

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Solutions asymptotiques de certaines équations d'onde
avec des coefficients à variation lente

Présentée par :

M^{elle} Boulaares Marya

Dans ce travail, nous étudions la stabilisation d'une corde vibrante par un amortissement interne linéaire ou non linéaire. Pour montrer la stabilité, nous utilisons plusieurs techniques telles que les intégrales d'énergie, les séries de Fourier, une méthode basée sur le lemme de Gronwal et une technique d'itération.

Abderachid Saadi

M.C.A., Université de M'sila

Président.

Abdelmouhcene Sengouga

M.C.A., Université de M'sila

Encadreur.

Mohamed Ourabah Benmeddour

M.A.A., Université de M'sila

Examineur.

Année universitaire 2022/2023



Remerciements

Au nom d'Allah le miséricordieux

*Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour
terminer ce mode*

*Je tiens à remercier mon promoteur : Dr [Abdelmouhcene
Sengouga](#) pour qu'il m'a témoignée en me pro-
encouragement et sa patience. Le
a su générer, se
de finaliser ce mode*

reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

*Je remercie également Mr : [Seyf Eddine Ghenimi](#) pour avoir relu
et corrigé mon mémoire. Le
précieux.*

*Je remercie aussi tous le
qu'il*

Je remercie me

moi. Je remercie me

[Ayoub](#) et [Houssam](#), pour leurs encouragement

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Équation différentielle linéaire du second ordre	3
1.1.1 Solution de l'équation homogène	3
1.1.2 Recherche d'une solution particulière	4
1.1.3 Solution générale	4
1.2 Série de Fourier	5
1.2.1 Séries de Fourier	5
1.2.2 Coefficients de Fourier	5
1.3 Équation d'onde et méthode de séparation variables	6
1.4 Rappels d'analyse asymptotique	8
1.4.1 Perturbations	8
1.4.2 Symboles d'ordres	8
1.4.3 Méthode des échelles Multiples	9
2 Équation d'ondes avec amortissement interne	16
2.1 Amortissement interne faible	16
2.2 Amortissement interne fort	20
2.3 Exemple numérique	23
2.3.1 Le cas d'amortissement interne faible	24
2.3.2 Le cas d'amortissement interne fort	25
3 Équation d'ondes avec amortissement frontière	26
3.1 Amortissement frontière faible	26
3.2 Amortissement frontière fort	32
3.3 Exemple numérique	36
3.3.1 Le cas d'amortissement frontière faible	37
3.3.2 Le cas d'amortissement frontière fort	39
Bibliographie	40

Introduction

L'amortissement dans les systèmes vibratoires joue un rôle fondamental dans la protection des composants, la réduction des vibrations nuisibles, l'amélioration de la durabilité et la garantie d'une réponse dynamique stable. Comprendre et maîtriser les effets de l'amortissement sont essentielles pour concevoir des systèmes efficaces et fiables, que ce soit dans le domaine de l'ingénierie, de la science ou de la conception industrielle. Dans ce mémoire, nous abordons l'application de la méthode des échelles multiples pour la construction d'une approximation de la solution d'une équation d'onde. Cette équation d'onde présente des coefficients à variation lente ainsi qu'un amortissement linéaire, pouvant être de faible ou forte intensité.

Notre analyse s'étend à deux cas distincts. Le premier est celui de l'amortissement interne en considérant l'équation d'onde suivante décrivant les petites vibrations d'une corde fixé aux extrémités

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, 0 < \varepsilon < 1 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = g(x) & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases} \quad (WE_1)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont la forme et la vitesse initiale de la corde. Les indices indiquent la différenciation partielle en x et t représentent la position et le temps, respectivement. La fonction H décrit l'amortissement interne qui peut être non-linéaire. La fonction $c(\varepsilon t)$, dont la variation est lente en temps, représente la vitesse de propagation des vibrations. On suppose que l'amortissement est multiplié par un petit paramètre $\varepsilon > 0$.

Le deuxième cas est celui d'un amortissement appliqué à une extrémité de la corde

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0 & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = 0 & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = g(x) & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases} \quad (WE_2)$$

La méthode utilisée ici est celle des échelles multiples qui est un outil puissant pour analyser les systèmes vibratoires complexes et d'autres systèmes dynamiques. Elle permet de traiter les non-linéarités, les variations de petits paramètres et les phénomènes à plusieurs échelles, ouvrant la voie à une compréhension approfondie et à des modèles plus précis

pour des systèmes réels, cf. [4, 5, 9]. Certaines parties du deuxième et du dernier chapitre reprennent les idées utilisées dans [1, 2].

Le chapitre initial de ce travail débute par des préliminaires nécessaires à la compréhension des concepts abordés. Nous exposons notamment des notions sur la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. De plus, nous rappelons quelques résultats sur les séries de Fourier.

Le cœur de notre analyse se trouve dans le deuxième chapitre, où nous nous penchons sur l'équation d'ondes avec un amortissement interne (WE_1). Nous déclinons notre étude en deux sections, focalisant d'abord sur le cas d'un amortissement interne faible, puis sur celui d'un amortissement interne fort. Pour chacun de ces cas, nous présentons des exemples numériques pour concrétiser notre démarche.

La troisième section prolonge notre investigation à l'équation d'ondes (WE_2) en considérant cette fois-ci un amortissement sur une extrémité de la corde. De manière similaire au chapitre précédent, nous analysons les deux situations distinctes : l'amortissement frontière faible et l'amortissement frontière fort. À nouveau, des exemples numériques viennent éclairer nos propos.

Enfin, nous clôturons ce travail avec une bibliographie, répertoriant les sources et références utilisées dans ce travail.

PRÉLIMINAIRES

1.1 Équation différentielle linéaire du second ordre

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est du type

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad (1.1)$$

où les réels a, b et c sont constantes et $a \neq 0$ et f est une fonction donnée appelée second membre. Une fonction y de classe \mathbb{C}^2 sur un intervalle I , est une solution de (1.1) si elle vérifie (1.1) pour tout $x \in I$

On appelle équation différentielle homogène associée à (1.1) l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \quad (1.2)$$

1.1.1 Solution de l'équation homogène

On appelle équation caractéristique associée à (1.2) :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 \neq r_2$ réelles. La solution générale de (1.2) s'écrit :

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitraires.}$$

2. Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$. Comme précédemment on a donc :

$$y_h(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \text{ solutions complexes.}$$

ou bien si on veut les solutions réelles de (1.2) :

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}, \text{ solutions réelles.}$$

3. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une solution unique $r = -b/2a$ (racine double) et les solutions de (1.2) s'écrivent :

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{rx}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires réelles.}$$

1.1.2 Recherche d'une solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes.

1. Solution particulière selon la forme de Second membre

- (a) Si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme :

$$y_p(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

- (b) Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ avec polynôme de degré n :

- Pour $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$, on cherche une solution sous la forme

$$y_p = e^{\lambda x} \hat{\mathbf{P}}(x),$$

où $\hat{\mathbf{P}}(x)$ est un polynôme de degré n .

- Pour $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$, on cherche une solution sous la forme

$$y_p = x e^{\lambda x} \hat{\mathbf{P}}(x),$$

où $\hat{\mathbf{P}}(x)$ est un polynôme de degré n

- Pour $\lambda = r_1 = r_2$, on cherche une solution sous la forme

$$y_p = x^2 e^{\lambda x} \hat{\mathbf{P}}(x),$$

où $\hat{\mathbf{P}}(x)$ est un polynôme de degré n .

2. Méthode de variation des constantes

Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.2). On a une solution particulière de l'équation (1.1) sous la forme

$$y = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2,$$

avec λ_1, λ_2 sont des fonctions de x dérivables, déterminer par le système :

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)y_1' + \lambda_2'(x)y_2' = \frac{f(x)}{x}, \\ \lambda_1'(x)y_1 + \lambda_2'(x)y_2 = 0. \end{cases}$$

1.1.3 Solution générale

La solution générale de L'EDO de (1.1) s'écrit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de (1.1).

1.2 Série de Fourier

1.2.1 Séries de Fourier

Définition 1.1 La série de Fourier associée à une fonction f continue par morceaux et T -périodique est :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)), \text{ où } : w = \frac{2\pi}{T}.$$

Ou sous la forme complexe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{iwnx}.$$

1.2.2 Coefficients de Fourier

Définition 1.2 Coefficients réels de f :

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$
$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(nwt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(nwt) dt, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Coefficients complexes de f :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{iwn t} dt.$$

Remarque 1.1 Comme les fonctions sont T -périodique, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T .

Remarque 1.2 1. On écrit souvent a_n et b_n au lieu de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'il n'y a pas de confusion entre plusieurs fonctions.

2. On utilise plutôt a_n et b_n si f est à valeurs réelles, et c_n pour f à valeurs complexes.

Proposition 1.1 On a les deux cas particulier suivant :

1. Si f est paire, alors tous les b_n sont nuls et

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(nwt) dt.$$

2. Si f est impaire, alors tous les a_n sont nuls

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(nwt) dt.$$

1.3 Équation d'onde et méthode de séparation variables

On appelle équation des ondes linéaire (homogène) l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad x \in]0, l[\quad \text{et} \quad t > 0, \quad (1.3)$$

Soit ϕ et ψ deux fonction définies sur \mathbb{R} , avec $\phi \in \mathbb{C}^2$ et $\psi \in \mathbb{C}^1$, alors le problème (1.3) avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

et conditions des bords (1.4)

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

admet une solution unique u de classe \mathbb{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , qui peut être déduit par plusieurs méthodes (séparation variables, formule de D'Alembert, ...).

La méthode consiste à trouver une solution de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Calcule la dérivée partielle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t). \quad (1.6)$$

On remplace (1.5) et (1.6) dans (1.3), on obtient

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

On a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \Lambda,$$

où $\Lambda \in \mathbb{R}$ est une constante. On obtient

$$X''(x) - \Lambda X(x) = 0, \quad (1.7)$$

$$T''(t) - \Lambda T(t) = 0. \quad (1.8)$$

Alors (1.7) et (1.8) des équations différentielles de seconde ordre

Résolution de l'équations (1.7)

Pour avoir des solutions bornées, il faut choisir $\Lambda < 0$. Pour cela on $\Lambda = -\lambda^2$. La solution générale s'écrit sous la forme

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x).$$

Alors

$$u_0(0, t_1) = B = 0 \quad \text{et} \quad u_0(l, t_1) = A \sin(\lambda l) = 0.$$

Comme $A = 0$ donnera la solution triviale, il faut que

$$\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi.$$

Donc

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La solution de l'équation (1.8) s'écrit sous cette forme

$$T(t) = a_n \sin(\lambda t) + b_n \cos(\lambda t)$$

et la solution générale

$$u_n(x, t) = [a_n \sin(\lambda_n t) + b_n \cos(\lambda_n t)] \sin(\lambda_n x).$$

Par le principe de superposition, on a

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(\lambda_n t) + b_n \cos(\lambda_n t)] \sin(\lambda_n x).$$

Les coefficients a_n et b_n

Par les conditions (1.4), on a

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\lambda_n x).$$

Les coefficients de Fourier sont donnée par

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n a_n \cos(\lambda_n t) - \lambda_n b_n \sin(\lambda_n t)) \sin(\lambda_n x)$$

et pour $t = 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \sin(\lambda_n x).$$

Enfin, les coefficients a_n sont donnée par :

$$a_n = \frac{2}{l\lambda_n} \int_0^l \psi(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

1.4 Rappels d'analyse asymptotique

1.4.1 Perturbations

D'un point de vue heuristique, la théorie des perturbations est une méthode mathématique général qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique dépendant d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation pour la valeur $\varepsilon = 0$ est connue exactement.

L'équation mathématique avec le paramètre ε peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... L'idée consiste à chercher la solution approchée sous la forme d'un développement en série de puissances du paramètre ε . Cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte (inconnue), que la valeur absolue du paramètre ε est plus petit.

1.4.2 Symboles d'ordres

Nous intéressons à la façon dont les fonctions se comportent lorsque qu'un paramètre ε devient petit, par exemple la fonction $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$ ne converge pas vers zéros avec la même façon que $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Définition 1.3 1. $f = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, signifie qu'il y a les constantes k_0 et ε_1 (indépendant de ε) de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq k_0 |\phi(\varepsilon)| \quad \text{pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1,$$

nous disons que " f est grand O de ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

2. $f = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ signifie que pour chaque δ positif, il y a un ε_2 (indépendant de ε) de telle sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\phi(\varepsilon)| \quad \text{pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_2,$$

nous disons que " f est petit o de ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Le théorème suivant facilite l'application de cette définition.

Théorème 1.1 1. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L \quad \text{ou } -\infty < L < \infty$$

alors $f = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$

2. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0.$$

$f = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$

Démonstration. voire [7] ■

1.4.3 Méthode des échelles Multiples

Nous allons présenter les idées de la méthode par un exemple relativement simple. Le problème à considérer est de trouver la fonction $y(t)$ qui satisfait

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0 \quad \text{pour } t > 0, \quad (1.9)$$

où

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2. \quad (1.10)$$

Cette équation correspond à un oscillateur avec amortissement faible.

1.4.3.1 Expansion régulière

Supposant

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots. \quad (1.11)$$

En substituant ceci dans (1.9), on trouve

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon(y_0' + \varepsilon y_1') + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0.$$

En regroupant les termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations différentielles linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} y_0'' + y_0 &= 0, \\ y_1'' + y_1 &= -y_0'. \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales, en remplaçant (1.11) dans (1.10) on trouve

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 2.$$

Donc il est nécessaire que

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 0 \quad \text{et} \quad y_0'(0) = 2, \\ y_1(0) &= 0 \quad \text{et} \quad y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

Maintenant on peut trouver y_0 comme solution du problème suivant :

$$O(1) \begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \\ y_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_0'(0) = 2. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2, et la solution est donnée par

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \text{et} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

et les conditions initiales donnent, $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$, alors

$$y_0(t) = 2 \sin t. \quad (1.12)$$

On peut trouver y_1 comme solution du problème

$$O(\varepsilon) \begin{cases} y_1'' + y_1 = -2 \cos(t), \\ y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_1'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par

$$y_1(t) = y_{1,h}(t) + y_{1,p}(t).$$

la solution homogène est

$$y_{1,h}(t) = 0.$$

Pour trouver la solution particulière $y_{1,p}(t)$, on suppose qu'elle a la forme

$$y_{1,p}(t) = t(A \cos(t) + B \sin(t)).$$

Ce qui implique

$$y_{1,p}''(t) = -2A \sin(t) + 2B \cos(t) - t(A \cos(t) + B \sin(t)).$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (1.13) nous trouvons

$$y_1(t) = y_{1,p}(t) = -t \sin(t).$$

Enfin à partir de cette dernière avec (1.12) et (1.11), on obtient une approximation $O(\varepsilon)$ donnée par

$$y(t) \sim 2 \sin t - \varepsilon t \sin t. \quad (1.14)$$

Cette approximation est appelée l'expansion régulière,

$$y_{reg}(t) = 2 \sin t - \varepsilon t \sin t. \quad (1.15)$$

1.4.3.2 Expansion avec échelles multiples

Il est clair que cette méthode n'approxime pas bien la solution pour $0 \leq t \leq \infty$. En fait, lorsque $t \approx 1/\varepsilon$, le deuxième terme développé (1.14) est du même ordre que le premier terme. Le problème avec cette approche est que la solution exacte du problème (1.9) est décroissante, mais le premier terme de (1.14) ne décroît pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le second terme tente de compenser cela, et dans le processus finit par être aussi grand que le premier terme.

Pour construire une approximation valable pour t de l'ordre $O(\varepsilon^{-1})$ on utilise la méthode des échelles multiples. On introduit les variables

$$t_1 = t \quad \text{et} \quad t_2 = \varepsilon t.$$

Ces deux échelles de temps seront considérées comme indépendantes. Par conséquence la dérivée originale du temps est transformée comme suite :

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{dt_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (1.16)$$

et

$$\frac{d^2}{dt^2} \longrightarrow \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) + \frac{dt_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}. \quad (1.17)$$

Pour simplifier les notations, nous utilisons le symbole ∂_{t_i} au lieu de $\frac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1, 2$. En substituant (1.16) et (1.17) dans (1.9) et (1.10) on obtient le résultat suivant

$$(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2)y + \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2})y + y = 0, \quad (1.18)$$

où

$$y(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad (\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2})y(0, 0) = 2. \quad (1.19)$$

Noter que la solution de (1.18) et (1.19) n'est pas unique et que nous devons imposer plus de conditions pour l'unicité de la solution. Cette liberté nous permettra d'empêcher des termes séculaires d'apparaître dans l'expansion.

Nous allons maintenant utiliser un développement en série de puissance de la forme

$$y \sim y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \dots. \quad (1.20)$$

En substituant ceci dans (1.18), on obtient

$$(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2)(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2})(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0,$$

c.-à-d.

$$\partial_{t_1}^2 y_0 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2} y_0 + \varepsilon \partial_{t_1}^2 y_1 + \varepsilon \partial_{t_1} y_0 + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0.$$

En regroupant des termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations différentielle linéaires suivantes :

$$\partial_{t_1}^2 y_0 + y_0 = 0, \quad (1.21)$$

$$\partial_{t_1}^2 y_1 + y_1 = -2\partial_{t_1} \partial_{t_2} y_0 - \partial_{t_1} y_0. \quad (1.22)$$

Maintenant pour les conditions initiales, en substituant (1.20) dans (1.19) on a

$$y_0(0, 0) + \varepsilon y_1(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} y_0(0, 0) + \varepsilon \partial_{t_1} y_1(0, 0) + \varepsilon \partial_{t_2} y_0(0, 0) + \dots = 2,$$

c.-à-d.

$$\begin{aligned} y_0(0, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} y_0(0, 0) = 2, \\ y_1(0, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} y_1(0, 0) = -\partial_{t_2} y_0(0, 0). \end{aligned}$$

La fonction y_0 est la solution du problème

$$O(1) \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_0 = 0 \\ y_0(0, 0) = 0, \quad \partial_{t_1} y_0(0, 0) = 2 \end{cases}$$

La solution générale de ce problème est

$$y_0 = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1). \quad (1.23)$$

Les coefficients $a_0(t_2)$ et $b_0(t_2)$ sont fonctions arbitraires de t_2 sauf qu'ils sont exigés pour satisfaire les conditions initiales

$$a_0(0) = 2 \quad \text{et} \quad b_0(0) = 0. \quad (1.24)$$

Les fonctions $a_0(t_2)$ et $b_0(t_2)$ doit être choisies pour empêcher l'apparition des termes séculaire, pour cela nous utilisons l'équation déterminante y_1 . On utilisant (1.22) et (1.23), on déduit que y_1 est solution de

$$O(\varepsilon) \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = -2\partial_{t_1}\partial_{t_2}y_0 - \partial_{t_1}y_0, \\ y_1(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1}y_1(0, 0) = -\partial_{t_2}y_0(0, 0). \end{cases}$$

et à partir le résultat du problème $O(1)$, l'équation pour y_1 est

$$(\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = (2b'_0 + b_0) \sin(t_1) - (2a'_0 + a_0) \cos(t_1). \quad (1.25)$$

La solution générale de cette équation différentielle est donné par

$$y_1(t_1, t_2) = y_{1h}(t_1, t_2) + y_{1p}(t_1, t_2)$$

avec

$$y_{1h}(t_1, t_2) = a_1(t_2) \sin(t_1) + b_1(t_2) \cos(t_1),$$

qui ne produira pas du terme séculaire pour $t_1 \rightarrow +\infty$ et t_2 borné. On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_{1p} = t_1(A \cos t_1 + B \sin t_1).$$

Ce qui implique

$$\partial_{t_1}^2 y_{1p}(t_1, t_2) = -2A \sin t_1 + 2B \cos t_1 - t_1(A \cos t_1 + B \sin t_1).$$

En remplaçant ces deux résultats dans l'équation (1.25) on trouve

$$y_{1p}(t) = -(b'_0 + b_0)t_1 \cos(t_1) - (a'_0 + a_0)t_1 \sin(t_1). \quad (1.26)$$

Dans (1.26), il y a une possibilité d'avoir des termes séculaires. Cependant, les fonction a_0 et b_0 peuvent être choisies pour empêcher ceci. En exigeant que

$$2b'_0 + b_0 = 0 \text{ et } 2a'_0 + a_0 = 0$$

ces deux équation différentielles dont les solutions sont données par

$$b_0(t_2) = b_0(0)e^{-\frac{t_2}{2}} \quad \text{et} \quad a_0(t_2) = a_0(0)e^{-\frac{t_2}{2}}.$$

Dans la dernière étape, on impose les conditions initiales données dans (1.24), on obtient

$$b_0(t_2) = 0 \quad \text{et} \quad a_0(t_2) = 2e^{-\frac{t_2}{2}}.$$

En rapportant ceci dans (1.23), on obtient

$$y_0 = 2e^{-\frac{t_2}{2}} \sin(t_1),$$

c-à-d.

$$y \sim 2e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin(t).$$

C'est un premier terme d'approximation qui est valable jusqu'au moins à $t = O(\varepsilon^{-1})$. Cette approximation est appelée l'expansion à échelles multiples

$$y_{echm} = 2e^{-\varepsilon t} \sin(t). \quad (1.27)$$

1.4.3.3 Comparaison avec la solution exacte

L'équation (1.9) est une EDO linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique associée est donné par $r^2 + \varepsilon r + 1 = 0$, alors

$$r_1 = \frac{-\varepsilon - i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2}, \quad r_2 = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2},$$

et la solution exact a la forme

$$y_{ext}(t) = e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \left(A \cos \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} t \right) \right).$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$, on obtient

$$y_{ext}(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\varepsilon t} \sin \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} t \right). \quad (1.28)$$

Pour voir l'efficacité de la méthode des échelles multiples pour obtenir une bonne approximation de la solution exacte (1.28), on compare graphiquement y_{reg} , y_{echm} et y_{ext} .

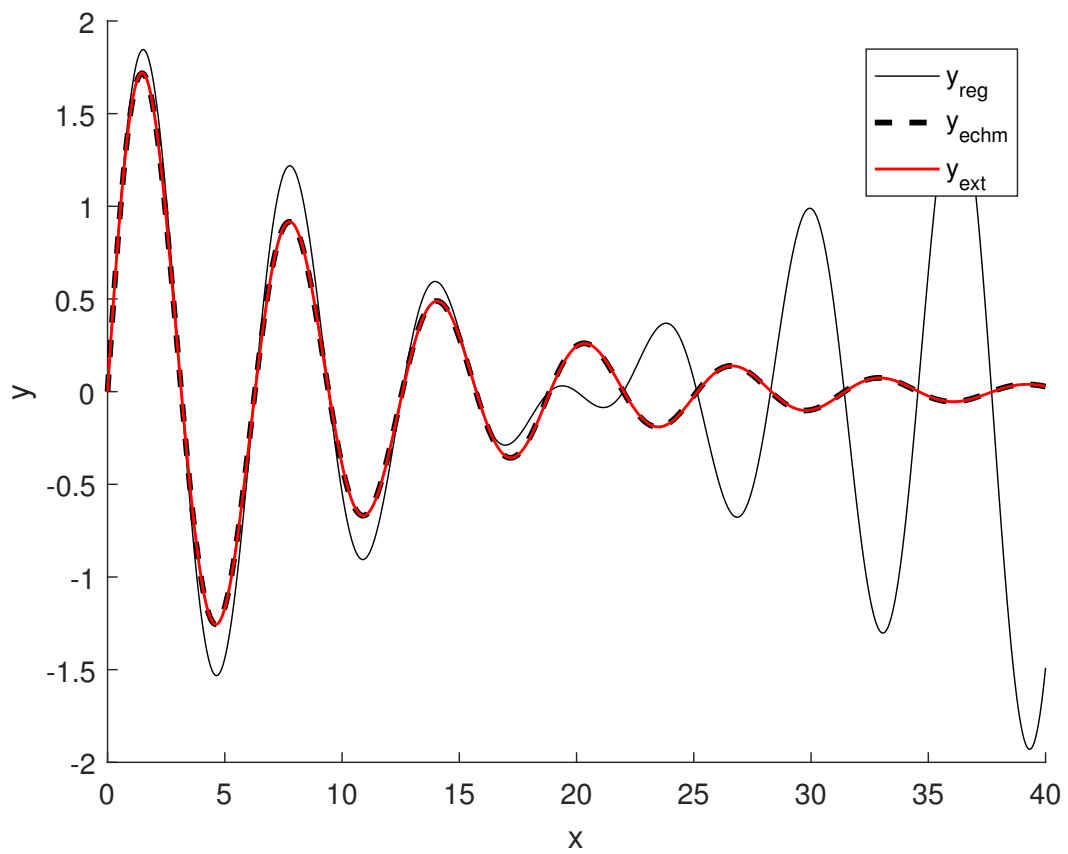


FIGURE 1.1 – Comparaison entre les solutions y_{ext} et y_{echm} et y_{reg} pour $\varepsilon = 0.1$.

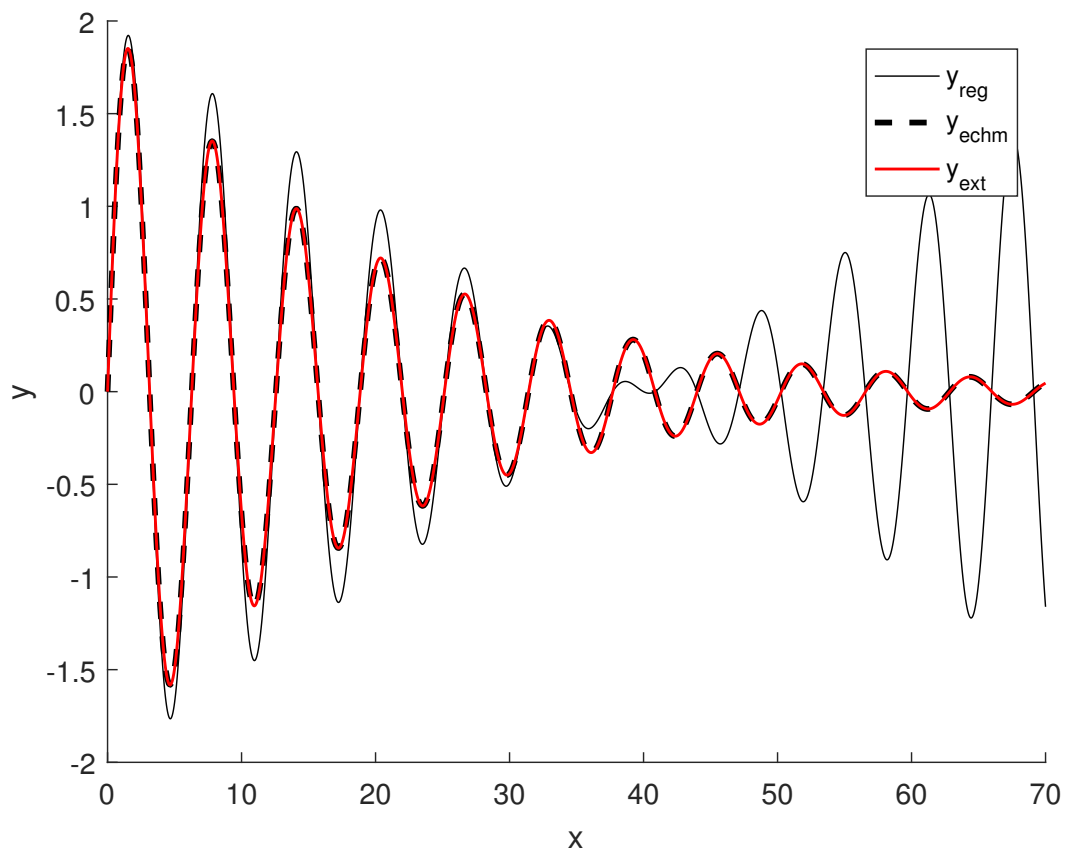


FIGURE 1.2 – Comparaison les entre solutions y_{ext} et y_{echm} et y_{reg} pour $\varepsilon = 0.05$.

ÉQUATION D'ONDES AVEC AMORTISSEMENT INTERNE

Dans ce chapitre, on explique comment s'applique la méthode des échelles multiples sur le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases}$$

où $H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u)$ représente un amortissement interne, qui dépend des dérivées de la solution.

2.1 Amortissement interne faible

Dans ce cas on prend H linéaire en $\partial_t u$, tel que :

$$H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = \alpha \partial_t u, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon \alpha \partial_t u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases} \quad (2.1)$$

On applique la méthode des échelles multiples. On pose

$$t_1 = t, \quad \text{et} \quad t_2 = \varepsilon t.$$

Alors $c(\varepsilon t) = c(t_2)$, et on suppose que

$$\text{pour } t_2 = 0, \quad c(0) = 1.$$

D'après le règle de chaîne on a :

$$\partial_t u = \frac{dt_1}{dt} \partial_{t_1} u + \frac{dt_2}{dt} \partial_{t_2} u.$$

Alors

$$\begin{aligned}\partial_t u &= c(t_2)\partial_{t_1} u + \varepsilon\partial_{t_2} u, \\ \partial_t^2 u &= c^2(t_2)\partial_{t_1}^2 u + \varepsilon^2\partial_{t_2}^2 u + 2\varepsilon c(t_2)\partial_{t_1 t_2} u + \varepsilon c'(t_2)\partial_{t_1} u.\end{aligned}$$

On pose

$$u(x, t) \sim u(x, t_1, t_2) = u_0(x, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(x, t_1, t_2) + O(\varepsilon^2).$$

En substituant $\partial_t u$ et $\partial_t^2 u$ dans l'équation de le problème (2.1), on obtient

$$c^2(t_2)\partial_{t_1}^2 u + \varepsilon^2\partial_{t_2}^2 u + 2\varepsilon c(t_2)\partial_{t_1 t_2} u + \varepsilon c'(t_2)\partial_{t_1} u - c^2(t_2)\partial_x^2 u + \alpha\varepsilon c(t_2)\partial_{t_1} u + \alpha\varepsilon^2\partial_{t_2} u = 0.$$

Donc

$$\partial_{t_1}^2 u - \partial_x^2 u = -\frac{\varepsilon^2}{c^2(t_2)}\partial_{t_2}^2 u - \frac{2\varepsilon}{c(t_2)}\partial_{t_1 t_2} u - \frac{\varepsilon c'(t_2)}{c^2(t_2)}\partial_{t_1} u - \frac{\alpha\varepsilon}{c(t_2)}\left(\partial_{t_1} u + \frac{\varepsilon}{c(t_2)}\partial_{t_2} u\right).$$

D'autre part, comme $c(0) = 1$ les conditions deviennent :

$$u(x, 0, 0) = u_0(x, 0, 0) + \varepsilon u_1(x, 0, 0) + \dots = f(x), \quad (2.2)$$

$$\partial_t u(x, 0, 0) = \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) \quad (2.3)$$

$$+ \varepsilon\partial_{t_2} u_0(x, 0, 0) + \varepsilon[\partial_{t_1} u_1(x, 0, 0) + \varepsilon\partial_{t_2} u_1(x, 0, 0)] + \dots = g(x),$$

$$u(0, t_1, t_2) = u_0(0, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(0, t_1, t_2) + \dots = 0, \quad (2.4)$$

$$u(\pi, t_1, t_2) = u_0(\pi, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(\pi, t_1, t_2) + \dots = 0. \quad (2.5)$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve le problème suivant :

$$O(1) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_0 - \partial_x^2 u_0 = 0 & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(0, t_1, t_2) = u_0(\pi, t_1, t_2) = 0 & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(x, 0, 0) = f(x) \text{ et } \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) = g(x) & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour résoudre le problème (2.6) on utilise la méthode séparation de variable en supposant que la solution a la forme $u_0(x, t_1) = X(x)T(t_1)$. Il vient que

$$X''(x) - \Lambda X(x) = 0, \quad (3)$$

$$T''(t_1) - \Lambda T(t_1) = 0. \quad (4)$$

Pour $\Lambda < 0$. on pose $\Lambda = -\lambda^2$, la solution s'écrit sous la forme

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x).$$

Alors

$$u_0(0, t_1) = B = 0, \quad \text{et} \quad u_0(\pi, t_1) = A \sin(\lambda\pi) = 0.$$

On obtient

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(\lambda\pi) = 0,$$

et

$$\sin(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda\pi = n\pi.$$

Donc

$$\lambda = \lambda_n = n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Pour l'équation (2.7), la solution s'écrit sous la forme

$$T(t_1) = a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1).$$

D'où la solution générale de (2.6)

$$u_{0n}(x, t_1, t_2) = [a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x).$$

Donc

$$u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \quad (2.8)$$

Pour calculer les coefficients a_n et b_n on passe à l'ordre ε , i.e.,

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_0 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0 - \frac{\alpha}{c(t_2)} \partial_{t_1} u_0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_1(0, t_1, t_2) = u_1(\pi, t_1, t_2) = 0, & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_1(x, 0, 0) = 0 \text{ et } \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0) = 0, & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

D'après la solution (2.8), on a

$$\partial_{t_1} u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (2.9)$$

$$\partial_{t_1 t_2} u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \quad (2.10)$$

On injecte (2.9) et (2.10) dans l'équation du problème $O(\varepsilon)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_1 &= \partial_{t_1}^2 u_1 + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ &\quad + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_1 &= \partial_{t_1}^2 u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \right] \sin(\lambda_n x). \quad (2.11) \end{aligned}$$

On peut écrire u_1 comme combinaison linéaire par les éléments de la base $\{\sin(\lambda_n x)\}_{n \geq 1}$, c'est-à-dire u_1 on écrit sous la forme suivante :

$$u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x).$$

Alors

$$\partial_x^2 u_1 = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x), \quad (2.12)$$

$$\partial_{t_1}^2 u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x). \quad (2.13)$$

En substituant (2.12) et (2.13) dans (2.11), on trouve

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \right] \sin(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) + \lambda_n^2 v_n(t_1, t_2) &= \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \\ &\quad - \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1). \end{aligned}$$

Puisque les fonctions trigonométrique du coté droit sont des solution de l'équation homogène associée alors pour éviter les termes séculaires dans l'expansion, on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n a_n(t_2) &= 0, \text{ pour } n = 1, \dots, +\infty, \\ \frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} + \frac{\alpha}{c(t_2)} \right) \lambda_n b_n(t_2) &= 0, \text{ pour } n = 1, \dots, +\infty, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{a'_n(t_2)}{a_n(t_2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{c'(t_2)}{c(t_2)} + \alpha \right) \quad \text{et} \quad \frac{b'_n(t_2)}{b_n(t_2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{c'(t_2)}{c(t_2)} + \alpha \right).$$

Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \left(\frac{a'_n(s)}{a_n(s)} + \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} \right) ds &= -\frac{1}{2} \int_0^{t_2} \alpha ds, \\ \int_0^{t_2} \left(\frac{b'_n(s)}{b_n(s)} + \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} \right) ds &= -\frac{1}{2} \int_0^{t_2} \alpha ds. \end{aligned}$$

Alors, comme $c(0) = 1$, on a

$$\ln \frac{a_n(t_2)}{a_n(0)} + \ln \sqrt{c(t_2)} = -\frac{1}{2}\alpha t_2 \quad \text{et} \quad \ln \frac{b_n(t_2)}{b_n(0)} + \ln \sqrt{c(t_2)} = -\frac{1}{2}\alpha t_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \exp\left(\ln \frac{a_n(t_2)}{a_n(0)}\right) \exp\left(\ln \sqrt{c(t_2)}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t_2\right), \\ \exp\left(\ln \frac{b_n(t_2)}{b_n(0)}\right) \exp\left(\ln \sqrt{c(t_2)}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t_2\right). \end{aligned}$$

Alors

$$a_n(t_2) = \frac{a_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t_2\right) \quad \text{et} \quad b_n(t_2) = \frac{b_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t_2\right).$$

D'après les conditions (2.2), on a :

$$u_0(x, 0, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(0) \sin(\lambda_n x) = f(x) \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) \lambda_n \sin(\lambda_n x) = g(x).$$

D'où

$$a_n(0) = \frac{2}{\pi \lambda_n} \int_0^\pi g(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad \text{et} \quad b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Par conséquent, l'approximation du premier terme de la solution est :

$$u(x, t) \sim u_0(x, t_1, t_2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t_2\right)}{\sqrt{c(t_2)}} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(0) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(0) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x).$$

2.2 Amortissement interne fort

Dans ce cas on prend H linéaire en $\partial_{txx}^3 u$, tel que :

$$H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = -\beta \partial_{txx}^3 u, \quad \beta > 0.$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u - \varepsilon \beta \partial_{txx}^3 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases} \quad (2.14)$$

On applique la méthode des échelles multiples et le règle de chaîne. On substitue $\partial_t u$ et $\partial_t^2 u$ dans (2.14), on obtient :

$$c^2(t_2) \partial_{t_1}^2 u + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 u + 2\varepsilon c(t_2) \partial_{t_1 t_2} u + \varepsilon c'(t_2) \partial_{t_1} u - c^2(t_2) \partial_x^2 u - \beta \varepsilon (c(t_2) \partial_{t_1 x x}^3 u + \varepsilon \partial_{t_2 x x}^3 u) = 0.$$

Donc

$$\partial_{t_1}^2 u - \partial_x^2 u = -\frac{\varepsilon^2}{c^2(t_2)} \partial_{t_2}^2 u - \frac{2\varepsilon}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u - \frac{\varepsilon c'(t_2)}{c^2(t_2)} u_{t_1} + \frac{\beta\varepsilon}{c(t_2)^2} (c(t_2) \partial_{t_1 x x}^3 u + \varepsilon \partial_{t_2 x x}^3 u).$$

On prend $\varepsilon = 0$, on trouve le problème suivant :

$$O(1) \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_0 - \partial_x^2 u_0 = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(0, t_1, t_2) = u_0(\pi, t_1, t_2) = 0, & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(x, 0, 0) = f(x) \text{ et } \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) = g(x). & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

La solution de ce problème on écrit sous la forme (2.8) sans changement avec $\lambda_n = n$.

Pour recherche les coefficients a_n et b_n on passe à l'ordre ε :

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_1 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0 + \frac{\beta}{c(t_2)} \partial_{t_1 x x}^3 u_0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_1(0, t_1, t_2) = u_1(\pi, t_1, t_2) = 0, & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_1(x, 0, 0) = 0 \text{ et } \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0) = 0, & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

D'après (2.8), on a

$$\partial_{t_1} u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (2.15)$$

$$\partial_{t_1 t_2} u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (2.16)$$

$$\partial_{t_1 x x}^3 u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^3 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \quad (2.17)$$

En remplaçant (2.15), (2.16) et (2.17) dans l'équation du problème $O(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 &= -\frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ &\quad - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ &\quad - \frac{\beta}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_1 &= \partial_{t_1}^2 u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta\lambda_n^3}{c(t_2)} \right) a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta\lambda_n^3}{c(t_2)} \right) b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \right] \sin(\lambda_n x), \end{aligned}$$

On écrit u_1 sous la forme :

$$u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)} \right) a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)} \right) b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \right] \sin(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 v_n(t_1, t_2) + \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) &= \left[\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)^2} \right) b_n(t_2) \right] \sin(\lambda_n t_1) \\ &\quad - \left[\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)^2} \right) a_n(t_2) \right] \cos(\lambda_n t_1). \end{aligned}$$

Pour éviter les termes séculaires, on prend

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left[\left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \right) \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)^2} \right] a_n(t_2) &= 0, \text{ pour } n = 1 \dots + \infty, \\ \frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left[\left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \right) \lambda_n + \frac{\beta \lambda_n^3}{c(t_2)^2} \right] b_n(t_2) &= 0, \text{ pour } n = 1 \dots + \infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{a'_n(t_2)}{a_n(t_2)} + \frac{1}{2} \frac{c'(t_2)}{c(t_2)} = -\frac{1}{2} \beta \lambda_n^2 \quad \text{et} \quad \frac{b'_n(t_2)}{b_n(t_2)} + \frac{1}{2} \frac{c'(t_2)}{c(t_2)} = -\frac{1}{2} \beta \lambda_n^2.$$

Par intégration sur $[0, t_2]$, on obtient

$$\ln \frac{a_n(t_2)}{a_n(0)} + \ln \sqrt{c(t_2)} = -\frac{\beta \lambda_n^2}{2} t_2 \quad \text{et} \quad \ln \frac{b_n(t_2)}{b_n(0)} + \ln \sqrt{c(t_2)} = -\frac{\beta \lambda_n^2}{2} t_2.$$

Alors

$$a_n(t_2) = \frac{a_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\beta \lambda_n^2}{2} t_2\right) \quad \text{et} \quad b_n(t_2) = \frac{b_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\beta \lambda_n^2}{2} t_2\right).$$

D'après les conditions initiales (2.2), on a

$$a_n(0) = \frac{2}{\pi \lambda_n} \int_0^\pi g(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad \text{et} \quad b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Par conséquent, l'approximation du premier terme de la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, t) \sim u_{echm}(x, t_1, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{c(t_2)}} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{\beta \lambda_n^2}{2} t_2\right) \\ &\quad \times (a_n(0) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(0) \cos(\lambda_n t_1)) \sin(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Remarque 2.1 En comparant la solution de l'équation d'onde dans le cas d'un amortissement interne faible et fort pour $\alpha = \beta$, on constate que l'amortissement $-\partial_{txx}^3 u$ a un effet plus fort que $\partial_t u$ sur les fréquences $\lambda_n > 1$ puisque

$$e^{-\frac{\beta\lambda_n^2 t_2}{2}} \leq e^{-\frac{\beta t_2}{2}}, \text{ pour } n > 1$$

Remarque 2.2 A partir de l'étude précédente, on peut généraliser le problème (??) en prenant :

$$H = (-1)^m \alpha (\partial_t \partial_x^{2m}) u \text{ tel que } \alpha_m > 0, m \in \mathbb{N}.$$

Donc le problème s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon (-1)^m \alpha (\partial_t \partial_x^{2m}) u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases}$$

et l'approximation du premier terme de la solution dans ce problème est :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{c(t_2)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_n^{2m} t_2}{2}\right) \times [a_n(0) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(0) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x).$$

2.3 Exemple numérique

Pour illustrer les résultats précédentes, on étudie l'exemple suivant, tel que

$$f(x) = \sin(2x) \text{ et } g(x) = 0,$$

avec

$$c(t_2) = \frac{2 + \cos(\varepsilon t)}{3} \text{ et } \alpha = \beta = 1.$$

Dans ce cas on a le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = 0. & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases}$$

et on peut démontrer que le premier terme de l'approximation régulière est

$$u_0(x, t_1, t_2) = \cos(2t) \sin(2x).$$

2.3.1 Le cas d'amortissement interne faible

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u + \varepsilon \partial_t u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = 0. & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

L'approximation du premier terme de la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos(\varepsilon t)}} \exp\left(-\frac{\varepsilon t}{2}\right) \cos(2t) \sin(2x).$$

Le graphique suivant représente la solution $u_{echm}(x, t)$ pour différents temps :



FIGURE 2.1 – Solution asymptotique $u_{echm}(x, t)$ pour $\varepsilon = 0$ — et $\varepsilon = 0.01$ - - et $\varepsilon = 0.1$ —.

2.3.2 Le cas d'amortissement interne fort

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u - \varepsilon \partial_{txx}^3 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = 0. & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases}$$

L'approximation du première terme de la solution on écrit :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos(\varepsilon t)}} \exp(-2\varepsilon t) \cos(2t) \sin(2x).$$

Le graphique suivant représente la solution $u_{echm}(x, t)$ pour différents temps :

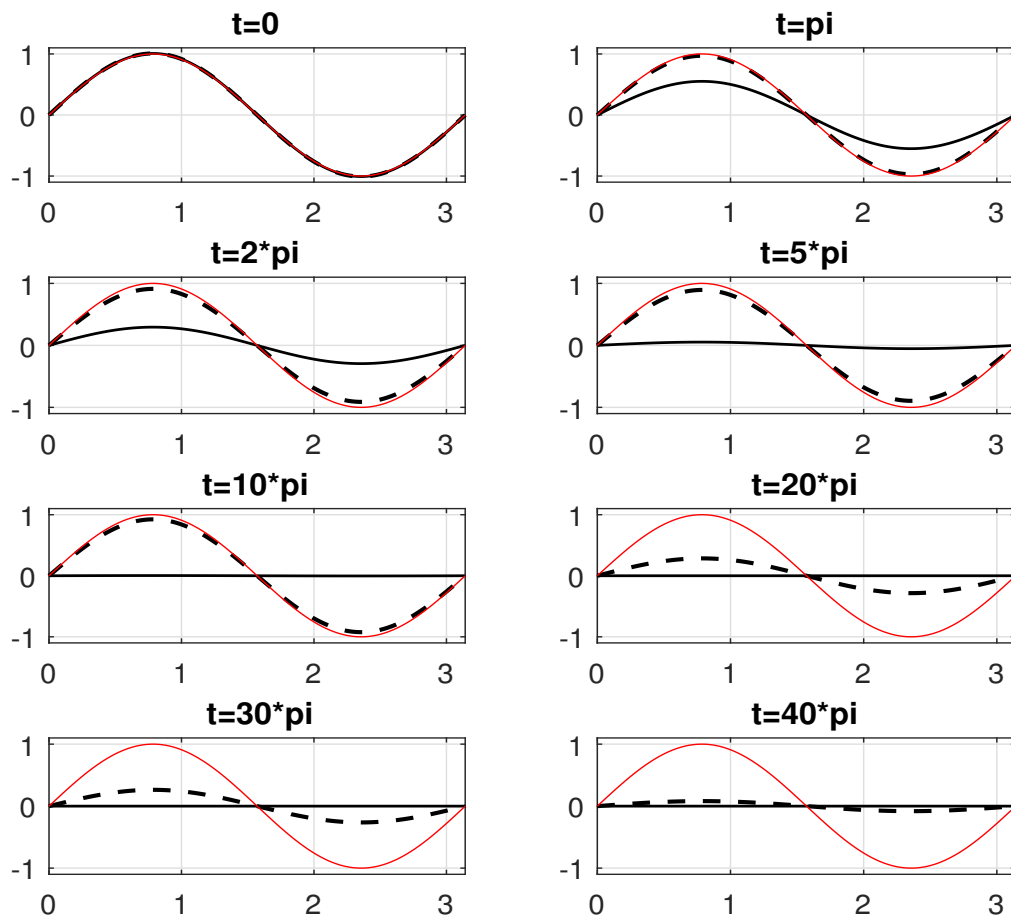


FIGURE 2.2 – Solution asymptotique $u_{echm}(x, t)$ pour $\varepsilon = 0$ ——— et $\varepsilon = 0.01$ - - et $\varepsilon = 0.1$ ———.

ÉQUATION D'ONDES AVEC AMORTISSEMENT FRONTIÈRE

Dans ce chapitre, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases}$$

où $H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u)$ représente un amortissement frontière.

3.1 Amortissement frontière faible

Dans ce cas on prend H linéaire en $\partial_t u$, tel que :

$$H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = \gamma \partial_t u, \quad \gamma > 0$$

et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) + \varepsilon \gamma \partial_t u(\pi, t) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[, \end{cases} \quad (3.1)$$

et on suppose que

$$\text{pour } t_2 = 0, \quad c(0) = 1.$$

Pour appliquer la méthode des échelles multiples, on pose

$$t_1 = t, \text{ et } t_2 = \varepsilon t.$$

En particulier $c(\varepsilon t) = c(t_2)$. D'après la règle de chaîne on a :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= c(t_2) \partial_{t_1} u + \varepsilon \partial_{t_2} u, \\ \partial_t^2 u &= c^2(t_2) \partial_{t_1}^2 u + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 u + 2\varepsilon c(t_2) \partial_{t_1 t_2} u + \varepsilon c'(t_2) \partial_{t_1} u. \end{aligned}$$

On suppose que

$$u(x, t) \sim u(x, t_1, t_2) = u_0(x, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(x, t_1, t_2) + O(\varepsilon^2).$$

Par dérivation, on obtient

$$c^2(t_2)\partial_{t_1}^2 u + \varepsilon^2\partial_{t_2}^2 u + 2\varepsilon c(t_2)\partial_{t_1 t_2} u + \varepsilon c'(t_2)\partial_{t_1} u - c^2(t_2)\partial_x^2 u = 0,$$

i.e.,

$$\partial_{t_1}^2 u - \partial_x^2 u = -\frac{\varepsilon^2}{c^2(t_2)}\partial_{t_2}^2 u - \frac{2\varepsilon}{c(t_2)}\partial_{t_1 t_2} u - \frac{\varepsilon c'(t_2)}{c^2(t_2)}\partial_{t_1} u.$$

D'autre part, les conditions initiales et aux limites deviennent :

$$u(0, t_1, t_2) = u_0(0, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(0, t_1, t_2) + \dots = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_x u(\pi, t_1, t_2) + \varepsilon \gamma \partial_t u(\pi, t_1, t_2) &= \partial_x u_0(\pi, t_1, t_2) \\ &+ \varepsilon [\partial_x u_1(\pi, t_1, t_2) + \gamma c(t_2)\partial_{t_1} u_0(\pi, t_1, t_2)] + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$u(x, 0, 0) = u_0(x, 0, 0) + \varepsilon u_1(x, 0, 0) + \dots = f(x),$$

$$\partial_t u(x, 0, 0) = \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) + \varepsilon [\partial_{t_2} u_0(x, 0, 0) + \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0)] + \dots = g(x).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve le problème suivant :

$$o(1) \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_0 - \partial_x^2 u_0 = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(0, t_1, t_2) = 0, \quad \partial_x u_0(\pi, t_1, t_2) = 0, & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(x, 0, 0) = f(x), \quad \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases} \quad (3.4)$$

En utilisant la méthode de séparation de variable, on suppose que la solution s'écrit comme suit

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

On remplaçant dans l'équation (3.4), on obtient

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante positive. On obtient

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{et} \quad T''(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (3.5)$$

La solution de première équation est

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x).$$

Alors

$$u_0(0, t_1) = B = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x u_0(\pi, t_1) = A \lambda \cos(\lambda \pi) = 0.$$

On obtient

$$A = 0 \text{ ou, } \cos(\lambda\pi) = 0,$$

et

$$\cos(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \lambda\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2n-1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La résolution de la deuxième équation dans (3.5), donne :

$$T(t_1) = a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1).$$

par superposition, la solution générale de (3.4) est

$$u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \quad (3.6)$$

Pour trouver a_n et b_n on passe à l'ordre ε :

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_0 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0 \\ u_1(0, t_1, t_2) = 0, \\ \partial_x u_1(\pi, t_1, t_2) = -\gamma c(t_2) \partial_{t_1} u_0(\pi, t_1, t_2), \\ u_1(x, 0, 0) = 0, \\ \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0) = -\partial_{t_2} u_0(x, 0, 0). \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour avoir des conditions aux limites homogènes, on utilise le changement

$$u_1 = w_1 - x\gamma c(t_2) \partial_{t_1} u_0(\pi, t_1, t_2)$$

et on peut réécrire le problème (3.7) comme suit :

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 w_1 - \partial_x^2 w_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_0 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0 + x\gamma c(t_2) \partial_{t_1}^3 u_0(\pi, t_1, t_2), \\ w_1(0, t_1, t_2) = 0, \\ \partial_x w_1(\pi, t_1, t_2) = 0, \\ w_1(x, 0, 0) = \gamma x \partial_{t_1} u_0(\pi, 0, 0), \\ \partial_{t_1} w_1(x, 0, 0) = \gamma x \partial_{t_1}^2 u_0(\pi, 0, 0) - \partial_{t_2} u_0(x, 0, 0). \end{cases} \quad (3.8)$$

Par dérivation, on a d'après (3.6)

$$\partial_{t_1 t_2} u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n'(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n'(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (3.9)$$

$$\partial_{t_1} u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (3.10)$$

$$\partial_{t_1}^3 u_0(\pi, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [-\lambda_n^3 a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) + \lambda_n^3 b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi). \quad (3.11)$$

On injecte (3.9), (3.10) et (3.11) dans l'équation du problème (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x^2 w_1 = \partial_{t_1}^2 w_1 + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ - x \gamma c(t_2) \sum_{n=1}^{+\infty} [-\lambda_n^3 a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) + \lambda_n^3 b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ensuite, on suppose que w_1 s'écrit comme

$$w_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x).$$

On a aussi besoin de développer la fonction x en série de Fourier. Cela donne

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(\lambda_n x).$$

Par la formule des coefficients de Fourier, on a

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(\lambda_n x) dx$$

et par intégration par partie, on trouve

$$d_n = \frac{2}{\pi \lambda_n^2} \sin(\lambda_n \pi).$$

En substituant w_1 et x dans (3.12), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\lambda_n x) d_n \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma c(t_2) \lambda_k^3 [-a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) + b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alors, on multiplie (3.13) par $\sin(\lambda_k x)$ et on intégré sur $[0, \pi]$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) \int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ &+ \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ &+ \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma c(t_2) [\lambda_k^3 a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - \lambda_k^3 b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi). \end{aligned}$$

Si $n \neq k$ on a :

$$\int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx = 0.$$

Si $n = k$, on a :

$$\int_0^\pi \sin^2(\lambda_n x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 - \cos(2\lambda_n x) dx = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{1}{2\lambda_n} [\sin(2\lambda_n \pi) - \sin(0)] \right).$$

Comme $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}$, alors $\sin(2\lambda_n \pi) = 0$ et on a

$$\int_0^\pi \sin^2(\lambda_n x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Par un calcul direct, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) + \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) &= -\frac{2}{c(t_2)} [\lambda_n a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \\ &- \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} [\lambda_n a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \\ &- \gamma c(t_2) d_n [\lambda_n^3 a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - \lambda_n^3 b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi) \\ &- \gamma c(t_2) d_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \lambda_k^3 [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi). \end{aligned}$$

En simplifiant on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) + \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \\
&= \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \gamma c(t_2) d_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) \right) b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \\
&- \left(\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \gamma c(t_2) d_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) \right) a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \\
&\quad - \underbrace{\gamma c(t_2) d_n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \lambda_k^3 [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi)}_I.
\end{aligned}$$

En particulier terme (I) ne cause pas des termes séculaire. Pour éviter l'apparition de termes séculaires, On doit prendre

$$\begin{aligned}
\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \gamma c(t_2) d_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) \right) b_n(t_2) &= 0, \\
\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \gamma c(t_2) d_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) \right) a_n(t_2) &= 0,
\end{aligned}$$

comme $d_n = 2 \sin(\lambda_n \pi) / \pi \lambda_n^2$, alors

$$\gamma c(t_2) d_n \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) = \gamma c(t_2) \left(\frac{2 \sin(\lambda_n \pi)}{\pi \lambda_n^2} \right) \lambda_n^3 \sin(\lambda_n \pi) = \frac{2 \sin^2(\lambda_n \pi) \gamma c(t_2) \lambda_n}{\pi}.$$

Pour $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}$, on a

$$\sin^2(\lambda_n \pi) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \frac{2\gamma c(t_2)\lambda_n}{\pi} \right) b_n(t_2) &= 0, \\
\frac{2\lambda_n}{c(t_2)} a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)\lambda_n}{c^2(t_2)} + \frac{2\gamma c(t_2)\lambda_n}{\pi} \right) a_n(t_2) &= 0.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve

$$\frac{b'_n(t_2)}{b_n(t_2)} - \frac{c'(t_2)}{2c(t_2)} = -\frac{\gamma c^2(t_2)}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{a'_n(t_2)}{a_n(t_2)} - \frac{c'(t_2)}{2c(t_2)} = -\frac{\gamma c^2(t_2)}{\pi}.$$

Par intégration on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_2} \frac{b'_n(s)}{b_n(s)} - \frac{c'(s)}{2c(s)} ds &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds, \\
\int_0^{t_2} \frac{a'_n(s)}{a_n(s)} - \frac{c'(s)}{2c(s)} ds &= -\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$a_n(t_2) = \frac{a_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) \quad \text{et} \quad b_n(t_2) = \frac{b_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right).$$

D'après les conditions (3.2), on obtient

$$a_n(0) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad \text{et} \quad b_n(0) = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

En fin, l'approximation du premier terme de la solution est :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{c(t_2)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) \times [a_n(0) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(0) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x).$$

3.2 Amortissement frontière fort

Dans ce cas on prende H linéaire en $\partial_{txx}^3 u$ tel que

$$H(\partial_t u, \partial_{txx}^3 u) = -\delta \partial_{txx}^3 u, \quad \delta > 0$$

et on considère le problème suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0 & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \partial_x u(\pi, t) - \delta \varepsilon \partial_{txx}^3 u(\pi, t) = 0 & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

On applique la méthode échelles multiples pour $t_1 = t$ et $t_2 = \varepsilon t$, alors

$$\partial_{t_1}^2 u - \partial_x^2 u = -\frac{\varepsilon^2}{c^2(t_2)} \partial_{t_2}^2 u - \frac{2\varepsilon}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u - \frac{\varepsilon c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u.$$

et les conditions deviennent :

$$u(0, t_1, t_2) = u_0(0, t_1, t_2) + \varepsilon u_1(0, t_1, t_2) + \dots = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_x u(\pi, t_1, t_2) + \delta \varepsilon \partial_{txx}^3 u(\pi, t) &= \partial_x u_0(\pi, t_1, t_2) \\ &+ \varepsilon [\partial_x u_1(\pi, t_1, t_2) + \delta c(t_2) \partial_{t_1 x x}^3 u_0(\pi, t_1, t_2)] + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$u(x, 0, 0) = u_0(x, 0, 0) + \varepsilon u_1(x, 0, 0) + \dots = f(x),$$

$$\partial_t u(x, 0, 0) = \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) + \varepsilon [\partial_{t_2} u_0(x, 0, 0) + \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0)] + \dots = g(x).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve le problème suivant :

$$o(1) \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_0 - \partial_x^2 u_0 = 0, & \text{pour } x \in (0, \pi) \text{ et } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(0, t_1, t_2) = \partial_x u_0(\pi, t_1, t_2) = 0, & \text{pour } t_1, t_2 > 0, \\ u_0(x, 0, 0) = f(x) \text{ et } \partial_{t_1} u_0(x, 0, 0) = g(x), & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

dont la solution s'écrit toujours sous la forme

$$u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x). \quad (3.16)$$

avec

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour trouver a_n et b_n on passe à l'ordre ε i.e.

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_0 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0, \\ u_1(0, t_1, t_2) = 0, \\ \partial_x u_1(\pi, t_1, t_2) = \delta c(t_2) \partial_{t_1 x x}^3 u_0(\pi, t_1, t_2), \\ u_1(x, 0, 0) = 0, \\ \partial_{t_1} u_1(x, 0, 0) = -\partial_{t_2} u_0(x, 0, 0). \end{cases}$$

En utilisant le changement :

$$u_1 = w_1 + x \delta c(t_2) \partial_{t_1 x x}^3 u_0(\pi, t_1, t_2).$$

On peut réécrire le problème $O(\varepsilon)$ comme suit :

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} \partial_{t_1}^2 w_1 - \partial_x^2 w_1 = -\frac{2}{c(t_2)} \partial_{t_1 t_2} u_0 - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \partial_{t_1} u_0 - x c(t_2) \delta \partial_{t_1}^3 \partial_x^2 u_0(\pi, t_1, t_2), \\ w_1(0, t_1, t_2) = 0, \\ \partial_x w_1(\pi, t_1, t_2) = 0, \\ w_1(x, 0, 0) = \gamma x \partial_{t_1} u_0(\pi, 0, 0) \quad , \quad c(0) = 1, \\ \partial_{t_1} w_1(x, 0, 0) = x \delta \partial_{t_1}^2 \partial_x^2 u_0(\pi, 0, 0) - \partial_{t_2} u_0(x, 0, 0). \end{cases} \quad (3.17)$$

D'après la formule (3.16) de u_0 , on a

$$\partial_{t_1} u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (3.18)$$

$$\partial_{t_1}^3 u_0(\pi, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^3 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi), \quad (3.19)$$

$$\partial_{t_1 t_2}^2 u_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x), \quad (3.20)$$

$$\partial_{t_1}^3 \partial_x^2 u_0(\pi, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^5 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi). \quad (3.21)$$

On injecte (3.18)-(3.21) dans l'équation du problème (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 w_1 = \partial_{t_1}^2 w_1 + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + x \delta c(t_2) \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^5 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ensuite, on développe les fonctions x et w_1 en séries de Fourier, c'est-à-dire

$$w_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) \quad \text{et} \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(\lambda_n x).$$

D'après les coefficients de Fourier, on trouve

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(\lambda_n x) dx = \frac{2 \sin(\lambda_n \pi)}{\pi \lambda_n^2}.$$

En substituant w_1 et x dans (3.22)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(\lambda_n x) \sum_{k=1}^{+\infty} c(t_2) \lambda_k^5 \delta [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

On multiplie (3.23) par $\sin(\lambda_k x)$ et on intègre sur $[0, \pi]$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ + \frac{2}{c(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ + \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx \sum_{k=1}^{+\infty} c(t_2) \lambda_k^5 \delta [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi). \end{aligned}$$

Si $n \neq k$

$$\int_0^\pi \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_k x) dx = 0$$

Si $n = k$

$$\int_0^\pi \sin^2(\lambda_n x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Par un calcul simple, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) + \lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) &= -\frac{2}{c(t_2)} \lambda_n [a'_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b'_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \\ &\quad - \frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \\ &\quad - c(t_2) \delta d_n \lambda_n^5 [a_n(t_2) \cos(\lambda_n t_1) - b_n(t_2) \sin(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n \pi) \\ &\quad - c(t_2) \delta d_n \sum_{k=1, k \neq n}^{+\infty} \lambda_k^5 [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi). \end{aligned}$$

En simplifiant, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}^2 v_n(t_1, t_2) + \lambda_n^2 \partial_x^2 v_n(t_1, t_2) &= \left(\frac{2}{c(t_2)} \lambda_n b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + c(t_2) \delta d_n \lambda_n^5 \sin(\lambda_n \pi) \right) b_n(t_2) \right) \sin(\lambda_n t_1) \\ &\quad - \left(\frac{2}{c(t_2)} \lambda_n a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + c(t_2) \delta d_n \lambda_n^5 \sin(\lambda_n \pi) \right) a_n(t_2) \right) \cos(\lambda_n t_1) \\ &\quad - c(t_2) \delta d_n \underbrace{\sum_{k=1, k \neq n}^{+\infty} \lambda_k^5 [a_k(t_2) \cos(\lambda_k t_1) - b_k(t_2) \sin(\lambda_k t_1)] \sin(\lambda_k \pi)}_{II}, \end{aligned}$$

et pour $d_n = \frac{2 \sin(\lambda_n \pi)}{\pi \lambda_n^2}$, on a

$$c(t_2) \delta d_n \lambda_n^5 \sin(\lambda_n \pi) = c(t_2) \delta \left(\frac{2 \sin(\lambda_n \pi)}{\pi \lambda_n^2} \right) \lambda_n^5 \sin(\lambda_n \pi) = \frac{2c(t_2) \delta \sin^2(\lambda_n \pi) \lambda_n^3}{\pi}.$$

avec $\sin^2(\lambda_n \pi) = 1$.

Le terme II ne cause pas une terme séculaire. Pour éviter les termes séculaires dans l'expansion, il faut que

$$\begin{aligned} \frac{2}{c(t_2)} \lambda_n b'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{2c(t_2) \delta \lambda_n^3}{\pi} \right) b_n(t_2) &= 0, \\ \frac{2}{c(t_2)} \lambda_n a'_n(t_2) + \left(\frac{c'(t_2)}{c^2(t_2)} \lambda_n + \frac{2c(t_2) \delta \lambda_n^3}{\pi} \right) a_n(t_2) &= 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{b'_n(t_2)}{b_n(t_2)} + \frac{1}{2} \frac{c'(t_2)}{c(t_2)} &= -\frac{c^2(t_2)\delta\lambda_n^2}{\pi}, \\ \frac{a'_n(t_2)}{a_n(t_2)} + \frac{1}{2} \frac{c'(t_2)}{c(t_2)} &= -\frac{c^2(t_2)\delta\lambda_n^2}{\pi}.\end{aligned}$$

Par intégration on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_2} \frac{b'_n(s)}{b_n(s)} + \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} ds &= -\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds, \\ \int_0^{t_2} \frac{a'_n(s)}{a_n(s)} + \frac{1}{2} \frac{c'(s)}{c(s)} ds &= -\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds.\end{aligned}$$

Donc, comme $c(0) = 1$

$$b_n(t_2) = \frac{b_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) \quad \text{et} \quad a_n(t_2) = \frac{a_n(0)}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right).$$

D'après les conditions (3.14), on a :

$$a_n(0) = \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad \text{et} \quad b_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

En fin, l'approximation du premier terme de la solution est :

$$\begin{aligned}u(x, t) \sim u_{echm}(x, t_1, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{c(t_2)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) \\ &\quad \times [a_n(0) \sin(\lambda_n t_1) + b_n(0) \cos(\lambda_n t_1)] \sin(\lambda_n x).\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *En comparant la solution de l'équation d'onde dans le cas d'un amortissement interne faible et fort pour $\gamma = \delta$, on constate aussi que l'effet du terme $-\partial_{txx}^3$ est plus fort sur les termes de fréquences d'ordre $n > 1$ car*

$$\exp\left(-\frac{\delta\lambda_n^2}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) < \exp\left(-\frac{\delta}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right), \quad \text{pour } \frac{3}{2} = \lambda_1 < \lambda_n \quad \forall n > 1.$$

3.3 Exemple numérique

Pour illustrer les résultats précédents, on étudie l'exemple suivant, tel que :

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 0,$$

avec

$$c(t_2) = \frac{2 + \cos(\varepsilon t)}{3} \quad \text{et} \quad \gamma = \delta = 1.$$

Alors on a le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) + \varepsilon H(\partial_t u, \partial_{t_{xx}}^3 u) = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\frac{3x}{2}) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

De la même manière précédente, on obtient la solution régulière :

$$u_0(x, t_1, t_2) = \cos(3t/2) \sin(3t/2),$$

3.3.1 Le cas d'amortissement frontière faible

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x u(\pi, t) + \varepsilon \partial_t u = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\frac{3x}{2}) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

L'approximation du premier terme de la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{c(t_2)}} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{t_2} c^2(s) ds\right) \cos\left(\frac{3t_1}{2}\right) \sin\left(\frac{3x}{2}\right).$$

Pour $c(t_2) = \frac{2+\cos(\varepsilon t)}{3}$, on a

$$\int_0^{t_2} c^2(s) ds = \frac{1}{9} \int_0^{t_2} (2 + \cos(\varepsilon s))^2 ds = \frac{1}{9} \int_0^{t_2} 4 + \cos^2(\varepsilon s) + 4 \cos(\varepsilon s) ds,$$

pour $\cos^2(\varepsilon s) = \frac{1+\cos(2\varepsilon s)}{2}$, alors :

$$\int_0^{t_2} c^2(s) ds = \frac{1}{9} \int_0^{t_2} 4 + \frac{1 + \cos(2\varepsilon s)}{2} + 4 \cos(\varepsilon s) ds = \frac{16\varepsilon t_2 + \sin(2\varepsilon t_2) + 16 \sin(\varepsilon t_2)}{36\varepsilon}.$$

Finalement, on a

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos(\varepsilon t)}} \times \exp\left(-\frac{16\varepsilon^2 t + \sin(2\varepsilon^2 t) + 16 \sin(\varepsilon^2 t)}{36\varepsilon\pi}\right) \cos(3t/2) \sin(3t/2).$$

Le graphe suivant représente la solution $u_{echm}(x, t)$ pour différents temps :

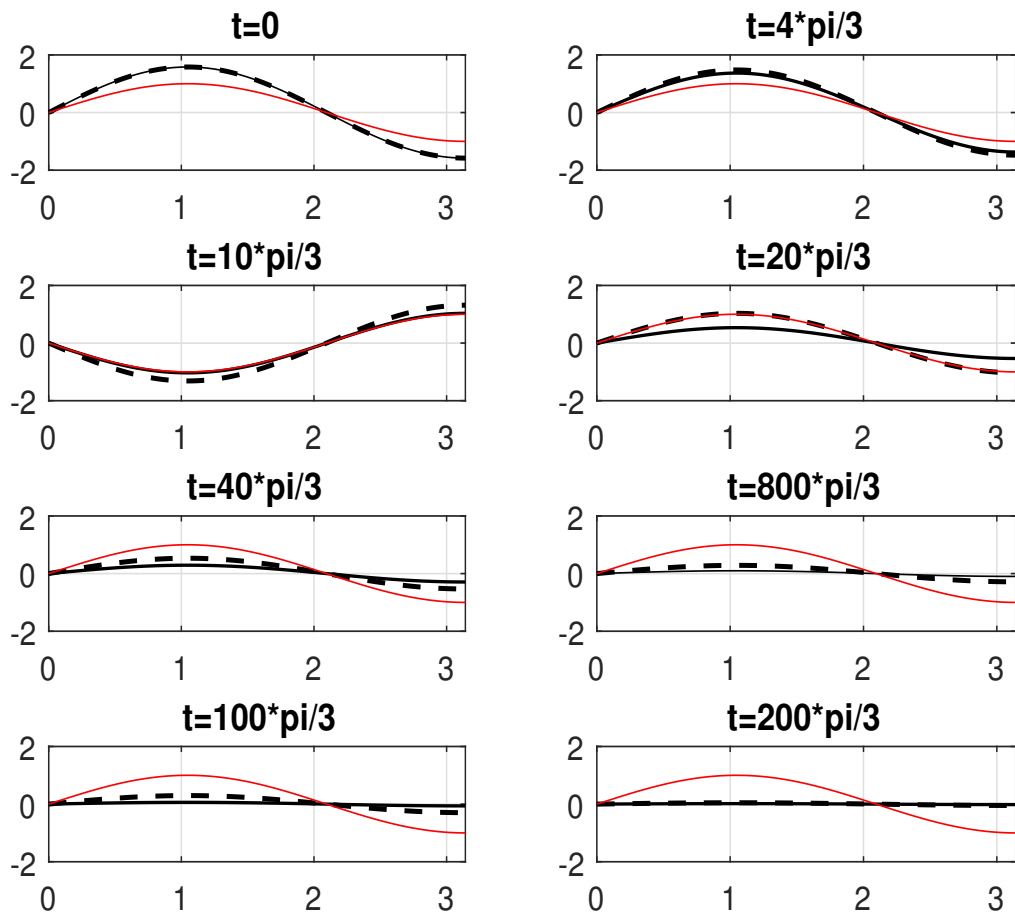


FIGURE 3.1 – Solution asymptotique $u_{echm}(x, t)$ pour $\varepsilon = 0$ — et $\varepsilon = 0.05$ - - et $\varepsilon = 0.1$ —.

3.3.2 Le cas d'amortissement frontière fort

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2(\varepsilon t) \partial_x^2 u = 0, & \text{pour } x \in]0, \pi[\text{ et } t > 0, \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(\pi, t) - \varepsilon \partial_{txx}^3 u = 0, & \text{pour } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\frac{3x}{2}) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = 0, & \text{dans }]0, \pi[. \end{cases}$$

L'approximation du premier terme de la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, t) \sim u_{echm}(x, t) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos(\varepsilon t)}} \times \exp\left(-\frac{16\varepsilon^2 t + \sin(2\varepsilon^2 t) + 16 \sin(\varepsilon^2 t)}{16\varepsilon\pi}\right) \cos(3t/2) \sin(3t/2).$$

Le graphique suivant représente la solution $u_{echm}(x, t)$ pour différents temps :

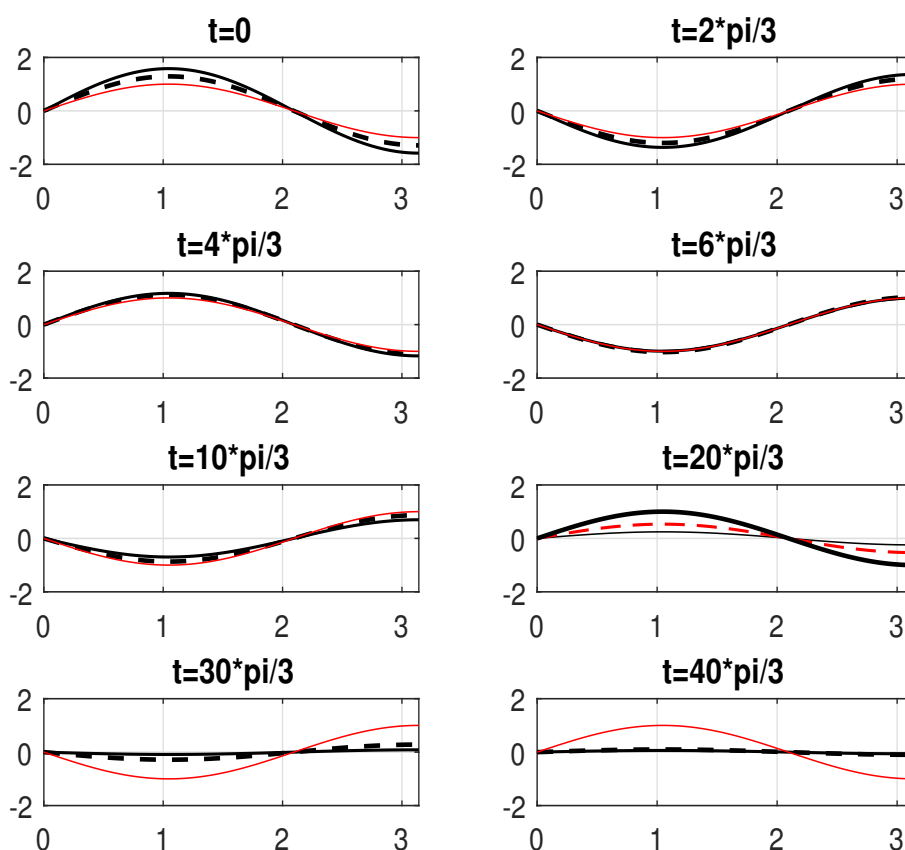


FIGURE 3.2 – Solution asymptotique $u_{echm}(x, t)$ pour $\varepsilon = 0$ — et $\varepsilon = 0.05$ - - et $\varepsilon = 0.1$ —.

Bibliographie

- [1] S. C CHIKWENDU. *Weakly nonlinear waves with slowly-varying speed*. Nigerian Journal of Technology Vol.2 (1978).
- [2] S. C CHIKWENDU AND J.KEVORKIAN. *A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities*, *SIAM J. Appl. Math*, 22, No.2 (1972) 233-258.
- [3] DRAMAWIJOYO AND W T.VAN HORSSSEN. *On Boundary Damping for a Weakly Nonlinear Wave Equation* .Nonlinear Dynamics, 30, pp.179-191, 2002.
- [4] M. H. HOLMES. *Introduction to Perturbation Methods* . Springer Science, Business Media, New York, 2013.
- [5] J. KEVORKIAN AND J.D.COLE. *Multiple scale and singular perturbation methods* .Springer-Verlag, New York, 1996.
- [6] J. KEVORKIAN. *The Two-variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations*, *Lectures in Appl. Math , Space Mathematics III*, American Math. Soc, New York (1966) 246-275.
- [7] S. SALSA. *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*. Springer, 2008.
- [8] W. A STRAUSS. *Partial Differential Equations, An introduction*, John Wiley & sons, 2007.
- [9] F. VERHULST. *Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Timescales Dynamics*,. Springer, 2006.
- [10] G. B. WHITHAM. *A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian*, *J. Fluid Mech*, 22, part 2 (1965) 273-283.
- [11] G. B. WHITHAM. *Two-timing, Variational principles and waves*, *J.Fluid Mech*, 44, (1970) 373-395.

ملخص:

في هذا العمل، قمنا باستخدام طريقة السلالم المتعددة لإيجاد تقريب لحل معادلة الموجة ذات معاملات متغيرة ببطء وخاضعة لتخميد خطي، قوي أو ضعيف، مضروب في معامل صغير $\varepsilon > 0$. درسنا حالة التخميد الداخلي وكذلك التخميد على الأطراف. كما قمنا بإعطاء بعض الأمثلة العددية لتوضيح فعالية هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: معادلة الموجة مع تخميد، طريقة السلالم المتعددة، المعاملات المتغيرة ببطء.

Abstract:

In this work, we apply the multiple scales method to construct an approximation of the solution of the wave equation with slowly varying coefficients and a linear, weak or strong, damping term multiplied by a small parameter $\varepsilon > 0$. We studied the internal damping as well as damping at the boundary. Also, some numerical examples are given to illustrate the effectiveness of this method.

Keywords: Damped wave equation, slowly varying coefficients, multiple scales method.

Résumé :

Dans ce travail, on applique la méthode des échelles multiple pour construire une approximation de la solution d'une équation d'onde avec des coefficients à variation lente et un amortissement linéaire, faible ou fort, multiplié par un petit paramètre $\varepsilon > 0$. On a étudié le cas d'amortissement interne et aussi le cas d'un amortissement frontière. Quelques exemples numériques sont donnés pour illustrer l'efficacité de cette méthode.

Mots-clés : Équation des ondes amortie, coefficients à variation lente, méthode des échelles multiples.