

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Par

Khalil Choutla

Sujet

Sur les vibrations forcées d'une corde de longueur variable

Date de soutenance : 01/07/2019

Devant le jury :

Pr. N.Benhamidouche	Pr. Univ de M'sila	Président
Dr. A.Sengouga	M.C.A. Univ de M'sila	Rapporteur
Dr. A.saadi	M.C.B. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Dr.

A. Sengouga qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. ses critiques et ses conseils m'ont été très précieux.

De même je remercie Pr. **Benhamidouche. N** et **Dr. Saadi.A** qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

MERCI

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mes frères,

-A mes soeurs,

-A toute la famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Séries de Fourier	2
1.2 Valeurs propres	4
1.2.1 Valeurs propres et fonctions propres	4
1.2.2 Existences et propriétés des valeurs propres	6
1.3 L'équation différentielle ordinaire d'Euler	6
1.3.1 Equation d'Euler homogène	6
1.3.2 Equation d'Euler non homogène	7
1.4 L'équation d'onde non homogène en dimension un	7
2 Equation d'onde non homogène dans un intervalle variable en temps	13
2.1 Position du problème	13
2.2 Changement de variables	14
2.3 Séparation des variables	17
2.3.1 Résolution de l'équation de Φ	17
2.3.2 Solution de l'équation non homogène	20
2.3.3 Résolution de l'équation de fonction Ψ	21
2.4 Solution avec les variables originales	24
2.5 Détermination des coefficients a_n et b_n	25
3 Solution numérique	31
Bibliographie	36

Introduction

On considère une équation d'onde dans un intervalle variable avec le temps. Une telle équation peut être considéré comme un modèle mathématique simplifiée pour les petites vibrations transversales d'une corde avec une longueur variable. On retrouve aussi cette équation dans la mécanique quantique et en mécanique des fractures.

Ce mémoire est basé sur le travail Vesnitskii [7]. On cherche la solution exact de l'équation d'onde, dans un intervalle avec une extrémité droite, qui varie avec une vitesse constante, inférieure à la vitesse de propagation de l'onde. Le problème sans source terme à été déjà traité dans le travail de Balazs [2]. Peu de travaux on été consacré pour le problème avec un terme source. La présence de ce terme complique la résolution analytique du problème. L'idée développée dans ce mémoire est de changer les variables pour travailler dans un intervalle fixe et en même temps avoir une équation qui peut être résolue par séparation des variables.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels sur les séries de Fourier (simple et généralisé) et les valeurs et fonctions propres ainsi que les équations différentielles ordinaires de type d'Euler. On rappel aussi la méthode de séparation des variables et on l'applique sur l'équation d'onde non homogène dans un domaine fixe. Dans le deuxième chapitre, on utilise l'approche de Vesnitskii [7] pour obtenir la solution exacte sous forme d'une série de fonctions spéciales. pour l'équation d'onde dans un intervalle variable avec le temps. Dans le dernier chapitre, on utilise la formule obtenue de la solution pour calculer numériquement la solution pour différentes choix de data.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions sur les séries de Fourier, l'équation d'Euler non homogène, quelques résultats sur l'équation d'onde non homogène dans un intervalle fixe.

1.1 Séries de Fourier

Séries de Fourier classique

Soit $l > 0$ et considérons $L^2(0, l)$ l'espace fonctions de carré sommable définies sur l'intervalle $[0, l]$, voir [1, 5, 6].

Théorème 1.1 *Les fonctions*

$$1, \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \dots, \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right), \dots,$$

constituent une base orthogonale de $L^2(0, l)$.

Ensuite, une fonction f quelconque de $L^2(0, l)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) \right\}. \quad (1.1)$$

Comme notre base est orthogonale, les coefficients a_n et b_n sont donnés par le produit scalaire de f par les éléments de la base :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) dx,$$

Soit :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) \right\},$$

la somme partial de série Fourier de f . Alors on a le théorème de convergence suivant :

Théorème 1.2 *Soit f une fonction carré intégrable sur l'intervalle $[-l, l]$, alors :*

$$\lim_{N \rightarrow -\infty} \int_{-l}^l [S_N(x) - f(x)]^2 = 0.$$

Un autre résultat de convergence est le suivant :

Théorème 1.3 (Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2l$ satisfaisante aux condition suivantes :*

D1) : f et $f'(x)$ sont continues par morceaux sur $[-l, l]$.

D2) : f en tout point admet une dérivée à droit et une dérivée à gauche. Alors la série de Fourier associée à f est convergent, et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Séries de Fourier avec poids :

Dans le chapitre suivant, on a besoin de considérer des série de Fourier dans un sens plus générale.

Définition 1.4 *Soit $\{\Phi_n, n = 1, 2, \dots\}$ une famille des fonctions continues dans un intervalle $[0, l]$. On dit que les fonctions Φ_n est orthogonales dans $[0, l]$ avec la fonction positive $r(x)$ si :*

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \int_0^l r(x) \Phi_m \Phi_n dx = 0, \quad \forall m \neq n \text{ et } \int_0^l r(x) \Phi_n^2 dx \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction $r(x)$ est nommé fonction poids.

La famille $\{\Phi_n : n = 0, 1, \dots\}$ dans $[0, l]$, avec la fonction poids $r(x)$ est dite orthonormée si :

$$\int_0^l r(x) \Phi_n^2 dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prenons une fonction $f(x)$ définie sur $[0, l]$ série

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_n \Phi_n(x) \quad (1.2)$$

est appelée série de Fourier généralisée de f :

Pour déterminer c_n on multiplie (1.2) par $r(x)$ et $\Phi_m(x)$ et puis intègre sur $[0, l]$ on obtient :

$$\int_0^l f(x)r(x)\Phi_m(x)dx = \int_0^l \sum_{i=1}^n c_n \Phi_n(x)r(x)\Phi_m(x)dx,$$

Alors

$$c_m \int_0^l r(x)\Phi_m^2(x)dx = c_m \|\Phi_m\|^2,$$

donc

$$c_n = \frac{\int_0^l f(x)r(x)\Phi_n(x)dx}{\|\Phi_n\|^2},$$

Si la famille $\{\Phi_n(x)\}$ est orthonormée, i.e. $\|\Phi_n\| = 1$ alors :

$$c_n = \int_0^l f(x)r(x)\Phi_n(x)dx.$$

1.2 Valeurs propres

1.2.1 Valeurs propres et fonctions propres

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} (px')' + \lambda qx = 0 & \text{si } t \in [0, l], \\ x(0) = x(l) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

évidemment la solution triviale $x(t) = 0$.

Définition 1.5 Nous disons que λ est une valeur propre du système (1.3) s'il a une solution non triviale, appelée une fonction propre, correspondant à λ .

Remarque 1.6 Si $\varphi(t)$ est une fonction propre correspondant à une valeur propre λ , il en est de même $c\varphi(t)$ pour tout $c \neq 0$.

Théorème 1.7 Si $q(t) > 0$, alors les valeurs propres de (1.3) sont strictement positives.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de (1.3). En multipliant l'équation par $x(t)$ et intégrant sur $[0, l]$ nous connaissons

$$\int_0^l (p(t) x'(t))' x(t) dt + \lambda \int_0^l q(t) x^2(t) dt = 0. \quad (1.4)$$

Intégrant par parties, la première intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_0^l (p(t) x'(t))' x(t) dt &= (p(l) x'(l)) x(l) - (p(0) x'(0)) x(0) \\ &\quad - \int_0^l p(t) x'(t) x'(t) dt, \end{aligned}$$

Puisque $x(0) = x(l) = 0$ en déduit

$$\int_0^l (p(t) x'(t))' x(t) dt = - \int_0^l p(t) [x'(t)]^2 dt,$$

Puisque $p(t) > 0$ et $x(t) \neq 0$, cette intégrale est strictement négative. A partir de (1.4) il s'ensuit que

$$\lambda \int_0^l q(t) x^2(t) dt > 0.$$

Reprenant en compte que $q(t) > 0$ et $x(t) \neq 0$ il s'ensuit que $\lambda > 0$. ■

Théorème 1.8 Soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres différentes de (1.4) et désignons par $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ leurs fonctions propres correspondantes, ensuite :

$$\int_0^l \varphi_1(t) \varphi_2(t) q(t) dt = 0.$$

Démonstration. En multipliant $(p\varphi_1)'+ \lambda q\varphi_1 = 0$ par φ_2 et intégrant par parties d'un 0 à l , on obtient

$$\int_0^l p(t) \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) dt = \int_0^l \lambda_1 \varphi_1(t) \varphi_2(t) q(t) dt,$$

De même, en multipliant $(p\varphi_2)'+ \lambda q\varphi_2 = 0$ par φ_1 et intégrant par parties de 0 à l , on obtient

$$\int_0^l p(t) \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) dt = \int_0^l \lambda_2 \varphi_1(t) \varphi_2(t) q(t) dt,$$

donc

$$\int_0^l \lambda_1 \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) q(t) dt = \int_0^l \lambda_2 \varphi_1(t) \varphi_2(t) q(t) dt,$$

ce qui implique

$$\int_0^l \varphi_1(t) \varphi_2(t) q(t) dt = 0,$$

si on suppose que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ■

Corollaire 1.9 Les fonctions propres correspondant à différentes valeurs propres sont linéairement indépendantes.

1.2.2 Existences et propriétés des valeurs propres

Considérons le cas où $p = q = 1$. L'équation devient :

$$x'' + \lambda x' = 0,$$

donc la solution générale est

$$x(t) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}t + c_2 \cos \sqrt{\lambda}t.$$

Imposer la condition de limite $x(0) = x(l) = 0$ nous trouve le système algébrique dans les inconnues c_1, c_2

$$\begin{cases} c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

Le système a la solution triviale $c_1 = c_2 = 0$. Selon la règle de Kramer, le système a une solution non triviale si et seulement si le déterminant du système est zéro, c.-à-d. :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

d'où $l\sqrt{\lambda} = k\pi, k = 1, 2, \dots$ puis pour tout

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \dots,$$

le problème a des solutions non triviales et donc λ_k sont les valeurs propres nous cherchions.

1.3 L'équation différentielle ordinaire d'Euler

1.3.1 Equation d'Euler homogène

Equation sous la forme

$$at^2x'' + btx' + cx = 0, \quad t > 0,$$

est appelée une équation d'Euler homogène. Une telle équation peut être changée à une avec coefficients constants en effectuant la substitution $t = e^s$, ou équivalent $s = \ln t$, comme suit. Nous notons que $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^s}$. Pour plus de commodité, nous laissons $\frac{dx}{ds} = \dot{x}$ pour le distinguer de $x' = \frac{dx}{dt}$ alors,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{x} \frac{1}{e^s}.$$

Donc

$$tx' = e^s \dot{x} \frac{1}{e^s} = \dot{x}.$$

A présent

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\dot{x} \frac{1}{e^s}\right)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{e^s \ddot{x} - e^s \dot{x} \frac{1}{e^s}}{e^{2s}} = \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{e^{2s}}.$$

Donc

$$t^2 x'' = \ddot{x} - \dot{x}.$$

Nous avons que faire les substitutions pour x'' et x' va convertir le donné équation différentielle à l'équation linéaire à coefficients constants

$$a(\ddot{x} - \dot{x}) + b\dot{x} + cx = 0,$$

où

$$a\ddot{x} + (b - a)\dot{x} + cx = 0.$$

1.3.2 Equation d'Euler non homogène

Comme pour le calcul d'Euler homogène équation, la substitution $t = e^s$ transforme l'équation d'Euler non homogène

$$at^2 x'' + btx' + cx = h(t), \quad t > 0,$$

dans

$$a \frac{d^2 x}{ds^2} + (b - a) \frac{dx}{ds} + cx = h(e^s),$$

qui est une équation linéaire non homogène à coefficients constants et peut-être traité soit par la méthode de variation des paramètres.

1.4 L'équation d'onde non homogène en dimension un

On considérant une corde, en position horizontale, et de longueur l (de $x = 0$ et $x = l$) au repos tendue avec tension constante T et une force extérieure \mathbf{f} . Les point de cette corde peuvent se déplacer dans un plan vertical, on note ρ la densité massique de la corde, que l'on suppose et constante, on s'intéresse aux petites déplacements verticaux des points de la corde. On note $U(x, t)$ le déplacement vertical du point, d'abscisse x à l'instant t , après

avoir appliquée le principe fondamental de la dynamique, voir [1], on obtient alors l'équation suivante :

$$T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathbf{f}(x, t),$$

et pour $c = (T/\rho)^{\frac{1}{2}}$ et $f(x, t) = -\mathbf{f}(x, t)/\rho$ on définit l'équation d'onde en dimension un :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \quad (1.5)$$

avec les conditions aux bornes

$$U(0, t) = U(l, t) = 0, \quad (t \geq 0), \quad (1.6)$$

et les conditions initiales

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x). \quad (1.7)$$

Séparation des variables :

La séparation des variables consiste à rechercher la solution de (1.5), (1.6) et (1.7) qui prendraient sous la forme suivant :

$$U(x, t) = k(t) h(x), \quad t \geq 0, x \in [0, l], \quad (1.8)$$

en injectant formellement cette formule dans une l'équation (1.5), on obtient :

$$k''(t) h(x) = c^2 k(t) h''(x),$$

donc

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{k''(t)}{k(t)} = \lambda,$$

alors nécessairement, on a :

$$\begin{cases} h''(x) = \lambda h(x) & x \in [0, l], \\ h(0) = h(l) = 0. \end{cases}$$

Les valeurs propres et les fonctions propres correspondantes sont

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad h_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Maintenant nous mettons

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Solution de l'équation non homogène

Calculant formellement U_{tt} et U_{xx} en remplaçant par (1.5), (1.6) et (1.7), nous obtenons

$$f(x, t) = U_{tt} - c^2 U_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n''(t) + \left(c \frac{n\pi}{l} \right)^2 k_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

D'où l'expansion f , φ et Ψ dans la série de Fourier

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Alors, les coefficients sont donnée par

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$
$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad \text{et} \quad \Psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Donc on a l'équation suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n''(t) + \left(c \frac{n\pi}{l} \right)^2 k_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

L'unicité du développement de Fourier mène à la famille des ODE

$$k_n''(t) + \left(c \frac{n\pi}{l} \right)^2 k_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.9)$$

Solution de l'équation de k

Solution de l'équation homogène (1.9) La solution homogène donné par

$$k_n(t) = a_n \cos \left(c \frac{n\pi}{l} t \right) + b_n \sin \left(c \frac{n\pi}{l} t \right). \quad (1.10)$$

Solution particulière Dans cette partie, pour trouver la solution particulière de l'équation non homogène, on utilise la méthode de variation des paramètres pour l'équation

$$k_n''(t) + \left(c \frac{n\pi}{l} \right)^2 k_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.11)$$

L'idée de base de la méthode de variation des paramètres est de remplacer les constantes a_n et b_n dans Eq.(1.10) par les fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$, respectivement, et puis pour déterminer ces fonctions afin que l'expression résultante

$$k_n = u_1(t) \cos \left(c \frac{n\pi}{l} t \right) + u_2(t) \sin \left(c \frac{n\pi}{l} t \right), \quad (1.12)$$

est une solution de l'équation non homogène $Eq.(1.11)$.

Revenant maintenant à $Eq.(1.12)$, nous le différencions et réarrangeant les termes, obtenant ainsi

$$\begin{aligned} k'_n &= -c\frac{n\pi}{l}u_1(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + c\frac{n\pi}{l}u_2(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) \\ &\quad + u'_1(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + u'_2(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

En gardant à l'esprit la possibilité de choisir une deuxième condition sur u_1 et vous u_2 , demandons la somme des deux derniers termes du côté droit d' $Eq.(1.13)$ pour être nul, c'est-à-dire que nous exigeons que

$$u'_1(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + u'_2(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) = 0. \quad (1.14)$$

Il découle ensuite d' $Eq.(1.13)$ que

$$k'_n = -c\frac{n\pi}{l}u_1(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + c\frac{n\pi}{l}u_2(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right). \quad (1.15)$$

En différenciant $Eq.(1.15)$, on obtient

$$\begin{aligned} k''_n &= -\left(c\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_1(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) - \left(c\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_2(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) \\ &\quad - c\frac{n\pi}{l}u'_1(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + c\frac{n\pi}{l}u'_2(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Puis, en remplaçant k_n et k''_n dans $Eq.(1.11)$ d' $Eq.(1.12)$ et (1.16), respectivement, nous constatons que u_1 et u_2 doit satisfaire

$$-c\frac{n\pi}{l}u'_1(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + c\frac{n\pi}{l}u'_2(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) = f_n(t). \quad (1.17)$$

En résumant, nous voulons choisir au u_1 et u_2 afin de satisfaire les $Eq(1.14)$ et (1.17).

En résolvant $Eq.(1.14)$ pour $u'_1(t)$, nous avons

$$u'_1(t) = -u'_2(t)\frac{\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)}{\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)}. \quad (1.18)$$

Puis, substituant $u'_1(t)$ dans $Eq.(1.17)$ et en simplifiant, on obtient

$$u'_2(t) = \frac{l}{cn\pi}f_n(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right). \quad (1.19)$$

En outre, mettant cette expression pour $u'_2(t)$ dans $Eq.(1.18)$, nous constatons que

$$u'_1(t) = \left(\frac{l}{cn\pi}f_n(t)\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)\right)\frac{\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)}{\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)} = \frac{l}{cn\pi}f_n(t)\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right). \quad (1.20)$$

Ayant obtenu $u_1'(t)$ et vous $u_2'(t)$, nous intégrons $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Le résultat est

$$u_1(t) = \frac{l}{cn\pi} \int_0^t f_n(\xi) \sin\left(c\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi + a_n, \quad (1.21)$$

et

$$u_2(t) = \frac{l}{cn\pi} \int_0^t f_n(\xi) \cos\left(c\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi + b_n. \quad (1.22)$$

En substituant ces expressions dans *Eq.(1.12)*, nous avons

$$k_n(t) = \left(\frac{l}{cn\pi} \int_0^t f_n(\xi) \sin\left(c\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi + a_n \right) \cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + \left(\frac{l}{cn\pi} \int_0^t f_n(\xi) \cos\left(c\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi + b_n \right) \sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right),$$

enfin, en utilisant la formule trigonométrique de $\sin(\theta_1 + \theta_2)$, on obtient la formule de k_n suivant :

$$k_n(t) = A_n \cos\frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{l}t + \frac{l}{cn\pi} \int_0^t \left(-\sin\frac{cn\pi}{l}t + \cos\frac{cn\pi}{l}t \right) f_n(t) dt,$$

ou $A_n = \frac{l}{cn\pi}a_n$ et $B_n = \frac{l}{cn\pi}b_n$.

On utilisant (1.8) et le principe de superposition des solutions on obtient la série :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{l}t + \frac{l}{cn\pi} \int_0^t \left(-\sin\frac{cn\pi}{l}t + \cos\frac{cn\pi}{l}t \right) f_n(t) dt \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Calcul des coefficients A_n, B_n :

Pour calculer les coefficients A_n et B_n , on utilise les condition initiales (1.7) :

1. $U(x, 0) = \varphi(x)$, alors :

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(0) \sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x),$$

on conclut

$$k_n(0) = \varphi_n \quad 1 \leq n < \infty,$$

et par la relation

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(0) \sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

on a :

$$A_n = \varphi_n.$$

2. $\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x)$, alors :

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k'_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \Psi(x),$$

on conclut

$$k'_n(0) = \Psi_n \quad 1 \leq n < \infty,$$

et par la relation

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k'_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

on a :

$$B_n = \Psi_n.$$

Remarque 1.10 *On peut considérer d'autres conditions aux bord, i.e. des conditions de Neumann ou des conditions mixtes.*

Chapitre 2

Equation d'onde non homogène dans un intervalle variable en temps

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation d'onde non homogène dans un intervalle avec des frontières variable, c-à-d, $0 < x < a(t)$.

2.1 Position du problème

La solution exacte de l'équation d'onde non homogène en dimension un, est trouvée pour des conditions initiales et aux limites définies dans les cas où la distance entre les limites varie dans le temps selon des lois linéaires.

Dans le présent chapitre, on utilise un changement des variables pour trouver la fonction $U(x, t)$ satisfaisant l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(x, t), \quad 0 < x < a(t), t \geq 0 \quad (2.1)$$

et les conditions limites et initiales suivantes :

$$U(0, t) = U(a(t), t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$U_x(x, 0) = H_0(x), \quad U_t(x, 0) = -cE_0(x), \quad 0 < x < a(0), \quad (2.3)$$

où c est la vitesse de propagation des ondes dans le système.

Ci-dessous, la solution exacte de l'équation non homogène (2.1) est dérivé pour la lois linéaire du mouvement de la frontière

$$a(t) = a_0(1 + \alpha t),$$

où α et a_0 sont constantes, en supposant que $F(x, t)$, $H_0(x)$ et $E_0(x)$ sont des fonctions régulières.

Remarque 2.1 *Un cas particulier de ce problème, lorsque $F(x, t) = 0$, a été considéré plus tôt dans [2], lorsque la solution a été calculée pour $a(t) = \alpha t$, $\alpha = \text{const}$ et $t \geq t_0 > 0$.*

2.2 Changement de variables

La solution de l'équation (2.1) dans les conditions (2.2) et (2.3) est recherchée de manière appropriée, les limites du domaine de variation de la fonction désirée seraient fixées. À cet effet l'un des nouvelles variables est écrite sous la forme

$$\rho = L(x/a),$$

où L est une fonction arbitraire. Nous choisissons la seconde variable de sorte que l'équation (2.1), dans les nouvelles variables, ne contient pas de dérivées mixtes on peut vérifier que cela conduit à

$$\tau = N\{2c^2 \int a(da/dt)^{-1} dt - x^2\},$$

où N est une fonction arbitraire.

Passons maintenant à la nouvelle variable. Pour la fonction $t(\rho, \tau) = U(x, t)$ les conditions aux limites sont écrites sous la forme

$$S(0, \tau) = S(1, \tau) = 0. \tag{2.4}$$

Pour une lois de mouvement de linéaire de la limite, on peut choisir L et N telle que les variables soient séparés dans l'équation pour $S(\rho, \tau)$.

Soit

$$a(t) = a_0(1 + \alpha t) \text{ où } |\alpha a_0/c| < 1.$$

Comme dans [7], on peut choisir L et N telles que les variables soit séparée dans l'équation de $S(\rho, \tau)$. on prend

$$\rho = \frac{x}{a},$$

et

$$\tau = \frac{\beta^2}{a_0^2} \left[2c^2 \int a \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} dt - x^2 \right] + 1,$$

i.e.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\beta^2}{a_0^2} \left[2c^2 \int a \left(\frac{1}{\alpha a_0} \right) dt - x^2 \right] + 1 = \left[2\alpha \int (1 + \alpha t) dt - \frac{\beta^2}{a_0^2} x^2 \right] + 1 \\ &= \left[2\alpha \left(t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) - \frac{\beta^2}{a_0^2} x^2 \right] + 1 = 1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2 - \frac{\beta^2}{a_0^2} x^2,\end{aligned}$$

donc

$$\tau = \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2}, \quad \text{où } \beta = \alpha a_0 / c.$$

On obtient l'équation non homogène suivante pour la fonction $S(\rho, \tau)$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \frac{dU}{d\rho} + \frac{d\tau}{dx} \frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{dU}{d\rho} - \frac{2\beta^2 x}{a_0} \frac{dU}{d\tau},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \frac{dU}{d\rho} - \frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} \right) = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{d\rho} \right) - \frac{2\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} - \frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{d\tau} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dU}{d\rho} \right) \right) + \frac{1}{a} \left(-\frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dU}{d\rho} \right) \right) \\ &\quad - \frac{2\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} - \frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dU}{d\tau} \right) \right) - \frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \left(-\frac{2\beta^2 x}{a_0^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dU}{d\tau} \right) \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{2\beta^2 x}{aa_0^2} \frac{d^2 U}{d\rho d\tau} - \frac{2\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} - \frac{2\beta^2 x}{aa_0^2} \frac{d^2 U}{d\rho d\tau} + \frac{4\beta^4 x^2}{a_0^4} \frac{d^2 U}{d\tau^2},\end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{4\beta^2 x}{aa_0^2} \frac{d^2 U}{d\rho d\tau} - \frac{2\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} + \frac{4\beta^4 x^2}{a_0^4} \frac{d^2 U}{d\tau^2}. \quad (2.5)$$

D'autre part

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dU}{d\rho} + \frac{d\tau}{dt} \frac{dU}{d\tau} = -\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\rho} + \frac{2\alpha a}{a_0} \frac{dU}{d\tau}, \quad \text{car } (a = \frac{\rho}{x}),$$

ce implique

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U}{dt^2} &= -\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{d}{d\rho} \left(-\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\rho} + \frac{2\alpha a}{a_0} \frac{dU}{d\tau} \right) + \frac{2\alpha a}{a_0} \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\rho} + \frac{2\alpha a}{a_0} \frac{dU}{d\tau} \right) \\ &= -\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{d}{d\rho} \left(-\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\rho} + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \frac{dU}{d\tau} \right) + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\rho} + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \frac{dU}{d\tau} \right) \\ &= -\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \left(-\frac{2a_0 \alpha \rho}{x} \frac{dU}{d\rho} - \frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{2\alpha x}{a_0 \rho^2} \frac{dU}{d\tau} + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \frac{d^2 U}{d\rho d\tau} \right) \\ &\quad + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \left(-\frac{a_0 \alpha \rho^2}{x} \frac{dU}{d\tau d\rho} + \frac{2\alpha x}{a_0 \rho} \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{2a_0^2\alpha^2\rho^3}{x^2} \frac{dU}{d\rho} + \frac{a_0^2\alpha^2\rho^4}{x^2} \frac{d^2U}{d\rho^2} + 2\alpha^2 \frac{dU}{d\tau} - 4\alpha^2\rho \frac{d^2U}{d\rho d\tau} + \frac{4\alpha^2x^2}{a_0^2\rho^2} \frac{d^2U}{d\tau^2}. \quad (2.6)$$

On remplace (2.5) et (2.6) dans (2.1) trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2}{x^2} \frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{4\beta^2\rho}{a_0^2} \frac{d^2U}{d\rho d\tau} - \frac{2\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} + \frac{4\beta^4x^2}{a_0^4} \frac{d^2U}{d\tau^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{2a_0^2\alpha^2\rho^3}{x^2} \frac{dU}{d\rho} + \frac{a_0^2\alpha^2\rho^4}{x^2} \frac{d^2U}{d\rho^2} + 2\alpha^2 \frac{dU}{d\tau} - 4\alpha^2\rho \frac{d^2U}{d\rho d\tau} + \frac{4\alpha^2x^2}{a_0^2\rho^2} \frac{d^2U}{d\tau^2} \right) + F(x, t), \end{aligned}$$

on a : $\beta = a_0\alpha/c$, donc :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho^2}{x^2} - \frac{\beta^2\rho^4}{x^2} \right) \frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{2\beta^2\rho^3}{x^2} \frac{dU}{d\rho} - \frac{4\beta^2\rho}{a_0^2} \frac{d^2U}{d\rho d\tau} \\ &= \left(-\frac{4\beta^4x^2}{a_0^4} + \frac{4\beta^2x^2}{a_0^4\rho^2} \right) \frac{d^2U}{d\tau^2} + \frac{4\beta^2}{a_0^2} \frac{dU}{d\tau} - \frac{4\beta^2\rho}{a_0^2} \frac{d^2U}{d\rho d\tau} + g(\rho, \tau) (a_0^2\tau)^{-1}. \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par $a_0^2\tau$, il vient

$$\begin{aligned} a_0^2\tau \left(\frac{\rho^2}{x^2} - \frac{\beta^2\rho^4}{x^2} \right) \frac{d^2U}{d\rho^2} - a_0^2\tau \frac{2\beta^2\rho^3}{x^2} \frac{dU}{d\rho} \\ = a_0^2\tau \left(-\frac{4\beta^4x^2}{a_0^4} + \frac{4\beta^2x^2}{a_0^4\rho^2} \right) \frac{d^2U}{d\tau^2} + \frac{4\beta^2}{a_0^2} a_0^2\tau \frac{dU}{d\tau} + g(\rho, \tau), \end{aligned}$$

comme

$$\tau = \left(\frac{x^2}{\rho^2} - \beta^2x^2 \right) / a_0^2 \Rightarrow a_0^2\tau = \frac{x^2}{\rho^2} - \beta^2x^2,$$

alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{\rho^2} - \beta^2x^2 \right) \left(\frac{\rho^2}{x^2} - \frac{\beta^2\rho^4}{x^2} \right) \frac{d^2U}{d\rho^2} - \left(\frac{x^2}{\rho^2} - \beta^2x^2 \right) \frac{2\beta^2\rho^3}{x^2} \frac{dU}{d\rho} \\ = 4\beta^2\tau^2 \frac{d^2U}{d\tau^2} + 4\beta^2\tau \frac{dU}{d\tau} + g(\rho, \tau), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2\rho^2 - \beta^2\rho^2 + \beta^4\rho^4) \frac{d^2S}{d\rho^2} + (-2\beta^2\rho + 2\beta^4\rho^3) \frac{dS}{d\rho} \\ = 4\beta^2\tau^2 \frac{d^2S}{d\tau^2} + 4\beta^2\tau \frac{dS}{d\tau} + g(\rho, \tau), \end{aligned}$$

finalement on a

$$(1 - \beta^2\rho^2)^2 \frac{d^2S}{d\rho^2} - 2\beta^2\rho(1 - \beta^2\rho^2) \frac{dS}{d\rho} = 4\beta^2\tau^2 \frac{d^2S}{d\tau^2} + 4\beta^2\tau \frac{dS}{d\tau} + g(\rho, \tau), \quad (2.7)$$

où $g(\rho, \tau) (a_0^2\tau)^{-1} = F(x, t)$.

2.3 Séparation des variables

Si on utilisant (2.4), la solution de l'équation homogène (2.7) est recherchée sous la forme

$$S(\rho, \tau) = \Phi(\rho) \Psi(\tau),$$

on obtient alors le problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2 \rho^2)^2 \frac{\Psi(\tau) d^2 \Phi(\rho)}{d\rho^2} - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \frac{\Psi(\tau) d\Phi(\rho)}{d\rho} \\ = 4\beta^2 \tau^2 \frac{\Phi(\rho) d^2 \Psi(\tau)}{d\tau^2} + 4\beta^2 \tau \frac{\Phi(\rho) d\Psi(\tau)}{d\tau}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi''(\rho) \Psi(\tau) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi'(\rho) \Psi(\tau) \\ = 4\beta^2 \tau^2 \Phi(\rho) \Psi''(\tau) + 4\beta^2 \tau \Phi(\rho) \Psi'(\tau), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi''(\rho) \Psi(\tau) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi'(\rho) \Psi(\tau) \\ - \left(4\beta^2 \tau^2 \Psi''(\tau) + 4\beta^2 \tau \Psi'(\tau) \right) \Phi(\rho) = 0, \end{aligned}$$

on pose :

$$-\frac{(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi''(\rho) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi'(\rho)}{\Phi(\rho)} = -\frac{(4\beta^2 \tau^2 \Psi''(\tau) + 4\beta^2 \tau \Psi'(\tau))}{\Psi(\tau)} = \lambda.$$

2.3.1 Résolution de l'équation de Φ

On a

$$(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi''(\rho) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi'(\rho) + \lambda \Phi(\rho) = 0. \quad (2.8)$$

Pour les conditions aux limites, on a :

$$S(0, \tau) = \Phi(0) \Psi(\tau) = 0 \Rightarrow \Phi(0) = 0,$$

$$S(1, \tau) = \Phi(1) \Psi(\tau) = 0 \Rightarrow \Phi(1) = 0,$$

donc

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0.$$

On peut montrer que les fonctions propres $\Phi_n(\rho)$ qui correspondent à différentes valeurs propres λ_n sont orthogonales au poids $(1 - \beta^2 \rho^2)^{-1}$.

1. Pour $\lambda \leq 0$, le problème (2.8) a une solution triviale.
2. Pour $\lambda > 0$, nous obtenons

$$(1 - \beta^2 \rho^2) \Phi''(\rho) - 2\beta^2 \rho \Phi'(\rho) + \frac{\lambda}{(1 - \beta^2 \rho^2)} \Phi(\rho) = 0,$$

ceci implique

$$\left((1 - \beta^2 \rho^2) \Phi'(\rho) \right)' + \frac{\lambda}{(1 - \beta^2 \rho^2)} \Phi(\rho) = 0,$$

on pose :

$$\frac{1 + \beta \rho}{1 - \beta \rho} = e^s \Rightarrow s = \ln \frac{1 + \beta \rho}{1 - \beta \rho}, \quad (2.9)$$

alors

$$1 + \beta \rho = e^s (1 - \beta \rho) \Rightarrow \beta \rho (e^s + 1) = e^s - 1,$$

i.e.

$$\rho = \frac{e^s - 1}{\beta (e^s + 1)},$$

on a :

$$1 - \beta^2 \rho^2 = 1 - \frac{(e^s - 1)^2}{(e^s + 1)^2} = \frac{4e^s}{(e^s + 1)^2},$$

donc :

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{ds}{d\rho} \frac{d\Phi}{ds} = \frac{\frac{\beta(1-\beta\rho)+\beta(1+\beta\rho)}{(1-\beta\rho)^2}}{\frac{(1+\beta\rho)}{(1-\beta\rho)}} \frac{d\Phi}{ds} = \frac{2\beta(e^s+1)^2}{4e^s} \frac{d\Phi}{ds},$$

alors

$$\Phi' = \frac{2\beta(e^s+1)^2}{4e^s} \dot{\Phi}(s).$$

L'équation devient

$$\left(\frac{4e^s}{(e^s+1)^2} \Phi'(\rho) \right)' + \frac{\lambda(e^s+1)^2}{4e^s} \Phi(\rho) = \left(\frac{2\beta \frac{4e^s}{(e^s+1)^2}}{\frac{4e^s}{(e^s+1)^2}} \dot{\Phi}(s) \right)' + \frac{\lambda}{\frac{4e^s}{(e^s+1)^2}} \Phi(s) = 0,$$

donc

$$2\beta \frac{d(2\beta \dot{\Phi}(s))}{ds} + \lambda \Phi(s) = 0,$$

car $\frac{4e^s}{(e^s+1)^2} \neq 0$, i.e.

$$4\beta^2 \ddot{\Phi}(s) + \lambda \Phi(s) = 0,$$

alors :

$$\Phi(s) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\beta} s\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\beta} s\right).$$

Si on remplace s par (2.9) on a

$$\Phi(\rho) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right).$$

Et par utilisant les conditions limites on a :

$$\Phi_n(0) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln 1\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln 1\right) = c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

et

$$\Phi_n(1) = \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} = n\pi.$$

Nous obtenons les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_n = \left(\frac{2\beta n\pi}{\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Et la solution de l'équation (2.8) est donnée par :

$$\Phi_n(\rho) = \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right). \quad (2.11)$$

Pour $\Phi_n(\rho)$, on a la relation d'orthogonalité suivante :

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_m) &= \int_0^1 \frac{\Phi_n \Phi_m}{1-\beta^2 \rho^2} d\rho \\ &= \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right)}{1-\beta^2 \rho^2} d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1-\beta^2 \rho^2} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_m}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) \right\} d\rho \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_m) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) \right]_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_m}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_m}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}} \sin(\pi(n-m)) - 0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_m}} \sin(\pi(n+m)) + 0 \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \int_0^1 \frac{\Phi_n \Phi_m}{1-\beta^2 \rho^2} d\rho = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

Et si $m = n$ on a :

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_n) &= \int_0^1 \frac{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho} \right)}{1 - \beta^2 \rho^2} d\rho \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho} \right)}{2(1 - \beta^2 \rho^2)} d\rho, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_n) &= \int_0^1 \frac{1}{2(1 - \beta^2 \rho^2)} d\rho - \int_0^1 \frac{\cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho} \right)}{2(1 - \beta^2 \rho^2)} d\rho \\ &= \frac{1}{4\beta} \left[\ln \frac{1 + \beta\rho}{1 - \beta\rho} \right]_0^1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \left[\sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{1 + \beta\rho}{1 - \beta\rho} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \frac{1}{4\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \end{aligned}$$

finalemt on a la relation suivant :

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \int_0^1 \frac{\Phi_n \Phi_m}{1 - \beta^2 \rho^2} d\rho = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{1}{4\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3.2 Solution de l'équation non homogène

La solution de l'équation non homogène doit être recherchée sous la forme de série :

$$S(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau), \quad (2.13)$$

développons le terme source $g(\rho, \tau)$ en une série de fonctions orthogonales $\Phi_n(\rho)$:

$$g(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho), \quad (2.14)$$

on a :

$$\int_0^l g(\xi, \tau) \frac{\Phi_m(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\xi) \frac{\Phi_m(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi.$$

Dans le second membre on a

$$q_n(\tau) \int_0^l \frac{\Phi_n^2(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi = q_n(\tau) \|\Phi_n(\xi)\|^2, \quad \text{si } m = n,$$

donc :

$$q_n(\tau) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^l g(\xi, \tau) \frac{\Phi_n(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi.$$

Remplaçons (2.13) et (2.14) dans l'équation (2.7) en utilisant (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} & (1 - \beta^2 \rho^2)^2 \frac{d^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau) \right)}{d\rho^2} - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \frac{d \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau) \right)}{d\rho} \\ &= 4\beta^2 \tau^2 \frac{d^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau) \right)}{d\tau^2} + 2\beta^2 \tau \frac{d \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau) \right)}{d\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi_n''(\rho) \Psi_n(\tau) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi_n'(\rho) \Psi_n(\tau) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[4\beta^2 \tau^2 \Phi_n(\rho) \Psi_n''(\tau) + 2\beta^2 \tau \Phi_n(\rho) \Psi_n'(\tau) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[4\beta^2 \tau^2 \Psi_n''(\tau) + 2\beta^2 \tau \Psi_n'(\tau) \right] \Phi_n(\rho) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi_n''(\rho) - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi_n'(\rho) \right]}{\Phi_n(\rho)} \Psi_n(\tau) \Phi_n(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho) = 0, \end{aligned}$$

i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\beta^2 \tau^2 \Psi_n''(\tau) + 2\beta^2 \tau \Psi_n'(\tau) \right] \Phi_n(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Psi_n(\tau) \Phi_n(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho) = 0.$$

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[4\beta^2 \tau^2 \Psi_n''(\tau) + 4\beta^2 \tau \Psi_n'(\tau) + \lambda_n \Psi_n(\tau) + q_n(\tau) \right] \Phi_n(\rho) = 0.$$

Puisque $\Phi_n(\rho)$ sont des fonctions orthogonales, alors

$$4\beta^2 \tau^2 \Psi_n''(\tau) + 4\beta^2 \tau \Psi_n'(\tau) + \lambda_n \Psi_n(\tau) + q_n(\tau) = 0, \quad \forall n. \quad (2.15)$$

2.3.3 Résolution de l'équation de fonction Ψ

Solution de l'équation homogène d'Euler

L'équation (2.15) est une équation différentielle d'Euler homogène. Une telle équation peut être changée à une équation avec des coefficients constants en effectuant la substitution $\tau = e^p$, ou de manière équivalente $p = \ln \tau$, comme suit. On remarque que

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{e^p},$$

Pour plus de commodité, nous notons $\frac{d\Psi}{dp} = \dot{\Psi}$ pour le distinguer de $\Psi' = \frac{d\Psi}{d\tau}$. Ensuite,

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d\Psi}{dp} = \frac{1}{e^p} \dot{\Psi},$$

donc

$$\tau \Psi' = e^p \dot{\Psi} \frac{1}{e^p} = \dot{\Psi}.$$

A présent

$$\Psi'' = \frac{d\Psi'}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d\Psi'}{dp} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{e^p} \dot{\Psi} \right) = \frac{1}{e^p} \frac{e^p \ddot{\Psi} - e^p \dot{\Psi}}{e^{2p}} = \frac{\ddot{\Psi} - \dot{\Psi}}{e^{2p}},$$

alors

$$\tau^2 \Psi'' = \ddot{\Psi} - \dot{\Psi}.$$

Les substitutions pour x' et x'' donnent une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$4\beta^2 \left(\ddot{\Psi}_n(p) - \dot{\Psi}_n(p) \right) + 4\beta^2 \dot{\Psi}_n(p) + \lambda_n \Psi_n(p) = 4\beta^2 \ddot{\Psi}_n(p) + \lambda_n \Psi_n(p) = 0,$$

i.e.

$$\ddot{\Psi}_n(p) + \frac{\lambda_n}{4\beta^2} \Psi_n(p) = 0, \quad (2.16)$$

donc :

$$\Psi_n(p) = a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} p \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} p \right),$$

et finalement

$$\Psi_n(\tau) = a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau \right). \quad (2.17)$$

Solution particulière

Dans cette partie, pour trouver la solution particulière de l'équation non homogène, on utilise la méthode de variation des paramètres pour l'équation

$$\Psi_n''(p) + \frac{\lambda_n}{4\beta^2} \Psi_n(p) = -q_n(e^p). \quad (2.18)$$

On remplace les constantes a_n et b_n dans Eq.(2.17) par les fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$, respectivement, et puis pour déterminer ces fonctions afin que l'expression résultante

$$\Psi_n = u_1(p) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} p \right) + u_2(p) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} p \right), \quad (2.19)$$

est une solution de l'équation non homogène $Eq.(2.18)$.

Revenant maintenant à $Eq.(2.19)$, nous le différencions et réarrangeant les termes, obtenant ainsi

$$\begin{aligned}\Psi'_n &= -\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u_1(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u_2(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) \\ &+ u'_1(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + u'_2(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Nous exigeons que

$$u'_1(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + u'_2(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) = 0.\quad (2.21)$$

Il découle ensuite d' $Eq.(2.20)$ que

$$\Psi'_n = -\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u_1(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u_2(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right).\quad (2.22)$$

En différenciant $Eq.(2.22)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi''_n &= -\frac{\lambda_n}{4\beta^2}u_1(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) - \frac{\lambda_n}{4\beta^2}u_2(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) \\ &- \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u'_1(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u'_2(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Puis, en remplaçant Ψ_n et Ψ''_n dans $Eq.(2.18)$ d' $Eq.(2.19)$ et (2.23) , respectivement, nous constatons que u_1 et u_2 doit satisfaire

$$-\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u'_1(p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}u'_2(p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) = -q_n(e^p).\quad (2.24)$$

En résumant, nous voulons choisir au u_1 et u_2 afin de satisfaire les $Eq(2.21)$ et (2.24) .

En résolvant $Eq.(2.21)$ pour $u'_1(p)$, nous avons

$$u'_1(p) = u'_2(p)\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right)}.\quad (2.25)$$

Puis, substituant $u'_1(p)$ dans $Eq.(2.24)$ et en simplifiant, on obtient

$$u'_2(p) = -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}}q_n(e^p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right).\quad (2.26)$$

En outre, mettant cette expression pour $u'_2(p)$ dans $Eq.(2.25)$, nous constatons que

$$u'_1(p) = \left(-\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}}q_n(e^p)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right)} = -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}}q_n(e^p)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right).\quad (2.27)$$

Ayant obtenu $u_1'(p)$ et vous $u_2'(p)$, nous intégrons $u_1(p)$ et $u_2(p)$. Le résultat est

$$u_1(p) = -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^p q_n(e^\xi) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}\xi\right) d\xi + a_n, \quad (2.28)$$

et

$$u_2(p) = -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^p q_n(e^\xi) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}\xi\right) d\xi + b_n. \quad (2.29)$$

En substituant ces expressions dans *Eq.*(2.19), nous avons

$$\begin{aligned} \Psi_n(p) = & \left(-\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^p q_n(e^\xi) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}\xi\right) d\xi + a_n \right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right) \\ & + \left(-\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^p q_n(e^\xi) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}\xi\right) d\xi + b_n \right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta}p\right). \end{aligned}$$

Enfin, on obtient la formule de Ψ_n suivant :

$$\begin{aligned} \Psi_n(\tau) = & a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau\right) \\ & - \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{\ln \tau} q_n(e^\xi) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln \tau - \xi)\right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les termes dans (2.30) impliquant les constantes arbitraires a_n et b_n sont les solutions générales de l'équation homogène correspondante, tandis que le termes restant est la solution particulière de l'équation non homogène (2.18).

2.4 Solution avec les variables originales

Pour trouver la solution générale de l'équation (2.1), qui satisfait les conditions aux limites (2.2), on remplace $\Phi_n(\rho)$ et $\Psi_n(\tau)$ dans (2.14)

$$\begin{aligned} U(x, t) = S(\rho, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho) \Psi_n(\tau) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta\rho}{1 - \beta\rho}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau\right) \right. \\ & \left. - \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{\ln \tau} q_n(e^\xi) \sin\left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln \tau - \xi)\right] d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\rho = \frac{x}{a} \text{ et } \tau = (a^2 - \beta^2 x^2) / a_o^2,$$

alors :

$$U(x, t) = p(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \times \left[a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} \right) \right], \quad (2.31)$$

où

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \left\{ \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \times \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\}.$$

Remarque 2.2 Si dans (2.31) on passe à la limite $\beta \rightarrow 0$ nous obtenons la solution de l'équation d'onde dans un intervalle fixes.

2.5 Détermination des coefficients a_n et b_n

Déterminons maintenant les coefficients a_n et b_n . Pour cela il faut trouver les expressions

$$\{(1/c) (\partial U / \partial t) + (\partial U / \partial x)\}_{t=0} \text{ et } \{(1/c) (\partial U / \partial t) - (\partial U / \partial x)\}_{t=0}$$

En utilisant (2.3) et (2.31), nous avons

$$U_x(x, 0) = H_0(x), \quad U_t(x, 0) = -cE_0(x).$$

On pose : $K = \frac{a_o + \beta x}{a_o - \beta x}$ et $M = \frac{a_o^2 - \beta^2 x^2}{a_o^2}$, donc :

$$H_0(x) = U_x(x, 0) = p_x(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_n} a_o}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \left(a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \right) - \frac{\sqrt{\lambda_n} \beta x}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \left(-a_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) + b_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \right) \right\},$$

et

$$E_0(x) = -\frac{1}{c} U_t(x, 0) = -\frac{1}{c} p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_n} \beta x}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \left(a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \right) - \frac{\sqrt{\lambda_n} a_o}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \left(-a_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) + b_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \right) \right\},$$

En prenant la différence, il vient

$$\begin{aligned}
H_0(x) - E_0(x) &= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_n}(a_o - \beta x)}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \left(a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda_n}(\beta x - a_o)}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \left(a_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) - b_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) \right) \right\},
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
H_0(x) - E_0(x) &= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}(a_o - \beta x)}{a_o^2 - \beta^2 x^2} \\
&\times \left\{ a_n \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + b_n \left(\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K\right) \right) \right\},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
H_0(x) - E_0(x) &= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \\
&\times \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln K + \ln M)\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln K + \ln M)\right) \right\} \\
&= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \\
&\times \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln KM\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln KM\right) \right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de M et K , on a :

$$\begin{aligned}
H_0(x) - E_0(x) &= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln\left(\frac{a_o + \beta x}{a_o - \beta x} \times \frac{a_o^2 - \beta^2 x^2}{a_o^2}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln\left(\frac{a_o + \beta x}{a_o - \beta x} \times \frac{a_o^2 - \beta^2 x^2}{a_o^2}\right)\right) \right\},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
H_0(x) - E_0(x) &= p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \\
&\times \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln\left(\frac{a_o + \beta x}{a_o}\right)^2\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln\left(\frac{a_o + \beta x}{a_o}\right)^2\right) \right\},
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$H_0 - E_0 = \frac{1}{c}U_t(x, 0) + U_x(x, 0) = p_x(x, 0) + \frac{1}{c}p_t(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_o + \beta x}{a_o} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_o + \beta x}{a_o} \right) \right\}.$$

Et par encore on a :

$$\begin{aligned} -(H_0(x) + E_0(x)) &= \frac{1}{c}p_t(x, 0) - p_x(x, 0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o - \beta x} \\ &\times \left\{ a_n \left(\cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \right) \right. \\ &\left. + b_n \left(\cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln M \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln K \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

ce implique :

$$\begin{aligned} -(H_0(x) + E_0(x)) &= \frac{1}{c}p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o - \beta x} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln M - \ln K) \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln M - \ln K) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c}p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{(a_o - \beta x)} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{M}{K} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{M}{K} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Par substitution M et K on a :

$$\begin{aligned} -(H_0(x) + E_0(x)) &= \frac{1}{c}p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o - \beta x} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \left(\frac{a_o - \beta x}{a_o} \right)^2 \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\frac{a_o - \beta x}{a_o} \right)^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

finalement on a :

$$\begin{aligned} -(H_0 + E_0) &= \frac{1}{c}p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_o + \beta x} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_o - \beta x}{a_o} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_o - \beta x}{a_o} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Les fonctions $E_0(x)$, $H_0(x)$, $p_t(x, 0)$ et $p_x(x, 0)$ sont définis dans l'intervalle $[0, a_0]$ Si $E_0(x)$ et $p_t(x, 0)$ sont prolonge comme des fonctions impaire continus tandis que $H_0(x)$ et $p_x(x, 0)$ sont prolonge comme des fonctions paire continues sur l'intervalle $[-a_0, a_0]$, alors la second l'expression sera un corollaire du premier.

Les fonctions

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right)$$

sont orthogonaux dans l'intervalle $[-a_0, a_0]$ pour le poids $1/(a_0 + \beta x)$, donc on peut déterminer les coefficients a_n et b_n :

1) **Détermination des a_n :**

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= \frac{1}{c} p_t(x, 0) + p_x(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \\ &\times \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

On multiplie l'équation (2.32) par $\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \left\{ a_n \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \right\} \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right). \end{aligned}$$

Si $m = n$, l'intégration sur $[-a_0, a_0]$ est :

$$\begin{aligned} &\int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) dx \\ &= \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \left[a_n \cos^2\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \right. \\ &\quad \left. + b_n \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) \right] dx \\ &= a_n \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \cos^2\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0}\right) dx \\ &= a_n I_n. \end{aligned}$$

Calculons le dernier intégral I_n . On pose

$$\theta = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \Rightarrow \partial\theta = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x},$$

donc

$$\text{si } x = a_0 \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1 + \beta) \quad \text{et} \quad \text{si } x = -a_0 \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1 - \beta).$$

Alors :

$$I_n = \int_{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1-\beta)}^{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1+\beta)} \cos^2(\theta) \partial\theta = \int_{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1-\beta)}^{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1+\beta)} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \partial\theta$$

et pa intégration pa

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2} \left[\theta \right]_{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1-\beta)}^{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1+\beta)} + \frac{1}{4} \left[\sin(2\theta) \right]_{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1-\beta)}^{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1+\beta)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] + \frac{1}{4} \left[\sin \left(2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1+\beta) \right) - \sin \left(2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln(1-\beta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right) \end{aligned}$$

et comme $\sqrt{\lambda_n} = 2\beta n\pi / \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$, alors

$$I_n = n\pi - \frac{1}{2} [\cos(2n\pi) \sin(2n\pi)] = n\pi.$$

Alors le coefficient a_n sont défini comme suit :

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx.$$

2) Détermination des b_n

On multiplie l'équation (2.32) par $\sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 - \beta x}{a_0} \right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \left\{ a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) \right\} \\ &\quad \times \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right), \end{aligned}$$

et si $m = n$, intégrons sur $[-a_0, a_0]$, on obtiens

$$\begin{aligned} &\int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx \\ &= \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} [b_n \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) \\ &\quad + a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right)] dx \\ &= b_n \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0 + \beta x} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx, \end{aligned}$$

On peut vérifier que la valeur de la dernière intégrale est égale à $n\pi$. Alors les coefficients b_n sont définis comme suit :

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx.$$

Chapitre 3

Solution numérique

Dans ce chapitre, on calcule la solution approche de l'équation d'onde non homogène dans un intervalle avec des frontières variable, c.-à-d., $0 < x < a(t)$.

L'algorithme de programme

ENTRÉE α vitesse de la limite droitr de l'intervalle end point speed;

c : vitesse de propagation;

a_0 : longueur initiale de l'intervalle;

N_{\max} : nombre de terme de la somme de Fourier;

$H_0(x)$: dérivée initiale en x ;

$E_0(x)$: dérivée initiale en t ;

f terme source;

SORTIE wave la solution ;

Etape 1: calcule de λ_n et q_n pour $n = 1, \dots, N_{\max}$;

$$a = a_0(1 + \alpha t)$$

$$\rho = \frac{x}{a}$$

$$\tau = (a^2 - \beta^2 x^2) / a_0^2,$$

$$g(\rho, \tau) = (a_0 \tau) f,$$

$$q_n(\tau) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^l g(\xi, \tau) \frac{\Phi_n(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi.$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2\beta n\pi}{\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)^2 ;$$

Etape 2 : calcul de $p_t(x, 0)$, $p_x(x, 0)$

$$\begin{aligned}
p_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2\alpha\beta a_0 x}{(a^2 - \beta^2 x^2)} \left\{ \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \left\{ \frac{2\alpha a_o^2}{(a^2 - \beta^2 x^2)} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} \frac{2\alpha a_o^2}{(a^2 - \beta^2 x^2)} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(x, 0) &= \sum_{n=1}^{N_{\max}} -\frac{2\beta a_0}{(a^2 - \beta^2 x^2)} \left\{ \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \left\{ \frac{2\beta^2 x}{(a^2 - \beta^2 x^2)} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} \frac{\beta x \sqrt{\lambda_n}}{(a^2 - \beta^2 x^2)} q_n(e^\xi) \cos \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\}
\end{aligned}$$

Etape 3 : calcul de a_n et b_n pour $n = 1, \dots, N_{\max}$;

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{(a_0 - \beta x)}{a_o} \right) dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-a_0}^{a_0} \left(H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{(a_0 - \beta x)}{a_o} \right) dx;$$

Etape 4 : calcul de la solution

$$\begin{aligned}
p(x, t) &= \sum_{n=1}^{N_{\max}} -\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \left\{ \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2}} q_n(e^\xi) \sin \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left(\ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} - \xi \right) \right] d\xi \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{wave} = & p(x, t) + \sum_{n=1}^{N_{\max}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \\
& \times \left[a_n \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} \right) + b_n \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{(a^2 - \beta^2 x^2)}{a_o^2} \right) \right];
\end{aligned}$$

SORTIE (wave).

Etape 5 STOP.

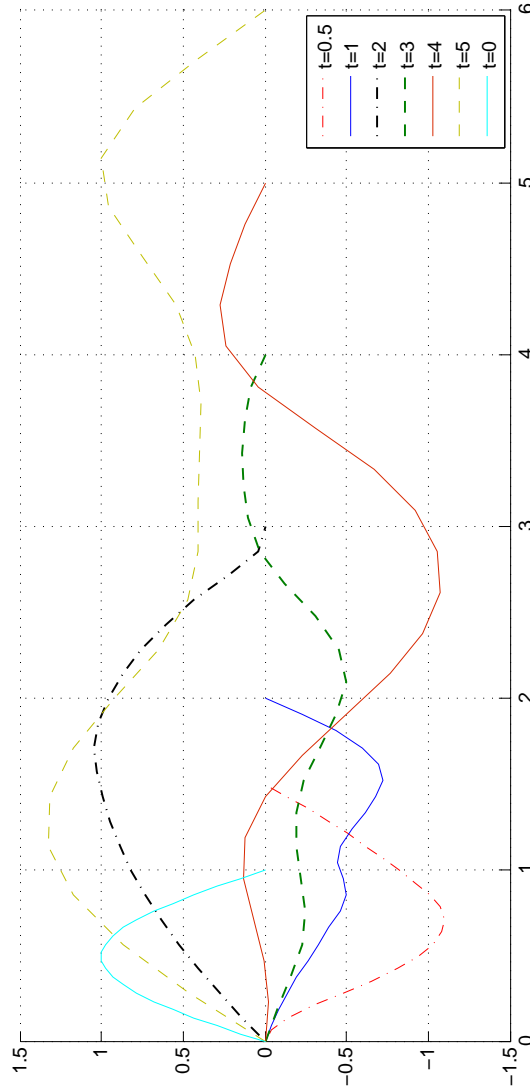


FIGURE 3.1 – Solution pour différents instant de temps

Dans Figure 1, $E_0 = 0, H_0 = \pi \cos(\pi x), a_0 = 1, c = 2, f = \rho, \alpha = 1,$
 $t_1 = 0.5, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 3, t_5 = 4, t_6 = 5, t_7 = 6,$

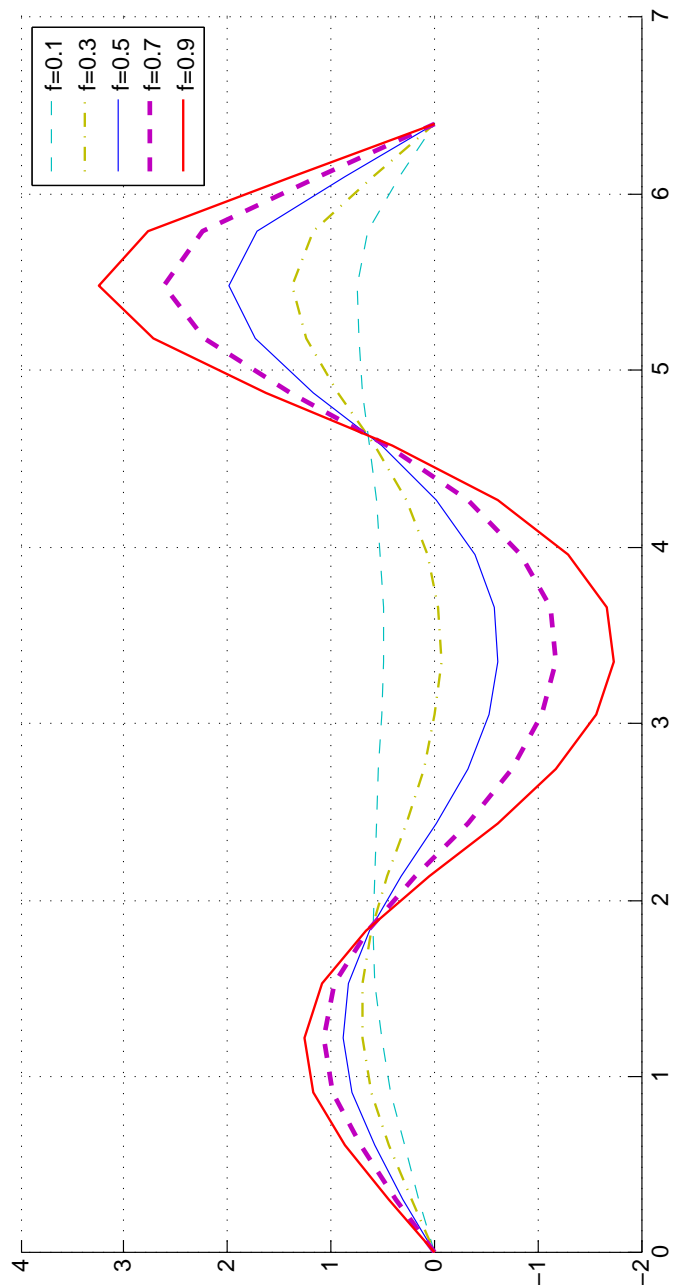


FIGURE 3.2 – Solution pour différents valeurs du terme source

Dans Figure 2, $E_0 = 0$, $H_0 = \pi \cos(\pi x)$, $a_0 = 1$, $c = 2$, $t = 60$, $\alpha = 1$,
 $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.3$, $f_3 = 0.5$, $f_4 = 0.7$, $f_5 = 0.9$,

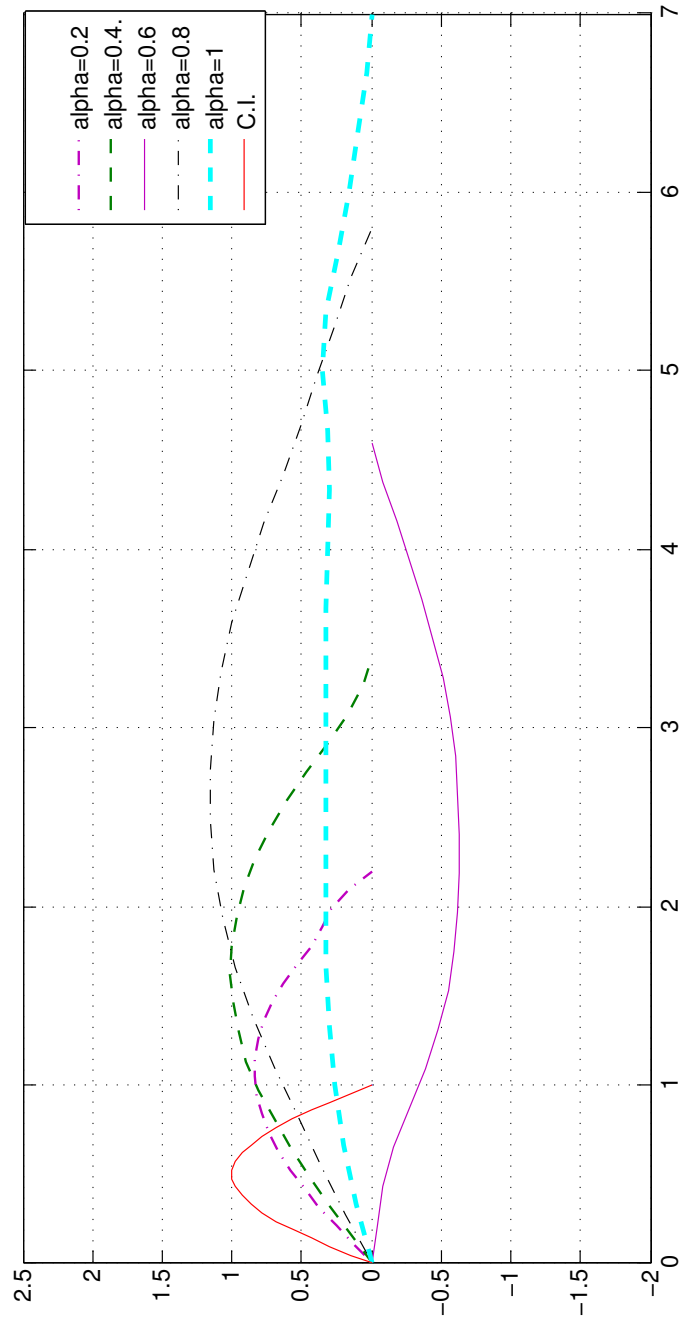


FIGURE 3.3 – Solution pour différents valeurs de la vitesse α

Dans Figure 3, $E_0 = 0, H_0 = \pi \cos(\pi x), a_0 = 1, c = 2, f = \rho/10, t = 6,$
 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.4, \alpha_4 = 0.6, \alpha_5 = 0.8, \alpha_6 = 1$

Bibliographie

- [1] R. P. Agrwal and D. O. Regan, Ordinary and Partial Differential Equation. Springer, (2009).
- [2] N. L. Balazs, On the Solution of the Wave Equation with Moving Boundaries. Journal of Mathematical Analysis and Applications 3, 472-484, (1961).
- [3] W. E. Boyce ,R C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Grafton, New York June 26, (2008).
- [4] J-L. Merrien, Analyse numrique avec matlab, Dunod, Paris, (2007).
- [5] S. Salsa, Partial Differential Equation in Action. Springer, (2008).
- [6] W. A. Strauss, Partial Differential Equation An Introduction, Second Edition , John Wiley & Sons, (2008).
- [7] A. I. Vesnitskii, The solution of the one dimensional inhomogeneous wave equation with conditions imposed on the moving boundaries, Radiophysics and Quantum Electronics 14, Issue 10, 1203–1208, (1971).

Abstract

In this work we give the exact solution in the form of series for an non homogeneous wave equation an interval with moving boundaries. In addition some examples with their numerical verification are given.

Keywords: Wave equation, non cylindrical domain, solution in a series form.

Résumé

Dans ce travail on a cherché la solution exacte sous forme d'une série de l'équation d'onde non homogène dans un intervalle avec une frontière variable. On aussi a donné quelques exemples avec leur vérification numériques.

Mots clés :Equation d'onde, domaine non cylindrique, solutions sous forme de séries.

ملخص

في هذا العمل قمنا بالبحث عن حل دقيق على شكل سلسلة لمعادلة الموجة غير المتجانسة في مجال ذي حدود متغيرة. كما قمنا بإعطاء بعض الأمثلة مع حلولها العددية.

الكلمات المفتاحية: معادلة الموجة, مجال غير اسطواني, الحل على شكل سلسلة.