REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Méthode de sur et sous solutions pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire

Présentée par :
LAADJEL Bahriya

Devant le jury composé de :

M^r *MERZOUGUI* Abdelkrim	Pr,	Université de M'sila	**Président**.
M^r *SAADI* Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r *ARIOUA* Yacine	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercie avant tous *ALLAH* pour son aide, ses innombrables dons, *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir mon étude en master en mathématique.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remerciments à mon encadreur **Mr. SAADI Abderachid** pour avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et n'a pas cessé de me donner ses conseils.

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr. MERZOUGUI Abdelkrim** et **Mr. ARIOUA Yacine** d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je remercie évidemment mes parents, et tous mes frères de les avoir encouragés et soutenus pendant de nombreuses années dans la poursuite de mes études.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master EDP et applications, souhaitons le bonheur et réussite dans la vie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

A tous MERCI

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes très cher parents

À mon soeurs et mes frères

À tous mes amis

À toute la famille LAADJEL

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.

Bahriya

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$: *Ensemble des nombres entiers naturels.*
$\mathbb{R}$: *Ensemble des nombres réels.*
$\mathbb{C}$: *Ensemble des nombres complexes.*
Ω : *Domaine borné dans* $\mathbb{R}$.
L^p : *Espace des fonctions mesurables de puissance* $p \in [1, +\infty]$, *intégrables sur* Ω.
$L^\infty(\Omega)$: *Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur* Ω.
$C(\Omega)$: *Espace des fonctions continues sur* Ω .
$C^n(\Omega)$: *Espace des fonctions* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivables* n *fois et* $f(x)$ *continues.*
$AC^n(\Omega)$: *Espace des fonctions* f *dérivables d'ordre* $n-1$ *telle que* $f^{n-1} \in AC(\Omega)$.
$\Gamma(.)$: *La fonction Gamma.*
$\beta(.,.)$: *La fonction Bêta.*

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de calcul des dérivées classiques, il a plusieurs d'approches de calcul fractionnaire, par exemple : l'approche de Rieman-Liouvile et l'approche de Caputo. Il est évident de poser la question suivant :

"Est-qu'on peut généraliser des résultat classique au cas fractionnaire ?"

Pour rependre a cette question, les chercheur fais beaucoup de travaux, en particulier des travaux liées aux équation différentielles d'ordre fractionnaire, et leur problèmes aux limites associes.

Parmi les méthodes classique de résoudre un problème aux limites associes aux équation différentielles ordinaire, il y a la méthode de sous et sur-solution .

Récemment, il y'a des travaux qui essayait de généraliser cette méthode au cas fractionnaire, surtout l'approche de Caputo.

Notre travail est divisé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des notions et des résultats préliminaires sur des fonctions spéciale lesquelles : fonction de Gamma, fonction de Bêta. On donne aussi quelques notions de calcul fractionnaire de type de Riemann-Liouville et de Caputo, affin utiliser dans le dernier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on étudie des exemples de problèmes aux limites associées à une équation différentielle ordinaire de seconde ordre, en utilisant la méthode de sous et sur solution.

Dans le troisième chapitre, nous donnons des définitions et un théorèmes de l'existence de sous et sur-solution d'un problème aux limites associé à une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type de Caputo.

Chapitre 1

Eléments de Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on donne des notions et des résultats préliminaires sur les fonctions spéciales lesquelles : fonction de Gamma, fonction de Bêta. On donne aussi quelques notions de calcul fractionnaire de type de Riemann - Liouville et de Caputo, affin utiliser dans le dernière chapitre.

1.1 Fonctions spéciales pour une dérivation fractionnaire

Dans ce paragraphe, nous commençons par des définitions et quelques propriétés des fonctions de Gamma et de Béta. Ces fonction jouent un rôle important dans la théorie de différentiation d'ordre fractionnaire.

Définition 1.1. [11] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{-\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt \ , \ (\forall z \in \mathbb{C} \ tq \ Re(z) > 0) \tag{1.1}$$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone, strictement décroissant pour $0 < z < 1$

Propriétés 1.1.

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), Re(z) > 0$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$.
4. $pour \quad p > 0$, on a :
$$\Gamma(p) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$$

Démonstration.

1.
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1.$$

2. *En utilisant l'intégration par partie* :
$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^z dt = [-\exp(-t)\, t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt = z\, \Gamma(z).$$

3. *En utilisant la propriété (2)* :$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$. *En effet ;*
$\Gamma(1) = 1.$
$\Gamma(2) = 2\Gamma(1) = 1!$
$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$
$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$
:
:
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$

4. *Considérons la fonction*
$$f(n,p) = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n x^{p-1} dx.$$

On a :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(n,p) = \Gamma(p).$$

ona :

$$f(n,p) = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx.$$

Par l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx = [(1-\frac{x}{n})^n \frac{x^p}{n}]_0^n + \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{p})^{n-1} x^p dx \end{aligned}$$

Intégrons une autre fois fois :

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{p})^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p}[(1-\frac{x}{n})^n \frac{x^{p+1}}{p+1}]_0^n + \frac{n-1}{np(p+1)}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1} x^{p+1} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2(p)(p+1)}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-2} x^{p+1} dx \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)\dots(p+(n-1))}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-n} x^{p+(n+1)} dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\dots(p+(n-1))}[\frac{x^{n+p}}{n+p}]_0^n \\ &= \frac{n! n^p}{p(p+1)\dots(n+p))} \end{aligned}$$

Donc :

$$\Gamma(p) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)\dots(n+p)}$$

□

Définition 1.2. [11] la fonction Bêta est définie pour des nombres complexes p et q par :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, (Re(p) > 0, Re(q) > 0) \tag{1.2}$$

Théorème 1.1. *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par relation suivante :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \; (Re(p) > 0, Re(q) > 0) \tag{1.3}$$

Démonstration.

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

On pose : $t = \sin^2(\theta) \quad donc \quad dt = 2 * \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta, \quad si \quad t = 0 \; alors \; \theta = 0, \; si \; t = 1 \; alors,$ $\sin^2\theta = 1 \quad i.e \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} B(p,q) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{p-1}(1-\sin^2\theta)^{q-1}\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2p-1}\cos\theta^{2q-1}d\theta \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp(-(x^2+y^2))x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$$

$(x,y) \longrightarrow (r,\theta) \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $r^2 = x^2+y^2$;$dxdy = drd\theta$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) =& 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} \exp(-r^2)(r\cos(\theta))^{2p-1}(r\sin(\theta))^{2q-1}rdrd\theta \\ =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta \; 2\int_0^{+\infty} \exp(-r^2)r^{2p+2q-2}rdr \\ =& B(p,q) \; 2\int_0^{+\infty} \exp(-r^2)r^{2p+2q-1}dr \end{aligned}$$

$Si \; r^2 = z \quad alors \quad r = z^{\frac{1}{2}} \quad donc \; dr = \frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}dz$

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} \exp(-r^2)r^{2p+2q-1}dr =& 2\int_0^{+\infty} \exp(-z)z^{\frac{1(2q+2p-1)}{2}}\frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}dz \\ =& \int_0^{+\infty} \exp(-z)z^{p+q-1}dz = \Gamma(p+q); \end{aligned}$$

alors

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

□

Exemple 1.1. *On a* :$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi\cos(\pi x)$
$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(2/3)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1)} = \pi\cos(\dfrac{\pi}{3}).$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette paragraphe, nous introduirons des définitions et propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaire de Riemann -Liouville.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b], une primitive de f est donnée par l'expression :

$$\forall \in [a,b] : (I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

pour une primitive second et d'après le théorème du Fubini on a :

$$\begin{aligned}(I_a^1 f)^2(t) = (I_a^1 f)(t)(I_a^1 f)(t) &= \int_a^t (\int_a^u f(\tau)d\tau)du \\ &= \int_a^t (\int_u^t du) f(\tau)d(\tau) \\ &= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d(\tau),\end{aligned}$$

on itérant on arrivé a :

$$(I_a^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.5}$$

En généralisation du factoriel par la fonction de Gamma d'Euler :$\Gamma(n) = (n-1)!$ *alors ;*

$$(I_a^1 f)^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \tag{1.6}$$

Définition 1.3. [11] *Soit $f \in L^1[a,b]$ une fonction intégrable sur [a,b] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$(I_a^1 f)^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

Théorème 1.2. *Si $f \in L^1[a,b]$ existe pour tout $\alpha > 0$ on a $(I_a^\alpha f) \in L^1([a,b])$.*

Démonstration. *Ona :*

$$\begin{aligned}|\int_a^t I_a^\alpha f|dt &\leqslant \int_a^t |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^T ((t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^T (\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} dt)|f(\tau)|d\tau\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini , alors :

$$\begin{aligned}\int_a^t |I_a^\alpha f|dt &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^T |f(\tau)|(\int_\tau^T (t-\tau)^{\alpha-1} dt)d\tau \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^T |f(\tau)|(T-\tau)^\alpha d\tau \\ &\leqslant \frac{(T-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^T |f(\tau)|d\tau\end{aligned}$$

Finalement ; $f \in L^1[a,b]$, donc $(I_a^\alpha f) \in L^1([a,b])$. □

Exemple 1.2. L'intégral au sens de Riemann-Liouville de la fonction définie par $f(t) = (t-a)^{\beta}$ est donné par :

$$(I_a^1(t-a)^{\beta})^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta} d\tau. \tag{1.8}$$

Le changement de variable :$\tau = a + s(t-a)$ où $s = 0$ quand $\tau = a$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = (t-a)ds$ alors (2.5) devient :

$$\begin{aligned}
(I_a^1(t-a)^{\beta})^{\alpha}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a+(t-a))^{\alpha-1}(a+(t-a)-a)^{\beta} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t ((t-a)(1-s))^{\alpha-1}((t-a))^{\beta}(t-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}((t-a))^{\beta+1}s^{\beta}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}((t-a)) \int_a^t (1-s)^{\alpha-1}s^{(\beta+1)-1}ds
\end{aligned}$$

En utilisant la fonction Bêta :

$$B(\alpha, \beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)};$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \qquad = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$$

Proposition 1.1. *Soit $\alpha > 0, \beta > 0$:*

(1) $I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$.

(2) $f \in L^1[a,b]$ *, On a :* $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f = I_a^{\beta} I_{\beta}^{\alpha} = I_a^{\alpha+\beta}$.

Maintenant, on définie la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 1.4. [11] Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b], \alpha > 0, n = [\alpha]+1$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α est définie par :

$$D_a^{\alpha} f(t) = (\frac{d}{dt})^n (I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt})^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(f(\tau))d\tau \tag{1.9}$$

Si $0 < \alpha < 1$,$n \in \mathbb{N}$ alors :

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt}) \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}(f(\tau))d\tau$$

Proposition 1.2. [11]

(1) $D_a^{\alpha} f(t) = f(t)$;

(2) $D_a^{n} f(t) = f(t)$;

(3) pour $\alpha > 0, \beta > 0$, *on a :* $D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\right)^{\beta-1}$

1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette paragraphe, nous introduisions définitions, théorèmes, et quelque propriété de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Définition 1.5. [11] Soit $f^n \in L^1([a,b])$; $\alpha > 0, n = [Re(\alpha)] + 1$; La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α est définie par la relation suivant :

$$({}^cD_a^\alpha)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \, f^n(\tau) \, d\tau. \tag{1.10}$$

Si $\alpha = 0 : D_a^\alpha \; = \; f(t)$

Théorème 1.3. [11] *Soit* $f \in AC^n([a,b])$ *,*$n = [Re(\alpha)] + 1$, $\alpha > 0$ *, la dérivée fractionnaire au sens de caputo est définie par :*

1. *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$;

$$({}^cD_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \, f^n(\tau) d\tau = I_a^{n-\alpha} D_a^n f(t).$$

2. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$*, alors :* $({}^cD_a^\alpha f)(t) = f^n(t)$

Proposition 1.3. [11] *Soient* f, g *deux fonction et* $\alpha > 0$ *tels que :* $n = [Re(\alpha)] + 1$*, on a :*

$${}^cD_a^\alpha(\lambda f + g)(t) = \; \lambda({}^cD_a^\alpha f)(t) + ({}^cD_a^\alpha)(t) \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Proposition 1.4. [11] *pour* $\alpha > 0$ *,* $\beta > 0$ *On a :*

$${}^cD_a^\alpha(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \; ; \; \beta > n$$

1.4 Quelques notions supplémentaires

Propriétés 1.2. On a les relations suivantes :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k \right] \tag{1.11}$$

$${}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha[f(t) - f(a)] \qquad (0 < Re(\alpha) < 1), \tag{1.12}$$

$${}^cD_a^\alpha f(t) = (I_a^{n-\alpha} D^n f) \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}). \tag{1.13}$$

Proposition 1.5. [9] *Soit $\alpha > 0$,$n = [Re(\alpha)] + 1$, $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$. Alors l'équation défferentielle fractionnaire*

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = 0,\ 0 < t \leqslant 1$$

admet une solution :

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$
$$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n-1$$

Proposition 1.6. *[9] Soit $\alpha > 0$,$n = [Re(\alpha)] + 1$, on suppose que $u \in C^n(0,1)$, alors :*

$$I^{\alpha}(^{C}D^{\alpha}u(t)) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n-1$$

Théorème 1.4. *[1] Soit $f : [0;1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tel qu'il existe $M > 0$ vérifie :*

$$|f(t;x)| \leqslant M; t \in [0;1]; x \in \mathbb{R} :$$

Alors,
le problème admet au moins une solution sur $[0;1]$

Théorème 1.5. *[1] Soit A un sous ensemble de $C(J;E)$; A est relativement compact dans $C(J;E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifies :*

1. *L'ensemble A est borné c'est à dire, il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$|f| \leqslant K\ \forall x \in J \text{ et } f \in A,$$

2. *l'ensemble A est équicontinue, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que :*

$$\forall t_1, t_2 \in J\ ,\ |t_1 - t_2| < \delta\ \Leftrightarrow |f(t_1) - f(_2)| \leqslant \varepsilon,$$

3. *pour tout $x \in J$, l'ensemble $f \in \{f(x)\ ;\ f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

Définition 1.6. [9] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $AC^n([a,b])$ espace de fonction f dérivable jusque l'ordre $(n-1)$ tell que $f^{n-1} \in AC([a,b])$
est définie par :

$$AC^n([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \in C^{n-1}[a,b] \quad et \quad f^{n-1} \in AC[a,b]\}$$

En particulier : $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$

CHAPITRE 2

MÉTHODES DE SOUS ET SUR LA SOLUTION POUR ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

Dans ce chapitre, on étudie des exemples de problèmes aux limites associées à une équation différentielle ordinaire de seconde ordre, en utilisant la méthode de sous et sur solution.

2.1 Théorèmes de Comparaison

Dans cette section, on considère l'équation différentielle

$$u'' = f(x, u, u'), \tag{2.1}$$

où $f \in C(I \times \mathbb{R}^2)$ est supposée croissante par rapport à la seconde variable.

Définition 2.1. :

1. On appelle sous - solution de l'équation (2.1) toute fonction v vérifie :

$$\begin{array}{l} v'' \geq f(x, v, v'), \\ v(a) \leq u(a), v(b) \leq u(b) \end{array} \tag{2.2}$$

2. On appelle sur - solution de l'équation (2.1) toute fonction w vérifie :

$$\begin{array}{l} w'' \leq f(x, v, v'), \\ w(a) \geq u(a), w(b) \geq u(b) \end{array} \tag{2.3}$$

Soit v une sous-solution et w une sur-solution avec $v(a) \leq u(a) \leq w(a), v(b) \leq u(b) \leq w(b)$. On a le résultat de comparaison

Théorème 2.1. [3] *Si l'une des inégalités est stricte, alors $v < u$*

Théorème 2.2. *[6] Supposons qu'il existe $K > 0$, et que f croissant par rapport au seconde variable, Lipschitz unilatérale par rapport a la 3éme variable, i.e :*

$$f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2) \leqslant K(z_1 - z_2), \forall z_1 > z_2$$

Alors : $v \leqslant u \leqslant w$ sur I.

Corollaire 2.1. *[6] D'après le théorème 2.2, le problème aux limites ;*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'),\ a < x < b \\ y(a) = \alpha\ ;\ y(b) = \beta \end{cases}$$

admet au plus une solution.

2.2 *Problème de Sturm-Liouville non linéaire*

Considérons le problème de Sturm-Liouville non linéaire :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y')\ ,\ a \leqslant x \leqslant b \\ a_1 y(a) - a_2 y'(a) = \alpha \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \end{cases} ; \tag{2.4}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0$; $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$; $\beta_1 + \beta_2 > 0$

Définition 2.2. [6] Soit v et w deux fonction deux fois dérivables.

1. v est sous-solution du problème (2.4) si :

$$\begin{cases} v''(x) \geqslant f(x, v(x), v'(x)) \ , \ \forall x \in]a, b[\\ a_1 v(a) - a_2 v'(a) \leqslant \alpha \ ; \\ b_1 v(b) + b_2 v'(b) \leqslant \beta \ ; \end{cases} \tag{2.5}$$

2. w est une sur-solution du problème (2.4) si :

$$\begin{cases} w''(x) \leqslant f(x, w(x), w'(x)) \ ; \ \forall x \in]a, b[\\ a_1 w(a) - a_2 w'(a) \geqslant \alpha \ ; \\ b_1 w(b) + b_2 w'(b) \geqslant \beta \ ; \end{cases} \tag{2.6}$$

Théorème 2.3. *[6] Considérons le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), \ a < x < b \\ y(a) = \alpha \ ; y(b) = \beta \end{cases} \tag{2.7}$$

Supposons l'existence de v, w respectivement sous et sur-solutions telles que $v \leq w$. Supposons que f est continue sur l'ensemble

$$K = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}; v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Alors, le problème (2.7) admet au moins une solution u telle que $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$.

Corollaire 2.2. *[6] Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, croissante par rapport y. Alors le problème :*

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y) \ ; \ a < x < b \\ y(a) = \gamma \ , \ y(b) = \delta \ ; \end{cases} \tag{2.8}$$

admet exactement une solution $y \in C^2([a, b])$

Théorème 2.4. *Supposons que :*

1. *Il existe v, w deux fonctions de classe C^1 sous et sur solution avec $v \leq w$ sur $[a; b]$,*
2. *f est continue et $k-$ lipschitzienne par rapport à la 3ème variable sur l'ensemble*

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2; v(x) \leq y \leq w(x)\}.$$

Alors, le problème (2.4) admet au moins une solution $u \in C^2([a; b])$ telle que $v(x) \leq u(x) \leq w(x); \forall x \in [a, b]$.

Démonstration. *Considérons la fonction modifie f définie par :*

$$f^{\star}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, c) & si \quad z \geqslant 0 \\ f(x, y, z) & si \quad |z| \leqslant 0 \\ f(x, y, -c) & si \quad z \leqslant 0, \end{cases}$$

tel que : $c > max_{x \in (a,b)}\{|v'(x)|, |w'(x)|\}$

$$f^{\star\star}(x, y, z) = \begin{cases} f^{\star}(x, v(x), z) \ si \ y \leqslant v(x) \\ f^{\star}(x, w(x), z) \ si \ y \geqslant w(x) \end{cases}$$

$\grave{O}u$

$$\tilde{f} = f^{\star\star}(x, (\gamma(x,y)), z) + \frac{y - \gamma(x,y)}{1+y^2}$$

Ona : $\gamma(x,y) = max\{v(x), min(y, w(x))\}$.

Alors,

$$\forall (x,y,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2 : |\tilde{f}(x,y,z)| \leqslant max_{a\leqslant y\leqslant b, v(x)\leqslant y\leqslant w(x)}|f(x,y,z)| + \frac{1}{2} + max_{a\leqslant y\leqslant b}(|v(x)|, |w(x)|).$$

Soit $|z_1| \leqslant C, z_2 \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} |f^\star(x,y,z_1) - f^\star(x,y,z_2)| =& |f(x,y,z_1) - f(x,y,z_2)| \\ &\leqslant K|z_1 - c| = K(c - z_1) \\ &\leqslant K(z_2 - z_1) = K|z_1 - z_2| \end{aligned}$$

Donc $f^\star$ est $k-$Lipschitzienne. par suite ,$\tilde{f}$ est aussi k-lipschitzienne et bornée .

D'après théorème (2.1), le problème $(P_{\tilde{f}})$ admet au moins une solution u
Soit v sur-solution, w est une sous-solution du problème (2.4).

$$v(x) \leqslant u(x) \leqslant w(x)$$

• On montre que $u(x) \leqslant w(x)$, pour certain x et on suppose que $d = u(x) - w(x)$ admet un maximum strictement positif en $x_0 \in (a,b)$.

Etape (1) $x_0 \in]a,b[$ **:**

On a : $d'(x_0) = 0$, et $d''(x_0) \leqslant 0$

$$d(x) > 0 \tag{2.9}$$

alors :

$$d''(x_0) = u''(x_0) - w''(x_0) \leqslant \tilde{f}(x_0, u(x_0), u''(x_0)) - \tilde{f}(x_0, w(x_0), w''(x_0)).$$

Donc :

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow w'(x_0) - u'(x_0) = 0 \Leftrightarrow w'(x_0) = u'(x_0)$$

alors

$$\begin{aligned} &\leqslant f(x_0, w(x_0), w'(x_0) - \tilde{f}(x_0, u(x_0), w'(x_0)) \\ &\leqslant f(x_0, w(x_0), w'(x_0) - f^\star(x_0, \gamma(x_0), u(x_0)), w'(x_0)) - \frac{u(x_0) - \gamma(x_0, u(x_0))}{1 + u^2(x_0)} \\ &\leqslant f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) - f^\star(x_0, w(x_0), w'(x_0)) - \frac{u(x_0) - w(x_0)}{1 + u^2(x_0)} \end{aligned}$$

On a : $w'(x_0) > 0$, donc les fonctions f et $\tilde{f}$ coïncident en x_0.

Finalement,

$$f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) - f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) + \frac{d(x_0)}{1 + d^2(x_0)} \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Par conséquent ,

$$d(x_0) \leqslant 0$$

d'aprés (2.5), on a une contradiction.

$\bullet v(x) \leqslant u(x)$ l'autre inégalité de même manière.

Etape (2) $x_0 = a$ **:**

$$\begin{cases} d(a) > d(x) \text{ , pour tout } x \in]a,b[\\ a_1 w(a) - a_2 w'(a) \leqslant \alpha \text{ et} \\ a_1 u(a) - a_2 u'(a) = \alpha \end{cases} \quad donc \Leftrightarrow a_1(u(a) - w(a)) - a_2(u'(a) - w'(a)) \geqslant 0$$

Donc,
$a_1 d(a) - a_2 d'(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a_1 d'(a) \geqslant a_2 d'(a)$ $(a_1, a_2 \neq 0)$
c'est à dire : $d'(a) \leqslant 0$
D'autre part, il existe $\varepsilon > 0$ *tel que* $d(x) > 0$ *,pour tout* $x \in (a,b)$ *et l'on a sur l'intervalle* $J = (a, a+\varepsilon)$ *:*

$$u''(x) - w''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow u''(x) \geqslant w''(x)$$
$$f(x, u(x), u'(x)) \geqslant \tilde{f}(x, w(x), w'(x))$$
$$f^\star(x, \gamma(x), u(x)), u'(x)) + \frac{u(x) - \gamma(x, u(x))}{1 + u^2(x)} \geqslant f(x, w(x), w'(x))$$
$$f^\star(x, w(x), w'(x)) + \frac{u(x) - w(x)}{1 + u^2(x)} \geqslant f(x, w(x), w'(x))$$

On a :$f, f^\star$ *est* $k-lipschitizienne$
Alors :

$$f^\star(x, w(x), w'(x)) - f^\star(x, w(x), w'(x)) \geqslant -k|v'(x) - u'(x)|$$

Par suite,

$$d''(x) \geqslant -K|d'(x)|, \quad pour\ tout \quad x \in J$$

$*d'(x) \leqslant 0, \quad pour\ tout \quad x \in J$. Alors $d''(x) \geqslant \ k\, d'(x) \quad \forall x \in J$
Par intégration :

$$\int d''(x) = \int kd'(x) \quad \Leftrightarrow \ln d'(x) = kx + c \Leftrightarrow \quad d'(x) = \exp(kx)$$

La fonction $x \hookrightarrow d'(x)\exp(-kx)$ *est croissante sur* J *.On a* $d(a) > d(x)$, $d'(x)\exp(-kx) > d'(a)\exp(-ka) \geqslant 0. \forall x \in (a,b)$. *Alors* $d'(x) \equiv 0$ *, Donc* $d'(a) \equiv d$

• *On a* $d''(x) \leqslant f(x, w(x), w'(x)) - f(x, w(w), w'(w)) + \dfrac{d(x)}{1 + u^2(x)} \leqslant 0$

$$0 < \frac{d(x)}{1 + u^2(x)} \leqslant 0, \quad Donc \quad d(x) = d(a) > 0$$

ce qui est une contradiction, alors

$$d'(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in J$$

$\bullet d'(x) \geqslant 0. \quad pour\ tout\ x \in (x_1, x_1 + \delta), \quad (\delta > 0)$
On a

$$d''(x) \geqslant -k\, d'(x)$$

Par intégration :

$$\int_{x_1}^{x} \frac{d''(x)}{d'(x)} \geqslant \int_{x_1}^{x} -k \Leftrightarrow \ln d'(x) - \ln d'(x_1) \geqslant -k(x - x_1) + c$$

$$\ln d'(x) - d'(x_1) \geqslant -k(x - x_1) + c \ln \left(\frac{d'(x)}{d'(x_1)} \right) \geqslant -k(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d'(x) \geqslant d'(x_1) \exp(-k(x - x_1)) > 0$$

D'aprés les conditions aux limite : $\begin{cases} b_1 w(b) + b_2 w'(b) \geqslant \beta \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 w(b) - b_2 w'(b) \leqslant \beta \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = \beta \end{cases}$

Donc : $b_1 d(b) + b_2 d'(b) \leqslant 0$, i.e

$$b_2 d'(b) \leqslant -b_1 d(b) \leqslant 0. \tag{2.11}$$

D'autre part ,En continuant ainsi suite jusqu'au point b , on arrive à,

$$d'(b) > 0 \quad et \quad d(b) > d(a) > 0 \tag{2.12}$$

d'après (2.6) et (2.7) , donc $b_2 = 0$
Alors $0 < -b_1 d(b) < 0$.
Donc contradiction
il suffisant un choisir $c > max(R, |\, v'(x)|, |w'(x)|)$ *, il montre* $\exists \mathbb{R} > 0$ *tel que* $|u'(x)| \leqslant \mathbb{R}$.
Alors : pour $\tilde{f} = f^\star$ *le problème* $(p_{f^\star})$ *admette au moins une solution .*

□

2.3 Un problème périodique

Dans cette paragraphe, on s'intéresse à l'existence de solution de classe C^2.

Soit f est une fonction continue. On considère le problème périodique.

$$\begin{cases} u'' = f(t, u) \\ u(a) = u(b) \; ; \; u'(a) = u'(b) \; , \end{cases} \tag{2.13}$$

La méthodes de sous et sur-solution pour les problèmes périodiques est donné par la définition suivant :

Définition 2.3. [6] : Une fonction $\alpha \in C^2(]a, b[) \bigcap C^1(]a, b[)$ est une sous-solution du problème (2.13) si :

(a) $\forall t \in (]a, b[) \; , \; \alpha''(t) \geqslant f(t, \alpha(t))$;

(b) $\alpha(a) = \alpha(b) \; , \; \alpha'(a) \geqslant \alpha'(b)$.
Une fonction $\beta \in C^2(]a, b[) \bigcap C^1(]a, b[)$ est une sur-solution du problème (2.13) Si :

(a) $\forall t \in]a, b[\; , \beta''(t) \leqslant f(t, \beta(t))$;

(a) $\beta(a) = \beta(b)$, $\beta'(a) = \beta'(b)$.

Théorème 2.5. *Soit α et β sous et sur solution de problème périodique (2.13), telle que $\alpha \leqslant \beta$. On suppose que f est continue sur l'ensemble :*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}; \alpha \leqslant u \leqslant \beta\}$$

Alors, Le problème (2.13) admet au moins une solution $u \in C^2([a, b])$ telle que $\forall t \in [a, b]$

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$$

Démonstration. *Considérons le problème modifie* :

$$\begin{cases} u'' - u + f(t, \gamma(t, u)) + \gamma(t, u) = 0 \\ u(a) = u(b) \; ; \; u'(a) = u'(b) \; , \end{cases} \tag{2.14}$$

òu $\gamma : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\gamma(t, u) = \begin{cases} \alpha(t), & si \quad u < \alpha(t) \\ u, & si \quad \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t) \\ \beta(t), & si \quad \beta < u, \end{cases}$$

Etape (1) : Soit α, β sous et sur-solution de problème (2.13)

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$$

• **Première cas :** *Par l'absurde , On montre que $w(t) = u(t) - \alpha(t)$ admet un minium strictement négatif en $t_0 \in [a, b]$*
$\star$ $t_0 \in]a, b[$, *Alors $w''(t_0) \geqslant 0$ (Car u est un solution de problème (2.3)) et $u(t_0) < \alpha(t_0)$,*
Donc

$$\begin{aligned} u''(t_0) - \alpha''(t_0) &= -f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha(t_0) + u(t_0) - \alpha(t_0) \\ &= [-f(t_0) - \alpha(t_0)] + [u(t_0) - \alpha(t_0)] \\ &< 0 \end{aligned}$$

Alors, on a une contradiction.
$*Si \quad t_0 \in \{a, b\}$,

$$min_{t \in (a,b)}(u(t) - \alpha(t)) = u(a) - \alpha(a) = u(b) - \alpha(b) < 0$$

Donc $u'(b) - \alpha'(b) \leqslant 0 \leqslant u'(a) - \alpha'(a)$, $\alpha(t)$ *sur-solution de problème (2.13) alors, On a*

$$u'(a) = u'(b) \quad et \quad \alpha'(0) \geqslant \alpha'(b) \quad i.e \quad u'(a) - \alpha'(a) \leqslant u'(b) - \alpha'(b)$$

$D'ou$

$$u'(a) - \alpha'(a) = u'(b) - \alpha'(b) = 0$$

Donc pour t assez petit, on a $u(t)-\alpha(t)\leqslant 0$ et

$$\begin{aligned}\int_0^t [u''(s)-\alpha''(s)]\,ds &= \int_0^t [-f(s,\alpha(s))+u(s)-\alpha(s)-\alpha''(s)]\,ds\\ &= \int_0^t [-f(s,\alpha(s))-\alpha''(s)]+[u(s)-\alpha(s)]\,ds\\ &< 0\end{aligned}$$

i.e $u'(t)-\alpha'(t)<0$
D'ou la contradiction avec définition de t_0.

• **Seconde cas :** *Par l'absurde , on montre que $w(t)=u(t)-\beta(t)$ admet un maximum strictement positif en $t_0\in[a,b]$*
$\star$ $t_0\in]a,b[$*,Alors $w''(t_0)\leqslant 0$(Car u est un solution de problème (2.13)) et $u(t_0)>\beta(t_0)$,*
Donc

$$\begin{aligned}u''(t_0)-\beta''(t_0) &= -f(t_0,\beta(t_0))+u(t_0)-\beta(t_0)-\beta''(t_0)\\ &= [-f(t_0,\beta(t_0))-\beta(t_0)]+[u(t_0)-\beta(t_0)]\\ &> 0\end{aligned}$$

Alors on a une contradiction.

$*Si \quad t_0\in\{a,b\}$,

$$max_{t\in(a,b)}(u(t)-\beta(t))=u(a)-\beta(a)=u(b)-\beta(b)>0.$$

Donc $\quad u'(b)-\beta'(b)\leqslant 0\leqslant u'(a)-\beta'(a),\quad \beta(t)$ *sous-solution de problème (2.13) alors*
On a

$$u'(a)=u'(b)\quad et\quad \beta'(a)\leqslant\beta'(b)\quad i.e\quad u'(a)-\beta'(a)\geqslant u'(b)-\beta'(b)$$

$D'ou$

$$u'(a)-\beta'(a)=u'(b)-\beta'(b)=0$$

Donc pour $t>0$ assez petit, on a $u(t)-\beta(t)>0,\quad (Car\quad u(a)-\beta(a)>0)$ et

$$\begin{aligned}\int_0^t [u''(s)-\beta''(s)]\,ds &= \int_0^t [-f(s,\beta(s))+u(s)-\beta(s)-\beta''(s)]\,ds\\ &= \int_0^t [-f(s,\beta(s))-\beta''(s)]+[u(s)-\beta(s)]\,ds\\ &> 0\end{aligned}$$

i.e $u'(t)-\beta'(t)=\int_0^t[-f(s,\beta(s))-\beta''(s)+u(s)-\beta(s)]\,ds>0$
D'ou la contradiction avec définition de t_0.

Etape (2) : La solution de problème (2.13) est définie par l'intégrale : suivante :

$$u(t)=\int_a^b G(t,s)\,[f(s,\gamma(s,u(s)))+\gamma(s,u(s))]\,ds.$$

où G(t,s) est la fonction de Green du problème suivante :

$$\begin{cases} u''-u+f(t)=0,\\ u(a)=u(b);u'(a)=u'(b).\end{cases}$$

L'opérateur

$$T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$
$$u \longrightarrow Tu$$

est définie par :

$$Tu(t) = \int_a^b G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))\right] ds.$$

Le problème (2.13) admet au moins un solution si seulement si les conditions suivants son satisfaites :
1) T est Continue : Soit f, G, γ est une fonction continue et la suite $(u_n)_n$ est une suite convergence vers u dans $C([a,b])$
Alors

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| =$$

$$|\int_a^b G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u_n(s))) + \gamma(s,u_n(s))\right] ds - \int_a^b G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))\right] ds|$$
$$\leqslant \int_a^b |G(t,s)||f(s,\gamma(s,u_n(s))) - f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u_n(s)) - +\gamma(s,u(s))|ds \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$$
$$presque \quad par\ tout\ sur[a,b]$$

D'après la théorème de Lebesgue, on a :

$$G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u_n(s))) + \gamma(s,u_n(s))\right] ds - \int_a^b G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))\right] ds \in L^1[a,b]$$

Donc $Tu_n(t) - Tu(t) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$ dans $C([a,b])$, alors T est continue sur $C([a,b])$
2) T est borné : Soit $f, G\ et\ \gamma$ sont une fonction continue sur le compact $C([a,b])$,Alors les fonction est borné. Donc T est borné
3) Test compact : Soit T est borné sur $C([a,b])$. On montre que T est borné sur $C^1([a,b])$

$$|Tu'(t)| = |\int_a^b \frac{dG}{dt}\left[f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))\right] ds|.$$
$$\leqslant \int_a^b |\frac{dG}{dt}||f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))|ds.$$
$$\leqslant max|f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u(s))| \int_a^b |\frac{dG}{dt}|ds.$$

On a l'intégral $\int_a^b |\frac{dG}{dt}|ds$ est borné
Alors $|Tu'(t)| \leqslant \infty$
Donc T est borné sur $C^1([a,b])$, d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, T est borné et complètement continue, alors $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ est continue et complètement continue .

D'autre part, le théorème de Schauder, on déduite que T admet au moins un point fixe que est solution de problème (2.13)

Par suite, étape 1 la solution de problème (2.13)est :

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

$\square$

Remarque 2.1. [6] Soit f une fonction continue et u est un solution de problème (2.13) sur $C^1([a,b])$ comme $u'' = -f(t,u(t))$ donc $u \in C^2([a,b])$.

Chapitre 3

Méthodes de sous et sur-solution pour équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions, définitions, techniques et théorèmes pour l'existence de sous et sur-solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type de Caputo.

3.1 Principe de maximum pour la dérivée de Caputo

Considérons le problème suivant :

$$(p)\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y(t) \in F(t, y(t)) \; \alpha \in [1,2] \\ y(0) = a, y(1) = b \;, (a,b) \neq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1. *Soit* $0 < \alpha \leqslant 2$ *,*$n = [Re(\alpha)] + 1$ *et une fonction* $f \in C^2(0,1) \bigcap [0,1]$*, atteint son maximum sur l'intervalle* $[0,1]$ *ou point* $t_0, t_0 \in (0,1]$*. Alors la dérivée de Caputo de la fonction* f *est négative en le point* t_0 *i.e pour tout* $1 < \alpha \leq 2$ *on a :* ${}^c D^\alpha f(t) \leqslant 0$*.*

Démonstration. On a $f \in C^2(0,1) \bigcap [0,1]$,puisque $f'' \in L^1(0,t_0)$,d'ou pour tout $\delta > 0$,il existe $0 < \varepsilon < t_0$ tels que

$$\left|\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\varepsilon (t_0 - s)^{1-\alpha} f''(s) ds\right| \leqslant \delta$$

pour $\varepsilon > 0$, on Considère les deux étapes suivantes :

$$\begin{cases} Etape(1) : f'(\varepsilon) \geqslant 0 \\ Etape(2) : f'(\varepsilon) < 0 \end{cases}$$

Etape (1) : Soit $h(t)$ une fonction auxiliaire tel que :

$$h(t) = f(t_0) - f(t), t \in [0,1]$$

Puisque la fonction f *a une maximum sur l'intervalle* $[0,1]$ *au point* t_0*, tel que* $t_0 \in (0,1]$ *et* $D^\alpha C \equiv 0$ *(C étant une constant).*
Alors h *est possède les propriétés suivant :*

$$\begin{cases} h(t) \geqslant 0 \;, t \in [0,1]; h(t_0) = 0; h'(t_0) = -f'(t_0) = 0 \\ D^\alpha h(t) = -D^\alpha f(t), t \in (0,1] \end{cases}$$

D'ou $h'(\varepsilon) = -f'(\varepsilon) \leqslant 0$

$$\begin{aligned} D^\alpha h(t_0) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_0} (t-s)^{1-\alpha} h''(s) ds &(3.2)\\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\varepsilon} (t-s)^{1-\alpha} h''(s) ds + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_\varepsilon^{t_0} (t-s)^{1-\alpha} h''(s) ds &(3.3)\\ &= I_1 + I_2 &(3.4) \end{aligned}$$

D'après (3.1) I_1 *est vérifie pour* $\varepsilon > 0$*, puisque* $h \in C^2(0,1)$*,*
$h(t_0) = h'(t_0) = 0$ *,*
On a :*D'après théorème des accroissements finies :*

$$\begin{aligned} |h(t)| &= |h(t) - h(t_0)| \leqslant |h'(\bar{t})|(t_0 - t) \\ &= |h'(\bar{t}) - h'(t_0)|(t_0 - t) \leqslant c_1 (t_0 - t)^2 \\ |h'(t)| &= |h'(t) - h'(t_0)| \leqslant c_2 (t_0 - t), t \in [\varepsilon, t_0] \end{aligned}$$

ou $c_1, c_2 > 0$, *et* $\bar{t} \in (t, t_0)$, *donc :*

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{1-\alpha} h''(s) ds \\ &= \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{-\alpha} h'(s) ds - \frac{(t_0 - \varepsilon)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} h'(\varepsilon) \\ &= -\frac{(1-\alpha)(t_0-\varepsilon)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} h(\varepsilon) - \frac{(t_0-\varepsilon)^{1-\alpha} h'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0 - s)^{1-\alpha} h(s) ds \end{aligned}$$

Alors :

$$I_2 \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Etape (2) : Soit $h(t)$ une fonction auxiliaire tel que :
K *est constante :*
$0 < K < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2 t_0^2 (t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2 (t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$

$$h(t) = f(t) - f(t_0) + \varphi(t), t \in [0, 1]$$

La fonction $\varphi(t)$ *est définie par :*

$$\varphi(t) = A \begin{cases} \exp(\dfrac{kt^2}{t^2 - t_0^2}),\ t < t_0 \\ 0,\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

tel que $h(t)$ *est une fonction infiniment différentielle sur* $\mathbb{R}$
K *est constante* :
$0 < K < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2 t_0^2 (t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2 (t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$
et $A > 0$ (*A est constante*)

$$h(t) = f(t_0) - f(t) + \varphi(t)$$

en dérive par rapport à t :

$$h'(t) = -f'(t) + \varphi'(t),$$

$t = \varepsilon$ *donc,* on a :

$$h'(\varepsilon) = -f'(\varepsilon) \leqslant 0 \tag{3.6}$$

$$h'(\varepsilon) = -f'(\varepsilon) + \varphi'(\varepsilon)$$

Alors,

$$-\varphi'(\varepsilon) = \frac{2A\varepsilon k t_0^2}{\varepsilon^2 - t_0^2} \exp(\frac{\varepsilon^2 k}{\varepsilon^2 - t_0^2}) \geqslant -f'(\varepsilon), \varepsilon > 0$$

En appliquant la loi l'Hospital, on trouve :

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = 0 \\ \varphi'(t_0) = 0 \\ \varphi''(t_0) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -A\frac{2\varepsilon k t_0^2}{\varepsilon^2 - t_0^2}\exp(\frac{\varepsilon^2 k}{\varepsilon^2 - t_0^2}) \\
\varphi''(t) &= -2Ak(\frac{kt^2}{t^2 - t_0^2})\frac{t_0^6 + 2t^2t_0^4 - 3t^4t_0^2 - 2t^2t_0^4k}{t - t_0^4} \\
&= -2Ak\exp(\frac{kt^2}{t^2 - t_0^2})\frac{(t_0^3 - tt_0^2) + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t^2t_0^4k}{(t - t_0)^4}.
\end{aligned}$$

On a : $0 < k < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$,$t \in [0, t_0]$

Donc

$(t_0^3 - tt_0^2) + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t^2t_0^4k \geqslant (t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t_0^6k \geqslant 0$

D'autre part, l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville est :

$$^cD^\alpha\varphi(\varepsilon) = I^{2-\alpha}\varphi''(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi''(s)$$

En intégrant par partie deux fois :

$1^{eme} fois$:

$$\begin{aligned}
^cD^\alpha\varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}[(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi'(s)]_\varepsilon^{t_0} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds \\
&= -\frac{(t_0 - \varepsilon)^{1-\alpha}\varphi'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds
\end{aligned}$$

$2^{eme} fois$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}[(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi(s)]_\varepsilon^{t_0} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi(s)ds \\
&= -\frac{(t_0 - \varepsilon)^{1-\alpha}\varphi'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(t_0 - \varepsilon)^{-\alpha}\varphi(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi(s)ds
\end{aligned}$$

Donc $I^{2-\alpha}\varphi''(\varepsilon) \leqslant 0$

D'après (1.4) et (1.5), on obtient :

$$D^\alpha h(t_0) = I_1 + I_2 \geqslant 0,$$

de plus ;

$$\begin{aligned}
D^\alpha h(t_0) &= -D^\alpha f(t_0) \\
-D^\alpha f(t_0) + I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) &\geqslant 0 \\
-D^\alpha f(t_0) &\geqslant -I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) \\
D^\alpha f(t_0) &\leqslant I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) \leqslant 0,
\end{aligned}$$

donc :

$$D^\alpha f(t_0) \leqslant 0.$$

□

Théorème 3.2. *Soit $0 < \alpha \leqslant 2, n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f \in C^2(0,1)\bigcap[0,1]$ une fonction atteint son maximum sur l'intervalle $[0,1]$ ou point $t_0, t_0 \in (0,1]$. Alors la dérivée de Caputo de la fonction f est positive au point t_0, i.e pour tout $1 < \alpha \leq 2$ on a : ${}^cD^\alpha f(t) \geqslant 0$.*

Démonstration. On a $f \in C^2(0,1)\bigcap[0,1]$. Puisque $f'' \in L^1(0,t_0)$, d'ou pour tout $\delta > 0$ il existe $0 < \varepsilon < t_0$ tels que

$$|\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^\varepsilon (t_0 - s)^{1-\alpha} f"(s)ds| \leqslant \delta.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on considère les deux étapes suivantes :

$$\begin{cases} Etape(1) : f'(\varepsilon) \geqslant 0 \\ Etape(2) : f'(\varepsilon) < 0 \end{cases}$$

Etape (1) : Soit $h(t)$ une fonction auxiliaire tel que :

$$h(t) = f(t) - f(t_0), t \in [0,1]$$

Puisque la fonction f a une minimum sur l'intervalle $[0,1]$ au point t_0 tel que $t_0 \in (0,1]$ et $D^\alpha C \equiv 0$ (C étant une constant).
Alors h est possède les propriétés suivant :

$$\begin{cases} h(t) \geqslant 0 \;, t \in [0,1]; h(t_0) = 0; h'(t_0) = f'(t_0) = 0 \\ \qquad D^\alpha h(t) = D^\alpha f(t), t \in (0,1] \end{cases}$$

D'ou $h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) \leqslant 0$

$$D^\alpha h(t_0) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{t_0} (t-s)^{1-\alpha} h''(s)ds \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{\varepsilon} (t-s)^{1-\alpha} h''(s)ds + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0} (t-s)^{1-\alpha} h''(s)ds \tag{3.8}$$

$$= I_1 + I_2 \tag{3.9}$$

D'après (3.1) I_1 est vérifie pour $\varepsilon > 0$ puisque $h \in C^2(0,1)$, $h(t_0) = h'(t_0) = 0$.
D'après théorème des accroisements finies

$$\begin{aligned} |h(t)| = |h(t) - h(t_0)| &\leqslant |h'(\bar{t})|(t_0 - t) \\ &= |h'(\bar{t}) - h'(t_0)|(t_0 - t) \leqslant c_1(t_0 - t)^2 \\ |h'(t)| = |h'(t) - h'(t_0)| &\leqslant c_2(t_0 - t), t \in [\varepsilon, t_0] \end{aligned}$$

tel que les deux constante positive $c_1, c_2 > 0$, et $\bar{t} \in (t, t_0)$. Donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{t_0} (t_0 - s)^{1-\alpha} h"(s)ds \\ &= \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{t_0} (t_0 - s)^{-\alpha} h'(s)ds - \frac{(t_0-\varepsilon)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} h'(\varepsilon) \\ &= -\frac{(1-\alpha)(t_0-\varepsilon)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} h(\varepsilon) - \frac{(t_0-\varepsilon)^{1-\alpha} h'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{t_0} (t_0 - s)^{1-\alpha} h(s)ds \end{aligned}$$

Alors
$$I_2 \geqslant 0 \tag{3.10}$$

Etape (2) : Soit $h(t)$ est une fonction auxiliaire tel que :
K *est constante :*
$0 < K < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$
$$h(t) = f(t) - f(t_0) + \varphi(t), t \in [0,1]$$
le fonction $\varphi(t)$ est définie par :
$$\varphi(t) = A \begin{cases} \exp(\dfrac{kt^2}{t^2 - t_0^2}), \ t < t_0 \\ 0, \ t \geqslant 0 \end{cases}$$
telle que $h(t)$ est une fonction infiniment différentielle sur $\mathbb{R}$
K *est constante* :
$0 < K < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$
et $A > 0$ (*est une constante*)

$$h(t) = f(t) - f(t_0) + \varphi(t)$$

en dérive par rapport à t

$$h'(t) = f'(t) + \varphi'(t)$$

$t = \varepsilon$ *donc,* on a :
$$h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) \leqslant 0 \tag{3.11}$$
$$h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) + \varphi'(\varepsilon)$$

Alors,
$$-\varphi'(\varepsilon) = \frac{2A\varepsilon kt_0^2}{\varepsilon^2 - t_0^2}\exp(\frac{\varepsilon^2 k}{\varepsilon^2 - t_0^2}) \geqslant f'(\varepsilon), \varepsilon > 0$$
En appliquant la loi d'Hospital, on obtient :
$$\begin{cases} \varphi(t_0) = 0 \\ \varphi'(t_0) = 0 \\ \varphi''(t_0) = 0 \end{cases}$$
et
$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -A\frac{2\varepsilon kt_0^2}{\varepsilon^2 - t_0^2}\exp(\frac{\varepsilon^2 k}{\varepsilon^2 - t_0^2}) \\
\varphi''(t) &= -2Ak(\frac{kt^2}{t^2 - t_0^2})\frac{t_0^6 + 2t^2t_0^4 - 3t^4t_0^2 - 2t^2t_0^4k}{t - t_0^4} \\
&= -2Ak\exp(\frac{kt^2}{t^2 - t_0^2})\frac{(t_0^3 - tt_0^2) + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t^2t_0^4k}{(t - t_0)^4}.
\end{aligned}$$

On a : $0 < k < \dfrac{(t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3)}{2t_0^6}$ $,t \in [0, t_0]$
Donc :
$(t_0^3 - tt_0^2) + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t^2t_0^4k \geqslant (t_0^3 - tt_0^2)^2 + t^2t_0^2(t_0^2 - t^2) + 2tt_0^2(t_0^3 - t^3) - 2t_0^6k \geqslant 0$
D'autre part, l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$^cD^\alpha\varphi(\varepsilon) = I^{2-\alpha}\varphi''(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi''(s)$$

En intégrant par partie deux fois :
$1^{eme} fois$:

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha\varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}[(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi'(s)]_\varepsilon^{t_0} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds \\ &= -\frac{(t_0 - \varepsilon)^{1-\alpha}\varphi'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds \end{aligned}$$

$2^{eme} fois$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}[(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi(s)]_\varepsilon^{t_0} + \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{1-\alpha}\varphi(s)ds \\ &= -\frac{(t_0 - \varepsilon)^{1-\alpha}\varphi'(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(t_0 - \varepsilon)^{-\alpha}\varphi(\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_\varepsilon^{t_0}(t_0 - s)^{-\alpha}\varphi(s)ds \end{aligned}$$

Donc $I^{2-\alpha}\varphi''(\varepsilon) \leqslant 0$
D'après (3.9) et (3.10) on a :

$$D^\alpha h(t_0) = I_1 + I_2 \geqslant 0,$$

de plus ;

$$\begin{aligned} D^\alpha h(t_0) &= D^\alpha f(t_0) \geqslant 0 \\ D^\alpha f(t_0) + I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) &\geqslant 0 \\ D^\alpha f(t_0) &\geqslant -I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) \\ D^\alpha f(t_0) \geqslant I^{2-\alpha}\varphi''(t_0) &\leqslant 0, \end{aligned}$$

donc

$$D^\alpha f(t_0) \geqslant 0.$$

□

3.2 Existence d'une solution

Dans cette paragraphe nous utilisons la méthode sous et sur-solution pour assurer l'existence d'une solution du problème (3.1). D'abord, on a le définition suivante :

Définition 3.1. une fonction $\alpha \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ est une sous-solution du problème (3.1) :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\delta \alpha(t) + f(t, y(t)) \geqslant 0 \; t \in [0,1] \,, 1 < \delta \leqslant 2 \\ \alpha(0) \leqslant a, \alpha(1) \leqslant b, \end{cases} \tag{3.12}$$

une fonction $\alpha \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ est une sur-solution du problème (3.1) :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\delta \beta(t) + f(t, y(t)) \leqslant 0 \; t \in [0,1] \,, 1 < \delta \leqslant 2 \\ \beta(0) \geqslant a, \beta(1) \geqslant b, \end{cases} \tag{3.13}$$

Le résultat principale de la méthode est un théorème de type valeurs intermédiaires, il montre que si on peut trouve une sous-solution et sur-solution, alors il existe un solution entre les deux fonction.

Théorème 3.3. *Soient $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ une sur-solution et sous-solution du problème (3.1), tel que $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$,$t \in [0,1]$. On suppose que $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction différentielle continue par rapport à toutes les variables et $f_u^{'}(t,u)$ est continue en t ,$\forall u \in \mathbb{R}$ et $f_u^{'}(t,\alpha) \leqslant 0$, $f_u^{'}(t,\beta) \leqslant 0, \forall t \in [0,1]$. Le problème (3.1) admet au moins une solution $u(t) \in C[0,1]$ tel que $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$,$t \in [0,1]$.*

Démonstration. On considère le problème modifié :

$$\begin{cases} {}^C D^\delta u(t) = f^*(t, u(t)) \; t \in [1,2], \; 1 < \delta \leqslant 2 \\ u(0) = a, u(1) = b \,, (a,b) \neq 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

òu

$$f^*(t,u(t)) = \begin{cases} f(t,\alpha(t)) + \exp(M_1 \sin(\dfrac{u-\alpha}{M_1}) f_u'(t,\alpha) - \dfrac{\alpha - u}{N_1(1+u^2)} \\ + \dfrac{\exp(\sin(\cos(\dfrac{\alpha-u}{N_1} + \dfrac{3\pi}{2})))}{1+\alpha^2} - \dfrac{2+\alpha^2}{1+\alpha^2}, \text{ si } u < \alpha(t) \\ f(t,u(t)), \text{si } \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t) \\ f(t,\beta(t)) - \exp(M_2 \sin(\dfrac{u-\beta}{M_2}) f_u'(t,\beta) - \dfrac{\beta - u}{N_2(1+u^2)} \\ - \dfrac{\exp(\sin(\cos(\dfrac{\alpha-u}{N_2} + \dfrac{3\pi}{2})))}{1+\alpha^2} + \dfrac{2+\beta^2}{1+\beta^2}, \text{ si } u > \beta(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1, M_2 > 0, tel\ que - \pi < \dfrac{u-\alpha}{M_1} < \dfrac{-3\pi}{2}, -\pi < \dfrac{\beta - u}{M_2} < \dfrac{-3\pi}{2} \; \forall u - \alpha < 0 \\ N_1, N_2 > 0, tel\ que - 2\pi < \dfrac{u-\alpha}{N_1} < \dfrac{-3\pi}{2}, -2\pi < \dfrac{u-\beta}{M_2} < \dfrac{-3\pi}{2}, \forall u - \alpha > 0 \end{cases}$$

f est continue, f^* est une fonction différentiablement continue par rapport toute variable sur $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$

$$f_t^*(t,u(t)) = \begin{cases} f_t'(t,\alpha(t)) + M_1 \exp(M_1 \sin(\dfrac{u-\alpha}{M_1}) f_u'(t,\alpha)) \sin(\dfrac{\alpha-u}{M_1}) f_{ut}''(t,\alpha), \; Si\ u < \alpha(t) \\ f_t'(t,u(t)), \; Si\ \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t) \\ f_t'(t,\beta(t)) + M_2 \exp(M_2 \sin(\dfrac{u-\alpha}{M_2}) f_u'(t,\beta)) \sin(\dfrac{\alpha-u}{M_2}) f_{ut}''(t,\beta), \; Si\ u > \beta(t) \end{cases}$$

$$f_t'^{*}(t,u(t)) = \begin{cases} \exp(M_1 \sin(\dfrac{u-\alpha}{M_1}) f_u'(t,\alpha)) \cos(\dfrac{\alpha-u}{M_1}) f_u'(t,\alpha) - \dfrac{u^2-2\alpha u-1}{N_1(1+u_2)^2} \\ + \dfrac{\exp(M_1 \sin(\cos(\dfrac{u-\alpha}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2})))}{N_1(1+\alpha^2)} \cos(\cos(\dfrac{u-\alpha}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2})) \sin(\dfrac{u-\alpha}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2}),\ Si\ u<\alpha(t) \\ f_u'(t,u(t)),\ Si\ \alpha(t)\leqslant u \leqslant \beta(t) \\ \exp(M_1 \sin(\dfrac{u-\beta}{M_1}) f_u'(t,\beta)) \cos(\dfrac{\beta-u}{M_1}) f_u'(t,\beta) - \dfrac{u^2-2\beta u-1}{N_1(1+u_2)^2} \\ + \dfrac{\exp(M_1 \sin(\cos(\dfrac{u-\beta}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2})))}{N_1(1+\beta^2)} \cos(\cos(\dfrac{u-\beta}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2})) \sin(\dfrac{u-\beta}{N_1}+\dfrac{3\pi}{2}),\ Siu>\beta(t) \end{cases}$$

Etape (1) : Toute solution du problème(1.14) satisfait :

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t), t \in [0,1]$$

•$\alpha(t) \leqslant u(t)$
On suppose, par l'absurde, qu 'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que :

$$w(t_0) = \alpha(t_0) - u(t_0) = max_{t\in[0,1]}(\alpha(t)-u(t)) = max_{t\in[0,1]} w(t) > 0$$

• si $t_0 \in (0,1)$ alors$D_\delta \alpha(t_0) - D_\delta u(t) \leqslant 0$, *puisque u est une solution de (1.14) et $\alpha(0) \leqslant u(0)$ et $\alpha(1) \leqslant u(1)$ alors :*

$$\begin{aligned} D^\delta w(t_0) &= D^\delta \alpha(t_0) - D^\delta u(t_0) \\ &= -f(t,\alpha(t)) + f(t,\alpha(t)) + \exp(M_1 \sin(\frac{u-\alpha}{M_1}) f_u'(t,\alpha) - \frac{\alpha-u}{N_1(1+u^2)} \\ &+ \frac{\exp(\sin(\cos(\frac{\alpha-u}{N_1}+\frac{3\pi}{2})))}{1+\alpha^2} - \frac{2+\alpha^2}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

De plus, par hypothèse, nous savons que :

$$\begin{cases} -\pi < \dfrac{u(t_0-\alpha(t_0))}{M_1} < \dfrac{-3\pi}{2} \\ \dfrac{-\pi}{2} < \dfrac{\alpha(t_0)-u(t_0)}{N_1} + \dfrac{3\pi}{2} < 0, \end{cases}$$

par conséquent ;

$$\begin{cases} M_1 \sin(\dfrac{u(t_0)-\alpha(t_0)}{M_1}) f_u'(t,\alpha) \geqslant 0 \\ \sin(\cos(\dfrac{\alpha(t_0)-u(t_0)}{N_1} + \dfrac{3\pi}{2})) \geqslant 0, \end{cases}$$

Alors,

$$D^\delta w(t_0) \geqslant 1 - \frac{\alpha(t_0)-u(t_0)}{N_1(1+u^2)} + \frac{1}{1+\alpha^2} - \frac{2+\alpha^2}{1+\alpha^2} > 0$$

D'après théorème (3.1)

$$D^{\delta}w(t_0) \leqslant 0,$$

ce qui est une contradiction
•$u(t) \leqslant \beta(t)$
On suppose -par l'absurde- qu 'il existe $t_0 \in [0,1]$ *tel que*

$$w(t_0) = \beta(t_0) - u(t_0) = min_{t\in[0,1]}(\beta(t) - u(t)) = min_{t\in[0,1]}w(t) > 0$$

•si $t_0 \in (0,1)$, alors $D_{\delta}\beta(t_0) - D_{\delta}u(t) \geqslant 0$, *puisque* u *est une solution de (1.14) et* $\beta(0) \geqslant u(0)$ *et* $\beta(1) \geqslant u(1)$ *alors :*

$$\begin{aligned}
D^{\delta}w(t_0) &= D^{\delta}\beta(t_0) - D^{\delta}u(t_0) \\
&= -f(t,\beta(t)) + f(t,\beta(t)) + \exp(M_1 \sin(\frac{u-\beta}{M_1})f'_u(t,\beta) - \frac{\beta - u}{N_1(1+u^2)} \\
&+ \frac{\exp(\sin(\cos(\frac{\beta-u}{N_1} + \frac{3\pi}{2})))}{1+\beta^2} - \frac{2+\beta^2}{1+\beta^2}
\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse nous savons que :

$$\begin{cases} -\pi < \dfrac{\beta(t_0) - u(t_0)}{M_2} < \dfrac{-3\pi}{2} \\ \dfrac{-\pi}{2} < \dfrac{u(t_0) - \beta(t_0)}{N_2} + \dfrac{3\pi}{2} < 0, \end{cases}$$

par conséquent ;

$$\begin{cases} M_1 \sin(\dfrac{(\beta(t_0) - u(t_0)}{M_2})f'_u(t,\beta) \geqslant 0 \\ \sin(\cos(\dfrac{u(t_0) - \beta(t_0)}{N_2} + \dfrac{3\pi}{2})) \geqslant 0, \end{cases}$$

Alors,

$$D^{\delta}w(t_0) \leqslant 1 - \frac{\beta(t_0) - u(t_0)}{N_1(1+u^2)} + \frac{1}{1+\beta^2} - \frac{2+\beta^2}{1+\beta^2} < 0$$

D'après le théorème (3.2) :

$$D^{\delta}w(t_0) \geqslant 0,$$

ce qui est une contradiction.

Etape (2) : Le problème (1.14) admet au moins une solution, Pour cela on écrit le problème (1.14) sous la forme :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f^*(s,u(s))ds + a + (b-a)t \tag{3.15}$$

Lemme 3.1. *Soit $u \in C[0,1]$,$1 < \delta \leqslant 2, n = [Re(\delta)] + 1$, alors l'unique solution de problème :*

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\delta u(t) + p(t) = 0 \ , \ t \in [0,1] \\ y(0) = a, y(1) = b \ , (a,b) \neq 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

donné par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\rho(s)ds + a + (b-a)t \tag{3.17}$$

tel que :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(1-s)^{\delta-1} - (t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \ , \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{t(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\delta)}, \ 0 < t < s < 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

En appliquant I^δ sur l'équation (3.16) on obtient :

$$I^\delta[{}^cD^\delta u(t) + \rho(t)] = 0$$
$$\Leftrightarrow I^\delta({}^cD^\delta u(t)) + I^\delta \rho(t) = 0$$

On a :

$$I^\delta({}^cD^\delta u(t)) = u(t) + c_0 + c_1 t \ , \ c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

D'après le lemme précédant, $(n = 2, \delta \in [1,2])$ on obtient :

$$u(t) + c_0 + c_1 t - I^\delta \rho(t) = 0 \Leftrightarrow u(t) = -c_0 - c_1 t + I^\delta \rho(t).$$

La solution générale est :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1} \rho(t) ds - c_0 - c_1 t. \tag{3.19}$$

Les conditions :

$$G(t,s) = \begin{cases} u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c_0 \Rightarrow c_0 = -a \\ b = \dfrac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1} \rho(t) ds - c_0 - c_1 \end{cases}$$

$b = \dfrac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1}\rho(t)ds + a - c_1 \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1}\rho(t)ds + a - b.$
Par conséquence, la solution du problème est :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1}\rho(t)ds + a + t(a-b) - \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (t-s)^{\delta-1}\rho(s)ds \\ &= a + t(a-b) + \int_0^t \frac{t(t-s)^{\delta-1} - (1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \rho(s)ds + \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \rho(s)ds \\ &= a + t(b-a) + \int_0^1 G(t,s)\rho(s)ds \end{aligned}$$

Donc, la solution du problème (3.16) est :

$$u(t) = a + t(b-a) + \int_0^1 G(t,s)\rho(s)ds$$

$\bullet T$ est continue :
par définition une fonction $f^*(t,u)$ tel que : $T : c([0,1]) \longrightarrow c([0,1])$ est définie et continue.
$\bullet T$ est bornée :
l'image de tout ensemble bornée dans $c([0,1])$, en effet suffit de montre que pour toute $R > 0$ il existe $L > 0$ tel que (L est constante); pour toute $u \in \Omega = \{u \in c([0,1]), \| u(t) \| \leqslant R\}$ on a : $|T(u)| \leqslant L$

$$\begin{aligned}
|T(u)(t)| &\leqslant |a| + |(a-b)t| + \int_0^1 |G(t,s)f^*(s,u(s))|ds \\
&\leqslant |a| + |(a-b)t| + \int_0^t \frac{t(t-s)^{\delta-1} - (t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} |f^*(s,u(s))|ds \\
&+ \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} |f^*(s,u(s))|ds \\
&\leqslant |a| + |(a-b)|t + \frac{M}{\delta\Gamma(\delta)}[-t(1-s)^\delta - (t-s)^\delta]_0^t + \frac{M}{\Gamma(\delta)}[-t(1-s)^\delta]_t^1 \\
&\leqslant |a| + |(a-b)|t + \frac{M}{\Gamma(\delta+1)}[-t(1-t)^\delta + t + t^\delta] + \frac{M}{\Gamma(\delta)}[t(1-t)^\delta] \\
&\leqslant |a| + |(a-b)|t + \frac{Mt^\delta}{\Gamma(\delta+1)}, \forall t \in [0,1] \\
&\leqslant |a| + |(a-b)| + \frac{M}{\Gamma(\delta+1)} \\
&< R\ (car, \{3|a|, 3|a-b|, \frac{3L}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (s+1)(1-s)^{\delta-1} ds\}).
\end{aligned}$$

Donc : T est borné.
$\bullet T$ est compact :
T envoie $c([0,1])$ dans une bornée de $C^0([0,1])$. En effet, T est bornée et :

$$\begin{aligned}
|\frac{d}{dt}Tu(t)| &= |a - b + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (1-s)^{\delta-1} f^*(s,u(s))ds - \frac{1}{\Gamma(\delta-1)} \int_0^t (t-s)^{\delta-2} f^*(s,u(s))ds| \\
&\leqslant |b-a| + max_{t\in[0,1]}|f^*(s,u(s))| (\frac{1}{\Gamma(\delta)}(1-s)^{\delta-1} + \int_0^t \frac{1}{\delta-1}(t-s)^{\delta-2} ds),
\end{aligned}$$

on a :$M = +max_{t\in[0,1]}|f^*(s,u(s))| + 1,$

$$\leqslant |b-a| + \frac{M}{\delta\Gamma(\delta)}[-(1-s)^{\delta}]_0^1 + \frac{M}{(\delta-1)\Gamma(\delta-1)}[-(1-s)^{\delta-1}]_0^1$$
$$\leqslant |b-a| + \frac{M}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{Mt^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)},\ t\in[0,1]$$
$$\leqslant |b-a| + \frac{M}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{M}{\Gamma(\delta)}$$

Par conséquent, T est bornée sur $C([0,1])$. D'après le théorème d'Ascolé -Arzela, $T(\Omega)$ est relativement compact pour tout bornée Ω, T est continue, d'ou l'existence d'un point fixe pour l'opérateur T d'après théorème fixe de Schauder . donc, la solution du problème (3.1) on a : :

$$\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t), \forall t\in[0,1]$$

□

3.3 Exemple

On considère le problème :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{3}{2}}u(t) + 1 - u^3(t) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \quad \forall t\in[0,1]. \end{cases} \tag{3.20}$$

Soit $f(t,u) = 1 - u^2(t)$, *tel que* $f'_t(t,u) = f''_{\mu t}(t,u) = 0$.
• *la fonction* $\alpha(t) \equiv 0$ *est une sous-solution de ce problème puisque :*

$${}^{C}D^{\frac{3}{2}}\alpha(t) + 1 - \alpha^3(t) = 1 > 0$$

et $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$
• *la fonction* $\beta(t) = 3$ *est une sur-solution de ce problème puisque :*

$${}^{C}D^{\frac{3}{2}}\beta(t) + 1 - \beta^3(t) = -26 < 0$$

et $\beta(0) = \beta(1) = 0$
On a : $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$.
D'autre part, $f'_\mu(t,\alpha) = 0 \quad f'_\mu(t,\beta) = -27 \leqslant 0$
D'après le théorème (3.3) : le problème (3.22) admet au moins une solution $u^\star$ *vérifiant :*

$$u^\star \in C[0,1] \quad 0 \leqslant u^\star(t) \leqslant 3 \qquad \forall t\in[0,1].$$

Bibliographie

[1] **Y. Arioua :** Equation différentielles fractionnaires, pour les Ã©tudiants de première anée Master EDP et application, *université de M'sila*, 2020/2021.

[2] **Y. Arioua, N. Benhamidouche :** Boundary value problems for Caputo-Hadamard fractionnal differential equations, *Surveys in Mathematics and its Applications,* **12** (2017), 103-115.

[3] **P.B. Bailey, L.F. Shampine :** Waltman P.E., Nonlinear two point Boundary Value Problems, *Academic Press,* 1968.

[4] **B. Basti :** Existence et unicité de solutions auto-similaires générales pour certaines équations fractionnaires non-linéaires, Thèse doctorat LMD, *université de M'sila,* 2019.

[5] **C. D. Coster P. Habets :** Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : classical and recent results, *CISM Courses and Lectures,* **371** (1996), 1-78.

[6] **S. Djebali :** Problèmes aux limites associés aux E.D.O du second ordre, *ENS Kouba, Alger,* 2007.

[7] **K. Diethelm :** The analysis of fractional differential equations, an application-ariented exposition using differential operators of caputo type, 2004.

[8] **M. A. Khalouta :** Résolusion des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques, Thèse doctorat en sciences, 2019.

[9] **A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo :** Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier Science B.V., Amsterdam,* 2006.

[10] **A. Shi :** Upper and lower solutions method and a fractional differential equation boundary value problem, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* **30** (2009), 1-13.

[11] **I. Podlubny :** Fractional Differential Equations, *Academic Press, New York,* 1999.

[12] **M. Titraoui :** Etude déxistence et d'unicité de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires, Thèse doctorat LMD, *université de M'sila,* 2020.

ملخص

في هذا العمل قدمنا طريقة لدراسة وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية كسرية الرتبة، تسمى طريقة الحل السفلي والحل العلوي، حيث يؤول دراسة مسألة ذات قيم حدية إلى مسألتين ذات قيم حدية كل واحدة منها تمثل متراجحة.

تم تقديم الطريقة أولا في معادلة تفاضلية عادية، ثم معادلة تفاضلية كسرية الرتبة من نمط كابوتو.

كلمات مفتاحية: حل سفلي، حل علوي، معادلة تفاضلية كسرية الرتبة.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode pour étudier l'existence et l'unité d'une solution, pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire, appelée méthode de sous - solution et sur - solution, où l'étude d'un problème aux limites est interprétée en deux problèmes aux limites, dont chacune représente une inégalité.

La méthode est présentée d'abord dans une équation différentielle ordinaire, puis dans une équation différentielle d'ordre fractionnaire du type Caputo.

Mots clés : Sous - solution, sur - solution, équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Abstract

In this work, we ave presented a method to study the existence and unicity of a solution, for a fractional order differential equation, called the sub-solution and over-solution method, where the study of a boundary value problem interpreted as two boundary value problems, each of which represents an inequality.

The method is presented first in an ordinary differential equation, then in a fractional order differential equation of Caputo type.

Keywords: Upper - solution, Lower - solution, fractional order differential equation.