j sur $B_{X_j^*}$ et $\tilde{T} \in \mathcal{L}(S_1, \dots, S_m; Y)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\
 \begin{array}{c} \downarrow i_{X_1} \\ \downarrow i_{X_2} \\ \dots \\ \downarrow i_{X_m} \end{array} & & \swarrow \tilde{T} \\
 i_{X_1}(X_1) \times i_{X_2}(X_2) \times \dots \times i_{X_m}(X_m) & \xrightarrow{(J_1, J_2, \dots, J_m)} & S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \dots \\ \downarrow \end{array} \\
 C(K_1) \times C(K_2) \times \dots \times C(K_m) & \xrightarrow{(J_1, J_2, \dots, J_m)} & L_p(\mu_1) \times L_p(\mu_2) \times \dots \times L_p(\mu_m)
 \end{array}$$

où $J_j : C(K_j) \rightarrow L_p(\mu_j)$ est l'injection canonique, $i_{X_j} : X_j \rightarrow C(K_j)$ est l'isométrie canonique, S_j est la fermeture de l'espace $J_j(i_{X_j}(X_j))$ et $\|\tilde{T}\| = \delta_p(T)$.

Remarque 3.2. La classe des opérateurs m -linéaires p -dominés est un multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation, i.e.,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(\Pi_p)(X_1, \dots, X_m; Y),$$

où Π_p est l'espace des opérateurs linéaires p -sommants.

3.2.4 Opérateurs multilinéaires multi p -sommants

Définition 3.7. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est dit multi p -sommant ($1 \leq p < \infty$), s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, \dots, x_{i_m}^j \in X_j$, ($1 \leq j \leq m$), on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_{i_j}^j)_{i=1}^n \right\|_{\ell_{p,w}^n(X_j)}. \quad (3.6)$$

On note $\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m -linéaires multi p -sommants, muni de la norme $\pi_p^m(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.6)}\}$.

Remarque 3.3. Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogie du théorème de Pietsch, mais c'est une bonne généralisation des opérateurs linéaires p -sommants car elle conserve plusieurs propriétés du cas linéaire.

Propriétés 3.1. (1) La classe d'opérateurs m -linéaires multi p -sommants c'est un idéal d'opérateurs m -linéaires bornés.

(2) Le théorème de Grothendieck se généralise : si les X_j ; ($1 \leq j \leq m$) sont des espaces \mathcal{L}_1 et Y un espace de Hilbert, on a

$$\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y).$$

- (3) Si les X_j sont des espaces de Hilbert, alors $\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ coïncide avec l'espace des opérateurs m -linéaires de Hilbert-Schmidt.
- (4) Les espaces X_j ; ($1 \leq j \leq m$) sont des espaces \mathcal{L}_1 ssi, tout opérateur multi 1-sommant est intégral.
- (4) L'opérateur m -linéaire T , est multi p -sommant ssi, son extension d'Aron–Berner

$$AB(T) : X_1^{**} \times \dots \times X_m^{**} \longrightarrow Y^{**},$$

est aussi multi p -sommant. Pour la définition de l'extension d'Aron–Berner voir [16].

3.2.5 Opérateurs m -linéaires fortement p -sommants

Définition 3.8. Soit ($1 \leq p < \infty$) et $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$; ($j = 1, \dots, m$), telle que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)}} \left(\sum_{i=1}^n |\Phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.7)$$

La classe des opérateurs m -linéaires fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{L}_s^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (3.7) soit vérifiée.

Théorème 3.2. (théorème de domination de Pietsch). Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est fortement p -sommant.
- (2) Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ sur $(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)}, w^*)$ telle que pour tout (x^1, \dots, x^m) dans $X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)}} |\Phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\Phi) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.8)$$

Proposition 3.2. On note que l'espace $\mathcal{L}_s^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un idéal de Banach . On a aussi

$$\Pi_p(T) \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^p(X_1, \dots, X_m; Y).$$

3.2.6 Les opérateurs m -linéaires de Hilbert-Schmidt

La notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt joue un rôle fondamental en Analyse fonctionnelle et Harmonique.

La définition des opérateurs de Hilbert Schmidt a été introduite par Dwyer [13], et étudiée par plusieurs auteurs notamment Pietsch dans [20]. L'idée a été inspiré de la norme de Hilbert

Schmidt d'un opérateur linéaire T sur un Hilbert H , qui est la somme des $\|T(e_j)\|^2$ où $(e_j)_j$ est une base orthonormale de H .

Définition 3.9. Soient H_1, \dots, H_m et H des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times \dots \times H_m \longrightarrow H$ est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{e_{i_j}^j \in I_j; 1 \leq j \leq m} \|T(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_m}^m)\|^2 < \infty,$$

où $(e_{i_j}^j)_{i_j \in I_j}$ est une base orthonormale de l'espace H_j . Noter que cette quantité ne dépend pas de choix de la base orthonormale. La norme de Hilbert-Schmidt de T est

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{e_{i_j}^j \in I_j; 1 \leq j \leq m} \|T(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_m}^m)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 3.4. Comme dans le cas linéaire, l'espaces des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; H)$ est un espace de Hilbert space dont la norme $\|\cdot\|_{HS}$ est induite du produit scalaire suivant

$$\langle T, S \rangle = \sum_{e_{i_j}^j \in I_j; 1 \leq j \leq m} \langle T(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_m}^m), \overline{S(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_m}^m)} \rangle.$$

3.2.7 Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommants

La version multilinéaire a été introduite par Achour et Mezrag dans [15]. Elle conserve la plupart des propriétés des opérateurs linéaires : le théorème de domination de Pietsch, la caractérisation des opérateurs adjoints et une bonne relation avec les autres notions d'opérateurs multilinéaires sommants.

Définition 3.10. Soient X_j et Y des espaces de Banach ($j = 1, \dots, m$), $1 < p \leq \infty$ et p^* est le nombre réel satisfait $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est Cohen fortement p -sommant, s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))_{i=1}^n\|_{\ell_{p^*}^n}. \quad (3.9)$$

La classe des opérateurs m -linéaires Cohen fortement p -sommants de X_1, \dots, X_m dans Y , notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf \{C; C \text{ vérifiant l'inégalité (3.9)}\}$$

Remarque 3.5. Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Proposition 3.3. L'espace $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un idéal de Banach dans $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 3.3. (Théorème de domination de Pietsch). Soient $1 < p \leq \infty$, $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est Cohen fortement p -sommant.
- (2) Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout $(x^1, \dots, x^m, y^*) \in X_1 \times \dots \times X_m \times Y^*$, on a

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \left(\prod_{j=1}^m \|x^j\| \right) \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.10)$$

Preuve. Voir [2].

3.3 Factorisation de Pietsch des opérateurs lipschitziens

La notion d'applications Lipschitz p -sommant a été introduite en 2009 par Farmer et Johnson dans [15]. C'est une généralisation naturelle des opérateurs linéaires p -sommants. Certaines propriétés ont été étudiées dans cet section.

Nous proposons dans cette section de revoir cette généralisation et d'essayer d'étudier d'autres propriétés. Nous commençons par rappeler les notions de base afin de mieux cerner de section.

3.3.1 Les opérateurs lipschitziens

On commence par quelques définitions puis des propriétés élémentaires et supplémentaires concernant les opérateurs lipschitziens. Pour d'amples informations, consulter [24].

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques complets

Définition 3.11. Soit (X, e, d_X) est un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué de X , on prend 0 si X est normé). On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{ \text{des espaces métriques pointés et complets} \}.$$

Définition 3.12. (Application lipschitzienne). Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Une application $T : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est dite Lipschitzienne (ou C -lipschitzienne) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in X$, on a

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq C d_X(x, y). \quad (3.11)$$

Si $C < 1$, on dit que f est contractante, est si $C = 1$, on dit que T est non expansion.

On notera par $Lip(X, Y)$ l'ensemble des applications lipschitziennes $T : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$.

Quand $Y = E$ est un espace de Banach, on dit qu'une application $T : (X, d_X) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est Lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall x, y \in X$, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C d_X(x, y). \quad (3.12)$$

Définition 3.13. Soient (X, e_X, d_X) et (Y, e_Y, d_Y) deux espaces métriques pointés. On dit que $T : X \rightarrow Y$ préserve l'élément distingué si $T(e_X) = e_Y$.

Définition 3.14. Soit E un espace de Banach. On note par

$$Lip_0(X, E) = \{T : (X, e_X, d_X) \rightarrow (E, 0, \|\cdot\|) \text{ est Lipschitzienne et } T(e_X) = 0\}.$$

Remarque 3.6. Soit $(X, e_X, d_X) \in \mathcal{M}_0$. La fonction $\|\cdot\|_{Lip} : Lip_0(X, E) \rightarrow \mathbb{R}_+$; définit par

$$\begin{aligned} \|T\|_{Lip} = Lip(T) &= \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x) - T(y)\|}{d_X(x, y)} \\ &= \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.12)}\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

est une norme sur $Lip_0(X, E)$. De plus, on a $(Lip_0(X, E), \|\cdot\|_{Lip})$ est un espace de Banach.

Quand $E = \mathbb{R}$ on note par $Lip_0(X, \mathbb{R}) = X^\#$ s'appelle le dual de Lipschitz de X .

La boule $B_{X^\#}$ (ici $B_{X^\#}$ est la boule unité de $X^\#$) est l'espace compact de Hausdorff dans la topologie de la convergence pointé sur X (voir [24, page 39]).

3.3.2 Les opérateurs Lipschitz p -sommants

Dans ce partie, nous présentons la notion d'opérateurs non linéaires p -sommants, que nous appelons les opérateurs Lipschitz p -sommants. Puis nous présentons le théorème de factorisation de Pietsch et d'autres propriétés sur ces opérateurs. Pour plus d'informations voir [15].

Définition 3.15. (Opérateurs Lipschitz p -sommants). Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur lipschitzien entre deux espaces métriques $(X, d_X), (Y, d_Y)$. On dit que T est un opérateur Lipschitz p -sommant pour $1 \leq p < +\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X, \forall \{y_1, \dots, y_n\} \subset X$ et pour $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^+$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i d_Y(T(x_i), T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p. \quad (3.14)$$

On note par

$$\Pi_p^L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y, \text{ lipschitz } p\text{-sommant}\}$$

, et $\pi_p^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.14)}\}$.

On pourra simplifier la définition en prenant les $a_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$), voir [15].

On pose

$$w_{Lip}^p((x_i, y_i)_{i=1}^n) = \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

la p -norme faible lipschitzienne.

Soit F un sous-espace de dimension finie de X , d'après la définition de la norme lipschitzienne p -sommante, on trouve $\pi_p^L(T) = \sup_{F \subset X} \pi_p^L(T|_F)$.

Théorème 3.4. (Théorème de domination et factorisation de Pietsch). Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur lipschitzien entre deux espaces métriques X, Y qui préserve les éléments distingués (i.e., $T(e_X) = e_Y$). Soit C une constante positive. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est Lipschitz p -sommant et $\pi_p^L(T) \leq C$.
- (2) Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{X^\#}$ telle que

$$\forall x, y \in X, d_Y(T(x), T(y)) \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.15)$$

(Théorème de domination de Pietsch).

- (3) Pour toute isométrie J de Y dans un espace injectif Z , on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ v \downarrow & & & & \uparrow \tilde{T} \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{i_p} & L_p(\mu) & & \end{array}$$

avec μ une probabilité et $Lip(\tilde{T}) \cdot Lip(v) \leq C$. On peut remplacer $L_\infty(\mu)$ par $C(B_{X^\#})$.

(Théorème de factorisation de Pietsch).

Preuve. Rappelons qu'un espace métrique Z est injectif si pour tout sous-espace W_0 d'un espace métrique W et pour tout $u \in Lip(W_0, Z)$, u admet un prolongement $\tilde{u} \in Lip(W, Z)$ avec $Lip(\tilde{u}) = Lip(u)$.

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{u} & Z \\ \cap & \nearrow \tilde{u} & \\ W & & \end{array}$$

(1) \implies (2). Supposons que $\pi_p^L(T) = 1$. Soit Q le cône convexe dans $C(B_{X^\#})$ de toutes les combinaisons linéaires positives des fonctions de la forme

$$d_Y(T(x), T(y))^p \leq C^p |f(x) - f(y)|^p, \forall x, y \in X.$$

Soit P un sous-ensemble convexe ouvert de $C(B_{X^\#})$ de la forme

$$P = \{F \in C(B_{X^\#}) : F(f) > 0, \forall f \in X^\#\}.$$

L'ensemble Q est un cône convexe dans $C(B_{X^\#})$ et P est un cône convexe ouvert de $C(B_{X^\#})$.

Comme $Q \cap P = \emptyset$ (car T est Lipschitz p -sommant), d'après le théorème de Hahn-Banach forme géométrique et le théorème de représentation de Riesz il existe une mesure finie de Borel μ sur $B_{X^\#}$ et un nombre réel α tels que pour tout $G \in Q$ et $F \in P$, on a

$$\int_{B_{X^\#}} G(f) d\mu(f) \leq \alpha < \int_{B_{X^\#}} F(f) d\mu(f).$$

Comme $0 \in Q$ et toutes les constantes positives sont dans P , on a $\alpha = 0$, et $\int_{B_{X^\#}}$ est positif sur le cône positif P , la mesure signée μ est une mesure positive. On suppose que μ est une mesure de probabilité de Radon. Donc

$$\int_{B_{X^\#}} d_Y(T(x), T(y))^p - \alpha^p |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \leq 0.$$

D'où l'inégalité (3.15).

(2) \implies (3). D'après le lemme 1.1 dans [5], Chaque espace métrique se plonge dans $\ell_\infty(I)$ pour un certain ensemble I , et d'après le théorème non linéaire de Hahn-Banach, $\ell_\infty(I)$ est 1-injectif.

Soit $v : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ le plongement isométrique se composant de l'identité de $C(B_{X^\#})$ dans $L_\infty(\mu)$, c.-à-d. $v : X \xrightarrow{i_p} C(B_{X^\#}) \xrightarrow{i_{\infty,p}} L_\infty(B_{X^\#}, \mu)$.

Alors (2) indique que la norme lipschitzienne $Lip(\tilde{T})$ restreinte à $i_p \circ v(X)$ est bornée par C .

(3) \implies (1). On a

$$\begin{aligned} \pi_p^L(T) = \pi_p^L(J \circ T) &\leq Lip(\tilde{T})\pi_p^L(i_p)Lip(v) \\ &\leq Lip(\tilde{T})\pi_p(i_p)Lip(v) \\ &= Lip(\tilde{T})Lip(v). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Alors $\Pi_p^L(T) \leq C$. Ce qui termine la démonstration. ■

3.3.3 Opérateurs Lipschitz Cohen fortement p -sommants

La définition suivante a été introduite indépendamment par [22] et [25]. Pour notre commodité, nous adopterons la notation de [25].

Définition 3.16. Soient $1 < p \leq \infty$, X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $T : X \rightarrow E$ une Opérateur Lipschitzienne. On a T est Lipschitz-Cohen fortement p -sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ dans X , $(v_i^*)_{i=1}^n$ dans E^* et $(\alpha_i)_{i=1}^n$ dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i |\langle v_i^*, T(x_i) - T(y_i) \rangle| \leq C \|(\alpha_i d(x_i, y_i))_{i=1}^n\|_p \| (v_i^*)_{i=1}^n \|_{\ell_{p^*,w}^n(E^*)}. \tag{3.17}$$

On note par $\mathcal{D}_{st,p}^L(X, E)$ la classe des opérateurs Lipschitz Cohen fortement p -sommants de X dans E , est un espace de Banach pour la norme

$$d_{st,p}^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.17)}\}.$$

Théorème 3.5. (Théorème de domination de Pietsch). Soit X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $T \in Lip(X, E)$, ($1 < p < \infty$). Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est Lipschitz-Cohen fortement p -sommant.
- (2) Il existe une constante $C > 0$ et une mesures de probabilités de Borel μ en $B_{E^{**}}$, telles que

$$|\langle v^*, T(x) - T(y) \rangle| \leq Cd(x, y) \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \quad (3.18)$$

pour tout $x, y \in X$ et $v^* \in E^*$ et de plus, dans ce cas, on a

$$d_{st,p}^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.18)}\}.$$

3.3.4 Opérateurs Lipschitz Cohen p -nucléaires

Définition 3.17. Soit $T : X \rightarrow E$ un Opérateur Lipschitzien entre un espace métrique pointé X et un espace de Banach E . On dit que T est un opérateur Lipschitz Cohen p -nucléaire ($1 < p < \infty$), s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ dans X ; $\forall (v_i^*)_{i=1}^n$ dans E^* et $(\alpha_i)_{i=1}^n$ dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i^*, T(x_i) - T(y_i) \rangle \right| \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{v \in B_E} \left(\sum_{i=1}^n |\langle v, v_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.19)$$

La classe des opérateurs Lipschitz Cohen p -nucléaire de X dans E , notée $\mathcal{N}_p^L(X, E)$, est un espace de Banach pour la norme

$$\eta_p^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.19)}\}.$$

Pour $p = 1$ et $p = \infty$, on a comme dans le cas linéaire $\mathcal{N}_1^L(X, E) = \Pi_1(X, E)$ et $\mathcal{N}_\infty^L(X, E) = \mathcal{D}_{st,\infty}^L(X, E)$

Théorème 3.6. Soit $T \in Lip_0(X, E)$ et C une constante positive. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est Lipschitz-Cohen p -nucléaire et $\eta_p^L(T) \leq C$.
- (2) Pour toute $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ dans X ; $(v_i^*)_{i=1}^n$ dans E^* et $(\alpha_i)_{i=1}^n$ dans \mathbb{R}_+ , on a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i^*, T(x_i) - T(y_i) \rangle \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{v \in B_E} \left(\sum_{i=1}^n |\langle v, v_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.20)$$

(3) Il existe deux mesures de probabilité de radon μ_1 sur $B_{X\#}$ et μ_2 sur $B_{E^{**}}$, tel que pour tous $x, y \in X$ et v^* dans E^* , on a

$$|\langle v^*, T(x) - T(y) \rangle| \leq C \left(\int_{B_{X\#}} |f(x_i) - f(y_i)|^p d\mu_1(f) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_2(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.21)$$

De plus, dans ce cas

$$\eta_p^L(T) = \inf \{ C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.21)} \}.$$

3.4 Relations entre $\Pi_p^L(X, E)$, $\mathcal{D}_{st,p}^L(X, E)$ et $\mathcal{N}_p^L(X, E)$

Dans cette section, nous étudions comme dans le cas linéaire, les relations entre les différentes classes d'opérateurs de Lipschitz.

Théorème 3.7. Soit $T : X \rightarrow E$ un Opérateur Lipschitzien entre un espace métrique pointé X et un espace de Banach E , on a

- (1) $\mathcal{N}_p^L(X, E) \subseteq \mathcal{D}_{st,p}^L(X, E)$ de plus, on a $d_{st,p}^L(T) \leq \eta_p^L(T)$ pour $1 < p \leq \infty$.
- (2) $\mathcal{N}_p^L(X, E) \subseteq \Pi_p^L(X, E)$ de plus, on a $\Pi_p^L(T) \leq \eta_p^L(T)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Preuve. (1) Soit $T \in \mathcal{N}_p^L(X, E)$. On Considère x, y dans X et $v^* \in E^*$. On a par l'inégalité (3.21)

$$\begin{aligned} |\langle v^*, T(x) - T(y) \rangle| &\leq \eta_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu_1(f) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_2(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \eta_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} d(x, y)^p d\mu_1(f) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_2(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \eta_p^L(T) d(x, y) \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_2(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité (3.18), T est Lipschitz Cohen fortement p -sommants et $d_{st,p}^L(T) \leq \eta_p^L(T)$.

(2) Soit T un opérateur dans $\mathcal{N}_p^L(X, E)$. On a par

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|_E &\stackrel{\text{H-B}}{=} \sup_{v^* \in B_{E^*}} |\langle v^*, T(x) - T(y) \rangle| \\ &\leq \sup_{v^* \in B_{E^*}} \eta_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu_1(f) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_2(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \eta_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu_1(f) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par le théorème de domination de Pietsch 3.4, T est Lipschitz p -sommant et $\pi_p^L(T) \leq \eta_p^L(T)$.

Théorème 3.8. *On considère $1 \leq p \leq \infty$. Soit $T_1 \in Lip_0(X, E)$ et $T_2 \in Lip_0(E, F)$. Si T_2 est un opérateur Lipschitz Cohen fortement p -sommant, et T_1 est un opérateur Lipschitz p -sommant, alors $T_2 \circ T_1$ est un opérateur Lipschitz Cohen p -nucléaire et $\eta_p^L(T_2 \circ T_1) \leq d_{st,p}^L(T_2)\pi_p^L(T_1)$.*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{T_2 \circ T_1 \in \mathcal{N}_p^L(X, F)} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\Pi_p^L(X, E)]{T_1} & E \xrightarrow[\mathcal{D}_{st,p}^L(E, F)]{T_2} & F \end{array}$$

Preuve. Soit $x, y \in X$ et $v^* \in F^*$. Par l'inégalité 3.18, on a

$$\begin{aligned} |\langle v^*, T_2 \circ T_1(x) - T_2 \circ T_1(y) \rangle| &= |\langle v^*, T_2(T_1(x)) - T_2(T_1(y)) \rangle| \\ &\leq d_{st,p}^L(T_2) \|T_1(x) - T_1(y)\| \left(\int_{B_{F^{**}}} |\langle v^*, v^{**} \rangle|^{p^*} d\mu_1(v^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \end{aligned}$$

et par le théorème 3.4 (domination et factorisation de Pietsch), on a :

$$\begin{aligned} |\langle v^*, T_2 \circ T_1(x) - T_2 \circ T_1(y) \rangle| &= |\langle v^*, T_2(T_1(x)) - T_2(T_1(y)) \rangle| \\ &\leq d_{st,p}^L(T_2)\pi_p^L(T_1) \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu_2(f) \right)^{\frac{1}{p}} \|v^*\|_{L_{p^*}(B_{F^{**}}, \mu_1)}. \end{aligned}$$

Cela donne que $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{N}_p^L(X, F)$ et $\eta_p^L(T_2 \circ T_1) \leq d_{st,p}^L(T_2)\pi_p^L(T_1)$.

3.5 Opérateurs Lipschitz multilinéaires p -sommants

3.5.1 Représentation sur un produit tensoriel

La théorie générale des espaces de Banach que nous utiliserons peut être trouvée dans [11] et [21].

Définition 3.18. (Produit tensoriel). Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach.

On note $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de X_1, \dots, X_m . On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

Définition 3.19. (Produit tensoriel projectif). On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m i.e.; le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = \dots = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé linéarisation de T , $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$ défini par

$$\widetilde{T}(v) = \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m).$$

3.5.2 Factorisation et domination de Pietsch

Lemme 3.1. Soit $\delta_{x_1 \otimes \dots \otimes x_m}$ défini par $\delta_{x_1 \otimes \dots \otimes x_m}(\varphi) := \varphi(x_1, \dots, x_m)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$. Alors, l'application suivante est une inclusion isométrique.

$$\begin{array}{ccc} \sum_{X_1, \dots, X_m} & \xhookrightarrow{\quad} & C(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}, w^*) \\ x_1 \otimes \dots \otimes x_m & \mapsto & \delta_{x_1 \otimes \dots \otimes x_m}, \end{array}$$

où $\sum_{X_1, \dots, X_m} := \{x_1 \otimes \dots \otimes x_m \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m; x_i \in X_i, i = \overline{1, m}\}$.

Notation 3.1. Nous dénoterons $j_p : C(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}, w^*) \rightarrow L_p(\mu)$ et $i_p : L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ les applications d'inclusion naturelle et

$$\begin{array}{ccc} i_Y : Y & \longrightarrow & \ell_\infty^{B_{Y^*}} \\ y & \longmapsto & i_Y(y) = (y^*(y))_{y^* \in B_{Y^*}}, \end{array}$$

est l'inclusion isométrique naturelle.

Théorème 3.9. Soit $1 \leq p < \infty$ et $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur m -linéaires entre les espaces de Banach. Les propriétés suivantes pour T sont équivalentes :

- (1) Il existe $C > 0$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m), y_i = (y_i^1, \dots, y_i^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, $i = 1, \dots, n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - T(y_i)\| \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| \right)^{\frac{1}{p}} ; \varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)} \right\}. \quad (3.22)$$

- (2) Il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilité régulière μ sur l'espace $(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}, w^*)$ telles que pour chaque $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.23)$$

- (3) Il existe une mesure de probabilité Borel régulière μ sur $(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}, w^*)$, un sous-ensemble $\sum_p := (j_p \circ \otimes)(X_1, \dots, X_m)$ de $L_p(\mu)$ et une fonction Lipschitz $h_T : \sum_p \longrightarrow Y$ tel que $T = h_T \circ j_p \circ \otimes$, c'est-à-dire de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
X_1 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\
\downarrow \otimes & & \uparrow h_T \\
\sum_{X_1, \dots, X_m} & \xrightarrow{j_p|_\Sigma} & \sum_p \\
\cap & & \cap \\
C(B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}, w^*) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu).
\end{array}$$

- (4) Il existe un espace de probabilité (Ω, Σ, μ) , un opérateur multilinéaire $v : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow L_\infty(\mu)$, $\|v\| = 1$, et une fonction Lipschitz $\tilde{h}_T : L_p(\mu) \longrightarrow \ell_\infty^{B_{Y^*}}$ c'est-à-dire de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
X_1 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\
\downarrow v & & \searrow i_Y \\
L_\infty(\mu) & \xrightarrow{i_p} & L_p(\mu) \\
& & \nearrow \tilde{h}_T \\
& & \ell_\infty^{B_{Y^*}}
\end{array}$$

Si

$$\pi_p^{Lip}(T) := \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.22)}\},$$

puis

$$\pi_p^{Lip}(T) := \inf \{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (3.23)}\}$$

et $\|\tilde{h}_T\|_{Lip} = \pi_p^{Lip}(T)$ quand les espaces sont réels et $\pi_p^{Lip}(T) \leq \|\tilde{h}_T\|_{Lip} \leq \sqrt{2}\pi_p^{Lip}(T)$ Lorsque les espaces sont complexes.

Démonstration. La preuve est comme la preuve du théorème 2.4 de factorisation de Pietsch (linéaire) original.

En effet, (1) \implies (2) il est possible de postuler [6, Théorème 2.2] , les auteurs étendent la déclaration originale concernant les opérateurs linéaires bornés (voir [11, Théorème 2.12]).

(2) \implies (3) nous utiliserons le Lemme 3.1. Considérons une mesure de probabilité Borel régulière μ comme dans (2). Soit $\sum_p := (j_p \circ \otimes)(X_1 \times \dots \times X_m) \subset L_p(\mu)$ et définir $h_T : \sum_p \longrightarrow Y$; $h_T(j_p \circ \otimes)(x_1, \dots, x_m) := T(x_1, \dots, x_m)$, pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. h_T est bien défini, car $h_T(j_p \circ \otimes)(x_1, \dots, x_m) = h_T(j_p \circ \otimes)(y_1, \dots, y_m)$, (2) garantit que

$$\|T(x_1, \dots, x_m) - T(y_1, \dots, y_m)\| \leq \|(j_p \circ \otimes)(x_1, \dots, x_m) - (j_p \circ \otimes)(y_1, \dots, y_m)\|_{L_p(\mu)} = 0.$$

Finalement, $\|h_T\| = \pi_p^{Lip}(T)$ car pour tout $x, y \in \sum_p$

$$\|h_T(x) - h_T(y)\| \leq \|h_T\|_{Lip} \left(\int_{B_{\mathcal{L}}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

et $\pi_p^{Lip}(T)$ est l'infimum parmi les constantes satisfaisant (1).

(3) \implies (4) Suppose que $h_T : \sum_p \rightarrow Y$ est comme dans (2). Alors, $i_Y \circ h_T$ est une fonction Lipschitz de plus, on a

$$\|i_Y \circ h_T\|_{Lip} = \|h_T\|_{Lip} = \pi_p^{Lip}(T).$$

En utilisant la propriété Lipschitz 1-injectivité de ℓ_∞^Γ (voir [5, lemme 1.1]), on trouve une extension Lipschitz h_T^- de $i_Y \circ h_T$ défini sur $L_p(\mu)$, tel que

$$\|h_T^-\|_{Lip} = \|i_Y \circ h_T\|_{Lip} = \pi_p^{Lip}(T),$$

lorsque les espaces sont réels, et

$$\pi_p^{Lip}(T) \leq \|\tilde{h}_T\|_{Lip} \leq \sqrt{2}\pi_p^{Lip}(T),$$

lorsque les espaces sont complexes.

(4) \implies (2). Pour $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, inégalité (2), et

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \|(i_Y \circ T)(x) - (i_Y \circ T)(y)\| \\ &= \|h_T^- \circ i_p \circ v(x) - h_T^- \circ i_p \circ v(y)\| \\ &\leq \|h_T^-\|_{Lip} \|i_p \circ v(x) - i_p \circ v(y)\|_{L_p(\mu)}. \end{aligned}$$

Définition 3.20. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est Lipschitz p -sommant s'il remplit l'une des conditions équivalentes du Théorème 3.9. La norme de Lipschitz p -sommant de T est définie comme $\pi_p^{Lip}(T)$.

$\Pi_p^{Lip}(T)(X_1, \dots, X_m; Y)$ désignera l'espace de Banach des opérateurs Lipschitz multilinéaires p -sommants avec la norme π_p^{Lip} . Clairement, $\Pi_p^{Lip}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $\Pi_p(\sum_{X_1, \dots, X_m}; Y)$ sont des espaces de Banach isométriquement isomorphes.

Bibliographie

- [1] **D. Achour**, *Cours d'analyse fonctionnelle master 1*, Université de M'sila, Algeria, 2019.
- [2] **D. Achour and L. Mezrag**, *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. 327, 1 (2007) 550-563.
- [3] **J. C. Angulo-López and M. Fernández-Unzueta**, *Lipschitz p -summing multilinear operators*, J. Funct. Anal. 279, 4 (2020).
- [4] **S. Banach**, *Sur les fonctionnelles linéaires*, Studia Mathematica 1, 1 (1929) 211-216.
- [5] **Y. Benyamini and J. Lindenstrauss**, *Geometric nonlinear functional analysis Volume 1*, Amer. Math. Soc. Collo. Publ., Vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [6] **G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda**, *A unified Pietsch domination theorem*, J. Math. Anal. Appl. 365, 1 (2010) 269-276.
- [7] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1987.
- [8] **D. Chen and B. Zheng**, *Lipschitz p -integral operators and Lipschitz p -nuclear operators*, Nonlinear Analysis 75, 13 (2012) 5270-5282.
- [9] **L. Daniel**, *Cours d'analyse fonctionnelle, Avec 200 exercices corrigés*, Ellipses Marketing, Paris, 2013.
- [10] **J. Diestel, H. Jarchow and A. Pietsch**, *Operator ideals*, Handbook of the geometry of Banach spaces, vol. I, 437-496, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [11] **J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge**, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [12] **A. Djeriou**, *Cours d'algèbre multilinéaire master 1*, Université de M'sila, Algeria, 2019.
- [13] **T. A. W. Dwyer III**, *Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type*, Bull. Amer. Math. Soc. 77, 5 (1971) 725-730.
- [14] **N. El Hage Hassan**, *Topologie générale et espaces normés : Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2011.

- [15] **J. D. Farmer and W. B. Johnson**, *Lipschitz p -summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 137, 9 (2009) 2989-2995.
- [16] **J. Gutiérrez and I. Villanueva**, *Extensions of multilinear operators and Banach space properties*, Proc. Royal. Soc. Edinburgh Series A 133, 2003.
- [17] **H. Hahn**, *Ober linearer Gleichungssysteme in linearer Rfiumcn*, J. Reina Angew. Math. 157, (1927) 214-229.
- [18] **S. MARC**, *Algèbre multilinéaire, Produit tensoriel de A -modules* (fichier internet).
- [19] **L. Narici and E. Beckenstein**, *The Hahn-Banach theorem : the life and times*, Topology and its Applications 77, 2 (1997) 193-211.
- [20] **A. Pietsch**, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.
- [21] **R. Ryan**, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002.
- [22] **K. Saadi**, *Some properties of Lipschitz Strongly p -summing operator*, J. Math. Anal. Appl. 432, (2015) 1410-1426.
- [23] **J. S. D. Santos**, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação, UFPB, 2008.
- [24] **N. Weaver**, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [25] **R. Yahi, D. Achour and P. Rueda**, *Absolutely summing Lipschitz conjugates*, Mediterr. J. Math. 13, (2016) 1949-1961.

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة نظرية التركيب و الهيمنة لبيتش باستخدام المؤثرات الخطية، متعددة الخطية، المؤثرات الليبتشيزية و المؤثرات الليبتشيزية متعددة الخطية، في كل حالة قدمنا تعريفا للمؤثر و بعض خواصه قبل التطرق إلى النظرية و البرهان.

كلمات مفتاحية: مؤثر خطي، مؤثر متعدد الخطية، مؤثر لبيشيتزي.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié le théorème de domination et factorisation de Pietsch par des opérateurs linéaires, multilinéaires, non linéaire (Lipschitziens) et des opérateurs Lipschitz multilinéaires et chaque fois que nous avons présenté une définition de opérateur et certaines de ses propriétés avant de traiter de théorie et de preuve. Enfin, nous avons présenté une comparaison des différentes opérateurs Lipschitziens.

Mots-Clés : L'opérateur linéaires, l'opérateur multilinéaires et l'opérateur lipschitzien.

Abstract :

In this thesis, we studied the domination and factorization theorem of Pietsch by linear operators, multilinear operators, Lipschitz operators end Lipschitz multilinear operators, and each time we presented a definition of the operator and some of its properties before to approach theory and proof. Finally, we presented a comparison of the different Lipschitz operators.

Keywords : The linear operator, the multilinear operator and the Lipschitz operator.