



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

### Thème

---

# Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la transformée de Mellin

---

Présentée par : *Mahmoudi Fouad*

Devant le jury composé de :

<b>SELT Omar</b>	M.C.A	Université de M'sila	<b>Président.</b>
<b>LAKEHALI Belkacem</b>	M.C.A	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
<b>Bachir GAGUI</b>	M.C.A	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2020/2021

---

# Remerciement

Je remercie Allah de m' avoir aidé à accomplir ce travail.

J' adresse un grand remerciement à mon encadreur Mr. Blekacem LKEHALI qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Nous exprimons notre gratitude envers Mrs les membres de jury de. Nous avoir fait l' honneur accepter d'examiner notre travail.

Aussi, je remercie ma famille, pour son soutien.

Merci, enfin à toute personne qui a contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

Liste des tableaux	v
Introduction	vii
<b>1</b> Préliminaires	<b>1</b>
1.1 Espaces fonctionnels	1
1.1.1 Espace de Banach	1
1.1.2 Espaces de Hilbert	2
1.2 Fonctions Spéciales	2
1.2.1 Fonction Gamma d'Euler	2
1.2.2 Fonction Bêta d'Euler	3
1.3 Transformation de Fourier	3
1.4 Transformation de Laplace	4
<b>2</b> Équation intégrale de Fredholm	<b>5</b>
2.1 Notions fondamentales	5
2.2 Méthode de Fredholm	7
2.3 Noyaux itérés : construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés	10
2.4 Equations intégrales à noyau dégénéré	14
2.4.1 Le cas d'équation intégrale non homogène	14
2.4.2 Le cas de l'équation intégrale homogène	18
<b>3</b> Transformation de Mellin	<b>21</b>
3.1 Transformée de Mellin	21
3.2 Relation entre la transformation de Laplace et Fourier	23
3.3 Formule d'inversion de Mellin	24
3.4 Produit de Convolution de Mellin	26

3.5	Tableaux de transformée de Mellin de quelques fonctions usuelles	27
<b>4</b>	<b>Résolution d'équation intégrale par la transformation de Mellin</b>	<b>29</b>
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>35</b>

# Liste des tableaux

**Tableau 1** : Table de transformée de Mellin usuelles

# Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral. Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales, on distingue les équations de Fredholm (Ivare Fredholm(1866-1927), Mathématicien Suédois) et les équations de Volterra (Vito Volterra(1860-1940), Mathématicien Italien). Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable.

Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce. La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines de mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique.

Le but de ce mémoire est de présenter à méthode analytique de résolution des équations intégrales. Nous divisons notre travail en quatre chapitres.

**Le premier chapitre** comporte rappels des espaces fonctionnels nécessaires, ainsi que les définitions et propositions.

**Le deuxième chapitre** est consacré à l'étude d'équation intégrale de Fredholm.

**Le troisième chapitre** est consacré à l'étude de la transformation de Mellin.

**le dernier chapitre**, on expose le but de notre travail, Résolution d'équation intégrale de Fredholm par la transformation de Mellin.

# Chapitre 1

## Preliminaires

### 1.1 Espaces fonctionnels

#### 1.1.1 Espace de Banach

**Définition 1** (*Espace vectoriel normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle une norme sur l'espace  $E$  toute fonction notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telle que

- i)**  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- ii)**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall x \in E, \forall \lambda \in K$
- iii)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in E$

**Définition 2** (*Suite de Cauchy*)

Soit  $x_n$  une suite d'éléments d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$ , on dit que la suite  $x_n$  est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1, \forall p, q \geq N, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

**Définition 3** (*Espace complet*)

Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , est dit complet, si toute suite de Cauchy  $x_n$  d'éléments de  $E$  est convergente dans  $E$ .

**Définition 4** (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  tout espace vectoriel normé et complet

Par exemple  $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

## 1.1.2 Espaces de Hilbert

**Définition 5** (*Produit scalaire*)

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe) une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie sur  $E \times E$  dans  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telle que pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{k}$

1.  $\langle x, y \rangle \geq 0$
2.  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition 6** (*Espace de Hilbert*)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

## 1.2 Fonctions Spéciales

### 1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

**Définition 7** La fonction gamma  $\Gamma(s)$  est définie sur le demi-plan complexe  $\text{Re}(s) > 0$  par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

**Proposition 8** *la fonction gamma est la transformée de Mellin de la fonction exponentielle :*

$$M [e^{-t}] (s) = \Gamma (s); \operatorname{Re} (s) > 0$$

**Proposition 9** *Relations fonctionnelles*

$$\begin{aligned} \Gamma (s + 1) &= s\Gamma (s); \operatorname{Re} (s) > 0 \\ \Gamma (s) \Gamma (1 - s) &= \frac{\pi}{\sin \pi s}; (s \in \mathbb{Z}_0; 0 < \operatorname{Re} (s) < 1) \\ \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

**Proposition 10** *Relation avec la factorielle*

$$\Gamma (n + 1) = n!$$

### 1.2.2 Fonction Bêta d'Euler

**Définition 11** *La fonction bêta est généralement définie par*

$$B (s, r) = \int_0^1 t^{s-1} (1 - t)^{r-1} dt; \operatorname{Re} (s) > 0, \operatorname{Re} (r) > 0$$

**Proposition 12** *Relation avec la fonction gamma*

$$B (s, r) = \frac{\Gamma (s) \Gamma (r)}{\Gamma (s + r)}; \operatorname{Re} (s) > 0, \operatorname{Re} (r) > 0$$

## 1.3 Transformation de Fourier

**Définition 13** *La transformée de Fourier de  $f(t)$  est notée par  $\mathcal{F} \{f(t)\} = F(\beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , est défini par l'intégrale*

$$\mathcal{F} \{f(t)\} = F(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\beta t} dt, \beta \in \mathbb{R}$$

**Définition 14** *La transformée inverse de Fourier est définie par*

$$\mathcal{F}^{-1} \{F(\beta)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta) e^{2i\pi\beta t} d\beta$$

## 1.4 Transformation de Laplace

**Définition 15** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On appelle transformée de Laplace de  $f$ , la fonction  $\mathcal{L}(f)$  définie par

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

où  $s = c + i\sigma$  est une variable complexe.

**Définition 16** La transformée inverse de Laplace de la fonction  $\tilde{f}(s)$ , est donnée par

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s) ds, \quad c > 0$$

# Chapitre 2

## Équation intégrale de Fredholm

### 2.1 Notions fondamentales

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.1)$$

où  $\varphi(x)$  est la fonction inconnue,  $K(x, t)$  et  $f(x)$  des fonctions données.  $x$  et  $t$  deux variables parcourant l'intervalle  $(a, b)$  et  $\lambda$  un facteur numérique.

Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (2.1) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.1) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.3)$$

où la fonction inconnue  $\varphi(x)$  n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

On appelle solution des équations intégrales (2.1), (2.2) et (2.3) toute fonction  $\varphi(x)$  telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en  $x \in (a, b)$ .

**Exemple 17** Montrer que la fonction  $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  est solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{x}{2}$$

où le noyau est de la forme

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Solution 18** Mettons le premier membre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt + \int_x^1 K(x, t) \varphi(t) dt \right\} \\ &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \int_0^x \frac{t(2-x)}{2} \varphi(t) dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2} \varphi(t) dt \right\} \\ &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{2-x}{x} \int_0^x t \varphi(t) dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (2-t) \varphi(t) dt \right\} \end{aligned}$$

portons dans l'expression obtenue  $\sin \frac{\pi x}{2}$  au lieu de  $\varphi(x)$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left\{ (2-x) \int_0^x t \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{2} dt + x \int_x^1 (2-t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{2} dt \right\} \\ = & \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left\{ (2-x) \left( -\frac{t}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sin \frac{\pi t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} + x \left[ -\frac{2-t}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sin \frac{\pi t}{2} \right] \Big|_{t=x}^{t=1} \right\} \\ = & \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\frac{x}{2} \equiv \frac{x}{2}$ , ce qui signifie par définition que  $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  est solution de l'équation intégrale donnée.

## 2.2 Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.4)$$

est donnée par la formule suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt \quad (2.5)$$

où la fonction  $R(x,t;\lambda)$  dite résolvante de Fredholm de l'équation (2.4) est définie par l'égalité

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.6)$$

sous la condition  $D(\lambda) \neq 0$ . Ici  $D(x,t;\lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont des séries de puissances de  $\lambda$  :

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t) \lambda^n \quad (2.7)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \quad (2.8)$$

Avec les coefficients ainsi définis :

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n \quad (2.9)$$

et

$$B_0(x, t) = K(x, t)$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ K(t_3, t_1) & K(t_3, t_2) & \dots & K(t_3, t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n \quad (2.10)$$

Les fonction  $D(\lambda)$  et  $D(x, t; \lambda)$  sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau  $K(x, t)$  est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt$$

est finie, les séries (2.7) et (2.8) convergentes quelque soit  $\lambda$  et sont donc des fonctions analytiques entières de  $\lambda$ .

La résolvante

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

est une fonction analytique de  $\lambda$ , sauf les  $\lambda$  qui sont zéros de  $D(\lambda)$ . Ces derniers sont pôles de la résolvante  $R(x, t; \lambda)$ .

**Exemple 19** *A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau*

$$K(x, t) = xe^t; a = 0, b = 1.$$

**Solution 20** On a  $B_0(x, t) = xe^t$ . Ensuite

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

puisque les déterminants sous  $\int$  sont nuls, Il est évident que tous les  $B_n(x, t) = 0$  suivants sont nuls aussi. Trouvons les coefficients  $C_n$  :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1.$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Evidemment, tous les  $C_n, n \geq 2$  suivants sont nuls. Dans notre cas, nous avons conformément aux formules (2.7) et (2.8) :

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t; \quad D(\lambda) = 1 - \lambda$$

Donc

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}$$

Appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t) dt = f(x) \quad (\lambda \neq 1)$$

D'après la formule (2.5)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1 - \lambda} f(t) dt$$

En particulier, nous obtenons pour  $f(x) = e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}x$$

### 2.3 Noyaux itérés : construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.11)$$

A l'instar des équations de Volterra elle se prête à la méthode des approximations successives. A cette fin on pose :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \lambda^n \quad (2.12)$$

avec  $\Psi_n(x)$  définie par les formules :

$$\Psi_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) &= \int_a^b K(x,t) \Psi_1(t) dt \\ &= \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(x) &= \int_a^b K(x,t) \Psi_2(t) dt \\ &= \int_a^b K_3(x,t) f(t) dt \end{aligned}$$

### 2.3. NOYAUX ITÉRÉS : CONSTRUCTION DE LA RÉSOVANTE À L'AIDE DES NOYAUX ITÉRÉS

et ainsi de suite.

Ici

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t) dz.$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t) dz.$$

et en général :

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz. \quad (2.13)$$

$n = 2, 3, \dots$ , et  $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$ . les fonctions  $K_n(x, t)$  définies par les formules (2.13) s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t) ds \quad (2.14)$$

où  $m$  est un entier naturel quelconque inférieur à  $n$ .

La résolvante de l'équation intégrale (2.11) est définie en fonctions des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}. \quad (2.15)$$

Le second membre est la série de Neumann du noyau  $K(x, t)$ . Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \quad (2.16)$$

avec

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt}$$

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (2.11) s'exprime par :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.17)$$

La borne (2.16) est essentielle pour la convergence de la série (2.15). Mais l'équation (2.11) peut également admettre une solution pour  $|\lambda| > \frac{1}{B}$ .

Soit, par exemple :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t) dt = 1 \quad (2.18)$$

Ici  $K(x, t) \equiv 1$  et, par conséquent :

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt = \int_0^1 \int_0^1 dx dt = 1$$

Dans ce cas la condition (2.16) assure la convergence de la série (2.15) pour  $|\lambda| < 1$ .

En résolvant (2.18) comme une équation à noyau dégénéré, nous trouvons  $(1 - \lambda)C = 1$ , où  $C = \int_0^1 \varphi(t) dt$ . Lorsque  $\lambda = 1$ , cette équation n'admet pas de solution, ce qui signifie qu'il en est de même pour l'équation intégrale (2.18) pour cette valeur de  $\lambda$ . Il en découle que dans un cercle de rayon supérieur à 1, les approximations successives pour l'équation (2.18) ne peuvent pas converger. Pour  $|\lambda| > 1$ , celle-ci est cependant résoluble. En effet, quand  $\lambda \neq 1$ , la fonction  $\varphi(x) = \frac{1}{1 - \lambda}$  est solution de l'équation donnée, ce qu'on vérifie aisément par substitution immédiate.

**Exemple 21** *Considérons l'équation intégrale suivante :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.19)$$

### 2.3. NOYAUX ITÉRÉS : CONSTRUCTION DE LA RÉSOVANTE À L'AIDE DES NOYAUX ITÉRÉS

Ici  $K(x, t) = xt$ ;  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Cherchons les itérés successifs :

$$K(x, t) = K_1(x, t) = xt$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t) = \frac{1}{3} \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3^2},$$

par récurrence

$$K_n(x, t) = \frac{xt}{3^{n-1}}$$

Alors

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} \\ &= xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3xt}{3 - \lambda} \end{aligned}$$

où  $|\lambda| < 3$ . La solution est de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3 - \lambda} f(t) dt, \quad 0 < x < 1, \quad \lambda \neq 3$$

En particulier, pour  $f(x) = x$

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3 - \lambda}, \quad \lambda \neq 3$$

## 2.4 Equations intégrales à noyau dégénéré

### 2.4.1 Le cas d'équation intégrale non homogène

Le noyau  $K(x, t)$  de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce s'appelle dégénéré si il s'écrit de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \quad (2.20)$$

Les fonctions  $a_k(x)$  et  $b_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sont continues sur  $a \leq x, t \leq b$  et linéairement indépendantes. L'équation intégrale à noyau dégénéré (2.20)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.21)$$

se résout comme suit.

Récrivons (2.21) :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt \quad (2.22)$$

On pose :

$$\int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.23)$$

L'égalité (2.22) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x) \quad (2.24)$$

avec  $C_k$  des constantes inconnues (puisque la fonction  $\varphi(x)$  est inconnue).

D'après la forme (2.23) on a :

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (2.25)$$



Si  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , le système(2.26) admet une solution unique  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

L'équation intégrale (2.21) a pour solution une fonction  $\varphi(x)$  définie par l'égalité :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x)$$

**Exemple 22** Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) \varphi(t) dt = x$$

**Solution 23** Mettons cette équation sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt + x$$

on pose :

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt; C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt; C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt$$

où  $C_1, C_2, C_3$  sont les constantes inconnues.

Donc :

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x$$

où

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \cos t dt$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) t^2 dt$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t) \sin t dt$$

où

$$\begin{aligned} C_1 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt \right) - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt \right) - C_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt \\ -C_1 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt - C_2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt + C_3 \left( 1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt \end{aligned}$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le système d'équations algébriques en  $C_1, C_2, C_3$  :

$$\begin{cases} C_1 - \lambda \pi C_3 = 0, \\ C_2 + 4\lambda \pi C_3 = 0, \\ -2\lambda \pi C_1 - \lambda \pi C_2 + C_3 = 2\pi, \end{cases} \quad (2.29)$$

Le déterminant du système est :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \pi \\ 0 & 1 & 4\lambda \pi \\ -2\lambda \pi & -\lambda \pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2 \pi^2 \neq 0$$

Le système (2.29) admet solution unique

$$C_1 = \frac{2\pi^2\lambda}{1 + 2\lambda^2\pi^2}; \quad C_2 = \frac{8\pi^2\lambda}{1 + 2\lambda^2\pi^2}; \quad C_3 = \frac{2\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2}$$

La solution de l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2} (\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x$$

## 2.4.2 Le cas de l'équation intégrale homogène

L'équation intégrale homogène à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = 0 \quad (2.30)$$

n'admet, lorsque le paramètre  $\lambda$  n'en est pas nombre caractéristique (*i.e.*  $\Delta(\lambda) \neq 0$ ), que la solution nulle  $\varphi(x) = 0$ . Si  $\lambda$  est nombre caractéristique (*i.e.*  $\Delta(\lambda) = 0$ ), l'équation (2.30), en plus de la solution nulle, des solutions non nulles, fonctions propres relatives à ce nombre caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (2.30) s'obtient comme combinaison linéaire de ces fonctions propres.

**Exemple 24** Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x) \varphi(t) dt = 0$$

**Solution 25** Les nombres caractéristique de l'équation proposée sont  $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$ ,  $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$  et les fonctions propres correspondantes ont la forme

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$\varphi(x) = C \cos^2 x \quad \text{si } \lambda = \frac{4}{\pi}$$

$$\varphi(x) = \cos 3x \quad \text{si } \lambda = \frac{8}{\pi}$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \frac{4}{\pi}, \lambda \neq \frac{8}{\pi}$$

où  $C$  est une constante quelconque. La solution nulle (la dernière) est obtenue à partir des solutions générales pour  $C = 0$ .

# Chapitre 3

## Transformation de Mellin

Historiquement , Riemann ( 1876 ) a d'abord reconnu la transformation du Mellin dans son célèbre mémoire sur les nombres premiers .

Sa formulation explicite a été donnée par Cahen (1894 ) presque simultanément , Mellin (1896,1902 ) a donné une analyse approfondie de la transformation de Mellin et de sa formule d'inversion.

### 3.1 Transformée de Mellin

**Définition 26** *La transformation de Mellin  $\mathcal{M}$  fait correspondre a la fonction  $f(t)$ , définie pour  $t \in \mathbb{R}^+$ . La fonction analytique  $F(s)$ , avec  $s \in \mathbb{C}$ , selon la relation suivante :*

$$F(s) = \mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt. \quad (3.1)$$

#### Proposition 27

1.  $f$  est définie et continue pour  $x > 0$ .
2. L'intégrale (3.1) converge absolument pour  $\Re(s) = \alpha$  et  $\Re(s) = \beta$ . Alors elle converge absolument pour  $\alpha \leq \Re(s) \leq \beta$ . De plus la fonction  $s \rightarrow \mathcal{M}[f](s)$  est continue et bornée dans cette bande fermée et holomorphe à l'intérieur.

**Exemple 28** *On considère la fonction  $f$  définie par :*

$$f(t) = (1+t)^{-j}; \quad \operatorname{Re}(j) > 0$$

Alors, on a

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} (1+t)^{-j} dt$$

on pose  $t+1 = \frac{1}{1-x}$ ,  $x = \frac{t}{t+1}$ , par suite pour  $0 < \operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(j)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(t)](s) &= \int_0^1 (1-x)^j \frac{x^{s-1}}{(1-x)^{s-1}} \frac{dx}{(1-x)^2} \\ &= \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{j-s-1} dx \\ &= \beta(s, j-s) \\ &= \frac{\Gamma(s) \Gamma(j-s)}{\Gamma(j)} \end{aligned}$$

En particulier pour  $j = 1$ , et pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$   
Alors, d'après Proposition de Fonction Gamma d'Euler

$$\mathcal{M}[(1+t)^{-1}](s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

**Proposition 29** Soit  $f$  une fonction de Schwartz sur  $[0, +\infty[$  et  $F(s)$  sa transformée de Mellin.

1. La fonction  $F(s)$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  dont les seules singularités possibles sont aux entiers négatifs  $s = -k$ ,  $k \geq 0$ , où  $F(s)$  peut avoir un pôle simple de résidu  $f^{(k)}(0)/k!$ .
2. Si  $f$  est à support compact dans  $]0, +\infty[$ , la fonction  $F(s)$  est entière.

### 3.2 Relation entre la transformation de Laplace et Fourier

– **Avec la transformée de Laplace :**

Par le changement de variable  $t = e^{-x}$ ,  $dt = -e^{-x}dx$ , la transformée de Mellin devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-x}) e^{-x(s-1)} e^{-x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-x}) e^{-sx} dx \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}[f](s) = \mathcal{L}[f(e^{-x})](s) \quad (3.2)$$

– **Avec la transformée de Fourier :**

Pour obtenir la transformée de Fourier, on remplaçant  $s$  par  $a + 2\pi i\beta$  en (3.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(x)](s) &= \mathcal{L}[f(e^{-x})](a + 2\pi i\beta) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-x}) e^{-(a+2\pi i\beta)x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-x}) e^{-2\pi i\beta x} e^{-ax} dx \end{aligned}$$

Le résultat est

$$\mathcal{M}[f(x)](a + 2\pi i\beta) = \mathcal{F}[f(e^{-x}) e^{-ax}](\beta)$$

### 3.3 Formule d'inversion de Mellin

**Théorème 30** Soit  $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $F$  sa transformée de Mellin. Alors, la formule d'inversion est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) t^{-s} ds$$

**Preuve.** Pour  $s = a + i\beta$ , avec  $a > 0$ , on a

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{s \log t} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{a \log t} e^{i\beta \log t} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

par le changement de variable  $u = \log t$ ,  $du = \frac{dt}{t}$ , on obtient

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(e^u) e^{au} e^{i\beta u} du$$

et avec le changement  $u = -2\pi t$ , on obtient

$$F(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-2\pi t}) e^{-2a\pi t} e^{-2i\beta\pi t} dt$$

de sorte que  $\beta \in \mathbb{R}$  et d'après la transformée de Fourier de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  on déduit que :

$$F(s) = 2\pi \mathcal{F} [f(e^{-2\pi t}) e^{-2a\pi t}] (\beta)$$

On utilise la formule inverse de Fourier, alors on a

$$e^{-2a\pi t} f(e^{-2\pi t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{2i\beta\pi t} d\beta$$

si on pose  $e^{-2\pi t} = x$ , on trouve

$$f(x) = x^{-a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) x^{-i\beta} d\beta$$

d'autre part

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) x^{-(a+i\beta)} i d\beta$$

Finalement, la formule d'inversion est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) x^{-s} ds$$

■

**Exemple 31** Soit la fonction  $f$ , telle que

$$f(x) = e^{-t}$$

On a

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \Gamma(s), \quad \Re(s) > 0$$

On vérifie que pour tout  $a > 0$ , et  $\Re > 0$

$$\mathcal{M}^{-1}[f](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s) t^{-s} ds = e^{-t}$$

De plus, comme la fonction  $t \rightarrow \Gamma(s)t^{-s}$  admet des pôles simples et par le théorème de résidu on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)t^{-s} ds &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \{ \Gamma(s)t^{-s}, s = -n \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}^{-1}[f](t) = e^{-t}$$

### 3.4 Produit de Convolution de Mellin

**Définition 32** Soient  $f, g$  deux fonction définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^{\infty} f(y) g\left(\frac{t}{y}\right) \frac{dy}{y}$$

### 3.5 Tableaux de transformée de Mellin de quelques fonctions usuelles

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt$
$e^{-nt}$	$n^{-s}\Gamma(s), \operatorname{Re} s > 0$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\frac{1}{2}a^{-(s/2)}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \operatorname{Re} s > 0$
$\cos(at)$	$a^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), 0 < \operatorname{Re} s < 1$
$\sin(at)$	$a^{-s}\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), 0 < \operatorname{Re} s < 1$
$(1+t)^{-a}, \operatorname{Re} a > 0$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$
$(1+t^a)^{-k}$	$\frac{\Gamma(s/a)\Gamma(k-s/a)}{a\Gamma(k)}$

Table de transformées de Mellin usuelles

## Chapitre 4

# Résolution d'équation intégrale par la transformation de Mellin

Considérons l'équation intégrale singulière de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t} \quad (4.1)$$

En effet, supposons que  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$  et  $K(x)$  admettent la transformée de Mellin et soit  $\varphi(x) \rightarrow \Phi(s)$ ,  $f(x) \rightarrow F(s)$ ,  $K(x) \rightarrow \tilde{K}(s)$ , les domaines dans lesquels  $F(s)$  et  $\tilde{K}(s)$  sont analytiques ayant en commun la bande  $\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2$ . Appliquant la transformation de Mellin Terme à terme et utilisant le produit de convolution de Mellin, nous obtenons, à partir de (4.1)

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s) \cdot \Phi(s)$$

d'où

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - \tilde{K}(s)} \quad (\tilde{K}(s) \neq 1)$$

c'est la solution opérationnelle de l'équation intégrale (4.1). la formule d'inversion permet d'en trouver la solution :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(s)}{1 - \tilde{K}(s)} x^{-s} ds$$

Considérons l'équation intégrale de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(xt) \varphi(t) dt \quad (4.2)$$

(équation de Fox). Multiplication les deux membres de (4.2) par  $x^{s-1}$  et intégrons par rapport à  $x$  entre 0 et  $\infty$  il vient :

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \int_0^{\infty} K(x, t) x^{s-1} dx$$

Notons  $\Phi(s)$ ,  $F(s)$ ,  $\tilde{K}(s)$  les transformées de Mellin respectives des fonctions  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K(x)$ . Nous obtenus par des simples transformations :

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s) \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-s} dt$$

On voit aisément que  $\int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-s} dt = \Phi(1-s)$  de sorte que s'écrit :

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s) \tilde{K}(s) \quad (4.3)$$

Substituant dans (4.3) la valeur  $(1-s)$  par la valeur  $s$  nous trouvons :

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s) \tilde{K}(1-s) \quad (4.4)$$

les égalités (4.3) et (4.4) entraînent

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s) \tilde{K}(s) + \Phi(s) \tilde{K}(s) \cdot \tilde{K}(1-s)$$

d'où

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s) \tilde{K}(s)}{1 - \tilde{K}(s) \cdot \tilde{K}(1-s)} \quad (4.5)$$

c'est la solution opérationnelle de l'équation (4.2)

Moyennant la formule de réciprocity Mellin on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s)}{1 - \tilde{K}(s) \cdot \tilde{K}(1-s)} x^{-s} ds$$

Qui est solution de l'équation intégrale (4.2).

**Exemple 33** Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos xt dt \quad (4.6)$$

**Solution 34** On a :

$$\tilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x dx \quad (4.7)$$

le calcul de l'intégrale (4.7) se fait compte tenu de ce que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = \Gamma(z) \quad (4.8)$$

Faisons coïncider dans (4.7) la demi-droite d'intégration avec l'axe imaginaire, opération possible pour  $0 < z < 1$ , en vertu du lemme de Jordan. Nous obtenons la formule :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = e^{-\frac{i\pi z}{2}} \Gamma(z)$$

Séparons les parties réelle et imaginaire il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{z-1} \cos x dx &= \cos \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z) \\ \int_0^{\infty} x^{z-1} \sin x dx &= \sin \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ainsi, en vertu de (4.6) et (4.8)

$$\tilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s) \cdot \tilde{K}(1-s) &= \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \\ &= \frac{\lambda^2}{\pi} 2 \cos \frac{\pi s}{2} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \lambda^2 \end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$  Par conséquent, si  $M\{f(x)\} = F(s)$ , on a conformément à la formule (4.5) (pour  $|\lambda| \neq 1$ )

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s) \tilde{K}(s)}{1 - \lambda^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi i (1-\lambda)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ F(s) + F(1-s) \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \right] x^{-s} ds \quad (4.10) \\ &= \frac{1}{1-\lambda^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} F(1-s) x^{-s} ds \end{aligned}$$

remplaçons  $F(1-s)$  par  $\int_0^{\infty} f(t) t^{-s} dt$  dans la dernière intégrales du second

membre de (4.10) et notons que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds = f(x)$ .

La formule (4.10) se récrit :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} (xt)^{-s} ds \int_0^{\infty} f(t) dt$$

Selon la formule de réciprocity de Mellin :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} (xt)^{-s} ds = \cos xt$$

de sorte qu'on a en définitive pour solution de l'équation (4.6) :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos xtdt, (|\lambda| \neq 1)$$

# Conclusion et Perspectives

## Conclusion

L'utilisation de la transformation de Mellin nous donne une solution analytique, comme dans les autres transformations de Laplace, Fourier...

## Perspective

La transformation de Mellin dans les espaces de dimension 1 est simple à appliquer pour résoudre les équations intégrales.

Mais dans les espaces de dimension 2 ou 3 sont assez compliquées, ce que nous pensons à développer dans thèse de Doctorat In cha ALLAH.

# Bibliographie

- [1] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko."Equation intégrales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977."
- [2] Bertrand.J, Bertrand.P, Ovarpez.J."The Mellin transform : The Transforms and Applications Handbook, Second Edition-Alexander.Ed, Poularikas. D, 2000."
- [3] Radjaa BENOUIS."Transformation de Mellin" mémoire master Académique (2017-2018)
- [4] Driencourt. Yves."Résumé du cours d'Analyse 3 (L3 Maths), Printemps 2010"
- [5] Kilbas,A.A, Srivastava.H.M, Trujillo.J.J."Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Van Mill, Amsterdam, 2006"
- [6] Podpubny.I."Fracional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999"
- [7] Lokenath Debnath and Dambaru Bhatta."Integral transforms and their applications. – 2nd ed, Boca Raton : CRC Press LLC, 2007"
- [8] Andrei D. Polyanin and Alexander V. Manzhirov."Handbook of integral equations, CRC Press LLC 1998"
- [9] Larry C. Andrews, Bhimsen K. Shivamoggi."Integral transformns for engineers, SPIE-The International Society for Optical Engineering Bellingham, Washington USA, 1999"
- [10] M.NADIR."Cours d'Analyse Fonctionnelle ,Université de M'sila 2004"
- [11] Emmanuel Kowalski."Un cours de théorie analytique des nombres. France, 2004"

## **Abstract:**

The goal of this thesis is to solve the Fredholm integral equation by the Millen transform. We have therefore studied the Fredholm integral equation and Mellin transform and in the latter, we have applied the Millen transformation on some Fredholm integral equation.

**Keywords:** Integral Equation of Fredholm, Mellin transformation, Laplace and Fourier transform, Special functions (Gamma, Beta).

## **Résumé:**

Le but de cette thèse est de résoudre l'équation intégrale de Fredholm par la transformation de Millen. Nous avons donc étudié l'équation intégrale de Fredholm et transformation de Mellin et dans ce dernier, nous avons appliqué la transformation de Millen sur certaines équations intégrales de Fredholm.

**Mots-clés:** Équation intégrale de Fredholm, Transformation de Mellin, Transformations de Laplace et de Fourier, Fonctions spéciales (Gamma, Bêta).

## **المخلص:**

الهدف من هذه الأطروحة هو حل معادلة فريدهولم التكاملية عن طريق تحويل ميلين ، لذلك قمنا بدراسة معادلة فريدهولم التكاملية وتحويل ميلين وفي الأخير قمنا بتطبيق تحويل ميلين على بعض معادلات فريدهولم التكاملية.  
**الكلمات المفتاحية:** معادلة فريدهولم التكاملية، تحويل ميلين، تحويل لابلاس وفورييه، دوال خاصة (جاما، بيتا)