N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Filière : Mathématiques

Option : Logique Mathématiques, Langages Formels et Analyse non Standard

Par

BOUREMEL Hassane

Sujet

« Sur la relation d'ordre flou de Ponsard »

Soutenue publiquement le 14/11/2010 devant le jury composé de :

Mr: MIHOUBI DAOUADI	Professeur, Univ. de M'sila	Président
Mr: ZEDAM Lemnaouar	Maître de Conférence(A),Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr: AMROUNE Abdelaziz	Maître de Conférence(A), Univ. de M'sila	Examinateur
Mr: MERZOUGUI Abdelkarim	Maître de Conférence(A), Univ. de M'sila	Examinateur
Mr: TOUAFEK NOURESSADAT	Maître de Conférence(A), Univ. de Jijel	Examinateur

Promotion: 2007/2008

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie des sous-ensembles flous a été présentée pour la première fois en 1965 par L.A .Zadeh [Zadeh65]. Cette théorie a pour objet de formaliser les notions vagues de la pensée humain pour pallier l'inadéquation de la théorie des ensembles classiques dans ce domaine. Il a introduit en 1971 la notion d'ordre flou (fuzzy order)comme un sous-ensemble flou vérifié en plus de trois propriétés (la réflexivité floue, l'antisymétrie floue et la transitivité floue). Cette notion d'ordre flou a encore été abordée par plusieurs chercheurs [Beg99, Bernadette96, Bodenhofer99, Gerla2001,Kundu2000, Stouti 2003, Venugopalan92, Zim91, ...].

En particulier, C. Ponsard [Billot92] qui a introduit une définition de l'ordre flou différente à celle de Zadeh.

Les objectives de ce mémoire sont :

1) La présentation de quelques propriétés de la relation d'ordre flou selon la définition de C. Ponsard (Brièvement, relation d'ordre flou de Ponsard).

2) L'étude d'existence des extensions linéaires d'un ordre flou de Ponsard (Version floue du Théorème de Szpilrajn).

Ce travail est reparti en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre on rappelle des notions relatives aux sous-ensembles flous, et aux relations floues.
- Dans le second chapitre on inspire les résultats de L. Zadem et A.Stuoti [Zadem,Stuoti2010] pour faire un travail similaire sur les relations d'ordrs flou de C . Ponsard.
- Dans le troisième chapitre nous essayons de démontrer que chaque ordre flou de Ponsard sur un ensemble de référence non vide, peut être étendu à un ordre flou linéaire.

Chapitre 1

Généralités sur les sous-ensembles et les relations floues

Dans ce chapitre, on a vu le concept des ensembles flous sur un ensemble de références non vide, puis on a abordé les relations floues qui sont considérées comme des sous-ensembles flous.

Pour plus détails voir [Beg99, Bernadette96, Brown71, Hamacher76, Kaufmann 73,Weber83,Yger 80, Zadeh 65, Zim91,...].

1.1 Fonction caractéristique d'un sous ensemble.

Définition 1.1.1 *Un sous-ensemble classique A de l'ensemble de référence X est défini par une fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments de X n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à A.*

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$
$$x \to \begin{cases} 1 \ si \ \ x \in A \\ 0 \ \ si \ \ x \notin A \end{cases}$$

Les fonctions caractéristiques des sous-ensembles de l'ensemble X ont les propriétés suivantes :

Soient A et B deux parties de X.

- $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$
- $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
- En particulier, $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$, $\left(\bar{A}\text{ complémentaire de } A\right)$.

Pour plus détails sur les théories des ensembles et les relations classique voir [Birkof67, Schroder2002].

1.2 Les sous-ensembles flous

Dans un ensemble de référence X, selon [Zadeh 65] un sous-ensemble flou de ce référentiel X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ de X dans l'intervalle des nombres réels $[0, 1]$ (degré d'appartenance qui est l'extension de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble classique). En fait un sous-ensemble flou (nous dirons plus brièvement un ensemble flou) est formellement défini par l'application μ, mais pour se ramener au langage des mathématiques classiques, nous parlerons d'un sous-ensemble flou A, et noterons μ_A sa fonction d'appartenance.

1.2.1 Définition d'un sous-ensemble flou

Définition 1.2.1.1 *[Zadeh 65]*

Soit X un ensemble de référence, un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d' appartenance μ_A sur X à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$
$$x \longmapsto \mu_A(x).$$

Cas particulier :

Si A ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1, le sous-ensemble flou A est un sous-ensemble classique de X.

Donc un sous-ensemble classique est un cas particulier d'un sous-ensemble flou.

Notation 1.2.1.2 :*Soit* X *l'ensemble de référence.*

1) *Un sous-ensemble flou* A *de* X *noté par* $A = \{(x, \mu_A(x))/x \in X\}$ ou $A = \sum_{x \in X} \mu_A(x)/x$

si X est dénombrable et par $A = \int_X \mu_A(x)/x$, si X est non dénombrable.

2) *L'ensemble des sous-ensembles flous de* X *sera noté par* $F(X)$.

Donc $F(X)$ *est l'ensemble des applications* $\mu_A : X \to [0,1]$, *tel que* A *est un sous-ensemble flou de* X.

$$F(X) = \{\mu_A : X \to [0,1]\}.$$

Exemple 1.2.1.3 *Soit* $X = \{a, b, c, d, e, f\}$.

On considère $A = \{(a, 0.5), (b, 1), (c, 0.3), (d, 0), (e, 0.9), (f, 0.01)\}$.

Alors, A *est un sous-ensemble flou de* X.

Exemple 1.2.1.4 *Soit* $X = \mathbb{R}$.

On considère $A = \int_{\mathbb{R}} \mu_A(x)/x$, tel que : $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Alors, A *est un sous-ensemble floue de* $\mathbb{R}$, *voire la figure (1.1).*

Remarque 1.2.1.5

Par fois, on peut prendre à la place de l'intervalle $[0,1]$ *une chaîne fermée* $J = \{0, ..., 1\}$ *(i.e.,* J *est un ensemble totalement ordonné admet un plus petit élément* 0 *et un plus grand élément* 1, J *est appelé l'ensemble de valeurs de vérité).*

1.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Les caractéristiques d'un sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X les plus utiles pour le décrire sont celles qui montrent à quel point il diffère d'un sous-ensemble

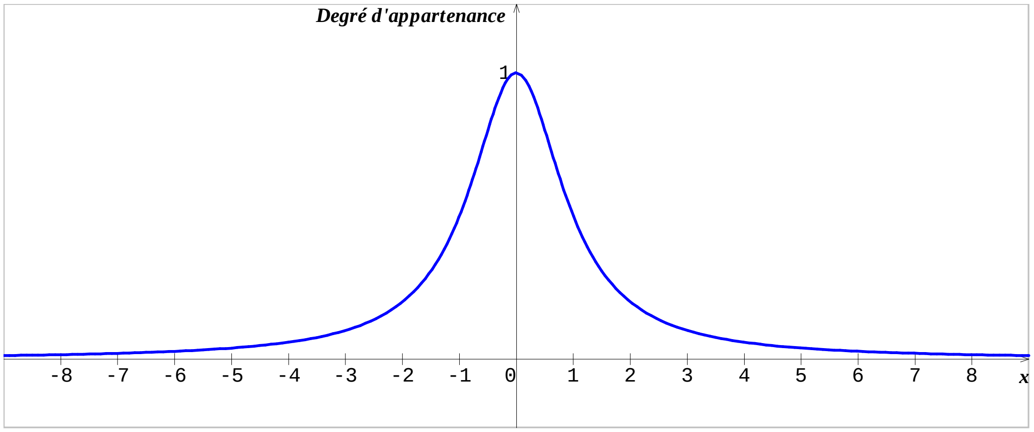

FIG. 1-1 – fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou

classique de X.

Définition 1.2.2.1 *Soient X un ensemble de référence, A un sous-ensemble flou de X. Les notions suivantes sont caractéristiques de A.*

1. Le support de A, noté $supp(A)$, est un sous-ensemble ordinaire de X sur laquelle la

   fonction d'appartenance de A non nulle. D'où

$$supp\,(A)\ = \{x \in X : \mu_A\,(x) \neq 0\}\,.$$

2. *La hauteur du A, notée $h(A)$, du sous-ensemble flou A est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance.*

$$h\,(A) = \ sup_{x \in X}\mu_A\,(x)\,.$$

   A est normalisé si sa hauteur $h(A)$ est égale à 1.

3. *Le noyau de A, noté $noy(A)$, est l'ensemble des éléments de X* pour lesquels la

fonction d'appartenance de A *vaut 1 :*

$$noy\left(A\right)=\left\{x\in X:\mu_{A}\left(x\right)=1\right\}.$$

4. *La cardinalité, si* X *est fini on caractérise également le sous-ensemble flou* A *de* X *par sa cardinalité noté par :*

$$\left|A\right|=\sum_{x\in X}\mu_{A}\left(x\right).$$

Exemple 1.2.2.2 *Soit* $X=\left\{a,b,c,d,e,f\right\}$*.On considère* A,B *deux sous-ensembles flous de* X*, tels que :*

$A=\left\{\left(a,0.6\right),\left(b,0.7\right),\left(c,0.4\right),\left(d,0.3\right),\left(e,0.8\right),\left(f,0.5\right)\right\}$

$B=\left\{\left(a,0\right),\left(b,0\right),\left(c,1\right),\left(d,0.8\right),\left(e,0\right),\left(f,1\right)\right\}$. *Alors,*

- $suppA\ =X$, $suppB\ =\left\{c,d,f\right\}$.
- $h\left(A\right)=0.8$, $h\left(B\right)=1$.
- $noy\left(A\right)=\varnothing$, $noy\left(B\right)=\left\{c,f\right\}$.
- $\left|A\right|=0.6+0.7+0.4+0.3+0.8+0.5=3.3$, $\left|B\right|=0+0+1+0.8+0+1=2.8$.

Exemple 1.2.2.3 *Soit* $X=\mathbb{R}$ *et* $a,b,\alpha,\ \beta$ sont des nombres réels positve tels que $b>a$. On considère *la fonction d'appartenance* μ_{A} *sur* X *tel que*

$$\mu_{A}\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}0\ \text{ si } x<a-\alpha \text{ ou } b+\beta<x,\ (x \text{ hors du support de } A)\\ 1 \text{ si } a\leq x<b, (x \text{ dans le noyau de } A)\\ 1+(x-a)/\alpha\ \text{ si } a-\alpha\leq x<a,\\ 1-(b-x)/\beta\ \text{ si } b\leq x\leq b+\beta.\end{array}\right..$$

Alors, A *est un sous-ensemble flou de* X*, voire la figure (1.2).*

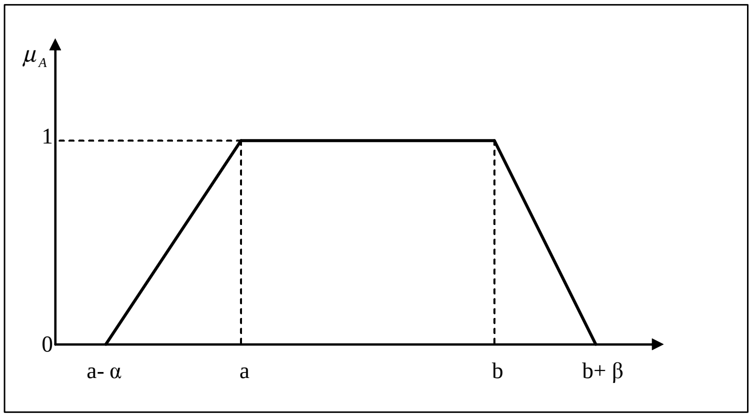

FIG. *1-2* –

Définition 1.2.2.4 *Soient A, B deux sous-ensembles flous de l'ensemble de référence X.*

1. *A est plus spécifique que B si $noy(A) \subseteq noy(B)$ et $supp(A) \subseteq supp(B)$.*
2. *A est plus précis que B si $noy(A) = noyB$ et $suppA \subseteq supp(B)$.*

Remarque 1.2.2.5

Si A est un sous-ensemble ordinaire de X, sa hauteur est égale à 1, il est normalisé et identique à son support et à son noyau, sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent, selon la définition classique.

1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

Le concept de sous-ensemble flou de l'ensemble X étant une généralisation de la notion de sous-ensemble classique de X, ces opérations sont choisies de façon à être équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsque les fonctions d'appartenance ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

1.3.1 L'inclusion :

Soient A, B deux sous-ensembles flous de l'ensemble de référence X.

On dit que A est inclus dans B et on note $A \subseteq B$, si et seulement si :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

L'inclusion définit une relation d'ordre sur $F(X)$, c'est-à-dire que $A \subseteq A$ (réflexivité), si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$ (antisymétrie), si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$ (transitivité). L'ordre est partiel car il existe des sous-ensembles flous A et B de X pour lesquels on n'a ni $A \subseteq B$, ni $B \subseteq A$, par ce que $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ pour certains éléments x de X et $\mu_B(x) < \mu_A(x)$ pour d'autres.

1.3.2 L'égalité de deux sous-ensembles flous

Soient A, B deux sous-ensembles flous de l'ensemble de référence X. On dit que A est égal à B si et seulement si :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

1.3.3 L'inclusion : L'ensemble vide

*S*oit A un sous-ensemble flou de l'ensemble de référence X. On dit que A est vide si et seulement si :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = 0.$$

1.3.4 L'intersection de deux sous-ensembles flous

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou C, qui l'on noté $A \cap B$, tel que :

$$\forall x \in X,\ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x),\ \mu_B(x)).$$

1.3.5 L'union de deux sous-ensembles flous

L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou D, qui l'on noté $A\cup B$, tel que :

$$\forall x \in X,\ \mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x),\ \mu_B(x)).$$

Comme dans la théorie des ensembles classiques, les définitions que nous venons de donner conduisent aux propriétés suivantes :

Propriétés : Pour tous A et B de $F(X)$ on a les propriétés suivantes.

- Associativité de $\cap$ et de $\cup$,
- Commutativité de $\cap$ et de $\cup$,
- $A \cap X = X,\ A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cup X = X,\ A \cup \emptyset = A$,
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$,
- $A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$,
- $A \cup (B \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B')$,
- $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$.

1.3.6 Complément d'un sous-ensemble flou

Le complément A^C d'un sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini comme le sous-ensemble flou de X de fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X,\ \mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Contrairement aux sous-ensembles classiques, l'union et l'intersection flous ne vérifie pas généralement $A\cap A^C = \emptyset$ et $A\cup A^C = X$, c'est-a-dire qu'il ne vérifie pas les propriétés classiques de la non-contradiction et du tiers exclus.

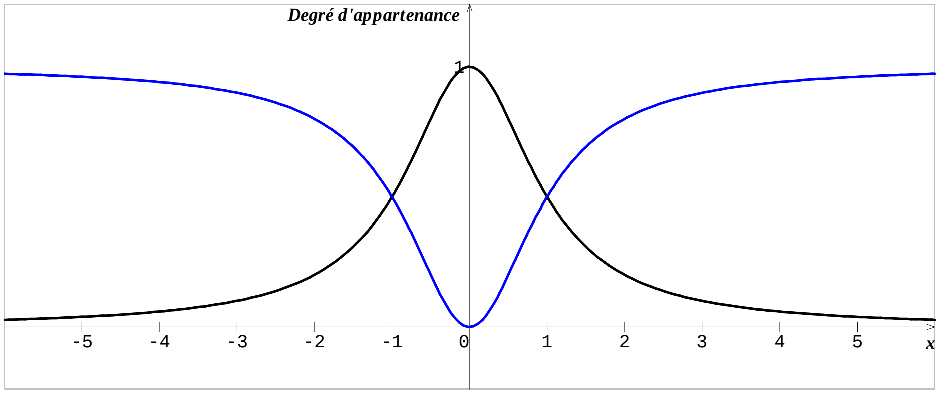

FIG. 1-3 – Complément d'un sous- ensemble flou

Exemple 1.3.6.1 *Soit* $X = \mathbb{R}$.

On considère le sous-ensemble flou A de X qui est défini dans l'exemple (1.1.4) par :

$$A = \{(x,\ \mu_A(x))/x \in \mathbb{R}\}\ /\ \mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Alors, $A^C = \{(x,\ \mu_{A^C}(x))/x \in \mathbb{R}\}\ /\ \mu_{A^C}(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}.$

$A \cap\ A^C = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$,*voire la figure (1.3).*

Propriétés :

– Lois de Morgane, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ et $(\ A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,

– $\left(A^C\right)^C = A$,

– $\emptyset^C = X$,

– $X^C = \emptyset$,

– $|A| + \left|A^C\right| = |X|$

– $\left(\text{supp}\left(A^C\right)\right)^C = \text{noy}(A)$,

– $\left(\text{noy}\left(A^C\right)\right)^C = \text{supp}(A)$.

1.3.7 Famille des sous-ensembles flous d'un ensemble de référence

Les cas extrêmes de sous-ensembles flous de X sont respectivement X lui-même, associé à une fonction d'appartenance μ_X prenant la valeur 1 pour tous les éléments de

X, qui est le plus grand pour l'inclusion, et l'ensemble vide $\emptyset$, associé à une fonction d'appartenance nulle sur tout X, qui est le plus petit pour l'inclusion.

L'ensemble $F(X)$ forme un treillis distributif, c'est-à-dire que la relation d'ordre partiel définie par l'inclusion est celle que tout couple d'éléments (A, B) admet une plus grande borne inférieure $A \cap B$ et une plus petite borne supérieure $A \cup B$ qui sont mutuellement distributives, comme c'est le cas pour l'ensemble classique $P(X)$ des sous-ensembles ordinaires de X. Par contre, le treillis $F(X)$ n'est pas complémenté, puisqu'il ne contient pas deux éléments A_0 et B_0 tels que le complément A^C de tout élément A de $F(X)$ satisfasse $A \cap A^C = A_0$ et $A \cup A^C = B_0$.

Exemple 1.3.7.1 *Considérons* $X = \{a, b\}$ *et* $I = \{0,\ \epsilon_1,\ \epsilon_2,\ 1\}$ / $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$, I *et l'ensemble des degrés d'appartenance.*

$F(X)$ *contient alors* 16 *éléments qu'on peut ordonner en treillis comme indiqué sur la figure ci-dessous*

$$X = \{a/1, b/1\}$$

$$\nearrow \qquad \nwarrow$$

$$\{\ a/1, b/\epsilon_2\} \qquad \{a/\epsilon_2, b/1\}$$

$$\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow$$

$$\{a/1, b/\epsilon_1\} \qquad \{a/\epsilon_2, b/\epsilon_2\} \qquad \{a/\epsilon_1, b/1$$

$$\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow$$

$$a/1, b/0\} \quad \{a/\epsilon_2, b/\epsilon_1\} \qquad \{a/\epsilon_1, b/\epsilon_2\} \qquad \{a/0, b/1\}$$

$$\nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow$$

$$\{a/\epsilon_2, b/0\} \qquad \{a/\epsilon_1, b/\epsilon_1\} \qquad \{a/0, b/\epsilon_2\}$$

$$\nwarrow\nearrow \qquad \nwarrow\nearrow$$

$$\{a/\epsilon_1, b/0\} \qquad \{a/0, b/\epsilon_1\}$$

$$\nwarrow\nearrow$$

$$\emptyset = \{a/0, b/0\}$$

- Treillis de sous-ensembles flous.

1.4 Les α-coupes

Etant donné le sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X, on choisit un seuil α entre 0 et 1. On construit le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé à A pour ce seuil, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à A, ou qui satisfont la propriété Prop(A) avec un degré au moins égal à α (figure 1-4).

1.4.1 Définition des α-coupes

Soit A un sous-ensemble flou de X.

Définition 1.4.1.1 *Pour un seuil donné $\alpha \in \left]0,1\right]$, on définit la α-coupe du sous-ensemble flou A* de X (ou *sous-ensemble* de niveau α associe à A) comme le sous-ensemble $A_\alpha = \{x \in X/\mu_A(x) \geq \alpha\}$*de* X,*dont la fonction caractéristique est* χ_{A_α}*tell que :*

$$\chi_{A_\alpha}(x) \ = 1\text{si seulement si } \mu_A(x) \geq \alpha.$$

Propriété 1.4.1.2

En choisissant un niveau α, on indique le seuil à partir duquel la notion d'appartenance, bien que relative dans la définition de A, est considérée comme suffisante pour la description de Prop(A). Les éléments x de l'univers X dont la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ est au moins égale à α satisfont relativement bien la propriété Prop(A) et on s'en contente, pour le niveau choisi, ce qui revient à dire que ces éléments appartiennent suffisamment fortement à A pour qu'on les considère comme représentatifs de A. Plus on est exigeant sur la notion d'appartenance, plus on augmente le seuil α, est moins il existe d'éléments de X satisfaisant cette notion d'appartenance, comme on peut l'observer sur la figure 1-4.

Les *α-coupe des sous-ensembles flous ont les propriétés suivants*

- Les *α-coupe de A* sont des parties non floues des X emboîtées par rapport à la valeur du niveau α, c'es-à-dire que si $\alpha \leq \alpha'$ alors, $A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$,

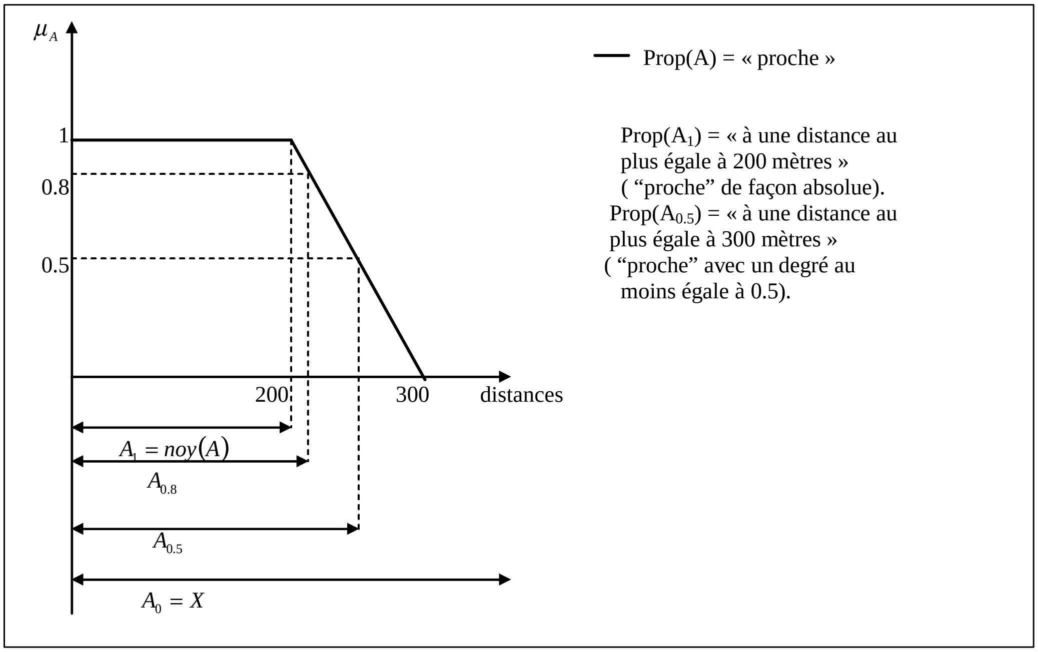

FIG. 1-4 – Exemples de $\alpha-$coupes associées au sous-ensemble flou A

- $A_1 = noyA$ (A_1 est la plus petite $\alpha-$coupe pour le niveau 1),
- $A_0 = X$ (A_0 est la plus grand $\alpha-$coupe pour le niveau 0),
- Si $\alpha_0 = h(A)$ alors, $A_{\alpha_0} = \cap_{\alpha \leq \alpha_0} A_\alpha$,
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$,
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$,
- $A \subset B \Rightarrow A_\alpha \subset B_\alpha$.

1.4.2 Représentation d'un sous-ensemble flou à partir des ses $\alpha-$coupes

La suite de toutes les α-coupe d'un sous-ensemble flou A le représente complètement. De façon imagée, on peut dire qu'il est "coupé en tranches" et qu'en possédant toutes les tranches, on possède toute la substance.

Pour simplifier, supposons que l'on se restreigne à un nombre de degrés d'appartenance prennent par exemple leurs valeurs dans l'ensemble ordonné $I = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, ...1\}$. Si l'on connait les $\alpha-$coupe emboîtées A_α du sous-ensemble flou inconnu A pour tous les seuils $\alpha \in I$, on peut construire la fonction d'appartenance μ_A de A en considérant les seuils du plus grand au plus petit. Dans le cas particulier de I :

- $\mu_A(x) = 1$ pour tout $x \in A_1$
- $\mu_A(x) = 0.9$ pour tout $x \in (A_{0.9} - A_1)$, car $\mu_A(x) \geq 0.9$ sur $A_{0.9}$ et $\mu_A(x) = 1$ sur A_1
- $\mu_A(x) = \alpha$ pour tout $x \in A_\alpha - A_{\alpha'}$, ou α'est l'élément de I qui est suit immédiatement α, et ceci quel que soit α inférieur à 1 dans I .

Plus généralement, il est équivalent de connaître la famille de toutes les $\alpha-$coupe d'un sous-ensemble flou ou de connaître le sous-ensemble flou lui-même.

A partir de A, on construit les $\alpha-$coupe A_α pour tous les niveaux α appartenant à l'ensemble des valeurs prises par μ_A.

Théorème 1.4.2.1 (Théorème de décomposition)

Tout sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini à partir des ses $\alpha-$coupes par :

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \times \chi_{A_\alpha}(x).$$

Preuve.

Soit $x \in X$, supposons $\mu_A(x) = \beta$ ($\beta \in [0,1]$), $x \in A$. Donc $\mu_A(x) = \beta \times \chi_{A_\beta}(x)$ et $\mu_A(x) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \times \chi_{A_\alpha}(x)$. Réciproquement, soit encore $x \in X$ pour tout niveau β on a :

$$\begin{cases} \chi_{A_\beta}(x) = 1 \text{ si } \mu_A(x) \geq \beta \\ \chi_{A_\beta}(x) = 0 \text{ si } \mu_A(x) < \beta \end{cases}.$$

Donc :

$$\begin{cases} \beta \times \chi_{A_\beta}(x) = \beta \text{ si } \mu_A(x) \geq \beta \\ \beta \times \chi_{A_\beta}(x) = 0 \text{ si } \mu_A(x) < \beta \end{cases}.$$

Dans les deux cas, $\beta \times \chi_{A_\beta}(x) \leq \mu_A(x)$.

D'où, $\sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \times \chi_{A_\alpha}(x) \leq \mu_A(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in X$: $\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \times \chi_{A_\alpha}(x)$. ■

Exemple 1.4.2.2 Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et soit A un sous-ensemble flou de X tel que

$$A = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 0.8), (e, 0), (f, 1)\}.$$

On construire sa $1-$coupe $A_1 = \{c, f\}$ identique à son noyau et sa $0.9-$coupe, ainsi que $0.8-$coupe $A_{0.8} = \{c, d, f\}$, qui est identique à toutes les $\alpha-$coupes, pour $0.8 > \alpha > 0$. Sa $0-$coupe $A_0 = X$ lui-même.

On peut alors écrire les différentes $\alpha-$coupes de A comme :

$A_1 = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 0), (e, 0), (f, 1)\}$,

$A_{0.8} = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 1), (e, 0), (f, 1)\}$,

$A_0 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1), (e, 1), (f, 1)\}$.On trouve alors :

$\mu_A(a) = \max(1 \times 0, ..., 0.1 \times 0, 0 \times 1) = 0$,

$\mu_A(b) = \max(1 \times 0, ..., 0.1 \times 0, 0 \times 1) = 0$,

$\mu_A(c) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 1$,

$\mu_A(d) = \max(1 \times 0, ..., 0.9 \times 0, 0.8 \times 1, ..., 0.1 \times 1, 0 \times 1) = 0.8$,

$\mu_A(e) = \max(1 \times 0, ..., 0.1 \times 0, 0 \times 1) = 0$, $\mu_A(f) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 0$,ce qui fournit bien la définition de A.

1.5 Sous-ensembles flous convexes

Les sous-ensembles flous les plus répandus sont ceux qui ont une fonction d'appartenance ‹régulière›, c'est-à-dire sans rupture brusque, représentant bien leur caractère graduel et le passage progressif de la non-satisfaction de la propriété à laquelle ils sont associés à sa satisfaction .Lorsqu'on demande à un interlocuteur de tracer la courbe qu'il juge la plus adéquate pour définir la fonction d'appartenance d'un sous- ensemble flou représentant une valeur approximative ou une caractérisation vague, il dessine généralement un triangle ou un trapèze selon le cas.

Lorsque X est l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$, les sous-ensembles flous possédant une telle allure sont dits convexes [Zadeh 65].

Définition 1.5.1 *[Zadeh 65] : Un sous-ensemble flou A de l'ensemble X des nombres réels est convexe si, pour tout couple d'éléments a et b de X, et pour tout nombre λ de $[0,1]$, la fonction d'appartenance de A vérifie :*

$$\mu_A(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b)).$$

Propriété 1.5.2

1. *Un sous-ensemble flou A de $\mathbb{R}$ est convexe si toutes ses α-coupes $A_\alpha$sont convexes, c'est-à-dire si pour tout couple d'éléments a et b de A_α, et pour tout nombre λ de $[0,1]$:*

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b$$

appartient aussi à A_α.

2. *Si A et B sont deux sous-ensembles flous convexes de $\mathbb{R}$, leur intersection et convexe.*

Exemple 1.5.3 *Soit le sous-ensemble flou A de $\mathbb{R}$ tel que*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 10 \\ \left(1+(x-10)^{-2}\right)^{-1} & si\ x > 10 \end{cases}.$$

Alors, A est un sous-ensemble flou convexes de $\mathbb{R}$.

1.6 Normes et conormes triangulaires

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs différents du minimum, du maximum et de la complémentation à 1. Ces opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métriques aléatoires

[Menger42][1], [Schweizer,Sklar63][2], [Ling65][3], et on fait appel à eux lorsque les opérations habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes, par exemple en logique floue.

Définition 1.6.1 *(t- norme)*

Une norme triangulaire (t- norme) est une fonction

$\top : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *qui vérifie pour tout* $x, y et\ z$ *de* $[0,1]$

i) $\top(x,y) = \top(y,x)$ *(commutativité),*

ii) $\top(x, T(y,z)) = \top(T(x,y), z)$ *(associativité),*

iii) $\top(x,y) \leq \top(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *(isotonie),*

iv) $\top(x,1) = x$ *(élément neutre 1).*

L'opérateur min satisfait ces propriétés donc $\top = \min$ est une norme triangulaire.

Tout $T - norme$ est un opérateur d'intersection, i.e., on peut définir $A \cap_\top B$ par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap_\top B}(x) = \top(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Définition 1.6.2 *(t- conorme)*

Une conorme triangulaire (t- conorme) est une fonction

$\perp : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *qui vérifie pour tout* $x, y et\ z$ *de* $[0,1]$

i) $\perp(x,y) = \perp(y,x)$ *(commutativité),*

ii) $\perp(x, \perp(y,z)) = \perp(\perp(x,y), z)$ *(associativité),*

iii) $\perp(x,y) \leq \perp(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *(isotonie),*

iv) $\perp(x,0) = x$ *(élément neutre 0).*

[1] K. Manger, Statistical Matrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. 28(1942),* 553-537.

[2] B. Schweizer, A. Sklar, Assosiative Fonction and Abstract Semigroups, *Puplications Mathematicae Deberecen, vol 10(1963),* 69-81.

[3] C. H. Ling, Representation of Associatve fonction, *Publications Mathematicae Debrecen 12(1965),* 189-212.

L'opérateur max satisfait ces propriétés donc $\perp = \max$ est une conorme triangulaire.

Tout t-conorme est un opérateur d'union, i.e., on peut définir $A \cup_{\perp} B$ par sa fonction d'appartenance de la manière suivante

$$: \forall x \in X, \mu_{A \cup_{\perp} B}(x) = \perp(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Exemple 1.6.3 *[Gupta , Qi91][4],[Yger 80][5],[Hamacher76][6]*

Les t-normes et t-conormes le plus utilisées sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

t-norme	*t-conorme*	*Nom*
$\min(x, y)$	$\max(x, y)$	*Zadeh*
xy	$x + y - xy$	*Probabiliste*
$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$	*Lukasiewiez*
$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x + y - xy)}$	$\frac{x + y - xy - (1-\gamma) xy}{1 - (1-\gamma) xy}$	*Hamacher* $(\gamma > 0)$
$\begin{cases} x & si\ y = 1 \\ y & si\ \ x = 1 \\ 0 & si\ \ non \end{cases}$	$\begin{cases} x & si\ y = 0 \\ y & si\ \ x = 0 \\ 1 & si\ \ si\ non \end{cases}$	*Drastique*
$max\left(1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, 0\right)$	$min\left((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}, 1\right)$	*Yager*$(p > 0)$
- ***Principales t-norme et t-conorme duales***.		

Propriété 1.6.4 *Les t- norme et t- conorme ont les propriétés suivants :*

(1) *Toute t-norme* $\top$ *et t-conorme* $\perp$ *vérifient :* $\top(0,0) = 0, \top(1,1) = 1, \perp(0,0) = 0, \perp(1,1) = 1$

(2) *L'opérateur* $\top = \min$ *est la plus grand des t-normes, l'opérateur* $\perp = \max$ *est la plus petite des t-conormes. Toute t-normes* $\top$*et toute t-conormes* $\perp$ *vérifient les inégalités suivantes :*

---

[4] *M. M. Gupta, J. Qi, Theory of T-norms and Fuzzy Inference Methods, Fuzzy sets and systems 40(3)(1991), 431-450.*

[5] *R. R. Yger, On a General Class of Fuzzy Connectives, Fuzzy sets and Systems 4(1980), 235-242.*

[6] *H. Hamacher, On logical Connectives Of fizzy Statements and thier Affiliated Truth Fonction, Proc. 3rd Eur. Meeting Cybernetics and Systems, Vienne1976.*

Pour tout x, y *de* $[0,1]$, $\top_{trastique}(x,y) \leq \top(x,y) \leq min(x,y)$, $max(x,y) \leq \bot(x,y) \leq \bot_{trastique}(x,y)$.

(3) *Les opérateurs de Hamcher deviennent drastiques si* γ *tend vers l'infini est sont identiques aux opérateurs Probabiliste si* $\gamma = 1$ *. Les opérateurs de Yager sont identiques à ceux de Lukasiewiez quand* $r = 1$*et tendent vers ceux de [Zadeh quand* r *vers l'infini.*

1.7 Définition des Relations floues

Parmi les concepts flous les plus importants du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir, les relations floues généralisent la notion de relation classiquement définie sur des ensembles. Elles mettent en évidence des liaisons imprécises ou graduelles entre éléments d'un même ensemble [Zadeh71][7].

Définition 1.7.1 [*Zadeh71*]

Une relation floue R *entre* n *ensembles* $X_1, X_2, ..., X_n$ *est un sous-ensemble flous de* $X_1 \times X_2 \times ...... \times X_n$ *de fonction d'appartenance* μ_R*.*

$$\mu_R \;\; : X_1 \times X_2 \times ...... \times X_n \rightarrow [0,1]$$
$$(\; x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \mu_R\,(\; x_1, x_2, ..., x_n)$$

En particulier, les relations floues sont souvent définies sur deux univers seulement.

Une relation floue R entre deux ensembles de référence X, Y est un sous-ensemble flou de $X \times Y$ de fonction d'appartenance μ_R.

Cas particuliers :

- Si $X = Y$, une relation floue R définie sur les deux univers est une relation binaire floue définie sur X.
- Si X et Y sont finis, la relation floue R peut être décrite par la matrice $M(R)$ des valeur de sa fonction d'appartenance le coefficient de $M(R)$ indiqué sur la ligne x

[7] L. A. Zadeh, Similarity Relation and Fuzzy Orderings, *Informtion Sciences 3(1971),* 177-200.

et la colonne y ayant pour (x, y) le dégrée d'appartenance $\mu_R(x, y)$, pour tout x de$X$ et y de Y.

i.e., $M(R) = (a_{ij})$ tel que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $a_{ij} = R(x_i, y_j)$, $|X| = n$ et $|Y| = m$.

Remarque 1.7.2 *[Zim91]*

Toute relation classique notée par $\preceq$ *peut être considérée comme une relation floue telle que :*

$$\mu_{\preceq}(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } x \preceq y \\ 0 \text{ } si \text{ } non \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } (x, y) \in G_{\preceq} \\ 0 \text{ } si \text{ } (x, y) \notin G_{\preceq} \end{cases} \text{, avec } G_{\preceq} \text{ est le graphe de } \preceq .$$

$G_{\preceq} = \{(x, y) : x \preceq y\}$.

Notation 1.7.3 *Soit* R *une relation floue définie sur un* n *ensembles* $X_1, X_2, ..., X_n$.

Pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ...... \times X_n$ *: le dégré d'appartenance de* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *à* R*, sera noté par :* $R(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$R : X_1 \times X_2 \times ...... \times X_n \to [0, 1]$

$(x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto R(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Exemple 1.7.4 *Soit* $X = \{a, b, c\}$*, et soit le sous-ensemble flou* R *de* $X \times X$ *définie par la matrice suivante :*

$M(R) =$

$R(.,.)$	a	b	c
a	1	0.9	0.3
b	0.9	1	0.1
c	0.5	0.1	1

Alors, R *est une relation binaire floue définie sur* X.

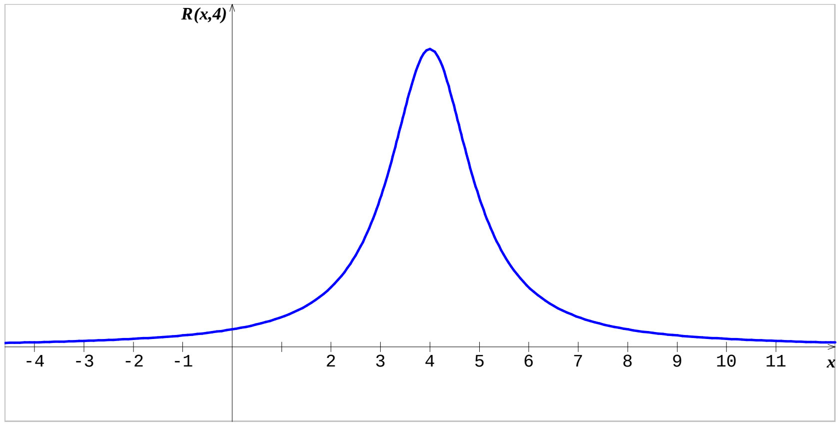

FIG. *1-5 – " x approximativement égale à 4"*

Exemple 1.7.5 *Le sous-ensemble R définie sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *par la fonction d'appartenance :*

$$R(x,y)=\begin{cases}\min\left(1,\dfrac{y-x}{\lambda}\right), & si \;\; x\leq y \;\; pour\ un\ paramètre\ \lambda>0\\ 0 & si\ non\end{cases}$$

est une relation binaire floue définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.7.6

La relation floue R associe à la propriété Prop(R) " être approximativement égal à " peut être définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *par la fonction d'appartenance :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}:R(x,y)=\frac{1}{1+(x-y)^2}.$$

Définition 1.7.7

Soit R une relation floue entre X et Y, l'inverse de la relation floue R est la relation floue R^{-1} *entre Y est X définie par :*

$$\forall y\in Y,\forall x\in X,R^{-1}(y,x)=R(x,y)$$

• **Cas particulier** :

Si X et Y sont finis, la matrice $M\left(R^{-1}\right)$ associée à l'inverse de la relation floue R est la transposée de la matrice $M\left(R\right)$.

Exemple 1.7.8 *La relation inverse R^{-1} de la relation binaire floue R sur $\mathbb{R}$ qui définie dans l'exemple* (1.7.4) *est défini ce forme matricielle comme ci-dessous :*

$$M\left(R^{-1}\right) = M\left(R\right)^t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R^{-1}(.,.) & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0.9 & 0.5 \\ b & 0.9 & 1 & 0.1 \\ c & 0.3 & 0.1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Exemple 1.7.9 *Soit $X = \mathbb{R}$, et soit la relation flou R de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tell que R associée à la propriété Prop(R) = "être beaucoup plus grand que" peut être définie, par la fonction d'appartenance :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in X,\ \ R\left(\ x, y\right) = \begin{cases} 0 \ si\ y \leq x + \lambda \\ \left(y - x - \lambda\right) / \left(\mu - \lambda\right) \ \ si\ x + \lambda < y < x + \mu \\ 1 \ si\ y \geq x + \mu \end{cases},$$

$\lambda, \mu > 0, \lambda < \mu.$

La relation inverse de la relation binaire floue R est une relation floue R^{-1}associée à la propriété Prop(R^{-1}) = "être beaucoup plus petite que " de fonction d'appartenance définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : R^{-1}\ \ (y, x) = \begin{cases} 0\ \ si\ x \geq y - \lambda \\ \left(y - x - \lambda\right) / \left(\mu - \lambda\right) \ \ si\ y - \mu < x < y - \lambda \\ 1\ \ si\ x \leq y - \mu \end{cases},$$

$\lambda, \mu > 0, \lambda < \mu.$

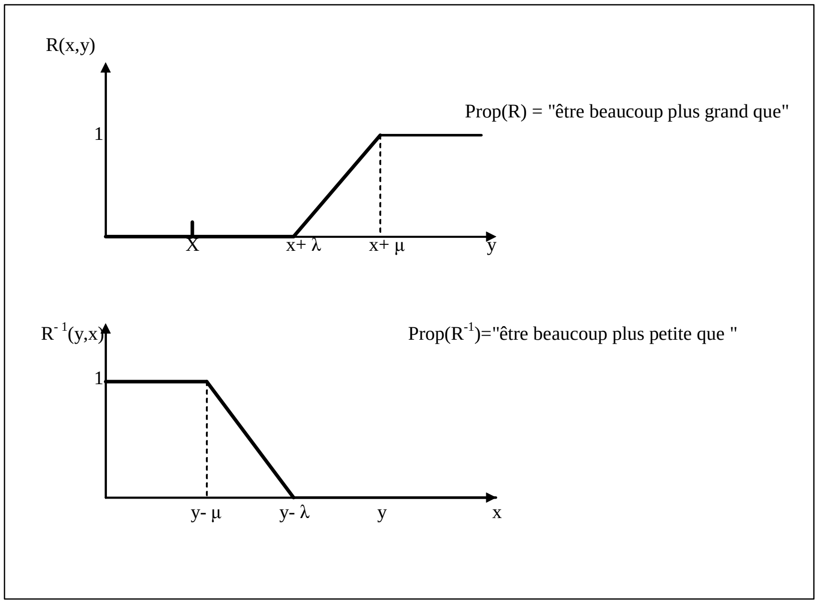

FIG. *1-6 – Exemples de représentation de relations flous*

Exemple 1.7.10 *La relation inverse de la relation binaire floue R définie sur $\mathbb{R}$ associée à la propriété "être approximativement égal à" est une relation floue R^{-1} de fonction d'appartenance définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \ : R^{-1}\left(\, y, x\right) = R\left(\, x, y\right) = \frac{1}{1+\left(x-y\right)^2} = R\left(y, x\right).$$

Remarque 1.7.11 *Les relations floues étant des cas particulier de sous-ensembles flous, toutes les propriétés et définitions qui concernent les ensembles flous leur sont applicables, ainsi par exemple la hauteur, le support, le noyau ou le complément d'une relation floue, et la réunion ou l'intersection de deux relations floues.*

Exemple 1.7.12 *Soit* $X = \{a, b, c\}$ *et soit* R*,* R' *deux relations floues définis sur* X *par les deux tableaux suivants :*

$M(R) =$

R	a	b	c
a	0.2	0.3	0.4
b	0	0.2	0.5
c	0.3	0	0.2

, $M\left(R'\right) =$

R'	a	b	c
a	0.1	0.2	0.1
b	0.4	0.5	0.2
c	0.3	0.4	0.3

.

Alors,

- $supp(R) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,
- $h(R) = 0.5$*, donc* R *n'est pas normalisé,*
- $noy(R) = 0$,
- $M\left(\bar{R}\right) =$

$\bar{R}$	a	b	c
a	0.8	0.7	0.6
b	1	0.8	0.5
c	0.7	1	0.8

($\bar{R}$ *est le complémentaire de* R *),*

- $M\left(R \cup R'\right) =$

$R \cup R'$	a	b	c
a	0.2	0.3	0.4
b	0.4	0.5	0.5
c	0.3	0.4	0.3

,

- $M\left(R \cap R'\right) =$

$R \cap R'$	a	b	c
a	0.1	0.2	0.1
b	0	0.2	0.2
c	0.3	0	0.2

.

1.7.1 Composition de Relations floues

Définition 1.7.13 *La composition de deux relations floues R_1 sur $X \times Y$ et R_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $R = R_1 \circ R_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance définie par :*

$$\forall (\ x, z) \in X \times Z, R(\ x, z) = \sup_{y \in Y} \min (R_1(\ x, y), R_2(\ y, z)).$$

Cette définition correspond à la composition *max-min*, la plus classiquement utilisée. Il est cependant possible de remplacer l'opérateur min par un autre opérateur$T$, par exemple une norme triangulaire, et en particulier le produit pour définir la composition max-T.

La relation floue $R = R_1 \circ R_2$ est ainsi définie comme la projection sur $X \times Z$ de l'intersection $R_1^e \circ R_2^e$ des extensions cylindriques de R_1et R_2. Cette définition est compatible avec la composition ordinaire lorsque les relations ordinaires R_1 et R_2 ne sont pas floues. En effet dans le cas où R_1etR_2 sont des relations ordinaires, x et z sont en relation par R ($R(x, z) = 1$), si et seulement s'il existe $y \in Y$ tel que $\min (R_1(x, y),\ R_2(y, z)) = 1$, soit $R_1(x, y) = 1$ et $R_2(y, z) = 1$, donc si et seulement s'il existe $y \in Y$ tel que x et y soient en relation par R_1 et y et z par R_2.

Cas particulier : La composition de deux relations floues R_1 et R_2 est particulièrement facile à obtenir de la donnée de R_1 et R_2 peut être obtenu par extension du produit matriciel habituel, pour lequel on remplace l'addition par l'opération "max" et la multiplication par l'opération "min" comme le montre la définition de R.

Exemple 1.7.14 *Soit la relation binaire floue R sur $X = \{a, b, c\}$ introduite dans l'exemple (1.7.4), en choisissant $Z = \{a, b, c\}$. La composition* max-min *fournit la rela-*

tion $R' = R \circ R$, *dont la fonction d'appartenance est indiquée ci-dessous*

$M(R) =$

$R(.,.)$	a	b	c
a	1	0.9	0.3
b	0.9	1	0.1
c	0.5	0.1	1

. *Avec :*

$R'(a,a) = \max(\min(1,1), \min(0.9,0.9), \min(0.3,0.5)) = 1,$

$R'(a,b) = \max(\min(1,0.9), \min(0.9,1), \min(0.3,0.1)) = 0.9,$

$R'(a,c) = \max(\min(1,0.3), \min(0.9,0.1), \min(0.3,1)) = 0.3$

$R'(b,a) = \max(\min(0.9,1), \min(1,0.9), \min(0.1,0.5)) = 0.9,$

$R'(b,b) = \max(\min(0.9,0.9), \min(1,1), \min(0.1,0.1)) = 1,$

$R'(b,c) = \max(\min(0.9,0.3), \min(1,0.1), \min(0.1,1)) = 0,$

$R'(c,a) = \max(\min(0.5,1), \min(0.1,0.9), \min(1,0.5)) = 0.5,$

$R'(c,b) = \max(\min(0.5,0.9), \min(0.1,1), \min(1,0.1)) = 0.5,$

$R'(c,c) = \max(\min(0.5,0.3), \min(0.1,0.1), \min(1,1)) = 1.$

R' *est représenté ce forme matricielle, comme ci-dessous :*

$M(R') =$

$R'(.,.)$	a	b	c
a	1	0.9	0.3
b	0.9	1	0.3
c	0.5	0.5	1

.

Exemple 1.7.15 *La relation binaire floue R sur $X = \mathbb{R}$ introduite dans l'exemple* (1.7.6) *par la fonction d'appartenance :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in X, R(\ x,y) = \frac{1}{1+(x-y)^2},$$

donne une relation floue composée $R' = R \circ R$ de fonction d'appartenance définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : R'(\ x,z) = \sup_{y \in Y} \min\left(\frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{1}{1+(y-z)^2}\right).$

1.8 La relation ordinaire R_α associés à une relation floue R.

Définition 1.8.1 *Etant donné un seuil $\alpha \in [0,1]$, la relation niveaux α associée à une relation floue R définie sur un ensemble de référence X est la relation ordinaire R_α tels que les éléments x, y de X satisfont la relation $R_\alpha$si et seulement si $R(x,y) \geq \alpha$.*

$$R_\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \ si \ \ R(x,y) \geq \alpha, \\ 0 \ \ si \ \ R(x,y) < \alpha. \end{cases}$$

Lemme 1.8.2 *Soit R une relation floue sur X. Alors, pour tout $x, y \in X$ et $\alpha \in]0,1]$:*

$R(x,y) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \times R_\alpha(x,y)$.

Preuve.

Conséquence directement du Théorème 1.4.2.1. ■

Le théorème suivant montre le rapport existe entre une relation floue R et ses α-coupes (R_α , $\alpha \in]0,1]$).

Théorème 1.8.3 *Soient R une relation floue sur X, $\{R_\alpha, \alpha \in]0,1]\}$ l'ensemble des relations ordinaires R_α associées à une relation floue R. Alors, pour tout $x, y, z \in X$:*

1. $R(x,x) = 1 \Leftrightarrow R_\alpha$ *est réflexive,*
2. $R(x,y) = R(y,x) \Leftrightarrow R_\alpha$ *est symétrique,*
3. $(R(x,y) > 0$ *et* $x \neq y \Rightarrow R(y,x) = 0\ ) \Leftrightarrow (R_\alpha$ *est antisymétrique*$)$,
4. $R(x,z) \geq \min_{y \in X} \{R(x,y), R(y,z)\} \Leftrightarrow R_\alpha$ *est transitive .*

Preuve. Soient $x, y, z \in X$, $\alpha \in]0,1]$.

1) $(\Rightarrow)$ On a $\forall x \in X$, $R(x,x) = 1$ et soit $\alpha \in]0,1]$. Alors $R(x,x) \geq \alpha$. D'où, $R_\alpha(x,x) = 1$. Donc, R_α est réflexive.

$(\Leftarrow)$ On a $\alpha \in]0,1]$, R_α est réflexive (i.e., $\forall x \in X$, $R_\alpha(x,x) = 1$). Par contre à posé supposons que $\exists x_0 \in X : R(x_0,x_0) = \alpha_0$ avec $\alpha_0 < 1$, alors on a $R_1(x_0,x_0) = 0$. Contradiction des hypothèses. D'où, $R(x,x) = 1$.

2)($\Rightarrow$) On a : $\forall x, y \in X$, $R(x,y) = R(y,x)$, et soit $\alpha \in]0,1]$.

Supposons que $R_\alpha(x,y) = 1$.

$R_\alpha(x,y) = 1 \Rightarrow R(x,y) \geq \alpha$

$\Rightarrow R(y,x) \geq \alpha$ (par hypothèses)

$\Rightarrow R_\alpha(y,x) = 1$

$\Rightarrow R_\alpha$ est symétrique .

($\Leftarrow$)On a $\alpha \in]0,1]$, R_α est symétrique

(i.e : $\forall x, y \in X$,$R_\alpha(x,y) = 1 \Rightarrow R_\alpha(y,x) = 1$).

Soient $x, y \in X$.

$R_\alpha(x,y) = 1 \Rightarrow R_\alpha(y,x) = 1$ et $R_\alpha(y,x) = 1 \Rightarrow R_\alpha(x,y) = 1$.

Ainsi, $\alpha R_\alpha(x,y) = \alpha R_\alpha(y,x)$, et de plus

$$\sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha R_\alpha(x,y) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha R_\alpha(y,x) .$$

Donc et par l'application de dernier Lemme on obtient $R(x,y) = R(y,x)$.

3) ($\Rightarrow$) On a $\forall x, y \in X$, $R(x,y) > 0$ et $x \neq y \Rightarrow R(y,x) = 0$.

Soit $\alpha \in]0,1]$.

$R_\alpha(x,y) = 1$ et $R_\alpha(y,x) = 1 \Rightarrow$ $R(x,y) \geq \alpha > 0$ et $R(y,x) \geq \alpha > 0$.

$\Rightarrow x = y$ car R est antisymétrique

$\Rightarrow R_\alpha$ est antisymétrique.

($\Leftarrow$) On a $\forall \alpha \in]0,1]$, R_α est antisymétrique (i.e., $\forall x, y \in X$ si $x \neq y$, alors $R_\alpha(x,y) = 0$ ou $R_\alpha(y,x) = 0$).

Soient $x, y \in X$.

Si $x \neq y$ et $R(x,y) = \alpha_0 > 0$ alors, $R_\alpha(x,y) = 1$ pour tout $\alpha \leq \alpha_0$.

Par l'antisymétrique de R_α on obtient $R_\alpha(y,x) = 0$ pour tout $\alpha \leq \alpha_0$.

D'où, $R(y,x) < \alpha$ pour tout $\alpha \leq \alpha_0$.

Donc, $R(y,x) = 0$.

4) ($\Rightarrow$)

On a, $\forall x, y, z \in X$, $R(x,z) \geq \min\{R(x,y), R(y,z)\}$.

Soit $\alpha \in \left]0,1\right]$.

Si $R_\alpha(x,y) = 1$ et $R_\alpha(y,z) = 1$. Alors, $R(x,y) \geq \alpha$ et $R(y,z) \geq \alpha$.

Mais, $R(x,z) \geq \min(R(x,y), R(y,z))$.

D'où, $R(x,z) \geq \alpha$.

Ainsi, $R_\alpha(x,z) = 1$.

Donc, R_α est transitive.

$(\Leftarrow)$

On a $\forall \alpha \in \left]0,1\right]$: R_α est transitive, (i.e : $\forall x, y, z \in X$ si $R_\alpha(x,y) = 1$ et $R_\alpha(y,z) = 1$, alors $R_\alpha(x,z) = 1$).

Soient $x, y, z \in X$.

Si $R(x,y) \geq \alpha$ et $R(y,z) \geq \alpha$, alors $R(x,z) \geq \alpha$. On particulier en prend $\alpha = \min(R(x,y), R(y,z))$ on obtient, $R(x,z) \geq \min\{R(x,y), R(y,z)\}$. ■

Remarque 1.8.4 *Si $\alpha = 0$ on obtient alors la relation R_0 qui est réflexive, symétrique et transitive, mais n'est pas antisymétrique si X n'est pas singleton (a un seul élément).*

En effet $R_0(x,y) = \chi_{X^2}(x,y) = 1$.

Chapitre 2

Propriétés des relations d'ordres flous au sens de Ponsard

Dans ce chapitre, on a abordé les différents définitions des relations d'ordres flous, puis on a étudié particulièrement la relation d'ordre flou ou sens de C.Ponsard (Brièvement, relation d'ordre flou de Ponsard), On a commencé par l'étude des caractéristiques puis on a abordé les propriétés de cette relation dans l'ensemble des nombres réels, notamment les relations d'ordre flou de Ponsard qui sont compatible avec l'addition et la multiplication usuelle sur la droite réelle.

2.1 Différents définitions de la relation d'ordre flou

Dans cette section on a rappelé les définitions de l'ordre flou qui sont donné par, [Beg2001], [Gerla2001], [Venugopalan92], [Zedah71].

Définition 2.1.1 [*Zadeh71*] *(l'ordre flou de Zadeh)*

Soit X un ensemble classique non vide. Une relation d'ordre flou au sens de [Zadeh sur X est un sous-ensemble flou Z de $X \times X$, satisfait les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in X,\ Z(x, x) = 1,$ (*i.e., Z-réflexivité*).

(ii) $\forall (x,y) \in X^{\ 2}, Z(x,y) > 0$ *et* $Z(y,x) > 0 \Rightarrow x = y$, *(i.e., Z- antisymétrie).*

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^{\ 3}$, $Z(x,z) \geq sup_{y\in X}$ $(min\ Z(x,y), Z(y,z))$, *(i.e., Z- transitivité).*

Zadeh considère que l'ordre flou Z soit linéaire (total) si et seulement si pour tout $(x\ ,y) \in X^2$, $x \neq y \Rightarrow Z(x,y) > 0$ ou $Z(y,x) > 0$.

Exemple 2.1.2 *Soit* $X = \{a,b,c,d,e\}$ *.Alors, le sous-ensemble flou définit sur* X^2*par la matrice suivante :*

$Z(.,.)$	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0.6	0.4
b	0	1	0	0.6	0.6
c	0	0	1	0	0.6
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

est un ordre flou de Zadeh non total sur X.

Définition 2.1.3 *[Venugopalan92] (l'ordre flou de Venugopalan)*

Soit X un ensemble classique non vide. Une relation d'ordre flou au sens de Venugopalan sur X est un sous-ensemble flou V de $X \times X$, satisfait les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in X,\ V(x,x) = 1, (i.e., V$*-réflexivité*$)$.

(ii) $\forall (x,y) \in X^{\ 2}, V(x,y) + V(y,x) > 1 \Rightarrow x = y$, *(i.e.,V-antisymétrie).*

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^{\ 3}$,$V(x,z) \geq [\ (V(x,y) + V(y,z) - 1)\ \vee\ 0)]$, *(i.e.,V- transitivité).*

Venugopalan considère que l'ordre flou$V$ soit linéaire (total) si et seulement si pour tout $(x\ ,y) \in X^2$, $x \neq y \Rightarrow V(x,y) > \frac{1}{2}$ ou$V(y,z) > \frac{1}{2}$.

Exemple 2.1.4 *Soit $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ .Alors le sous-ensemble flou définit sur X^2 par la matrice suivante :*

$V(.,.)$	a	b	c	d	e	f	g
a	1	0	0	0.6	0.4	0.4	0.6
b	0	1	0	0.6	0.6	0.4	0.4
c	0	0	1	0	0.6	0.6	0.4
d	0	0	0	1	0	0.6	0
e	0	0	0	0	1	0.4	0.6
f	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	1

est un ordre total flou de Venugopalan sur X.

Définition 2.1.5 *[Beg2001] (l'ordre flou de Beg)Soit X un ensemble classique non vide. Une relation d'ordre flou au sens de Beg sur X est un sous-ensemble flou B de $X \times X$, satisfait les trois propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in X,\ B(x, x) = 1,$ *(i.e., B-réflexivité).*

(ii) $\forall (x, y) \in X^{\ 2}, B(x, y) + B(y, x) > 1 \Rightarrow x = y,$ *(i.e., B-antisymétrie).*

(iii) $\forall (x, y, z) \in X^{\ 3}, B(x, z) \geq sup_{y \in X}\ (min\ B(x, y), B(y, z)),$ *(i.e., B- transitivité).*

Beg considère que l'ordre flou B soit linéaire (total)si et seulement si pour tout $(x\ , y) \in X^2\ ,\ x \neq y \Rightarrow B(x, y) > \frac{1}{2}$ ou $B(y, z) > \frac{1}{2}$.

Exemple 2.1.6

Soit $X = \{a, b, c, d, e, \}$. Alors le sous-ensemble flou définit sur X^2 par la matrice *suivante :*

$B(.,.)$	a	b	c	d
a	1	0.6	0.6	0.6
b	0	1	0.4	0.7
c	0	0.3	1	0.8
d	0	0.2	0.2	1

est un ordre flou de Beg sur X.

Définition 2.1.7 *[Gerla 2001] (l'ordre flou de Gerla)*

Soit X un ensemble classique non vide. Une relation d'ordre flou au sens de Gerla sur X est un sous-ensemble flou G de $X \times X$, satisfait les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in X,\ G(x,x) = 1, (i.e.,$ *G-réflexivité*$)$.

(ii) $\forall (x,y) \in X^{\ 2}, G(x,y) = 1$ *et* $G(y,x) = 1 \Rightarrow x = y$, *(i.e, G-antisymétrie).*

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^{\ 3},\ G(x,z) \geq sup_{y \in X}\ (min\ G(x,y), G(y,z))$, *(i.e., G -transitivité).*

Gerla considère que l'ordre flou$G$ soit linéaire (total), si et seulement si pour tout $(x\ ,y) \in X^2$, $x \neq y > 0 \Rightarrow G(x,y) = 1$ ou $G(y,z) = 1$.

Exemple 2.1.8 *Soit $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$. Alors le sous-ensemble flou G définit sur X^2par la matrice suivante :*

$G(.,.)$	a	b	c	d	e	f
a	1	0.6	0	0.7	0.8	1
b	0.3	1	0	0.6	0.6	0.4
c	0.1	0	1	0	0.6	0.6
d	0.4	0	0	1	0	0.6
e	0	0	0	0	1	0.4
f	0.2	0	0	0	0	1

est un ordre flou de Gerla sur X.

2.2 L'ordre flou au sens de Ponsard

Définition 2.2.1 *[Billot 92] Soit X un ensemble classique non vide. une relation d'ordre flou de Ponsard sur X est un sous-ensemble flou r de $X \times X$ satisfait les trois propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in X,\ r(x,x) \in [0,1]$, *(i.e., P-réflexivité).*

(ii) $\forall x \in X, \forall y \in X,\ r(x,y) + r(y,x) > 1 \Rightarrow x = y,$ *(i.e., P- antisymétrie).*

(iii) $\forall (x,y,z) \in X^{\ 3},\ r(x,y) \geq r(y,x)$ *et* $r(y,z) \geq r(z,y) \Rightarrow r(x,z) \geq r(z,x),$ *(i.e., P-transitivité).*

Exemple 2.2.2 *Soit $X = \{a,b,c\}$. Alors la relation floue r défini sur X par la matrice suivant :*

r	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0.1	1	0.2
c	0	0.2	0.7

est un ordre flou de Ponsard.

La proposition suivante donne la différance entre les différentes définitions de l'ordre flou.

Proposition 2.2.3 *Soit R une relation floue sur l'ensemble non vide X. Alors,*

1) *R est Z-réflexive $\Rightarrow$ R est P–réflexive.*

2) *R est Z-antisymétrique $\Rightarrow$ R est (P, V, B)-antisymétrique et G-antisymétrique.*

3) *R est (P, V, B)-antisymétrique $\Leftrightarrow$ R est G-antisymétrique.*

Preuve.

1) Evident.

2) Soit $x, y \in X$, tel que $R(x,y) + R(y,x) > 1$. Alors, $R(x,y) > 1 - R(y,x) \geq 0$ et $R(y,x) > 1 - R(y,x) \geq 0$.

Si $x \neq y$, alors par R est Z-antisymétrique on obtient $R(x,y) = 0$ ou $R(y,x) = 0$. Contradiction avec $R(x,y) + R(y,x) > 1$. Donc R est (P, V, B)-antisymétrique.

Aussi si $x \neq y$ et $R(x,y) = R(y,x) = 1$, on obtient une contradiction. Donc R est G-antisymétrique.

3) Soit R est (P, V, B)-antisymétrique et soit $x, y \in X$ tel que $R(x,y) = R(y,x) = 1$. Alors $R(x,y) + R(y,x) > 1$. Ainsi $x = y$. Donc R est G-antisymétrique. ■

Dans la suite de cette section on a donnée quels qu'exemples pour établir que l'inverse des implications précédentes n'est pas nécessairement vrai. De plus si R est Z-transitive, alors R n'est pas nécessairement P-transitive et inversement.

Exemple 2.2.4 **1)** *La relation floue r de l'exemple 2.2.2 est P-réflexive, mais n'est pas Z-réflexive. (En effet, $r(a,a) = 0.5 \neq 1$).*

2) *La relation floue B de l'exemple 2.1.6 est (P, V, B)-antisymétrique, mais n'est pas Z-antisymétrique. (En effet, $B(b,c) = 0.4$ et $B(c,b) = 0.3$).*

3) *la relation floue G de l'exemple 2.1.8 est G-antisymétrique, mais n'est pas (P, V, B)-antisymétrique et n'est pas Z-antisymétrique. (En effet $G(a,f) + G(f,a) > 1$, $G(a,f) > 0$ et $G(a,f) >$, mais $a \neq f$).*

4) *La relation floue r de l'exemple 2.2.2 est P-transitive, mais n'est pas Z-transitive. (En effet, $r(c,a) = 0 < min\{r(c,b),\ r(b,c)\} = 0.1$.*

5) *Soit $X = \{a, b, c\}$. Alors la relation floue Z définie sur $X \times X$ par le la matrice suivant :*

$r(,)$	a	b	c
a	*1*	*0*	*0*
b	*0*	*1*	*0*
c	*0.1*	*0*	*1*

est un ordre flou de Zadeh sur X. en partuclier, Z est Z-transitive, mais n'est pas

P-transitive (en effet $Z(a,b) \geq Z(b,a)$ *et* $Z(b,c) \geq Z(c,b)$ *, mais* $Z(a,c) = 0 < Z(c,b) = 0.1$.

Notation 2.2.5 *Un ensemble non vide* X *avec un ordre flou de Ponsard* r *définie sur* X *est appelé ensemble* $r-$*flou ordonné noté par* (X,r).

Dans la suite de ce mémoire, On dit ordre flou au lieu de ordre flou de Ponsard.

Définition 2.2.6 *Soit* (X,r) *un ensemble* $r-$*flou ordonnée non vide, et soit* a,b *deux éléments de* X *tel que* $a \neq b$*. On dit que* a *et* b *sont incomparables dans* (X,r) *si seulement si* $r\ (a,b) = r\ (b,a)$.

Exemple 2.2.7

Soit $X = \{a,b,c\}$*. Alors la relation floue* r *définie sur* X *par la matrice suivant :*

r	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0.1	1	0.2
c	0	0.2	0.7

est un ordre flou. b *et* c *sont incomparables dans* (X,r).

Exemple 2.2.8

Soit $X = \mathbb{R}^+$*. Alors la relation flou* r *définie sur* X *par :*

$$\begin{cases} r\,(x,y) = \dfrac{|x|}{|x|+|y|} \, si \; x \neq 0 \;\; ou \; y \neq 0 \\ r\,(0,0) = 1 \end{cases}.$$

est un ordre flou sur $\mathbb{R}^+$*. On a pour tout* $x,y \in \mathbb{R}^+$*, tels que* $x \neq y$:

$$r\,(x,y) > r\,(x,y) \quad ou \quad r\,(y,x) > r\,(x,y)\,.$$

Donc, x,y *sont comparables dans* (X,r).

Définition 2.2.9 *[Billot92] : Soit (X, r) un ensemble $r-$flou ordonnée non vide et soit A un sous-ensemble classique de X.*

1. *On dit que r est un ordre flou linéaire (total) si et seulement si :*

$$\forall \ (x \ , y \ ) \ \in X^2 \ si \ x \neq y : r\left(x, y\right) > r\left(y, x\right) \ \ ou \ \ r\left(y, x\right) > r\left(y, x\right).$$

2. *On dit que le sous-ensemble A de X est une chaîne flou si et seulement si :*

$$\forall \left(x, y\right) \in A^2 \ si \ \ x \neq y : r\left(x, y\right) > r\left(y, x\right) \ \ ou \ \ r\left(y, x\right) > r\left(y, x\right).$$

Exemple 2.2.10

Soient $X = \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Alors la relation flou r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} r\left(x, y\right) = \dfrac{|x|}{|x| + |y| + \lambda}, \ \ si \ \ x \neq 0 \ \ ou \ y \neq 0 \\ r\left(0, 0\right) = 1 \end{cases}$$

est un ordre flou non linéaire sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.2.11

Soit $X = \mathbb{N}$. Alors la relation flou r défini sur X par :

$$r\left(n, m\right) \begin{cases} \dfrac{n}{m+1}, \ \ si \ m = n, \\ 1 - \dfrac{n}{m}, \ \ si \ n < m, \\ 0, \ \ si \ n > m, \end{cases}$$

est un ordre flou linéaire sur $\mathbb{N}$.

2.3 Eléments Particuliers

Définition 2.3.1 *[Beg[1] 99] : Soit (X, r) un ensemble $r-$flou ordonnée non vide et soit A un sous-ensemble de X.*

- ***Majorant*** *: On dit qu'un élément $M \in X$ est $r-$majorant de A si :*

$$r(x, M) \geq r(M, x) \quad \textit{pour tout } x \textit{ de } A.$$

  L'ensemble des éléments $r-$majorants des A noté par : $r\_maj_X(A)$

- ***Plus grand élément :***

Si M est un $r-$majorant de A et $M \in A$, alors M est appelé plus grand élément de A.

- ***Elément maximal :*** *Un élément a de A est dit élément maximal de A s'il ya $x \in A$ tel que $r(a, x) \geq r(x, a)$, alors $x = a$.*

- ***Minorant*** *:On dit qu'un élément $m \in X$ est $r-$minorant de A si :*

$$r(m, x) \geq r(x, m) \quad \textit{pour tout } x \textit{ de } A.$$

- ***Plus petit élément :*** *Si m est un $r-$minorant de A et $m \in A$, alors m est appelé plus petit élément de A.*

- ***Elément minimal :*** *Un élément b de A est dit élément minimal de A s'il ya $x \in A$ tel que $r(x, b) \geq r(b, x)$, alors $x = b$.*

  - $\sup_r(A) =$ l'unique élément plus petite de $r\_\mathrm{maj}_X(A)$ (s'il existe).
  - $\inf_r(A) =$ l'unique élément plus grand de $r\_\min_X(A)$ (s'il existe).
  - $\max_r(A) =$ l'unique élément plus grand de A (si'l existe).
  - $\min_r(A) =$ l'unique élément plus petite de A (si'l existe).

Théorème 2.3.2 *[Beg[1] 99] Dans une chaîne floue C de l'ensemble $r-$flou ordonné non vide (X, r)le plus grand et le plus petite élément de C sont uniques.*

Remarque 2.3.3 *Dans une sous ensemble A de l'ensemble $r-$flou ordonné non vide (X, r)le plus grand et le plus petite élément ne sont pas uniques.*

Exemple 2.3.4 *Soit $X = \{a, b, c\}$, on définit l'ordre flou r par une matrice comme suivante*

$r(.,.)$	a	b	c
a	0.2	0.3	0.4
b	0	0.2	0.5
c	0.3	0	0.2

.

Alors, r est un ordre flou total.

Soit $A = \{a, b\}$ $(A \subset X)$, A est une chaîne flou.

On a, $r\_maj_X(A) = \{x \in X : r(y, x) \geq r(x, y), \forall y \in A\} = \{b, c\}$.

A ayant un seul plus grand élément b

Donc, $Max_r(A) = b$.

Exemple 2.3.5 *Soit $X = \{a, b, c\}$ et r l'ordre flou défini par une matrice comme suivante :*

$r(.,.)$	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0.1	1	0.2
c	0	0.2	0.7

Alors, r est un ordre flou non total car $r(c, b) = r(b, c)$.

Soit $A = \{b, c\}$ $(A \subset X)$, A n'est pas une chaîne .

On a : $r\_maj_X(A) = \{x \in X : r(y, x) \geq r(x, y), \forall y \in A\} = \{b, c\}$

A ayant deux plus grand éléments b et c car $b, c \in A$ et $b, c \in$ $r\_maj_X(A)$.

D'ou $\max_r(A)$ n'existe pas.

Treillis flou

Définition 2.3.6 *Soit $(X,\, r)$ une ensemble $r-$flou ordonnée.*

On dit que $(X,\ r)$ est un treillis $r-$flou si chaque paire d'éléments (et alors chaque sous-ensemble flou fini) possède une $r-$borne inférieure et une $r-$borne supérieur.

Exemple 2.3.7 *Chaque chaîne r_flou est un treillis r_flou et dans ce cas*

$$\inf_r \{x,y\} = \min_r \{x,y\} \text{ et } \sup_r \{x,y\} = \max_r \{x,y\}.$$

Exemple 2.3.8 *Soit $X=\mathbb{N}$ et r est un relation d'orde flou sur $\mathbb{N}$ définit par :*

$$r(n,m) = \begin{cases} \lambda \ \ si\ n=m,\ \lambda \in [0,1] \\ 1-\dfrac{n}{m} \ \ si\ n<m \\ 0 \ \ si\ n>m \end{cases}.$$

Alors, $(\mathbb{N}, r)$ est un treillis r_flou.

Définition 2.3.9 *Un filtre r_flou de treillis r_flou (X,r) est un sous-treillis (F,r) de (X,r) tel que pour tout $x \in F,\ y \in X\ : r(x,y) > r(y,x) \Rightarrow y \in F$.*

Un idéal r_flou de treillis r_flou (X,r) est un sous-treillis (I,r) de (X,r) tel que pour tout $x \in I\ , y \in X\ : r(y,x) > r(x,y) \Rightarrow y \in I$.

Remarque 2.3.10 *(A,r) est un sous-treillis r_flou d'un treillis r_flou (X,r) si seulement si pour tout x,y de A, il existe $\sup_r (x,y)$ et $\inf_r (x,y)$, tel que :*

$$\sup_r (x,y) \in A \text{ et } \inf_r (x,y) \in A.$$

Définition 2.3.11 *Soit $(X,\ r)$ un ensemble $r-$flou ordonnée non vide.*

On dit que $(X,\ r)$ est un treillis r_flou complet si chaque sous-ensemble non vide de X a un $r-$borne inférieure et un $r-$borne supérieur.

2.4 Propriétés de l'ordre flou de Ponsard.

Dans cette section on a présenté quelques propriétés de l'ordre flou de Ponsard

Définition 2.4.1 *Soit* (X, r) *un ensemble* $r-$*flou ordonnée non vide, la relation inverse de* r *est une relation floue* s *définie sur* X *par :*

$$\forall (x, y) \in X^2, \; s(x, y) = r(y, x)$$

Proposition 2.4.2 *Soient* (X, r) *un ensemble* $r-$*flou ordonnée non vide,* A *un sous-ensemble non vide de* X*. Si* $\sup_r(A) = s$*, alors :*

$$\{x \in X : r(s, x) = r(x, s)\} = \{s\}.$$

Preuve.

Soit $s = \sup_r(A)$, et soit $x \in X$ tel que $r(s, x) = r(x, s)$.

1) L'élément x est un $r-$majorant de A, car pour tout y de A alors, $r(y, s) \geq r(s, y)$.

Mais, $r(s, x) = r(x, s)$. Alors et par la transitivité de r on obtient $r(y, x) \geq r(s, y)$ pour tout y de A. D'où, x est un $r-$majorant de A.

2) L'élément x est le plus petite $r-$majorant de A, car si a est un $r-$majorant de A alors, $r(s, a) \geq r(a, s)$. Mais $r(s, x) = r(x, s)$. Alors et par la transive de r on obtient $r(x, a) \geq r(a, x)$ pour tout a $r-$majorant de A. D'où, x est le plus petite $r-$majorant de A D'après (1)et(2) on déduit que $x = \sup_r(A)$. Mais, $\sup_r(A$ est unique. D'où $x = s$.

■

Proposition 2.4.3 *Soit* (X, r) *un ensemble* $r-$*flou ordonnée non vide et soit* s *la relation inverse flou de* r*. Alors,*

i) *La relation* s *est un ordre flou,*

ii) *Pour chaque sous-ensemble A de X. Si A admet un élément r_-supérieur , alors A admet un élément s_-inférieur satisfait*

$$\inf_s A = \sup_r \mathrm{A},$$

iii) *Pour chaque sous-ensemble A de X. Si A admet un élément r_-inférieur , alors A admet un élément s_-supérieur satisfait*

$$\sup_s A = \inf_r A,$$

iv) *Si (X, r) est un treillis r_-flou complet alors, (X, s) est un treillis s_-flou complet.*

Preuve.

i) 1) Soit $x \in X$. On a $s(x,x) = r(x,x)$. Donc $s(x,x) \in [0,1]$. Ainsi est s réflexive.

2) Soit $(x,y) \in X^2$ tel que : $s(x,y) + s(y,x) > 1$.

On a $s(x,y) + s(y,x) > 1 \Rightarrow r(y,x) + r(x,y) > 1$

$\Rightarrow x = y$, (car r antisymétrique)

$\Rightarrow s$ antisymétrique

3) Soit $(x,y,z) \in X^3$tel que : $\begin{cases} s(x,y) \geq r(y,x) \\ s(y,z) \geq s(z,y) \end{cases}$.

On a $\begin{cases} s(x,y) \geq r(y,x) \\ s(y,z) \geq s(z,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r(y,x) \geq r(x,y) \\ r(z,y) \geq r(y,z) \end{matrix}$

$\Rightarrow r(z,x) \geq r(x,z)$, car r est transitive

$\Rightarrow s(x,z) \geq s(z,x)$

$\Rightarrow s$ est transitive.

ii) soit $m = \sup_r (A)$.

Alors, $r(x,m) \geq r(m,x)$ pour tout x de A.

Ainsi, $s(m,x) \geq s(x,m)$ pour tout x de A.

Donc, m est un s_-minorant de A.

Soi t un autre s_-minorant de A.

Alors, $s(t,x) \geq s(x,t)$ pour tout x de A.

Ainsi, $r(x,t) \geq r(t,x)$ pour tout x de A.

Donc, t est un r_majorant de A et $m = \sup_r (A)$.

D'après t est un r_majorant de A et $\sup_r (A) = m$, on déduit que $r(m,t) \geq r(t,m)$.

Donc, $s(t,m) \geq s(m,t)$.

Ainsi, m est le plus grand s_minorant de A.

Supposons que r est un autre plus grand s_minorant de A. Par une preuve similaire on déduit que r est un plus petite r _majorant de A.

Par hypothèse, le $\sup_r A$ est unique. Alors on déduit que $r = m$.

D'ou :

$$m = \inf_s A = \sup_r \text{A}.$$

iii) s est la relation invers de r. Alors, par (iii) on déduit que :

$$\inf_r A = \sup_s A.$$

iv) Soit A un sous-ensemble flou de X. Alors il existe le $\sup_r (A)$ et le $\inf_r (A)$, car (X, r) est un treillis r_flou complet. Par (iii) et (iv) on déduit l'existence de $\sup_s (A)$ et $\inf_s (A)$. D'ou (X, s) est un treillis s_flou complet. ■

Théorème 2.4.4 *Soit (X, r) un ensemble $r-$flou ordonnée non vide, et soit s la relation inverse de r. En définit la relation p sur X par :*

$$\forall (x,y) \in X^2 : p(x,y) = \min [r(x,y), s(x,y)].$$

Alors,

i) $\forall (x,y) \in X^2, p(x,y) = p(y,x)$.

ii) *p est un ordre flou.*

Preuve.

i) Soit $(x,y) \in X^2$. On a $\begin{aligned} p(x,y) &= \min[r(x,y), s(x,y)] \\ &= \min[s(y,x), r(y,x)] \\ &= p(y,x). \end{aligned}$.

Donc :

$$\forall (x,y) \in X^2 : p(x,y) = p(y,x).$$

ii)

1) Soit $x \in X$. On a $\begin{aligned} p(x,x) &= \min(r(x,x), s(x,x)) \\ &= r(x,x). \end{aligned}$

D'où p est réflexive.

2) Soit $(x,y) \in X^2$ tel que : $p(x,y) + p(y,x) > 1$.

On a $\begin{aligned} p(x,y) + p(y,x) > 1 &\Rightarrow \min[r(x,y), s(x,y)] + \min[r(y,x), s(y,x)] > 1 \\ &\Rightarrow r(x,y) + r(y,x) > 1 \\ &\Rightarrow x = y \text{ (car } r \text{ antisymétrique)} \\ &\Rightarrow p \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$

3)Soit $(x,y,z) \in X^3$tel que: $\begin{cases} p(x,y) \geq p(y,x) \\ p(y,z) \geq p(z,y) \end{cases}$.

$$\begin{cases} p(x,y) \geq p(y,x) \\ p(y,z) \geq p(z,y) \end{cases} \Rightarrow p(x,z) \geq p(z,x) \text{ , (car } p(x,z) = p(z,x) \text{ (d'après (i)).}$$

Donc p est transitive. ■

On sait que si $(r_i)_{i \in I}$ sont des familles d'ordres classique sur l'ensemble non vide X, alors la relation r définie sur$X$ par : $r(x,y) = \min[r_i(x,y)]_{i \in I}$ est un ordre classique sur X. Même pour les définitions des ordres flous au sens de [Zedah, Beg, Gerla].

Par contre, le Théorème suivant montre que si $(r_i)_{i \in I}$ sont des familles d'ordres flous de Ponsard alors la relation r définie sur$X$ par : $r(x,y) = \min[r_i(x,y)]_{i \in I}$ n'est pas nécessairement un ordre flou de Ponsard.

Théorème 2.4.5 *Soit $(r_i)_{i\in I}$ sont une familles d'ordre flou de Ponsard sur l'ensemble non vide X. Alors la relation r définie sur X par :*

$$\forall (x,y) \in X^2 \ : r(x,y) = \min_{i\in I} [r_i(x,y)]$$

n'est pas nécessairement un ordre flou de Ponsard.

Preuve.

Soient $X = \{a,b,c\}$ et r_1, r_2 deux ordres flous définis sur X par les deux matrices suivantes :

$r_1(.,.)$	a	b	c
a	0.2	0.3	0.4
b	0	0.2	0.5
c	0.3	0	0.2

et

$r_2(.,.)$	a	b	c
a	0.1	0.2	0.1
b	0.4	0.5	0.2
c	0.3	0.4	0.3

On concéder la relation flou r tel que pour tout x, y de X :

$$r(x,y) = \min [r_1(x,y), r_2(x,y)].$$

On a :

$$\begin{cases} r(a,b) = \min [r_1(a,b), r_2(a,b)] = 0.2 \\ r(b,a) = \min [r(b,a), r_2(b,a)] = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} r(b,c) = \min [r_1(b,c), r_2(b,c)] = 0.2 \\ r(c,b) = \min [r_1(c,b), r_2(c,b)] = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} r(a,c) = \min [r_1(a,c), r_2(a,c)] = 0.1 \\ r(c,a) = \min [r_1(c,a), r_2(c,a)] = 0.3 \end{cases}.$$

On remarque que :

$r(a,b) \geq r(b,a)$ et $r(b,c) \geq r(c,b)$, mais $r(a,c) \ngeq p(a,c)$.

Ainsi, r n'est pas transitive. Par conséquent r n'est pas d'ordre flou. ■

Proposition 2.4.6 *Si r est un ordre flou sur l'ensemble de référence non vide X alors :*

i) *pour tout $\alpha, \beta \in [0,1]$ tel que $\alpha > \beta$ et $\alpha + \beta \leq 1$, la relation $r_{(\alpha,\beta)}$ définie sur X par :*

$$\forall x, y, \in X : \; r_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \alpha r(x,y) + \beta r(y,x)$$

est un ordre flou.

ii) *pour tout $\alpha \in [0,1]$, la relation r_α définie sur X par :*

$$\forall x, y \in X : \; r_\alpha(x,y) = \alpha r(x,y)$$

est un ordre flou.

iii) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation r_n définie sur X par :*

$$\forall x, y, \in X : \; r_n(x,y) = [r(x,y)]^n$$

est un ordre flou.

Preuve. i)

1) On a pour tout $x \in X$: $r_{(\alpha,\beta)}(x,x) = (\alpha+\beta) \times r(x,x)$ et $(\alpha+\beta) \times r(x,x) \in [0,1]$.

D'où, $r_{(\alpha,\beta)}$ est réflixve.

2) Soit $(x,y) \in X^{\,2}$ tel que : $r_{(\alpha,\beta)}(x,y) + r_{(\alpha,\beta)}(y,x) > 1$.

$$\begin{aligned} r_{(\alpha,\beta)}(x,y) + r_{(\alpha,\beta)}(y,x) > 1 &\Rightarrow (\alpha+\beta)(r(x,y) + r(y,x)) > 1 \\ &\Rightarrow (r(x,y) + r(y,x)) > 1 \\ &\Rightarrow x = y \;\; \text{(car } r \text{ est antisymétrique)} \\ &\Rightarrow r_{(\alpha,\beta)} \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

3) Soit $(x, y, z) \in X^3$ tel que :

$$r_{(\alpha,\beta)}(x,y) \geq r_{(\alpha,\beta)}(y,x) \quad \text{et } r_{(\alpha,\beta)}(y,z) \geq r_{(\alpha,\beta)}(z,y).$$

$$\begin{cases} r_{(\alpha,\beta)}(x,y) \geq r_{(\alpha,\beta)}(y,x) \\ r_{(\alpha,\beta)}(y,z) \geq r_{(\alpha,\beta)}(z,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha r(x,y) + \beta r(y,x) \geq \alpha r(y,x) + \beta r(x,y) \\ \alpha r(y,z) + \beta r(z,y) \geq \alpha r(z,y) + \beta r(y,z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha-\beta)[r(x,y) - r(y,x)] \geq 0 \\ (\alpha-\beta)[r(y,z) - r(z,y)] \geq 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (r(x,y) - r(y,x)) \geq 0 \\ (r(y,z) - r(z,y)) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{car } \alpha > \beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(x,y) \geq r(y,x) \\ r(y,z) \geq r(z,y) \end{cases}$$

$\Rightarrow r(x,z) \geq r(z,x)$ (car r est transitive)

$\Rightarrow (\alpha-\beta)[r(x,z) - r(z,x)] \geq 0$

$\Rightarrow \alpha r(x,z) + \beta r(z,x) \geq \alpha r(z,x) + \beta r(x,z)$

$\Rightarrow r_{(\alpha,\beta)}(x,z) \geq r_{(\alpha,\beta)}(z,x)$

$\Rightarrow r_{(\alpha,\beta)}$ est transitive.

ii) Conséquence de (i) si $\alpha = 0$.

iii)

1) On a pour tout $x \in X$: $r_n(x,x) = [r(x,x)]^n$ et $[r(x,x)]^n \in [0,1]$.

D'où, r_n est réflexive.

2) Soit $(x,y) \in X^2$ tel que : $r_n(x,y) + r_n(y,x) > 1$.

$r_n(x,y) + r_n(y,x) > 1 \Rightarrow [r(x,y)]^n + [r(y,x)]^n > 1$

$\Rightarrow [r(x,y) + r(y,x)]^n > 1$ (car $[r(x,y) + r(y,x)]^n \geq [r(x,y)]^n + [r(y,x)]^n$)

$\Rightarrow r(x,y) + r(y,x) > 1$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow r_n \text{ est antisymétrique.}$$

3) Soit $(x, y, z) \in X^3$ tel que : $r_n(x, y) \geq r_n(y, x)$ et $r_n(y, z) \geq r_n(z, y)$.

$$\begin{cases} r_n(x, y) \geq r_n(y, x) \\ r_n(y, z) \geq r_n(z, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [r(x, y)]^n \geq [r(y, x)]^n \\ [r(y, z)]^n \geq [r(z, y)]^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(x, y) \geq r(y, x) \\ r(y, z) \geq r(z, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(x, z) \geq r(z, x) \quad (\text{ car } r \text{ est transitive })$$

$$\Rightarrow [r(x, z)]^n \geq [r(z, x)]^n$$

$$\Rightarrow r_n(x, z) \geq r_n(z, x)$$

$$\Rightarrow r_n \text{ est transitive.} \quad \blacksquare$$

Dans la suite on va donner comment construire des relations d'ordres classiques à partir des relations d'ordres flous.

Proposition 2.4.7 *Soit r un ordre flou total sur l'ensemble de référence non vide X, et soit $\leq_r$une relation classique définie sur X par :*

$$\forall x, y, \in X : x \leq_r y \Leftrightarrow r(x, y) \geq r(y, x).$$

Alors , $\leq_r$ est un ordre classique sur X.

Preuve.

1) $\leq_r$ est réflexive, car $\forall x \in X : r(x, x) \geq r(x, x)$ c'est-à-dire $x \leq_r x$.

2) Soit $(x, y) \in X^2$ tel que : $x \leq_r y$ et $y \leq_r x$.

On a $x \leq_r y$ et $y \leq_r x \Rightarrow r(x, y) \geq r(y, x)$ et $r(y, x) \geq r(x, y)$

$$\Rightarrow r(x, y) = r(y, x) (\text{ car } r \text{ est un ordre flou total})$$

$$\Rightarrow x = y \ (\text{ car } r \text{ est un ordre flou total})$$

$$\Rightarrow r \text{ est antisymétrique.}$$

3)Soit $(x, y, z) \in X^3$ tel que : $x \leq_r y$ et $y \leq_r z$.

On a $x \leq_r \ y$ et $y \leq_r \ z \Rightarrow r(x,y) \geq r(y,x)$ et $r(y,z) \geq r(z,y)$

$\Rightarrow r(x,z) \geq r(z,x)$ (car r est transitive

$\Rightarrow \ x \leq_r \ z$

$\Rightarrow r$ est transitive. ■

Remarque 2.4.8 *Soit r un ordre flou non total sur l'ensemble non vide X. Alors la relation classique $\leq_r$n'est pas nécessairement un ordre classique.*

Soient $X = \{a,b,c\}$, r une relation d'ordre floue définie par la matrice suivante :

$r(.,.)$	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0.1	1	0.2
c	0	0.2	0.7

On remarque que $b \leq_r c$ et $c \leq_r b$ mais $b \neq c$. Donc $\leq_r$n'est pas antisymétrique. Ainsi, $\leq_r$ n'est pas un ordre classique.

2.5 Caractérisations des ordres flous de Ponsard qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication par scalaire dans l'espace vectoriel réel.

Dans cette section on va étudier les ordres flous qui sont compatibles avec la structure de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$.

Définition 2.5.1 *Soit r une relation d'ordre flou sur $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que r est compatible avec l'addition si pour tout (x_1,y_1), (x_2,y_2) de $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{cases} r(x_1,y_1) > r(y_1,x_1) \\ r(x_2,y_2) > r(y_2,x_2) \end{cases} \Rightarrow r(x_1+x_2, y_1+y_2) > r(y_1+y_2, x_1+x_2).$$

2. *On dit que r est compatible avec la multiplication par un scalaire $\lambda > 0$ si pour tout (x, y), de $\mathbb{R}^2$:*

$$r(x, y) > r(y, x) \Rightarrow r(\lambda x, \lambda y) > r(\lambda y, \lambda x).$$

Définition 2.5.2 *Soit r un ordre flou sur $\mathbb{R}$ et soit x un élément de $\mathbb{R}$.*

1. *Si $r(0, x) \geq r(x, 0)$, x est dit $r-$nombre réel positif.*
2. *Si $r(x, 0) \geq r(0, x)$, x est dit $r-$nombre réel négatif.*

Notation 2.5.3

– *L'ensemble de tous les $r-$nombres réels positifs noté par : $\mathbb{R}_r^+$*

$$\mathbb{R}_r^+ = \{x \in \mathbb{R} : r(0, x) \geq r(x, 0)\}.$$

– *L'ensemble de tous les $r-$nombres réels négatifs noté par $\mathbb{R}_r^-$*

$$\mathbb{R}_r^- = x \in \mathbb{R} : r(x, 0) \geq r(0, x).$$

Définition 2.5.4 *Soit C_p l'ensemble de tous les ordres flous r définis sur $\mathbb{R}$ satisfaisants les deux conditions suivantes :*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : r(x + z, y + z) \geq r(x, y)$.
2. $\forall x, y, \in \mathbb{R}$ $, \forall \lambda > 0 : r(\lambda x, \lambda y) \geq r(x, y)$.

Afin de caractérisé les ordres flous qui sont compatibles avec l'addition et à la multiplication on a besoin les trois propsitons suivantes

Proposition 2.5.5 *Soit r un élément de C_p. Alors,*

i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : r(x, y) > r(y, x) \Rightarrow r(x + z, y + z) > r(y + z, x + z)$.

ii) *r est compatible avec l'addition et à la multiplication.*

Proposition 2.5.6 *Soit r un élément de C_p. Alors,*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow r(x, y) = r(0, y - x)$,

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow r(x, y) = r(x - y, 0)$,

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow r(y, x) = r(0, 1)$,

iv) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow r(x, y) = r(1, 0)$,

v) r *est total* $\Rightarrow \mathbb{R}_r^+ \cap \mathbb{R}_r^- = \{0\}$.

Proposition 2.5.7 *Soit r un élément de C_p. Alors,*

1. r *est total* $\Rightarrow \mathbb{R}_r^+ \cup \mathbb{R}_r^- = \mathbb{R}$.
2. r *est total si seulement si* $r(0, 1) > r(1, 0)$ *ou* $r(1, 0) > r(0, 1)$.

La combinaison des Propositions(2.5.5), (2.5.6)et (2.5.7), donne le théorème suivant qui caractirisé les ordres flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication dans l'espace vectoriel réel.

Théorème 2.5.8 *Soit C_p l'ensemble des relations d'ordre flou sur $\mathbb{R}$ qui est défini précédemment et soit r un élément de C_p. alors, r est défini par :*

$$r(x, y) = \begin{cases} \lambda \ / \ \lambda \in [0, 1] \ \ si \ x = y \\ r(0, 1) \ \ si \ x < y \\ r(1, 0) \ \ si \ \ x > y. \end{cases}$$

De plus si $r(0, 1) > r(1, 0)$ *ou* $r(1, 0) > r(0, 1)$, *alors r est un ordre flou total sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Extensions linéaires (totales) d'un ordre flou ou sens de Ponsard.

Dans ce chapitre on va présenté la contribution essentiel de notre travail qui conserne la version flou du théorème de **Szpilrajn**[Szpilrajn30]. Plus précisément, nous allons démontrer que chaque ordre flou partiel de Ponsard sur un ensemble non vide vérifie un condition nécessaire peut être étendu à un ordre flou linéaire.

Etant données deux ordres classiques R et R' sur un ensemble de référence non vide$X$

- On dit que R' est une extension de$R$ sur X, si $R \subseteq R'$.
- R' est appelé une extension linéaire de R sur X si R'est linéaire et extension de R

Définition 3.0.9 *Soient X un ensemble de référence non vide et r, r' deux ordres flous sur X.*

1. *On dit que r' est une extension de r sur X, si r est un sous-ensemble flou de r' (i.e., $r(x,y) \leq r'(x,y)$ pour tout x, y de X).*
2. *r' est appelé une extension linéaire de r sur X si r' est linéaire et extension de r sur X.*

Théorème 3.0.10 *[Szpilrajn30]*

1. *Tout ordre classique sur un ensemble non vide posséde au moins une extension linéaire.*
2. *Tout ordre est l'intersection de ses extensions linéaires.*

3.1 Théorème d'extensions linéaires des ordres flous de Ponsard.

Dans cette section on a donné un théorème qui assure l'existence d'une extension linéaire d'un ordre flou de Ponsard.

Théorème 3.1.1 *(Version flou du Théorème de Szpilrajn).*

Chaque ordre flou r sur un ensemble non vide X et satisfait la condition nécessaire $(\mathbf{N})$ *peut être étendu à un ordre flou linéaire.*

Condition $(\mathbf{N})$: il n'y a pas d'éléments incomparables $(x, y) \in X^{\ 2}$tels que :

$$r(x, y) = r(y, x) = \frac{1}{2}$$

D'après l'antisymétrie de r la condition $(\mathbf{N})$ signifie :

$$r(x, y) = r(y, x) < \frac{1}{2}$$

pour tous les éléments incomparables $(x, y) \in X^{\ 2}$

Remarque 3.1.2 *Soient x, y deux éléments incomparables dans (X, r) tels que :*

$$r(x, y) = r(y, x) = \frac{1}{2}$$

Alors par l'antisymétrie de chaque extension linéaire r' de r, r'satisfis :

$$r'(x,y) > r'(y,x) \geq r(y,x) \text{ ou } r'(y,x) > r'(x,y) \geq r(x,y).$$

Donc, $r'(x,y) + r'(y,x) > r(x,y) + r(y,x) \geq 1$. Contradiction avec l'antisymétrie de r'. D'où, il n'existe pas un ordre flou r' sur X qui étend r dans le cas où

$$r(x,y) = r(y,x) = \frac{1}{2}$$

Pour cette raisons on suppose dans le théorème 3.1.1 que l'orde flou satisfait la condition (**N**)

Pour démontrer ce théorème on a besoin au Lemme principal suivant :

Lemme 3.1.3 *(**Lemme principal**)*

Soit (X,r) un ensemble flou ordonné non vide et a,b deux éléments de X incomparables tels que $r(a,b) = r(b,a) \neq \frac{1}{2}$. alors il existe un ordre flou r'sur X extension de r tel que :

$$r'(a,b) > r'(b,a) \quad \text{ou} \quad r'(b,a) > r'(a,b).$$

Remarque 3.1.4 *D'après la définition de r'on déduit que chaque élément $x \in X - \{b\}$ est comparable avec b dans (X, r').*

Maintenant, avec l'utilisation du Lemme de Zorn et le Lemme 3.1.2 on peut montrer le théorème d'extensions linéaires **3.1.1**.

3.2 Preuve constructive des extensions linéaires des ordres flous dans le cas fini.

Dans cette section on va voir comment peut construire un extension linéaire d'un ordre flou partiel définit sur un ensemble fini non vide X sans l'application du lemme de Zorn. Plus précésément, le théorème suivant est un application d'un nombre fini du **Lemme principal 3.1.2**

Théorème 3.2.1 *Chaque ordre flou r sur un ensemble X fini non vide et sataisfait la condition nécessaire (N), peut être étendu à un ordre flou linéaire.*

Preuve. Soit X un ensemble fini tel que : $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, et soit r un ordre flou de Ponsard sur X *satisfait la condition nécessaire* $(\mathbf{N})$

Si r est un ordre flou *linéaire*, alors la preuve est terminée.

Si non, on considère A l'ensemble de tout les éléments incomparables dans (X, r).

$$A = \{x \in X : \exists y \in X - \{x\},\ r(x,y) = r(y,x)\}.$$

$|A| = n'$ tel que : $0 < n' \leq n$.

r est non *linéaire*, il existe au moins deux éléments $x_{i_1}, x_{j_1} \in A$ tels que $r(x_{i_1}, x_{j_1}) = r(x_{j_1}, x_{i_1})$.

Donc, par l'application du Lemme 3.1.2 il existe un ordre flou r_1 sur X qui étend r et satisfais que $r_1(x_{i_1}, x_{j_1}) > r_1(x_{j_1}, x_{i_1})$ ou $r_1(x_{j_1}, x_{i_1}) > r_1(x_{i_1}, x_{j_1})$.

Si r_1 est un ordre flou *linéaire*, alors la preuve est terminée.

Si non, il existe aussi deux éléments $x_{i_2}, x_{j_2} \in A$ tels que $r_1(x_{i_2}, x_{j_2}) = r_1(x_{j_2}, x_{i_2})$. Donc, par l'application d'autre fois du Lemme 3.1.2 il existe un ordre flou r_2 sur X qui étend r_1 et satisfait $r_2(x_{i_2}, x_{j_2}) > r_2(x_{j_2}, x_{i_2})$ ou $r_2(x_{j_2}, x_{i_2}) > r_2(x_{i_2}, x_{j_2})$.

Par induction, pour tout $k \geq 1$ il existe un ordre flou r_k étend r_{k-1} sur X satisfait $r_k(x_i, x_j) > r_k(x_j, x_i)$ ou $r_k(x_j, x_i) > r_k(x_i, x_j)$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$.

Par conséquent, r_K est un ordre floue qui étend r_{k-1}sur X $(r_0 = r)$.

Puisque $r \subseteq r_1 \subseteq r_2 \subseteq ... \subseteq r_k$, alors r_K est un ordre linéaire floue qui étend r sur X. Ainsi, r peut être étendu à un ordre flou linéaire sur X.

On note que l'entier k satisfait $k \leq n' - 1$ tel que $n' =$ card (A). ■

Méthode pour voir que $k \leq n' - 1$ est la suivante :

Supposons $A = \left\{x'_1, x'_2, ..., x'_{n'}\right\}$, tel que $0 <$ card $(A) \leq$ card (X).

Pour x'_1, et par l'application une fois au plus du Lemme 3.1.2, on trouve un ordre r_1 extension de r sur X tel que $x_1$est comparable avec touts les éléments de X dans(X, r_1) (d'après la Remarque3.1.3).

Pour x'_2, et par l'application d'autre fois au plus du Lemme 3.1.2, on trouve un ordre r_2 extension de r_1(r_2 extension aussi de r) sur X tel que x_2 est comparable avec tout les éléments dans(X, r_2) (d'après la Remarque3.1.3).

Par induction on obtient pour $x'_{n'-1}$, et par l'application une fois au plus du Lemme 3.1.2, on trouve un ordre flou $r_{n'-1}$ extension de $r_{n'-2}$ ($r_{n'-1}$ extensions aussi de $r, r_1, r_2, ..., r_{n'-3}$) sur X tel que $x'_{n'-1}$ est comparable avec tout les éléments de X dans$(X, r_{n'-1})$ (d'après la Remarque3.1.3).

Donc le nombre possible d'application du Lemme 3.1.2 est inférieur ou égale à $n' - 1$.

3.3 Exemples de construction des extensions linéaires des ordres flous de Ponsard dans le cas fini.

Exemple 3.3.1

Soient $X = \{a, b, c\}$, r la relation d'ordre flou définie sur X par la matrice suivante :

$r(.,.)$	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0	1	0.2
c	0.4	0.2	0.7

r n'est pas linéaire car b, c sont incomparables, alors par la première application du Lemme principale on obtient un ordre flou r_1 qui étend r

r_1 représenté par la matrice suivant :

$r_1(.,.)$	a	b	c
a	0.5	0.3	0.6
b	0	1	0.8
c	0.4	0.2	0.7

r_1 est un ordre linéaire flou sur X.

Donc r_1 est une extension linéaire de r sur X.

Exemple 3.3.2 *Soient $X = \{a, b, c, d, e\}$, r la relation d'ordre flou non linéaire définie sur X par la matrice suivantt :*

$r\ (.,.)$	a	b	c	d	e
a	1	0	0.5	0.3	0.1
b	0.8	0.5	0.8	0.4	0.4
c	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2
d	0.3	0.3	0.2	0	0.02
e	0.6	0.4	0.7	0.2	1

a, d sont incomparables dans (X, r). D'après le Lemme 3.1.2 il existe $r_1$qui étend r tel que a, d sont comparable dans (X, r_1).

r_1 représenté par la matrice suivante :

$r_1(.,.)$	a	b	c	d	e
a	1	0	0.5	0.3	0.1
b	0.8	0.5	0.8	0.4	0.4
c	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2
d	**0.7**	0.3	0.2	0	0.02
e	0.6	0.4	0.7	0.2	1

b, e sont incomparables par r_1. Danc il existe r_2 qui étend r_1 tel que b, e sont comparable dans (X, r_1).

r_2 est représenté par la matrice suivante :

$r_2(.,.)$	a	b	c	d	e
a	1	0	0.5	0.3	0.1
b	0.8	0.5	0.8	0.4	0.4
c	0.3	0.2	0.3	0.1	0.2
d	**0.7**	0.3	0.2	0	0.02
e	0.6	**0.6**	0.7	0.2	1

La procédure s'arrête là, car r_2 est un ordre linéaire flou qui étend r.

Dans cet exemple le nombre des applications du Lemme 3.1.2 est $k \leq card(A) - 1$. Ainsi $k \leq 2$.

Exemple 3.3.3 *Soient $X = \{a, b, c, d\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \frac{1}{2}[$, r la relation d'ordre flou non* *linéaire définie sur X par la matrice suivante :*

$r\ (.,.)$	a	b	c	d
a	α	$o.4$	β	α
b	0.2	β	δ	γ
c	β	δ	γ	1
d	α	γ	0	δ

r est non linéaire, car par exemple a, c sont incomparables. Alors par l'application du Lemme 3.1.2, on obtient un ordre flou r_1 qui étend r tel que a comparable avec chaque élément de X dans (X, r_1).

r_1 est représenté par par la matrice suivante :

$r_1\ (.,.)$	a	b	c	d
a	α	$o.4$	β	α
b	0.2	β	δ	γ
c	$1-\beta$	δ	γ	1
d	$1-\alpha$	γ	0	δ

r_1 est non linéaire car par exemple b, c sont incomparables. Alors on peut aussi appliquer le Lemme 3.1.2, on obtient un ordre flou r_2 qui étend r_1 tel que b comparable avec chaque élément de X dans (X, r_2).

r_2 est représenté par la matrice suivant :

$r_2\ (.,.)$	a	b	c	d
a	α	0.4	β	α
b	0.2	β	δ	γ
c	$1-\beta$	$1-\delta$	γ	1
d	$1-\alpha$	$1-\gamma$	0	δ

La procédure s'arrête là, car r_2 *est un ordre linéaire flou qui étend* r.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a vu le concept des ensembles flous sur un ensemble de références non vide, puis on a abordé les relations floues qui sont considérées comme des sous-ensembles flous

Nous avons étudié particulièrement la relation d'ordre floue ou sens de C.Ponsard, on a commencé par l'étude des caractéristiques puis on a abordé l'ensemble des relations d'ordres floues au sens de C.Ponsard qui sont compatibles avec la structure de l'espace vectoriel dans l'ensemble des nombres réels.

Le but plus important de ce travail est l'extension linéaire d'un ordre flou au sens de Ponsard. Pour cela, on a donné un lemme (**Lemme principal 3.1.2**) qui permet la création d'un ensemble flou ordonné où les éléments sont comparables (ensemble flou totalement ordonné), puis on a abordé un théorème (**Théorème 3.1.1**) où chaque ordre flou de Ponsard sur un ensemble non vide vérifie un condition nécessaire, peut-être étendu à un ordre flou linéaire.

Enfin on a donné une preuve constructive de l'existence des extensions linéaires des ordres flous de Ponsard dans les ensembles finis, dans le même sens on a donné des exemples pratiques pour obtenir cette extension.

Comme perspective On a laissé la voie ouverte pour envisager d'autres propriétés et des applications de l'ordre flou de Ponsard, par exemple l'ordre flou de Ponsard sur un ensemble non vide peut être étendu à un treillis de type ordre flou ? (i.e, pour chaque pair (x, y) d'éléments, il éxiste une borne superieur et une borne inferieur que l'on appel treillis ordre extension). Ainsi, le théorème des points fixes des fonctions r-monotones dans les ensembles ordonnés flous.

Bibliographie

[Beg98] I. Beg, Fixed points of fuzzy multivalued mappings with values in fuzzy orders sets, *J. Fuzzy Math.* 6 (1) (1998), 127–131.

[Beg^{1}19999] I. Beg, Fuzzy Zorn's lemma, *Fuzy Sets and Systems,* 101 (1999), 181-183.

[Beg^{2}19999] I. Beg, *Fixed points of fuzzy monotone maps*, Arch. Math. (Brno) 35 (1999), 141–144.

[Beg2oo1] I. Beg, A general theorem on selector of fuzzy multifunction, J. *Fuzzy Math. 9(1) (2001),* 97-101.

[Beg2002] I. Beg, Extension of fuzzy Zorn's lemma to nontransitive fuzzy relations, *J. Fuzzy Math.*10(3)(2002), 681-685.

[Beg2004] I. Beg, Some applications of fuzzy ordered relations, *CUBO a Math.J.* 6(1)(2004), 103-114.

[Beg, Islam95] I. Beg, M, Islam, M., Fuzzy ordered linear spaces, *Jour. Fuzzy Math.* 3(3)(1995), 659-670.

[Bergstrom1975] T. X. Bergstrom, Maximal elements of acyclic relations on compact-sets, *J. Economic Theory*, 10 (1975), 403 - 404.

[Bernadette96] M. B. Bernadette, *La Logique Flou et Ses application,* Editions Addison-Wesley, SA, Paris 1996.

[Billot92] A.Billot, *Economic theory of fuzzy equilibria*, Lecture Notes in Economics and Mathematical systems - 373, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[Birkof67] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.,Vol 25, AMS Providence, R.I. 1967.

[Bodenhofer99] U. Bodenhofer, A Similarity-Based Generalization of Fuzzy Orderings, preervings the classicl axiome, Internat.J.Uncertain. *Fuzziness Knowledge-Based Systems.* 8(5)(1999), 593-610.

[Brown71] G.J. Brown, *A note on fuzzy sets*, Inform. and Control 18(1971), 32-39.

[Gerla2001] G. Gerla, Crisconio, Fuzzy orders in approximat reasonig. j . Zollo G. (Ed), *New Logics for the New Economy*, *Edizioni Scientifiche Italiane.* (2001),165–168.

[Gupta , Qi91] M. M. Gupta, J. Qi, Theory of T-norms and Fuzzy Inference Methods, *Fuzzy sets and systems* 40(3)(1991), 431-450.

[Hamacher76]] H. Hamacher, On logical Connectives Of fizzy Statements and thier Affiliated Truth Fonction, *Proc. 3rd Eur. Meeting Cybernetics and Systems, Vienne1976.*

[Kaufmann 73] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous* , volume1, Masson 1973.

[Kundu2000] S. Kundu, Similarity reltion, fuzzy linear orders and fuzzy partial orders, *Fuzzy sets and systems* 109(3)(2000), 419- 428.

[Ling65] C. H. Ling, Representation of Associatve fonction, *Publications Mathematicae Debrecen 12(1965),* 189-212.

[Menger42] K. Manger, Statistical Matrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. 28(1942),* 553-537.

[Ovchinnikov1991] S.V.Ovchinnikov, Similarity relations, Fuzzy partitions, and fuzzy ordering, *fuzzy Sets and Systems, 40(1991), 107-126.*

[Schroder2002] B. Schroder, Ordred sets :An Introduction, Birkhauser Boston, Firstedition, December 6, 2002.

[Schweizerr Sklar63] B. Schweizer, A. Sklar, Assosiative Fonction and Abstract Semigroups, *Puplications Mathematicae Deberecen, vol 10(1963),* 69-81.

[Stouti 2003] A. Stouti, Fixed point theory for $\alpha-$fuzzy monotone maps, Acta-*Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (N.S),* 21(2003), $13-19$.

[Stouti 2005] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunction, *j. Fuzzy Math.*11(2)(2005), 455-466.

[Stouti, Zedam2010] A. Stouti and L. Zedam, On $\alpha-$fuzzy Orders, J. *Fuzzy Math,* vol. 18(1)(2010), 171-192.

[Stouti, Zedam] A. Stouti and L. Zedam, Linear extention of Zadeh's fuzzy order, to appear.

[Szpilrajn30] J. Szpilrajn, Sur L'extonsion de L'order partial, *Fund. Math.* 16(1930), 386-389.

[Tirllas80] E. Tirllas, *Conjunto borrosos*, Vicens-Vives, Barcelona1980.

[Venugopalan92] P. Venugopalan92, Fuzzy ordered set, *Fuzzy sets and Systems,* 46(1992), 221-226.

[Weber83] S. Weber, A General Concept of Fuuzzy Connectives, Negations and Implications Based on T-norms and T-conorms, *Fuzzy sets and Systems* 11(1983), 115-134.

[Yger80] R. R. Yger, On a General Class of Fuzzy Connectives, *Fuzzy sets and Systems* 4(1980), 235-242.

[Zadeh65] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control 8(1965),* 338-353.

[Zadeh71] L. A. Zadeh, Similarity Relation and Fuzzy Orderings, *Informtion Sciences 3(1971),* 177-200.

[Zim91] H. J. Zimmermann, *fuzzy set theory and its application,* Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrechelt, London 1991.