



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE  
M'SILA**

*Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Mathématiques*



**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

**Par**

**SEGHIRI Saida**

**sujet**

---

**Sur la théorie de Riesz des équations  
intégrales**

---

**Devant le jury :**

Mr. GASMI Abdelkader	Univ de M'sila	Président
Mr. NADIR Mostefa	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. DJAIDJA Naoui	Univ de M'sila	Examineurs

**Promotion : 2020 / 2019**

---

# Remerciements

*Avant toute chose, nous à remercier **Allah** le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience. Pour compléter ce travail.*

*Ainsi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nous grand remerciements à nos encadreur estimations*

*Prof. "MOSTEFA Nadir"*

*pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce travail. J'adresse également mes remerciements particuliers à mon professeur Medani Bel Abbas. Enfin. Il est important pour nous de messieurs notre familles, notre parents, mon marie, mon frère MILOUD qui on toujours été une source inépuisable d'encouragements.*

---

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail*

*A mes très chers parents*

*Mon mari et A mes frères ma soeur et mes amies.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1. Les opérateurs compacts</b>	<b>2</b>
<b>1.1 Les opérateurs compacts dans un espace norme.....</b>	<b>2</b>
1.1.1 La compacité.....	2
1.1.2 Les opérateurs linéaires.....	4
1.1.3 L'opérateur Linéaire compact.....	6
1.1.4 Opérateur de rang fini.....	10
1.1.5 Les opérateurs intégrales compacts dans $C(\Omega)$ .....	10
1.1.6 Opérateur à image fermée.....	14
<b>1.2 Les opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.....</b>	<b>14</b>
1.2.1 Opérateur adjoint.....	15
1.2.2 Opérateur inverse.....	18
<b>2. Théorie de Riesz des équations intégrales</b>	<b>20</b>
<b>2.1 Équations intégrales.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2 Classification des équations intégrales.....</b>	<b>20</b>
2.2.1 Équations intégrales linéaires.....	20
2.2.2 Équations intégrales non-linéaires.....	21
2.2.3 Équations intégrales singulières et faiblement singulières.....	23
<b>2.3 Existence et unicité des solutions des (EIFs).....</b>	<b>23</b>
2.3.1 Série Neumann.....	23
<b>2.4 Théorie de Riesz.....</b>	<b>24</b>
2.4.2 Application aux équations de Fredholm de seconde espèce .....	34
2.4.2 Théorie spectrale pour les opérateurs compacts .....	36
<b>Références</b>	<b>40-41</b>

# Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.

J. Fourier est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier. Il est clair qu'on peut interpréter la formule d'inversion en tant que fournir l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier.

Le terme équation intégrale a été utilisé pour la première fois par du Bois-Reymond en 1888[13].

Les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra<sup>1</sup>, et Ivar Fredholm<sup>2</sup>, ainsi que David Hilbert<sup>3</sup> et Erhard Schmidt<sup>4</sup>[1].

Les opérateurs linéaires compacts sont très importants dans les applications. Par exemple, ils jouent un rôle central dans la théorie des équations intégrales et dans divers problèmes de physique mathématique. Leur théorie a servi de modèle aux premiers travaux en analyse. Leurs propriétés ressemblent étroitement à celles des opérateurs sur des espaces finis dimensionnels. Pour un opérateur linéaire compact, la théorie spectrale peut être traitée assez complètement dans le sens où le célèbre Fredholm la théorie des équations intégrales linéaires peut être étendue à la fonctionnelle linéaire équations  $\lambda I - A = f$  avec un paramètre complexe  $\lambda$ . Cette théorie généralisée s'appelle la théorie de Riesz<sup>5</sup>-Schauder.

Dans ce mémoire il s'agit de souligner l'importance de la théorie de Riesz sur les opérateurs compacts pour prouver l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales du second espèce en particulier l'équation intégrale de Fredholm de la forme  $I - A = f$ .

Le premier chapitre nous présenterons les opérateurs compacts (définitions et propriétés).

Dans le deuxième chapitre, on commence par l'introduction sur les équations intégrales et certaines théories qui offrent des conditions sur l'existence et l'unicité de la solution, et nous présenterons la théorie de Riesz et leurs applications sur les équations de Fredholm de second espèce.

---

1. **VITO Volterra** est un mathématicien Italien 1860-1940

2. **IVARE Fredholm** est un mathématicien Suédois 1866-1927

3. **DAVID Hilbert** est un mathématicien allemand 1862-1943

4. **ERHARD Schmidt** est un mathématicien allemand 1876-1959

5. **FRIGYES Riesz** est un mathématicien hongrois. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle, 1880-1956.

# Chapitre I

## les opérateurs compacts

L'étude des opérateurs linéaires dans des espaces de dimensions infinies est compliquée en comparaison avec la théorie des espaces de dimensions finies cependant, certains des classes de ces opérateurs peuvent être décrites en détail, le premier à noter que c'était D.Hilbert. Parmi ceux-ci, la classe des opérateurs compacts fait partie des le plus important d'une part, les opérateurs compacts sont presque comme les opérateurs dans espaces de dimensions finie en termes de propriétés et d'autre part, il jouent un rôle important dans les applications

### 1.1 Les opérateurs compacts dans un espace normé

#### 1.1.1 La compacité

**Définition 1.1.1**([13]) Un sous-ensemble  $U$  d'un espace normé  $X$  est appelé compact si chaque recouvrement ouvert de  $U$  contient un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire si pour toute famille  $V_j, j \in J$ , (pour un ensemble d'indices  $J$ ) d'ensemble ouverts avec la propriété

$$U \subset \cup_{j \in J} V_j,$$

il existe une sous-famille finie  $V_{j(k)}, j(k) \in J, k=1, \dots, n$ , tel que

$$U \subset \cup_{k=1}^n V_{j(k)},$$

Un sous-ensemble  $U$  est appelé **séquentiellement compact** si chaque suite d'éléments de  $U$  contient une sous-suite qui converge vers un élément de  $U$ .

Un sous-ensemble  $U$  d'un espace normé est dit **totalemt borné** si pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe une nombre fini d'éléments  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  en  $U$  tel que

$$U \subset \cup_{j=1}^n B(\varphi_j; \varepsilon),$$

C'est-à-dire que chaque élément  $\varphi \in U$  a une distance inférieure à  $\varepsilon$  d'au moins un des éléments  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Notez que chaque ensemble séquentiellement compact  $U$  est totalemt borné.

Sinon, il existerait un  $\varepsilon$  positif et une suite  $(\varphi_n)$  en  $U$  de propriété  $\|\varphi_n - \varphi_m\| \geq \varepsilon$  pour tout  $n \neq m$ . Cela impliquerait que la suite  $(\varphi_n)$  ne contiennent pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité séquentielle de  $U$ . pour chaque ensemble totalemt borné  $U$ ,

soit  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , et collecter les systèmes finis correspondants d'éléments  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  dépendant de  $m$ , on obtient une suite dense en  $U$

**Définition 1.1.2([9]) (Ensemble relativement compact)**

Un ensemble  $G \subset E$  est relativement compact si pour toute suite  $\{u_n\}$  de  $G$ , il existe une sous-suite  $\{u_{n(k)}\}$  qui converge dans  $F$ .

**Définition 1.1.3. ( $\varepsilon$ -net, délimitation total)([4])**

Soit  $B$  un sous-ensemble de  $a$  l'espace métrique  $X$  et soit  $\varepsilon > 0$  être donné. Une ensemble  $M_\varepsilon \subset X$  est appelé un  $\varepsilon$ -net pour  $B$  si pour tout point  $z \in B$  il ya un point de  $M_\varepsilon$  à distance de  $z$  inférieur à  $\varepsilon$ . L'ensemble  $B$  est dit totalement borné si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\varepsilon$ -net fini  $M_\varepsilon \subset X$  pour  $B$ , où "fini" signifie que  $M_\varepsilon$  est un ensemble fini (c'est-à-dire constitué d'un nombre fini de points)

Par conséquent, la limitation totale de  $B$  signifie que pour chaque donné  $\varepsilon > 0$  l'ensemble  $B$  est contenu dans l'union d'un nombre fini de boule ouverts de rayon  $\varepsilon$ .

**Lemme 1.1.4 (délimitation total) ([4])**

Soit  $B$  un sous-ensemble d'une métrique espace  $X$ . Alors

- a) Si  $B$  est relativement compact,  $B$  est totalement borné.
- b) Si  $B$  est totalement borné et  $X$  est complet,  $B$  est relativement compact.
- c) Si  $B$  est totalement borné, pour tout  $\varepsilon > 0$  il a un  $\varepsilon$ -net fini  $M_\varepsilon$ .
- d) Si  $B$  est totalement borné,  $B$  est séparable.

**Remarque 1.1.1 ([4])**

La délimitation totale implique la délimitation. Le contraire n'est pas tiennent généralement. En effet, la première affirmation est presque évidente. Le deuxième suit si l'on note que la boule d'unité fermée  $U = \{x, \|x\| \leq 1\} \subset l^2$  est borné mais pas totalement borné, car  $l^2$  est de dimension infinie et complet, de sorte que  $U$  n'est pas compact donc pas totalement délimité.

**Théorème 1.1.5([4])** Dans un espace normé de dimension finie  $X$ , tout sous-ensemble  $M \subset X$  est compact si et seulement si  $M$  est fermé et borné.

**Théorème 1.1.6([13])** Un sous-ensemble d'un espace normé est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact

**Preuve.**

**1.  $U$  est compact  $\Rightarrow U$  est séquentiellement compact**

Soit  $U$  compact et supposons qu'il ne soit pas séquentiellement compact. Puis là existe une suite  $(\varphi_n)$  dans  $U$  qui ne contient pas de sous suite convergente avec limite en  $U$ . Par conséquent, pour chaque  $\varphi \in U$  il existe une boule ouvert  $B(\varphi; r)$  de centre  $\varphi$  et de rayon

$r(\varphi)$  contenant au plus un nombre fini d'éléments de la séquence  $(\varphi_n)$ .

L'ensemble de ces boules est une couverture ouverte de  $U$ , et depuis  $U$  est compact, il s'en suit que  $U$  ne contient qu'un nombre fini des éléments de la séquence  $(\varphi_n)$ . C'est une contradiction.

**2.  $U$  est séquentiellement compact  $\Rightarrow U$  est compact**

Soit  $U$  séquentiellement compact et soit  $V_j, j \in J$ , un recouvrement ouvert de  $U$ .

Premièrement, nous montrons qu'il existe un nombre positif  $\varepsilon$  tel que pour tout  $\varphi \in U$  la boule  $B(\varphi; \varepsilon)$  est contenue dans au moins un des ensembles  $V_j$ . Sinon, il y aurait une suite  $(\varphi_n)$  en  $U$  telle que la boule  $B(\varphi_n; \frac{1}{n})$  ne soit pas contenue dans l'un des  $V_j$ . Puisque  $U$  est séquentiellement compacte, cette suite  $(\varphi_n)$  contient une sous suite convergente  $(\varphi_{n(k)})$  avec limite  $\varphi \in U$ .

L'élément  $\varphi$  est contenu dans un  $V_j$ , et puisque  $V_j$  est ouvert, en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que  $B(\varphi_{n(k)}; \frac{1}{n(k)}) \subset V_j$  pour suffisamment grand  $k$ . C'est une contradiction.

Maintenant, puisque l'ensemble séquentiellement compact  $U$  est totalement borné, il existe un nombre fini  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  en  $U$  tel que les boules  $B(\varphi_k; \varepsilon), k = 1, \dots, n$ , couvrent  $U$ . Mais pour chacune de ces boules il existe un ensemble  $V_{j(k)}, j(k) \in J$ , tel que  $B(\varphi_k; \varepsilon) \subset V_{j(k)}$ .

D'où la famille finie  $V_{j(k)}, k = 1, \dots, n$ , couvre  $U$ . □

**1.1.2 Les opérateurs linéaires**

**Définition 1.1.7**([17]) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{K}$ . on dit que l'application ou l'opérateur  $A : E \rightarrow F$  est linéaire si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a  $A(0) = 0$ .

**Cas particuliers :** Si  $A$  est bijectif alors,  $A$  est un isomorphisme.

Si  $E = F$  alors,  $A$  est un endomorphisme de  $E$ .

Si  $A$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $E$  alors,  $A$  est un automorphisme.

Si  $F = \mathbb{K}$  alors,  $A$  est une forme linéaire sur  $E$ . Quand  $E$  est un ensemble de fonctions,  $A$  est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.

**Définition 1.1.8**([13]) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $A : E \rightarrow F$  un Opérateur linéaire est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|A(\varphi)\|_F \leq C \|\varphi\|_E, \quad \forall \varphi \in E. \tag{1}$$

**Théorème 1.1.9**([10]) Soit  $A$  est un opérateur linéaire de  $X$  dans  $Y$ ,  $X$  et  $Y$  sont des espaces normés.  $A$  est continue si et seulement si pour tout un  $\{x_n\}, x_n \rightarrow 0$  la suite

$Ax_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$

**Notation** : On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre  $E$  et  $F$ . Quand  $E = F$ ,  $\mathcal{L}(E, F)$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ . Quand  $E = \mathbb{K}$  on note  $E'$  l'espace dual (Topologique) de  $E$  qui l'espace vectoriel des formes linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  par  $E''$ , on note le bidual de  $E$ .

On note à l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $Y$  par  $\mathcal{B}(X, Y)$ .

**Théorème 1.1.10 (fini dimensionnelle) ([4])** Si un espace normé  $X$  est fini dimensionnelle, Alors chaque opérateur linéaire sur  $X$  est borné.

**Preuve ([4])**

Soit  $\dim X = n$  et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base pour  $X$ . On prend tout

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j,$$

et considérons tout opérateur linéaire,

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| \|T e_j\| \leq \max_k \|T e_k\| \sum_{j=1}^n |\xi_j|.$$

à la dernière somme et (lemme 2.4.1)<sup>1</sup> avec  $\alpha_j = \xi_j$  et  $x_j = e_j$

On obtient,

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

Par conséquent,

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|T e_k\|.$$

A partir de ceci et (1), on obtient  $T$  est borné.

**Théorème 1.1.11 ([13])** Soit  $X, Y$  deux espaces normé et  $A$  un opérateur linéaire où  $A : X \rightarrow Y$ . On a les propriété suivante est équivalente :

1.  $A$  est continue à un élément.
2.  $A$  est continue.
3.  $A$  est borné.

**Preuve.**

Pour la preuve voir en ([13].p.18).

**Remarque 1.1.2 ([17])** Si  $E$  est de dimension finie, alors toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

**Théorème 1.1.12 (rang et espace nul) ([4])** Soit  $T$  est un opérateur linéaire Alors

1. Lemme (Linear combinations ([4].P.72))

- a) Un rang  $R(T)$  est un espace vectoriel.
- b) Si  $\dim D(T) = n < \infty^1$ , Alors  $\dim R(T) \leq n$ .
- c) L'espace nul  $N(T)$  est un espace vectoriel.

**Preuve**

Pour la preuve voir en ([4].p.86]

**Lemme(Riesz)1.1.13([13])** Soit  $X$  une espace normé,  $U \subset X$  un sous-espace fermé avec  $U \neq X$  et  $\alpha \in (0, 1)$ . Alors il existe un élément  $\psi \in X$  avec  $\|\psi\| = 1$  tel que  $\|\psi - \varphi\| \geq \alpha$  pour tout  $\varphi \in U$

**Preuve**

En effet, soit  $f$  un élément de  $X$  tel que  $f \notin U$  alors, on obtient

$$\inf_{h \in U} \|f - h\| = \beta > 0,$$

choisir un élément  $g$  appartient à  $U$  tel que,

$$\beta \leq \|f - g\| \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

Définie le vecteur  $\varphi$  a une norme unitaire  $\|\varphi\| = 1$ , de plus, pour tout  $\psi \in U$  On obtient

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\| &= \left\| \frac{f - g}{\|f - g\|} - \psi \right\|, \\ &= \left\| \frac{f - g}{\|f - g\|} - \frac{\psi(\|f - g\|)}{\|f - g\|} \right\|, \\ &= \frac{1}{\|f - g\|} \|f - (g + \|f - g\|\psi)\|, \\ &\geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \geq \alpha. \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.1.14([13])(Théorème de cartographie ouverte de Banach)**

Soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire borné bijectif. Puis son inverse  $A^{-1} : Y \rightarrow X$  est également borné, C'est-à-dire que  $A$  est un isomorphisme.

**Preuve.**

Pour la preuve Voir en ([13].P.188]).

### 1.1.3 L'opérateur linéaire compact

**Définition 1.1.15([13])** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un

---

1.  $D(T)$  c'est un domaine de l'opérateur  $T$

ensemble relativement compact dans  $Y$ .

**Définition 1.1.16**([11]) Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compact.

**Définition 1.1.17**([17]) Un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$  est dit compact si  $\overline{A(B_E)}$  est compact de  $F$ .

**Notation** L'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{K}(E, F)$ . Si  $E = F$  alors, on note  $\mathcal{K}(E)$ .

**Théorème 1.1.18**([17]) L'ensemble  $\mathcal{K}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(E, F)$ . En particulier,  $\mathcal{K}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.1.19**([6]) Si  $E$  ou  $F$  est de dimension finie, alors  $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

**Preuve** Si  $E$  est de dimension finie, alors  $B_E$  sera compacte, d'où  $A(B_E)$  est compacte pour tout  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  car  $A$  est continu. On suppose que  $F$  est de dimension infinie, alors  $A(B_E)$  est bornée donc relativement compacte (car  $F$  est de dimension finie).

**Théorème 1.1.20 (critère de compacité)**([4]) Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $\{\varphi_n\}$  de  $E$ , la suite  $\{A\varphi_n\}$  contient une sous-suite convergente de  $F$ .

**Preuve** ([4])

Si  $A$  est compact et  $(x_n)$  est borné, alors la fermeture de  $(Ax_n)$  dans  $Y$  est compact et Déf 1.1.1 montre que  $(Ax_n)$  contient un sous-suite convergente

Inversement, supposons que chaque suite borné  $(x_n)$  contienne un sous-suite  $(x_{n(k)})$  telle que  $(Ax_{n(k)})$  converge en  $Y$ .

Considérons tout sous-ensemble borné  $B \subset X$ , et soit  $(y_n)$  n'importe quelle suite de  $A(B)$  ensuite  $y_n = Ax_n$  pour certains  $x_n \in B$ , et  $(x_n)$  est borné par hypothèse,  $(Ax_n)$  contient une sous-suite convergente. Donc  $\overline{A(B)}$  est compact par Déf 1.1.1 parce que  $(y_n)$  dans  $A(B)$  était arbitraire. Par définition, cela montre que  $A$  est compact. □

**Théorème 1.1.21**([13]) Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

**Preuve** ([13]) Soit  $(\varphi_n)$  une suite bornée dans  $X$ , si  $A$  est compact, Alors il existe une sous-suite  $(\varphi_{n(k)})$  telle que  $A\varphi_{n(k)} \rightarrow \psi \in Y$ ,  $k \rightarrow \infty$  puisque  $B$  est borné et donc continu, on a  $A(B\varphi_{n(k)}) \rightarrow A\psi \in Z$ ,  $k \rightarrow \infty$

Par conséquent,  $AB$  est compact. Si  $A$  est bornée et  $B$  est compact, la suite  $(A\varphi_n)$  est bornée en  $Y$ , puisque les opérateurs bornés ensembles bornés. Par conséquent, il existe

une sous-suite  $(\varphi_{n(k)})$  telle que  $(AB)\varphi_{n(k)} = A(B\varphi_{n(k)}) \rightarrow A\psi \in Z, k \rightarrow \infty$

Par conséquent,  $AB$  est compact.

**Théorème 1.1.22([13])** Une combinaison linéaire des opérateurs compacts  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  est un opérateur compact

**Preuve([13])** Soit  $A, B : X \rightarrow Y$  des opérateurs linéaire compacts et soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Puis pour chaque suite bornée  $(\varphi_n)$  dans  $X$ , puisque  $A$  et  $B$  est compact, nous sélectionnons une sous-suite  $(\varphi_{n(k)})$  telle que les deux suites  $(A\varphi_{n(k)})$  et  $(B\varphi_{n(k)})$  convergent donc  $(\alpha A + \beta B)\varphi_{n(k)}$  converge, et donc  $\alpha A + \beta B$  est compact.

**Théorème 1.1.23([9])** Soient  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach, et soit  $(A_n)$  une suite d'opérateurs compacts de  $X$  dans  $Y$ , convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $A$  de  $X$  dans  $Y$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\|.$$

alors  $A$  est compact.

**Preuve([9]).** Soit  $(\varphi_n)$  une suite bornée de  $E$ , l'opérateur  $A_1$  étant compact, on peut extraire de la suite  $A_1\varphi_n$  une sous-suite convergente, soit  $(\varphi_{1n})$  une sous-suite de  $(\varphi_n)$  telle que,  $A_1\varphi_{1n}$  soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite  $A_2\varphi_{1n}$  une sous-suite convergente, car  $A_2$  est compact, soit  $(\varphi_{2n})$  une sous-suite de  $(\varphi_{1n})$  telle que, la suite  $A_2\varphi_{2n}$  soit convergente.

Remarquons que, la suite  $A_1\varphi_{2n}$  est une sous-suite de la suite convergente  $A_1\varphi_{1n}$  qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs  $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ , on détermine les suites  $(\varphi_{1n}), (\varphi_{2n}), \dots, (\varphi_{pn}), \dots$  il est à remarquer que la suite  $(\varphi_{pn})$  est une sous-suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites  $(A_k\varphi_{pn})$  sont convergent pour  $(k = 1, 2, \dots, p)$  comme l'espace  $Y$  est complet, pour la compacité de l'opérateur  $A$  il suffit de montrer que la suite  $(A\varphi_{pn})$  est une suite Cauchy, alors

$$\|A\varphi_{pn} - A\varphi_{qn}\| \leq \|A\varphi_{pn} - A_n\varphi_{pn}\| + \|A_n\varphi_{pn} - A_n\varphi_{qn}\| + \|A_n\varphi_{qn} - A\varphi_{qn}\|$$

Soit  $\|\varphi_n\| \leq M$ ; choisissons  $n$  de sorte que l'on a  $\|A - A_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$ , existe choisissons  $N$  tel que, pour tous le  $p > N$ , on a la relation  $\|A\varphi_{pn} - A\varphi_{qn}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  car la suite  $(A_n\varphi_{pn})$  est convergente.

Dans ces conditions, on aura pour tout  $p$  et  $q$  suffisamment grands

$$\|A\varphi_{pn} - A\varphi_{qn}\| < \varepsilon. \quad \square$$

**Théorème 1.1.24**([13]) L'opérateur identique  $I$  de  $X$  dans  $X$  est compact si et seulement si  $X$  est de dimension finie.

**Preuve.** Supposons que  $I$  est compact et que  $X$  n'est pas de dimension finie. Choisir un  $\varphi_1 \in X$  arbitraire avec  $\|\varphi_1\| = 1$ .

Alors  $U_1 := \text{span}\{\varphi_1\}$  est un sous-espace de dimension finie et donc fermé de  $X$ . Par le lemme(Riesz)**1.1.13** il existe  $\varphi_2 \in X$  avec  $\|\varphi_2\| = 1$  et  $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \geq \frac{1}{2}$ .

Considérons maintenant  $U_2 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ . Toujours par le lemme(Riesz), il existe  $\varphi_3 \in X$  avec  $\|\varphi_3\| = 1$  and  $\|\varphi_3 - \varphi_1\| \geq \frac{1}{2}$ ,  $\|\varphi_3 - \varphi_2\| \geq \frac{1}{2}$ . En répétant cette procédure, on obtient une suite  $(\varphi_n)$  avec les propriétés  $\|\varphi_n\| = 1$  et  $\|\varphi_n - \varphi_m\| \geq \frac{1}{2}, n \neq m$ . Cela implique que la séquence bornée  $(\varphi_n)$  ne contient pas de sous-suite convergente. Nous avons donc une contradiction avec la compacité de  $I$ .

Par conséquent, si l'opérateur d'identité est compact,  $X$  a une dimension finie. L'énoncé inverse est une conséquence immédiate du théorème **1.1.29** □

**Théorème (Riesz)1.1.25**([7]) Soit  $E$  un e.v.n tel que  $B_E$ (la boule unité) soit compact. Alors  $E$  est de dimension finie.

**Preuve.**([7]) Raisonnons par l'absurde. Si  $E$  est de dimension infinie, il existe une suite  $(E_n)$  de sous-espaces de dimension finie tels que  $E_{n-1} \subsetneq E_n$ . Grâce au lemme(Riesz) on peut construire une suite  $(u_n)$  avec  $u_n \in E_n$ ,  $\|u_n\| = 1$  et  $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . En particulier  $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$  pour  $m < n$ . Donc la suite  $(u_n)$  n'admet aucune sous suite convergente ce qui est contraire à l'hypothèse "  $B_E$  compact". □

**Remarque 1.1.3**([17])

a) Il résulte du théorème de Riesz que l'application identité sur  $X$  est compacte si et seulement si  $X$  est de dimension finie.

b) Si  $E$  et  $F$  sont de dimensions infinies, le théorème de Riesz entraîne que si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est inversible alors,  $A$  n'est pas compact.

**Définition 1.1.26**(Opérateur complètement continu)([5])

L'opérateur  $A$  est dit complètement continu, s'il est continu et compact.

**Théorème 1.1.27**([1]) Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

**Preuve.**([10]) Supposons au contraire qu'il ne soit pas borné. cela veut dire là est une suite bornée  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $\|Ax_n\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Mais la suite  $\{Ax_n\}$  ne contient pas de sous suite convergente, et cette contredit la définition d'un opérateur compact. □

### 1.1.4 Opérateur de rang fini

**Définition 1.1.28**([17])

Soient  $T \in \mathcal{L}(E; F)$ . On dit que  $T$  est un opérateur de rang fini si  $ImT$  est de dimension finie,  $dimT(E) < +\infty$ .

**Théorème 1.1.29**(domaine ou rang de dimension finie)([4]) Soit  $X$  et  $Y$  être des espaces normés et  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire. Alors :

a) Si  $T$  est borné et  $dimT(X) < \infty$ , l'opérateur  $T$  est compact.

b) Si  $dimX < \infty$ , l'opérateur  $T$  est compact.

**Preuve** ([4])

a) soit  $(x_n)$  n'importe quelle suite borné dans  $X$  Alors l'inégalité  $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|$  montre que  $(Tx_n)$  est borné. Ainsi  $(Tx_n)$  est relativement compact de 1.1.5 puisque  $dimT(X) < \infty$ . il s'en suite que  $(Tx_n)$  a une sous suite convergente. Puisque  $(x_n)$  était un arbitraire borné séquence en  $X$ , l'opérateur  $T$  est compact par 1.1.20

b) découle de (a) en montant que  $dimX < \infty$  implique délimitation de  $T$  par 1.1.10 et  $dimT(X) < dimX$  par 1.1.12 (b) □

**Corollaire 1.1.30**([7]) Soit  $(T_n)$  une suite d'opérateurs continus de rangs finis de  $X$  dans  $Y$  et soit  $T$  un opérateurs linéaire tel que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . alors  $T$  est un compact.

**Théorème 1.1.31**([18]) Toute limite dans  $\mathcal{L}(E, F)$  d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.

**Remarque 1.1.4** La réciproque est fausse en général mais si  $F$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.1.32**([17]) Soit  $A \in \mathcal{K}(E, F)$ . Alors,  $Im(A)$  est fermé si et seulement si  $A$  est de rang fini.

### 1.1.5 Les opérateurs intégrales compacts dans $C(\Omega)$

**Définition 1.1.33**(Opérateur intégrale)([16]) Soit  $K : C(G) \times C(G) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et  $G$  une ensemble compacte.

L'opérateur intégral linéaire  $A$  sur  $C(G)$  est défini par :

$$A : \varphi \in C(G) \rightarrow A\varphi \in C(G),$$

$$A(\varphi)(x) = \int_G K(x, t)\varphi(t)dt.$$

Où la fonction  $K$  s'appelle noyau de l'opérateur intégrales  $A$

**Théorème 1.1.34**([16]) Soit  $G$  un ensemble compacte de  $\mathbb{R}^n$  soit  $K$  une fonction continue

de  $G \times G$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors l'opérateur linéaire  $A$  défini de  $C(G)$  dans  $C(G)$

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in G. \quad (2)$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu  $K$ . Cet opérateur est borné de norme  $\|A\|$  donnée par

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |K(x, t)|dt.$$

**Preuve([16])**

Il est clair que l'opérateur  $A$  définie par (2) est linéaire pour tout  $\varphi \in C(G)$  de plus pour  $\|\varphi\| \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_G K(x, t)\varphi(t)dt \right|, \\ &\leq \int_G |K(x, t)\varphi(t)|dt, \\ &\leq \int_G |K(x, t)||\varphi(t)|dt, \\ |A\varphi(x)| &\leq \int_G |K(x, t)|dt, \quad x \in G. \end{aligned}$$

d'où

$$\|A\| = \max_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\| \leq \max_{x \in G} \int_G |K(x, t)|dt,$$

Le fait que le noyau  $K$  est continu, on peut trouver un élément  $x_0 \in G$ . Telle que

$$\int_G |K(x_0, t)|dt = \max_{x \in G} \int_G |K(x, t)|dt,$$

D'où pour  $\varepsilon > 0$ . On choisi une fonction  $\psi \in C(G)$  par l'expression

$$\psi(t) = \frac{\overline{|K(x_0, t)|}}{|K(x_0, t)| + \varepsilon}, \quad t \in G.$$

Alors  $\|\psi\| \leq 1$ , de plus

$$\int_G \frac{|K(x_0, t)|^2 - \varepsilon^2}{|K(x_0, t)| + \varepsilon} dt \leq \int_G \frac{|K(x_0, t)|^2}{|K(x_0, t)| + \varepsilon} dt = \|A\psi(x_0)\| \leq \|A\psi\|,$$

et on a

$$\int_G \frac{|K(x_0, t)|^2 - \varepsilon^2}{|K(x_0, t)| + \varepsilon} dt = \int_G |K(x, t)|dt - \varepsilon|G|.$$

Donc

$$\int_G |K(x_0, t)| dt - \varepsilon |G| \leq \|A\psi\| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |A\varphi| = \|A\|,$$

Cette inégalité reste vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient

$$\max_{x \in G} \int_G |K(x, t)| dt = \int_G |K(x_0, t)| dt \leq \|A\|.$$

□

**Théorème 1.1.35 (d'Arzela - Ascoli) ([14])** un ensemble  $U \subset C(G)$  est relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinue, c'est-à-dire il existe une constante  $C$  tel que

$$|\varphi(x)| \leq C \quad \text{pour tout } x \in G.$$

et toute  $\varphi \in U$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

$\forall x, y \in G$  avec  $|x - y| < \delta$  et  $\forall \varphi \in U$ .

**Théorème 1.1.36 ([13])** L'opérateur intégral avec noyau continue est un opérateur linéaire compacte sur  $C(G)$ .

**Preuve ([13])**

Soit  $U \subset C(G)$  est borné c'est-à-dire  $\|\varphi\|_\infty \leq C$  pour tout  $\varphi \in U$  et  $C > 0$ .

Alors, pour l'opérateur intégrale  $A$  défini par (2.4) on a

1.  $A(U)$  est borné. Puisque,

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_G K(x, t)\varphi(t) dt \right|, \\ &\leq \int_G |K(x, t)\varphi(t)| dt, \\ &\leq \int_G |K(x, t)| |\varphi(t)| dt, \\ &\underbrace{\leq}_{\|\varphi\|_\infty \leq C} \int_G \max_{x \in G} |K(x, t)| C dt, \\ &\leq C \max_{x \in G} |K(x, t)| \int_G dt, \\ |A\varphi(x)| &\leq C |G| \max_{x \in G} |K(x, t)|, \quad \forall x \in G, \quad \forall \varphi \in U. \end{aligned}$$

2.  $A(U)$  est équicontinue. Puisque  $K$  est uniforme continue sur l'ensemble compact  $G \times G$ , donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \implies |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{C|G|},$$

Alors,  $\forall \varphi \in U, \forall x, y \in G, \text{ avec } |x - y| < \delta, \text{ on a}$

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\varphi(y)| &= \left| \int_G (K(x, z) - K(y, z))\varphi(z) dz \right|, \\ &< \int_G |K(x, z) - K(y, z)| |\varphi(z)| dz, \\ |A\varphi(x) - A\varphi(y)| &\underbrace{\leq}_{\|\varphi\|_\infty \leq C, |K(x,z) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{C|G|}} \int_G \frac{\varepsilon}{C|G|} C dz = \frac{\varepsilon}{C|G|} \cdot C \cdot |G| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $A(U)$  est équicontinue. Par conséquent  $A$  est compact selon théorème **d'Arzéla-Ascoli**<sup>1</sup>.

**Exemple.** Soit  $E = C([0; 1], \mathbb{K})$ . L'opérateur de Volterra  $A : E \longrightarrow E$  défini par

$$\forall \varphi \in E, A\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \forall x \in [0; 1],$$

est compact.

On va utiliser le théorème d'Ascoli avec  $I = [0; 1]$  et  $X = \mathbb{K}$  on pose  $H = A(B_E)$ .

Soit  $\varphi \in B_E$ , pour tous  $x, y \in [0; 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\varphi(y)| &= \left| \int_x^y \varphi(t) dt \right|, \\ &\leq |x - y| \|\varphi\|_\infty, \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\forall x \in I; \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall y \in I, d(x, y) < \eta \implies \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

1. CESARE Arzéla est un mathématicien et Universitaire italien 1847-1912

GIULIO Ascoli est un mathématicien Italien 1843-1896

Autrement dit, l'ensemble  $H$  est équicontinu. De plus, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $H(x)$  est relativement compacte. or pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_0^x \varphi(t) dt \right|, \\ &\leq |x| \|\varphi\|_\infty, \\ &\leq |x| \leq 1. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème d'Ascoli sont satisfaites, il s'en suit que  $A$  est compact.

### Exemples d'un opérateurs intégrales non compacts

#### • Opérateur intégrale d'Abel

Soit  $X = Y = C([0; 1])$ , on définit

$$\begin{aligned} A\varphi(x) &= \int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt, \quad x > 0, \\ A\varphi(0) &= \frac{\pi}{2} \varphi(0). \end{aligned}$$

Alors  $A : C([0; 1]) \rightarrow C([0; 1])$ ; avec  $\|A\| = \frac{\pi}{2}$  n'est pas un opérateur compact.

#### • Opérateur intégral de Wiener-Hopf

$X = Y = C([0; +\infty[)$ , pour les fonctions  $\varphi(x)$  continues et bornées sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ . La norme  $\|\cdot\|_\infty$  on définit

$$A\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-|x-t|} \varphi(t) dt, \quad x > 0.$$

cet opérateur n'est pas compact.

### 1.1.6 Opérateur à image fermée

**Définition 1.1.37**([19]) On dit qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E; F)$  est d'image fermée si  $\dim \text{Im}(A) < \infty$ . Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact.

**Corollaire 1.1.38**([19]) Soit  $(A_n)$  une suite d'opérateurs continus d'image fermée de  $E$  dans  $F$  et soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  tels que  $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \rightarrow 0$ . Alors  $A$  est un compact.

## 1.2 Les opérateurs compacts dans un espace de Hilbert

On va donner une caractérisation plus précise de la compacité dans le cadre hilbertien. Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Théorème 1.2.1 (représentation de Riesz) ([11])** Soit  $\varphi$  une forme linéaire bornée définie par  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ , Alors il existe un unique  $y \in H$  tel que, pour tout  $x \in H$ , on a

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

d'autre part, toute forme linéaire dans un espace Hilbert  $H$  est un produit intérieur en  $H$ , Donc

$$\forall x \in H \quad \exists ! y \in H, \quad \varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

### 1.2.1 Opérateur adjoint

**Définition 1.2.2 ([5])** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $H_1$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H_2$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_1$  est dit opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in H_1$  et  $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

De plus, on a  $\|A\| = \|A^*\|$ .

**Proposition 1.2.3 ([17])** Soit  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Alors  $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  et  $\|A^*\| = \|A\|$ .

**Preuve** Pour la preuve voir en ([17]P.21).

**Proposition 1.2.4 ([17])** Soient  $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ ,  $C \in \mathcal{L}(H_2, H)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a

1.  $(I_{d_H})^* = I_{d_H}$ .
2.  $(A^*)^* = A$ .
3.  $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$ .
4.  $CA \in \mathcal{L}(H_1, H)$  et  $(CA)^* = A^*C^*$ .
5.  $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$ .

**Exemple (Opérateur intégral à noyau)** Soit  $K : [c; d] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'opérateur intégral  $A : L^2([a; b], \mathbb{C}) \rightarrow$

$L^2([c; d], \mathbb{C})$  tel que pour tout  $f \in L^2([a; b], \mathbb{C})$ , pour tout  $L^2([c; d], \mathbb{C})$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle Af, g \rangle &= \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx, \\
 &= \int_c^d \int_a^b K(x, y) f(y) \overline{g(x)} dy dx, \\
 &= \int_a^b f(y) \left[ \int_c^d K(x, y) \overline{g(x)} dx \right] dy, \\
 &= \int_a^b f(x) \left[ \int_c^d \overline{K(x, y) g(x)} dx \right] dy, \\
 &= \langle f, A^*g \rangle.
 \end{aligned}$$

L'utilisation de Fubini est justifiée par l'intégrabilité sur  $([c; d] \times [a; b])$  de la fonction

$$F(x, y) = K(x, y) f(y) \overline{g(x)}.$$

D'où, l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$  est défini pour tout  $g \in L^2([c; d], \mathbb{C})$  par

$$\forall s \in [a; b], (A^*g)(s) = \int_c^d \overline{K(t, s)} g(t) dt.$$

**Théorème 1.2.5**([3]) Si  $H$  est un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{B}(H)$ , alors  $T$  est compact si et seulement si  $A^*$  est compact.

**Théorème 1.2.6**([17]) Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{K}(E, H)$ . Alors, il existe une suite  $(A_n)_n$  de  $\mathcal{L}(E, H)$  d'opérateur de rang fini, qui converge vers  $A$  dans  $\mathcal{L}(E, H)$ .

**Définition 1.2.7 (Opérateur auto-adjoint)**([17]) Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ . On dit que  $A$  est un opérateur auto-adjoint si  $A = A^*$ . On dit aussi symétrique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et hermitien si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### Exemples

1. L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.

2. Les opérateurs linéaires sur  $\mathbb{C}^n$  donnés par des matrices hermitiennes  $(a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , c'est-à-dire que

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ sont auto-adjoints.}$$

**Définition 1.2.8 (Opérateur de Hilbert-Schmidt)**([17]) Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et soit  $(x_k)_k$  une base hilbertienne de  $H$ . un opérateur linéaire  $A : H \rightarrow H$  est

un opérateur de Hilbert- Schmidt (ou simplement HS) si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 < \infty$$

Le réel

$$\|A\|_{HS} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de  $A$ .

Voici un exemple sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

**Exemple.** Soient  $f \in L^2(\cdot, \mathbb{C})$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) et  $K(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$ . Alors, l'opérateur

$$f \longrightarrow Af(x) = \int_{\Omega} K(x, t)f(t)dt,$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt

**Remarque 1.2.1** Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $L^2(\cdot, \mathbb{C})$  se représente de manière unique à l'aide d'une fonction  $K(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$ .

**Théorème 1.2.9([17])** Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

**Preuve**

On va montrer que  $A$  est limité d'opérateurs de rang fini. Soit  $A$  un opérateur HS. on pose

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\|^2 < \infty$$

soit  $\varepsilon > 0$ , alors, il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  (fini) tel que

$$\sum_{k > N_\varepsilon} \|Ax_k\|^2 \leq \varepsilon.$$

Soit  $F_\varepsilon = \text{vect}\{x_1, \dots, x_{N_\varepsilon}\}$  un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit  $F$  l'orthogonal de  $F_\varepsilon$ , alors,  $F = \text{vect}\{x_k\}_{k > N_\varepsilon}$ . Soient  $P_\varepsilon$  (resp.  $P$ ) la projection orthogonale de  $H$  sur  $F_\varepsilon$  (resp. sur  $F$ ), alors,  $P_\varepsilon + P = I_{d_H}$ .

On pose  $A_\varepsilon = AP_\varepsilon$  qui est un opérateurs de rang fini et  $A - A_\varepsilon = AP$ . Où,

$$Px_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k > N_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } k \leq N_\varepsilon. \end{cases}$$

On introduit la norme de Hilbert-Shmidt, on trouve

$$\begin{aligned} \|A - A_\varepsilon\|_{HS}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|APx_k\|^2, \\ &= \sum_{k > N_\varepsilon} \|Ax_k\|^2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Où,  $\|A - A_\varepsilon\| \leq \|A - A_\varepsilon\|_{HS}$  alors, l'opérateur  $A$  est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. Il est donc compact d'après la corollaire 1.1.31 □

**Théorème 1.2.10**([17]) On considère un espace de Hilbert séparable  $H$  et un opérateur  $A \in \mathcal{K}(H)$ . Soit  $(e_n)$  une base orthonormée de  $H$ . Alors, la suite  $(Ae_n)$  tend vers 0

**Preuve**

On suppose que  $(Ae_n)$  ne tend pas vers 0. Sinon, on pourrait (pour un certain  $\varepsilon > 0$ ) extraire de  $(e_n)$  une sous-suite  $(e_{k(n)})$  telle que  $\|Ae_{k(n)}\| > \varepsilon$  pour tout  $n$ . Comme  $A$  est compact, on peut extraire de  $(Ae_{k(n)})$  une sous-suite (notée  $(Ae_{n(k)})$ ) convergente. Si on note  $x$  sa limite, on a  $\|x\| \geq \varepsilon$ . Or, pour tout  $y \in H$ , on a

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ae_{k(n)}, y \rangle, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle e_{k(n)}, A^*y \rangle, \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que pour tout vecteur  $z \in H$ , la série  $\sum_n |\langle e_n, z \rangle|^2$  converge (voir 4.4.6)<sup>1</sup> alors, son terme général tend vers 0. En choisissant  $y = x$ , on obtient  $x=0$ , ce qui est une contradiction. □

**Corollaire 1.2.11**([8]) Soit  $\{K_n\}$  est une suite des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert  $H$ , tel que pour un opérateur  $K$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K - K_n\| = 0.$$

Alors  $K$  est compact.

## 1.2.2 Opérateur inverse

**Définition 1.2.12**([3]) Soit  $X$  est un espace linéaire normé. Un opérateur  $T \in \mathcal{B}(X)$  est dit inversible. s'il existe  $S \in \mathcal{B}(X)$  tel que  $ST = I = TS$ .

**Notation**

Soit  $X$  est un espace linéaire normé et soit  $T \in \mathcal{B}(X)$  est inversible. L'élément  $S \in \mathcal{B}(X)$  tel que  $ST = I = TS$  appelé l'inverse de  $T$  et est noté par  $T^{-1}$ .

**Lemme 1.2.13**([3]) Si  $X$  est un espace linéaire normé et  $T_1, T_2$  sont des éléments inversibles de  $\mathcal{B}(X)$ . Alors

- a)  $T_1^{-1}$  est inversible avec  $(T_1^{-1})^{-1} = T_1$ .
- b)  $T_1 T_2$  est inversible avec  $(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$ .

1. Théorème 4.4.6 p.72 ([17])

**Théorème 1.2.14 (Banach) ([2])** Soit  $X, Y$  deux espaces de Banach et soit l'opérateur linéaire  $A$  défini de  $X$  dans  $Y$ , avec

$$\ker(A) = X \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) = Y$$

On suppose que  $A$  est continu et l'inverse  $A^{-1}$  existe, alors  $A^{-1}$  est continu.

**Proposition 1.2.15 ([18])** Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{L}(E, X)$  bijective. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, E)$ .
2. Il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_X \geq C\|x\|_E$ .
3.  $(X, \|\cdot\|_X)$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ .

**Preuve**

Pour la preuve voir ([18].p.8)

**Proposition 1.2.16 ([18])** Soient  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace Banach sur  $\mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_Y \geq C\|x\|_E$ .
2.  $T$  est injectif et  $\text{Im}(T)$  est fermé dans  $Y$ .

**Preuve**

Pour la preuve voir ([18].p.8)

**Proposition 1.2.17 ([18])** Soient  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace Banach sur  $\mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $\overline{\text{Im}(T)} = Y$  et il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_Y \geq C\|x\|_E$ .
2.  $T$  est inversible.

**Preuve**

Pour la preuve voir ([18].p.9)

**Théorème 1.2.18 ([1])** Les opérateurs compacts inversibles uniquement sur un espace fini dimensionnel

**Preuve**

Pour opérateur compact  $A : X \rightarrow Y$  avec l'inverse  $A^{-1}$  est continu, la délimitation de  $A^{-1}$  donne une constante  $C$  telle que  $\|A^{-1}\psi\| \leq C\|\psi\|$  pour tout  $\psi \in Y$ . L'inversibilité implique que  $AX = Y$ , et  $\|\varphi\| \leq C\|A\varphi\|$  pour tout  $\varphi \in X$ .

Ainsi, l'image par  $A$  de la boule unitaire en  $X$  contient une boule ouverte en  $Y$ . compacité implique que  $Y$  est de dimension finie, et l'inversibilité implique que  $X$  est de dimension finie

**Théorème 1.2.19 ([17])** Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est inversible si et seulement si  $A^*$  est inversible et on a  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

**Preuve**

Pour la preuve voir en ([17].P.23)

# Chpitre II

## Théorie de Riesz des équations intégrales

### 2.1 Équations intégrales

Les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion). La principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation. A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrits à l'aide d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de conservations deviennent alors plus complexes et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toutes la surface considérée.

#### 2.1.1 Équation intégrale

**Définition 2.1.1**([15]) Toute équation fonctionnelle

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_E K(x, t, \varphi)dt, \quad x \in E.$$

est appelée équation intégrale (EI) ou  $\varphi$  est l'inconnue,  $f$  est une fonction donnée et  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un ensemble fermé borné et mesurable d'un espace euclidien,  $K$  est le noyau.

### 2.2 Classification des équations intégrale

La classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont :

(A)- Linéarité ou non, (B)- Limite de l'intégration, (C)- Le placement de la fonction inconnue.

#### 2.2.1 Équations intégrales linéaires

**Définition 2.2.1**([2])

1- On appelle équation intégrale de Fredholm (EIF) de seconde espèce, une équation de la

forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (3)$$

2- On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (4)$$

**Définition 2.2.2([2])**

1- On appelle équation intégrale de Volterra (EIV) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (5)$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (6)$$

**Remarque 2.2.1([2])**

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $K(x, t) = 0$  pour  $t > x$ .

## 2.2.2 Équations intégrales non-linéaires

**Définition 2.2.3([2])**

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (EINF) de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (7)$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (8)$$

**Définition 2.2.4([2])**

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (EINV) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (9)$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (10)$$

**Remarque 2.2.2**

- (a) Si  $f(x) \neq 0$ , dans les équations (3), (5), (7) et (9) sont dites non homogènes.
- (b) Si  $f(x) = 0$ , dans les équations (3), (5), (7) et (9) sont dites homogènes.

**Définition 2.2.5([2])**

1- On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} F(x, t, \varphi(t))dt = g(x), \quad t \in \Omega.$$

où  $F$  et  $g$  sont des fonctions arbitraires.

2- On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t)f(t, \varphi(t))dt = g(x), \quad t \in \Omega.$$

**Remarque 2.2.3**

L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Uryson.

### 2.2.3 Équations intégrales singulières et faiblement singulières

**Définition 2.2.6([2])**

1- Considérons l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} R(x, t)\varphi(t)dt = g(x), \quad (11)$$

On dit que (11) est singulière si  $R(x, t)$  admet une singularité ou le domaine  $\Omega$  n'est pas borné.

2- On considère l'équation intégrale de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t)dt = g(x), \quad (12)$$

où  $K(x, t)$  est singulier ou faiblement singulier, en générale  $K(x, t)$ , est donné par

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors

(a) Le cas où  $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  d'équations (12) est de Abel.

(b) Le cas  $K(x, t) = \log |x - t|$  s'appelle singularité logarithmique.

**Définition 2.2.7([2])**

On appelle équation intégrale de Carleman, une équation de la forme

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t-x} \varphi(t) dt.$$

où  $a$ ,  $b$  et  $\varphi$  sont des fonctions continues.

**Remarque 2.2.4**

L'équation de Carleman admet une singularité de type de Cauchy.

## 2.3 Existence et unicité des solutions des (EIFs)

### 2.3.1 Série Neumann

Pour les équation d'opérateurs du seconde espèce

$$\varphi - A\varphi = f$$

l'existence et l'unicité d'une solution peuvent être établies par la série Neumann. BERNHARD Neumann est un mathématicien allemand, 1909-2002, c'est-à-dire  $\|A\| < 1$

**Théorème 2.3.1([13])** Soit  $A : X \rightarrow X$  est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach  $X$  avec  $\|A\| < 1$  et soit  $I : X \rightarrow X$  désigne l'opérateur d'identité. Alors  $I - A$  admet un inverse borné sur  $X$  donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

et satisfait

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

tel que

$$A^0 = I \text{ et } A^k = AA^{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

**Résultat 2.3.2([12])**

Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 pour tout  $f \in X$  l'équation

$$(I - A)\varphi = f$$

admet une solution unique dans  $X$  telle que

$$\varphi = (I - A)^{-1}f \in X.$$

**Corollaire 2.3.3([2])** Soit  $A$  un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach, alors l'opérateur

$$x = x_0 + \lambda Ax$$

admet une solution unique donné par

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k x_0, \quad \text{avec } |\lambda| \|A\| < 1.$$

## 2.4 Théorie de Riesz

Nous allons maintenant présenter les résultats de la théorie de Riesz sur les opérateurs compacts, qui dit essentiellement que ces opérateurs se comportent presque comme des opérateurs de dimension finie, dans le sens où les espaces spectraux sont de dimension finis. Ceci signifie que lorsque l'on perturbe l'identité de l'espace  $X$  suivant un opérateur compact  $A$ , on obtient un noyau de dimension finie et une image fermé. Pour montrer tout cela, on étudie donc une perturbation du type  $T = I - A$ , avec  $A$  compact, ce qui permet l'étude sans perte de généralité des espaces  $N(I - \lambda A)$  et  $R(I - \lambda A)$ , puisque  $\lambda A$  est encore compact.

**Théorème(Riesz)2.4.1([6],[11])**

(i) Le noyau de l'opérateur  $T$  ;

$$\ker(T) = N(T) = \{\varphi \in X : T\varphi = 0\}$$

est un sous-espace fermé et de dimension finie.

(ii) L'image de l'opérateur  $T$  ;

$$\text{Im}(T) = R(T) = \{T\varphi : \varphi \in X\}$$

est un sous-espace linéaire fermé.

(iii) il existe un entier positif non nul  $r$ , appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$  tel que

$$\{0\} = N(T^0) \subsetneq N(T^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(T^r) = N(T^{r+1}) = \dots \quad (13)$$

et

$$X = T^0(X) \supsetneq T^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq T^r(X) = T^{r+1}(X) \dots \quad (14)$$

D'autre part, on a la somme directe

$$X = N(T^r) \oplus T^r(X)$$

C'est -à-dire, pour tout  $\varphi \in X \exists! \psi \in N(T^r), \exists! \theta \in T^r(X)$  tel que

$$\varphi = \psi + \theta$$

**Remarque 2.4.1([11])**

• L'espace nul  $N(T^n)$  de l'opérateur  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est un fermé et sous-espace dimensionnel fini. En effet, les opérateurs  $T^n$  peuvent s'écrire à la forme

$$T^n = (I - A)^n = I - A_n,$$

où  $A_n$  est un opérateur compact en tout que combinaison d'opérateurs compacts donnée par

$$A_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} C_n^i A^i.$$

•  $R(T^n)$  est un sous-espace fermé.

**Preuve([11])**

i) En effet, on sait que le noyau  $N(T)$  d'un opérateur borné  $T$  est un sous-espace fermé de  $X$ ; puisque, pour toute suite  $(\varphi_n)$  dans  $N(T)$  converge vers  $\varphi$  dans  $X$ ; on obtient  $\varphi$  dans  $N(T)$ . En réalité, en raison de la délimitation de  $T$  on a

$$T\varphi_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n = 0,$$

ou encore

$$T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n\right) = 0 \implies T\varphi = 0.$$

Par conséquent, l'espace nul  $N(T)$  est fermé.

Par contre, toutes les fonctions  $\varphi \in N(T)$  doivent satisfaire l'équation

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0,$$

Ou encore

$$A\varphi = \varphi.$$

Notant que, la restriction de l'opérateur  $A$  au sous-espace  $N(T)$  coïncide avec l'opérateur d'identité sur  $N(T)$ . L'opérateur  $A$  est compact de  $X$  à  $X$  et aussi compacte de  $N(T)$  à  $N(T)$ , puisque  $N(T)$  est fermé. Évidemment, pour toute séquence bornée  $(\varphi_n)$  dans  $X$  en particulier dans  $N(T)$  la séquence  $(A\varphi_n)$  où  $A\varphi_n = \varphi_n$  contient une sous-suite convergente  $(\varphi_{n(k)})$  où  $A\varphi_{n(k)} = \varphi_{n(k)}$  dans le fermé  $N(T)$ .

Donc l'opérateur compact  $A$  représente l'identité opérateur sur le sous-espace  $N(T)$  est de dimension finie.

ii) On sait que la rang  $R(T)$  d'un opérateur linéaire  $T$  est une sous-espace. Soit  $f$  un élément de la fermeture  $T(X)$ ; alors il existe une séquence  $(f_n)$  de l'ensemble  $T(X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f.$$

En d'autre part,  $(f_n) \in T(X)$  il existe une suite  $(\varphi_n) \in X$  telle que

$$T\varphi_n = f_n,$$

avec la relation de convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f.$$

• Premier cas  $\varphi_n$  borné

Supposons que la suite  $(\varphi_n)$  est borné, Alors, en raison de la compacité de l'opérateur  $A$  il existe une sous-suite  $(A\varphi_{n(k)})$  converge vers  $\psi$ . D'où la convergence de la sous-suite  $(\varphi_{n(k)})$  à un élément  $\varphi$  dans  $X$ . On a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n(k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (T\varphi_{n(k)} + A\varphi_{n(k)}), \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} T\varphi_{n(k)} + \lim_{k \rightarrow +\infty} A\varphi_{n(k)}, \\ &= f + \psi, \\ &= \varphi \in X. \end{aligned}$$

En raison de la délimitation de l'opérateur  $T$  et de la convergence des séquence  $(T\varphi_n)$ ; on a

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_{n(k)}, \\ &= T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{n(k)}\right) = T\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f = T\varphi \in T(X) = \overline{T(X)}$$

• Deuxième cas  $(\varphi_n)$  illimité

Supposons que la suite  $(\varphi_n)$  n'est pas borné, alors nous obtenons

**1. Si**  $(\varphi_n) \in N(T)$

pour la suite  $(\varphi_n)$  dans l'espace nul  $N(T)$ ; on a

$$T\varphi_n = f_n = 0,$$

$$\begin{aligned} T\varphi_n = 0 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n = 0, \\ &\implies f = 0 \in T(X) = \overline{T(X)}, \end{aligned}$$

Comme un sous-espace linéaire contient l'élément nul.

**2. Si**  $\varphi_n \notin N(T)$

En prenant le sous-espace  $G$  de  $X$  couvert par  $(\varphi_n)$  et  $N(T)$  défini comme

$$G = \text{span}\{\varphi_n + N(T)\}.$$

Le sous-espace  $N(T)$  est fermé dans  $G$ . Par conséquent, il existe un élément  $\psi_n \in G$  avec une norme unitaire  $\|\psi_n\| = 1$  telle que

$$\|\psi_n - \xi_n\| > \frac{1}{2}, \quad \forall \xi_n \in N(T),$$

avec la relation suivante

$$\psi_n = a_n\varphi_n + \theta_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad \theta_n \in N(T)$$

Notant qu'il n'y a pas de sous-suite  $(a_{n(k)})$  de la suite  $(a_n)$  converge à l'élément nul. Car, si nous supposons qu'il existe telle une sous-suite, disons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n(k)} = 0,$$

On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} T\psi_{n(k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n(k)}T\varphi_{n(k)}) + \lim_{k \rightarrow +\infty} T\theta_{n(k)}, \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n(k)} \lim_{k \rightarrow +\infty} T\varphi_{n(k)} + \lim_{k \rightarrow +\infty} T\theta_{n(k)}, \\ &= 0f + 0 = 0. \end{aligned}$$

En d'autre part, il existe une sous-suite  $(\psi_{n(j)})$  de la sous-suite  $(\psi_{n(k)})$  de la suite bornée  $(\psi_n)$  telle que  $(A\varphi_{n(j)})$  converge vers un élément  $\psi$  de  $X$ . Ceci implique la convergence de la sous-suite  $(\psi_{n(j)})$  vers le même élément  $\psi$  de  $X$ ; car, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow +\infty} \psi_{n(j)} &= \lim_{j \rightarrow +\infty} T\psi_{n(j)} + \lim_{j \rightarrow +\infty} A\psi_{n(j)}, \\ &= \psi.\end{aligned}$$

il est clair que,  $T\psi = 0$ . Par conséquent  $\psi \in N(T)$ . contradiction avec la relation

$$\|\psi_n - \xi_n\| > \frac{1}{2}, \quad \forall \xi_n \in N(T).$$

On peut donc conclure que  $a_n^{-1}$  est bornée. Où

$$a_n^{-1}\psi_n = \varphi_n + a_n^{-1}\theta_n.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} T(a_n^{-1}\psi_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} T(a_n^{-1}\theta_n), \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T\varphi_n + 0, \\ &= f.\end{aligned}$$

La séquence  $(a_n^{-1}\psi_n)$  est borné comme le produit de deux séquences bornées  $(a_n^{-1})$  et  $(\psi_n)$ . Par conséquent il existe une sous-suite  $(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)})$  telle que  $(A(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}))$  converge vers un élément  $a^{-1}\psi$  de  $X$ . Ceci implique la convergence de sous-suite  $(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)})$  au même élément  $a^{-1}\psi$  de  $X$ , car, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} T(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}) + \lim_{k \rightarrow +\infty} A(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}), \\ &= a^{-1}\psi \in X.\end{aligned}$$

L'opérateur  $T$  est continu, alors on écrit

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} T(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}) &= T\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}\right), \\ &= T(a^{-1}\psi), \\ &= f \in T(X) = \overline{T(X)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la résultat

$$T(X) = \overline{T(X)}$$

iii) • Premièrement, nous prouvons que

$$\{0\} = N(T^0) \subsetneq N(T^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(T^r) = N(T^{r+1}) = \dots$$

En effet, l'inclusion des ensembles est évidente, car on a

$$\varphi \in N(T^n) \implies T^r \varphi = 0,$$

donc

$$T(T^n \varphi) = T^{n+1} \varphi = 0 \implies \varphi \in N(T^{n+1}).$$

Par conséquent, l'inclusion d'ensembles

$$N(T^n) \subset N(T^{n+1}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Supposons qu'il n'y ait pas d'entier  $r \in \mathbb{N}$ , tel que la séquence  $N(T^r)$  est stationnaire, c'est-à-dire

$$N(T^m) \neq N(T^n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \text{ avec } m < n.$$

En d'autre part, nous écrivons

$$\{0\} \subset N(T) \subset \dots \subset N(T^m) \subset N(T^{m+1}) \subset \dots \subset N(T^{n-1}) \subset N(T^n) \subset \dots$$

En particulier, prendre  $N(T^{n-1}) \neq N(T^n)$ , la relation  $N(T^{n-1}) \subset N(T^n)$  c'est entre un sous-espace fermé donne nous d'un élément  $\varphi_n$  de  $N(T^n)$ , avec norme unitaire  $\|\varphi_n\| = 1$ , tel que

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| > \frac{1}{2}, \text{ pour tout } \varphi_{n-1} \in N(T^{n-1}).$$

Généralement, pour toute suite  $(\varphi_n) \in N(T^n)$  et pour tout  $m, n$  tel que  $m < n$ , nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned} \|A\varphi_n - A\varphi_m\| &= \|(I - T)\varphi_n(I - T)\varphi_m\|, \\ &= \|\varphi_n - T\varphi_n - \varphi_m + T\varphi_m\|, \\ &= \|\varphi_n - (T\varphi_n + \varphi_m - T\varphi_m)\| > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Car, les éléments de la suite  $(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n)$  appartiennent au sous-espace  $N(T^{n-1})$ . En effet, du fait de la relation  $N(T^m) \subset N(T^{n-1}) \subset N(T^n)$ , ça arrive

$$\varphi_m \in N(T^m) \implies \varphi_m \in N(T^{n-1}) \text{ et } \varphi_m \in N(T^n),$$

ou encore

$$\varphi_m \in N(T^m) \implies T^m\varphi_m = 0, \quad T^{n-1}\varphi_m = 0 \text{ et } T^n\varphi_n = 0.$$

Notant que, pour  $\varphi_n \in N(T^n)$ , On a

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = T^{n-1}\varphi_m - T^n\varphi_m + T^n\varphi_n = 0.$$

Par conséquent

$$(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) \in N(T^{n-1}).$$

La suite  $(\varphi_n)$  est bornée, donc en vertu de la compacité de l'opérateur  $A$ , on peut extraire une sous-suite convergente de la suite  $(A\varphi_n)$ . Contradiction avec la relation (16). D'où

$$N(T^{n-1}) = N(T^n).$$

il reste à démontrer maintenant la relation

$$N(T^n) = N(T^{n+1}).$$

En effet, pour  $\varphi \in N(T^{n+1})$  on a

$$\varphi \in N(T^{n+1}) \Rightarrow T^{n+1}\varphi = T^n(T\varphi) = 0,$$

il donne

$$T\varphi \in N(T^n) = N(T^{n-1}),$$

Cela signifie

$$\begin{aligned} T\varphi \in N(T^{n-1}) &\Rightarrow T^{n-1}(T\varphi) = T^n\varphi = 0, \\ &\Rightarrow \varphi \in N(T^n), \end{aligned}$$

et donc

$$N(T^{n+1}) \subset N(T^n)$$

il existe donc un entier non négatif  $r \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\{0\} \subset N(T) \subset N(T^2) \subset \dots \subset N(T^r) = N(T^{r+1}) = N(T^{r+2}) = \dots,$$

où  $r$  est donné par

$$r = \min\{p \in \mathbb{N}; \text{ tel que } N(T^p) = N(T^{p+1})\}.$$

• deuxièmement, nous démontrons que

$$X = T^0(X) \supsetneq T^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq T^r(X) = T^{r+1}(X) \dots$$

En effet, l'inclusion des ensembles est évidente, car on a

$$\begin{aligned} \psi \in R(T^{n+1}) &\Rightarrow \exists \varphi \in X \text{ tel que } \psi = T^{n+1}\varphi \\ &= T^n(T\varphi) \\ &= T^n\varphi_1 \in R(T^n), \end{aligned}$$

donc

$$\psi = T^{n+1}\varphi \Rightarrow \psi = T^n\varphi_1.$$

Par conséquent, l'inclusion d'ensembles

$$R(T^{n+1}) \subset R(T^n) \tag{17}$$

Supposons qu'il n'y ait pas d'entier  $q \in \mathbb{N}$ , tel que la suite  $R(T^n)$  est stationnaire, c'est-à-dire

$$R(T^m) \neq R(T^n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \text{ avec } n < m.$$

D'autre part, on a

$$\dots \subset R(T^m) \subset \dots \subset R(T^{n+1}) \subset R(T^n) \subset \dots \subset R(T) \subset X$$

En particulier, nous prenons  $R(T^{n+1}) \neq R(T^n)$ , la relation  $R(T^{n+1}) \subset R(T^n)$  entre un sous-espace fermé implique l'existence d'un élément  $\psi_n$  de  $R(T^n)$ , avec norme unitaire  $\|\psi_n\| = 1$ , tel que

$$\|\psi_n - \psi_{n+1}\| > \frac{1}{2}, \quad \forall \psi_{n+1} \in R(T^{n+1}).$$

Généralement, pour toute suite  $(\psi_n) \in R(T^n)$  et pour tout  $m, n$  tel que  $n < m$ , nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned}
 \|A\psi_n - A\psi_m\| &= \|(I - T)\psi_n - (I - T)\psi_m\|, \\
 &= \|I\psi_n - T\psi_n - I\psi_m + T\psi_m\|, \\
 &= \|I\psi_n - (T\psi_n + I\psi_m - T\psi_m)\| > \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Puisque, les suites  $(\psi_m - T\psi_m + T\psi_n)$  appartiennent à sous-espace  $N^{(n+1)}$ . En effet, en raison de la relation

$$R(T^{m+1}) \subset R(T^m) \subset R(T^{n+1}) \subset R(T^n),$$

et donc

$$\psi_n \in R(T^m) \Rightarrow \psi \in R(T^{n+1}),$$

aussi, nous avons

$$T\psi_n \in R(T^{m+1}) \implies T\psi_m \in R(T^{n+1}).$$

En notant que, pour  $\psi_n \in R(T^n)$ , on a

$$\psi_n \in R(T^n) \implies T\psi_n \in R(T^{n+1}),$$

Par conséquent

$$(\psi_m - T\psi_m + T\psi_n) \in R(T^{n+1}).$$

La suite  $(\psi_n)$  est bornée, donc en vecteur de la compacité du opérateur  $A$ ; on peut extraire une sous-suite convergente de la suite  $(A\varphi_n)$ . Contradiction avec la relation (18). D'où

$$R(T^{n+1}) = R(T^n).$$

il reste à démontrer maintenant la relation

$$R(T^{n+2}) = R(T^{n+1}).$$

En effet, la première inclusion  $R(T^{n+2}) \subset R(T^{n+1})$  est toujours vraie après (17), pour le second, on obtient

$$\begin{aligned}
 \psi \in R(T^{n+1}) \Rightarrow \psi &= T^{n+1}\varphi, \\
 &= T(T^n\varphi), \\
 &= T(T^{n+1}\varphi_1), \\
 &= T^{n+2}\varphi_1 \in R(T^{n+2}),
 \end{aligned}$$

Alors

$$R(T^{n+1}) \subset R(T^{n+2}).$$

Donc, il existe un entier non négatif  $r \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\dots = R(T^{r+2}) = R(T^{r+1}) = R(T^r) \subset \dots \subset R(T^2) \subset R(T) \subset X$$

où  $r$  est donné par

$$r = \min \{q \in \mathbb{N}; \text{ tel que } R(T^q) = R(T^{q+1})\}$$

Pour démontrer la somme directe  $X = N(T^r) \oplus R(T^r)$

Pour tout élément  $\psi \in X$ , on a

$$\psi \in X \Rightarrow T^r \psi \in R(T^r) = \dots = R(T^{2r}).$$

Cette relation implique l'existence d'une fonction  $\varphi$ , tel que

$$T^r \psi = T^{2r} \varphi \Rightarrow T^r(\psi - T^r \varphi) = 0,$$

et donc

$$\psi - T^r \varphi = \theta \in N(T^r).$$

Alors, on a

$$\psi = \theta + T^r \varphi, \text{ avec } \theta \in N(T^r) \text{ et } T^r \varphi \in R(T^r).$$

pour tout élément  $\psi \in N(T^r) \cap R(T^r)$ , on a

$$\psi \in R(T^r) \text{ et } \psi \in N(T^r),$$

cette relation donne nous  $T^r \psi = 0$  et l'existence d'une fonction  $\varphi$ , tel que  $\psi = T^r \varphi$ , et donc  $\psi = T^r \varphi \Rightarrow T^r \psi = 0 = T^{2r} \varphi$ . Alors,

$$\varphi \in N(T^{2r}) = \dots = N(T^r).$$

Par conséquent, on a

$$\psi = T^r \varphi = 0.$$

**Proposition 2.4.2**([7]) Soit  $A \in \mathcal{K}(X)$ . Alors

(a).  $N(I - A) = \{0\} \iff R(I - A) = X$ .

(b).  $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$ .

(c).  $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$  et  $R(I - A^*) = N(I - A)$

**Remarque 2.4.2**

La propriété (a) est familière en dimension finie, si  $\dim X < \infty$ , un opérateur linéaire de  $F$  dans li-même est injectif si et seulement s'il est surjectif. Par contre en dimension infinie un opérateur borné peut être injectif sans être surjectif et inversement. Par exemple le shift<sup>1</sup> à droite (resp.à gauche) dans  $l^2$ . La conclusion (a) exprime donc une propriété remarquable des opérateurs de la forme  $I - A$  avec  $A \in \mathcal{K}(X)$ .

### 2.4.1 Application aux équations de Fredholm du seconde espèce

**Théorème 2.4.3**([13]) Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espèce normé  $X$ .

Alors  $I - A$  est injectif si et seulement s'il est surjectif.

En autre part, si  $I - A$  est injectif(donc bijectif).

Alors l'opérateur inverse  $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  est borné, c'est-à-dire que  $I - A$  est un isomorphisme.

**Preuve**

D'après le premier résultat du théorème de Riesz (i). l'injectivité de  $I - A \iff r = 0$ ,

Puisque, si  $T = I - A$  est injectif, alors

$$\forall \varphi \in X \quad \text{où} \quad T\varphi = 0 \Rightarrow T\varphi = T(0) \Rightarrow \varphi = 0,$$

donc  $\text{Ker}T = \{0\}$  c'est-à-dire  $N(T) = N(T^0)$ . Par conséquent  $r=0$ .

Si  $r = 0$  en (ii) c'est-à-dire  $N(T) = \{0\}$ , alors  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$  où

$$\begin{aligned} T\varphi_1 = T\varphi_2 &\implies T\varphi_1 - T\varphi_2 = 0, \\ &\implies T(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ &\implies \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \\ &\implies \varphi_1 = \varphi_2. \end{aligned}$$

D'après le résultat de Riesz (iii), surjectivité  $T= I - A \iff r=0$

Puisque, si  $T$  est surjectif, Alors

$$\forall \psi \in X \quad \text{où} \quad \exists \varphi \in X, T\varphi = \psi,$$

---

1. L'opérateur shift en anglais, opérateur de décalage en français  $S$  défini sur  $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  par  $S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$  est borné et on a  $\|S\| = 1$ .

donc  $\psi \in R(T)$ , par conséquent  $X = R(T)$ , on obtient  $r = 0$ . Par conséquent, l'injectivité de  $I - A$  et la surjectivité de  $I - A$  sont équivalentes

Il reste à montrer que  $T^{-1}$  est borné si  $T = I - A$  est injectif. Suppose que  $T^{-1}$  n'est pas borné. Alors, il existe une suite  $(f_n)$  dans  $X$  avec  $\|f_n\| = 1$  telle que  $\|T^{-1}f_n\| \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soient

$$g_n = \frac{f_n}{\|T^{-1}f_n\|} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \frac{T^{-1}f_n}{\|T^{-1}f_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$g_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{et} \quad \|g_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $A$  est compact, on peut choisir un sous suite  $(\varphi_{n(k)})$  telle que  $A\varphi_{n(k)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} \varphi \in X$ . Alors, comme  $\varphi_n - A\varphi_n = g_n$ , on remarque que  $\varphi_{n(k)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} \varphi$ , et  $\varphi \in N(T)$ . Par conséquent  $\varphi = 0$ , et il a contredit avec  $\|\varphi\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 2.4.3**

Si  $B : Y \rightarrow Z$  est un opérateur linéaire borné envoie un espace de Banach  $Y$  bijectivement sur un espace de Banach  $Z$ , puis par le théorème de cartographie ouverte de Banach 1.1.14 l'inverse opérateur  $B^{-1} : Z \rightarrow Y$  est borné. Pour la théorie de Riesz, nous n'avons pas besoin d'utiliser ceci résultent profondément de l'analyse fonctionnelle et nécessitent pas l'exhaustivité de  $X$ .

On peut réécrire les théorèmes et (iii) en terme de (i) solvabilité d'un opérateur équation du deuxième type comme suit

**Corollaire 2.4.4([13])** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espace normé  $X$  si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0 \tag{19}$$

admet uniquement la solution triviale  $\varphi = 0$ , alors pour toute  $f \in X$ , l'équation in-homogène

$$\varphi - A\varphi = f \tag{20}$$

admet une solution unique  $\varphi \in X$ , dépendante de  $f$

si l'équation homogène (19) admet une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini  $m \in \mathbb{N}$  de solutions linéairement indépendants  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  et l'équation non homogène (20) ou bien, elle n'admet aucune solution ou bien, sa solution générale est de la forme

$$\varphi = \psi + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k$$

ou  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sont arbitrairement des nombres complexes et  $\psi$  la solution particulière de l'équation non homogène.

**Remarque 2.4.4** L'importance principale de la théorème de Riesz pour les opérateurs compacts réside dans le fait qu'il réduit le problème de l'établissement de l'existence d'une solution à 2.4.4 au problème généralement beaucoup plus simple de montrer que 2.4.3 n'a que la solution triviale  $\varphi = 0$

Il appartient au lecteur de formuler le théorème 2.4.3 et son corollaire 2.4.4 pour l'intégrale équations du second type à noyaux continu ou faiblement singuliers.

**Corollaire 2.4.5**([13]) Théorème 2.4.3 et son corollaire 2.4.4 restent valables lorsque  $I - A$  est remplacée par  $S - A$ , où  $S : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire borné qui a borné inverse  $S^{-1} : Y \rightarrow X$ , c'est-à-dire  $S : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme, et  $A : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire compact d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ .

**Preuve** Cela découle immédiatement de fait que nous pouvons transformer l'équation

$$S\varphi - A\varphi = f$$

sous la forme équivalente

$$\varphi - S^{-1}A\varphi = S^{-1}f,$$

où  $S^{-1}A : X \rightarrow X$  est compact par le théorème 1.1.21 ( $AB$  compact).

## 2.4.2 Théorie spectrale pour les opérateurs compacts

Nous continuons en formulant les résultats de la théorie de **Riesz** en termes de spectres une analyse.

**Définition 2.4.6**([13]) Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire borné. un nombre complexe  $\lambda$  est appelé valeur propre de  $A$  s'il existe un élément  $\varphi \in X$ ,  $\varphi \neq 0$ , tel que  $A\varphi = \lambda\varphi$ .

L'élément  $\varphi$  appelé un élément propre de  $A$ .

Un nombre complexe  $\lambda$  est appelé une valeur régulières de  $A$  si  $(\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  existe et est borné.

L'ensemble de toutes les valeurs régulières de  $A$  est appelé l'ensemble résolvant  $\rho(A)$  et  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  est appelé la résolvante de  $A$ . Le complément de  $\rho(A)$  dans  $\mathbb{C}$  est appelé le spectre  $\sigma(A)$  et

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

est appelé le rayon spectrale de  $A$ .

**Notations** ([18]) Soit  $A$  un opérateur linéaire, on peut décomposer le spectre de  $A$  de la façon suivante :

- Le spectre ponctuel  $\sigma_p(A)$  tel que

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ est non inversible}\} = \text{Ensemble des valeurs propres} = VP(A).$$

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff N(\lambda I - A) \neq \{0\}.$$

- Le spectre continu  $\sigma_c(A)$  tel que

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ est inversible}; \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} \neq X \right\}.$$

- Le spectre résiduel  $\sigma_r(A)$  tel que

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ est inversible}; \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = X \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X) \right\}.$$

**Définition 2.4.7** ([7]) Soit  $A \in \mathcal{L}(X)$ .

L'ensemble résolvant est

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X\}.$$

Le spectre  $\sigma(A)$  est complémentaire de l'ensemble résolvant,  $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$ .

On dit que  $\lambda$  est valeur propre, et on note  $\lambda \in VP(A)$  si

$$N(\lambda I - A) \neq 0,$$

$N(\lambda I - A)$  est l'espace propre associé à  $\lambda$ .

Il est important de retenir que si  $\lambda \in \rho(A)$  alors  $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ .

**Remarque 2.4.5**

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A)$$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

**Remarque 2.4.6** Il est clair que  $VP(A) \subset \sigma(A)$ . En général l'inclusion est stricte. Il peut exister  $\lambda$  tel que

$$N(\lambda I - A) = 0, \text{ et } R(\lambda I - A) \neq X$$

(un tel  $\lambda$  appartient au spectre mais n'est pas valeur propre). Par exemple prenons dans  $X = l^2$ ,  $Au = (0, u_1, u_2, \dots)$  où  $u = (u_1, u_2, \dots)$  (i.e.  $A$  est le shift à droite). Alors  $0 \in \sigma(A)$  et  $0 \notin VP(A)$ .

**Remarque 2.4.7** Si  $X$  est de dimension finie,  $I - A$  est inversible si et seulement si  $Ker(\lambda I - A) = \{0\}$ . En particulier, on en déduit  $VP(A) = \sigma(A)$ . La situation est plus délicate en dimension infinie comme le montre l'exemple ci dessous.

**Exemple** Soit  $X = C([0; 1], \mathbb{K})$  et  $A$  est un opérateur défini par

$$\forall f \in X, \quad Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in [0; 1].$$

Alors, on a  $Ker(\lambda I - A) = \{0\}$  et  $Im(\lambda I - A) = \{g \in C^1([0; 1]; \mathbb{K}), g(0) = 0\}$ . En particulier,  $T$  est injectif donc  $0 \notin VP(A)$  mais non surjectif donc  $0 \in \sigma(A)$ .

**Lemme 2.4.8([17])** Soit  $A \in \mathcal{L}(X)$  un opérateur auto-adjoint compact. Alors,

$$\|A\| = \max |\lambda|, \lambda \in \sigma_p(A)$$

**Proposition 2.4.9([17])** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors on a

1.  $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$
2.  $\lambda \in \sigma_p(A)$  si et seulement si  $\overline{Im(\lambda I - A)} \neq H$ .
3. si  $\lambda, \mu \in \sigma_p(A), \lambda \neq \mu$  alors,  $ker(\lambda I - A) \perp ker(\mu I - A)$ , c'est-à-dire les sous-espaces propres de  $A$  sont orthogonaux deux à deux.

**Théorème 2.4.10([13])** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espace normé  $X$  de dimension infinie. Alors  $\lambda = 0$  appartient au spectre  $\sigma(A)$  et  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  se compose au plus d'un ensemble dénombrable de valeurs propres sans point d'accumulation sauf, éventuellement,  $\lambda = 0$ .

**Corollaire 2.4.11 (Alternative de Fredholm)([18])** Soient  $A \in \mathcal{K}(X)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ . On considère l'équation de Fredholm : pour  $y \in X$  trouver  $x \in X$  tel que

$$\lambda x - Ax = y \tag{21}$$

alors deux cas sont possibles :

1. Soit, pour tout  $y \in X$ , il existe un unique  $x \in X$  solution de (21)
2. Soit, l'équation homogène  $\lambda x - Ax = 0$  admet une solution,  $x \neq 0$

Dans le second cas, l'équation (21) admet un solution (non unique) si et seulement si  $y \in Im(\lambda I - A)$ .

**Théorème 2.4.12 (Alternative de Fredholm) ([20])**

Supposons que  $A = A^*$  soit compact. Pour  $f \in H$  donné, soit l'équation

$$(I - \lambda A)\varphi = f$$

admet une solution unique ( $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ ) et dans ce cas  $\varphi = (I - \lambda A)^{-1}f$  ou  $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$  et cette équation a une solution si et seulement si  $f \in R(I - \lambda A)$  c'est-à-dire  $g \perp N(I - A)$ .

Dans ce cas la solution générale de l'équation est de la forme  $\varphi = \varphi_0 + u$ , où  $\varphi_0$  est une solution particulière et  $u \in N(I - \lambda A)$  ( $u$  est la solution générale de l'équation homogène correspondante) et l'ensemble de toutes les solutions est une dimension finie sous-espace affine de  $H$ .

**Exemple :** Soit  $H = L^2([0; 1], \mathbb{R})$ . On considère l'opérateur de multiplication  $A : H \rightarrow H$  défini par

$$Af(t) = tf(t), \quad t \in [0; 1].$$

Alors, on a  $\sigma(A) = [0; 1]$ . De plus, l'opérateur  $A$  n'a pas de valeurs propres.

En effet, soient  $\lambda \in \mathbb{R}, f \in H, t \in [0; 1]$ , on a  $(\lambda I - A)f(t) = (\lambda - t)f(t)$ . On distingue deux cas

Si  $\lambda \notin [0; 1]$  alors, la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{\lambda - t}$  est bornée, et l'opérateur  $(\lambda I - A)^{-1}$  défini par

$$(\lambda I - A)^{-1}g(t) = \frac{1}{\lambda - t}g(t), \quad g \in H.$$

est un opérateur borné.

si  $\lambda \in [0; 1]$  alors, la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{\lambda - t}$  n'est pas dans  $H$ , car il y a la singularité non intégrable en  $t = \lambda$ . Il résulte que  $(I - \lambda A)$  n'est pas inversible et tous les  $\lambda$  sont des points singuliers. D'où, on déduit que  $\sigma(A) = [0; 1]$ .

On suppose maintenant que  $\lambda$  soit une valeur propre de  $A$  et  $f$  le vecteur propre associé dans  $H$ . Alors, on a

$$(\lambda - t)f(t) = 0, \quad t \in [0; 1].$$

Il s'en suit que  $f = 0$  dans  $H$ . D'où,  $A$  n'a pas de valeurs propres et  $\sigma_p(A) = \emptyset$ .

**Corollaire 2.4.13 ([3])**

Si  $\lambda \neq 0$  et une équation

$$(\lambda I - A)x = 0,$$

admet une solution unique  $x = 0$  Alors  $\lambda I - A$  est inversible, et l'équation

$$(\lambda I - A)x = f$$

admet uniquement solution  $x = (\lambda I - A)^{-1}f$  pour tout  $f \in H$ , cette solution dépend en continu à la  $f$ .

**Preuve.**

Pour la preuve voir([3].p.178)

## Références

- [1] **A.KHIRANI**, *Etude des équations intégrales nonlinéaires de voltera dans les espaces fonctionnels*, Thèse de doctorat en sciences Université de M'sila 2016.
- [2] **B. Gagui**, *Sur les équations intégrales dans les espaces dOrlicz*, Thèse de doctorat en science université de Msila 2015.
- [3] **B.P.RYNNE,M.A.YOUNGSON**, *Linear Functional Analysis*, Heriot-watt University, Riccarton, Edinburgh,2000.
- [4] **E.KREYSZIG**, *INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS*, University of windsor. New york, Santa Barbara, London, sydney, Toronto, 1978.
- [5] **F.BACHIRI**, *Théorème du point fixe et Applications aux équations intégrales*, Mémoire de Master Université M'sila 2016/2017.
- [6] **G.PEYRÉ**, *Résolution numérique d'équations intégrales Exemple de la radiosité*, Polycopie disponible à l'adresse, nikopol0@altern.org, www.orion3d.fr.st,2001.
- [7] **H.BREZIS**, *ANALYSE FONCTIONNELLE théorie et application*, Université Pierre et Marie curie et École polytechnique,2<sup>eme</sup> Tirage,MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Paulo 1987.
- [8] **H.HOCHSTADT**, *INTEGRAL EQUATIONS*, Departement of mathematics Polytechnics Institute of Brooklyn, New York,1989.
- [9] **K.BOUGRA**, *Théorèmes du point fixe et applications aux Equations différntielles*, Memoire de Master Université de M'sila, 2016/2017
- [10] **L.P.LEBEDEV, I.I.VOROVICH**, *Functional Analysis in Mechanics*,Universidad Nacional Colombia Bogota, University Russia,2003.
- [11] **M.NADIR**,*Integral Equations coures Master2 AMN*.
- [12] **O.E.REMILI**, *Équations intégrales de frontière exemples de resolution numerique.* , Memoire de magistère université D'oran ES-SENIA.
- [13] **R.KRESS**, *Linear Integral equations*, Third Edition, Institut fur Numerische und Angewandte Georg-August-Universitat Gottingen Gottingen, Germany,Springer 2014.

- [14] **R.KRESS**, *Linear Integral equations*, Third Edition, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen Lotzestraße 16-18 D-3400 Göttingen, Fed.Rep.of Germany, Springer 1989.
- [15] **R.LAMRI**, *Résolution des équations intégrales-différentielles de type Volterra*, Mémoire de Magistère Université de M'sila, 2013.
- [16] **S.BENYOUSSEF**, *Résolution numérique des équations intégrales-différentielles de Fredholm*, Université de M'sila, 2014.
- [17] **S.SAIDI**, *cours sur La théorie spectrale des opérateurs*, Université Mohamed Seddik Ben yahia Jijel, 2016-2017.
- [18] **S.MAINGOT, D.MANCEAU**, *Théorie spectrale*, Polycopie disponible à l'adresse, <http://d.p.manceau.free.fr/ThSpect/ThSpect.pdf>.
- [19] **Z.TITRAOUI**, *Opérateur intégral de Fredholm*, mémoire de Master université de M'sila, 2018/2019.
- [20] **V.SERVO**, *Operator theory and integral equations*, 802660s, second printing, university of Oulu, 2012.

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إبراز دور نظرية ريس في إثبات وجود و وحدانية الحل للمعادلات التكاملية و على وجه الخصوص معادلة فريدهولم من الصنف الثاني.

$$\varphi - \lambda A\varphi = f.$$

## Résumé

Le but de cette mémoire est de mettre en évidence le rôle de la théorie de Riesz dans la démonstration de l'existence et l'unité de la solution aux équations intégrales et en particulier à l'équation de Fredholm de seconde espèce.

$$\varphi - \lambda A\varphi = f.$$

## Abstract

The aim of this works is to highlight the role of Riesz theory in proving the existence and uniqueness of the solution to the integral equations and in particular the Fredholm equation of the second type.