

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA



Faculté des Mathématiques et Informatique

HABILITATION UNIVERSITAIRE

Spécialité : Mathématiques

Présenté par :

Dr. KARRAS Meselem

Année universitaire: 2019/2020

الملف الإداري

Dossier Administratif

Khemis Miliana le 29 / 08/2020

Meselem KARRAS

Maître de conférences « B »

Université Djilali Bounaama- Khemis Miliana

Mobile : 0555699414

Email : karras.m@hotmail.fr

A Monsieur

le Recteur de l'Université Mohamed Boudiaf- M'sila

Objet : demande de candidature à l'habilitation universitaire

J'ai l'honneur de venir par la présente solliciter votre haute bienveillance de bien vouloir accepter ma demande de candidature à l'habilitation universitaire spécialité mathématiques. Je vous informe que je suis titulaire d'un diplôme de doctorat en sciences de l'ENS Vieux Kouba Alger, en date du 5/12/2017 sous l'intitulé : Sur les fonctions arithmétiques et leurs séries de Dirichlet associées.

Dans l'attente d'une suite favorable, veuillez agréer Monsieur, mes salutations les plus respectueuses.

L'intéressé

كراس مسلم


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة خميس مليانة
رقم : 79 / ج خ م / 2018

مقرر الترقية إلى الرتبة الأعلى مباشرة

إن مدير جامعة خميس مليانة .

- وبمقتضى الأمر رقم 03-06 مؤرخ في 19 جمادى الثانية عام 1427 الموافق 15 يوليو سنة 2006، يتضمن القانون الأساسي العام للوظيفة العمومية ،

- وبمقتضى المرسوم الرئاسي رقم 304-07 مؤرخ في 17 رمضان عام 1428 الموافق 29 سبتمبر سنة 2007 يحدد الشبكة الاستدلالية لمرتبات الموظفين و نظام دفع رواتبهم ،

- وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 99-90 مؤرخ في أول رمضان عام 1410 الموافق 27 مارس سنة 1990 المتعلق بسلطة التعيين والتسيير الإداري، بالنسبة للموظفين وأعاون الإدارة المركزية والولايات والبلديات والمؤسسات العمومية ذات الطابع الإداري ،

- وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 12-247 مؤرخ في 14 رجب عام 1433 الموافق 4 يونيو سنة 2012، يتضمن إنشاء جامعة خميس مليانة ،

- وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 08-130 مؤرخ في 27 ربيع الثاني عام 1429 الموافق 3 مايو سنة 2008 يتضمن القانون الأساسي الخاص بالأستاذ الباحث ، لاسيما المادة 42 منه ،

- وبناءا على المقرر رقم 2014/5154 المؤرخ في 2014/12/31 المتضمن ترقية وترسيم وإعادة ترتيب السيد مسلم كراس في سلك الأساتذة المساعدين رتبة أستاذ مساعد قسم " أ " ابتداء من 2014/12/31 .

- وبناءا على مقرر الترقية في الدرجات خاص بالمناصب العليا رقم 2017/762 المؤرخ في 2017/12/31 المتضمن ترقية المعني إلى الدرجة الثانية الرقم الاستدلالي 1161 للصف خارج الصف قسم فرعي 3 ابتداء من 2017/12/25 ،

- و بناءا على شهادة دكتورفي العلوم رقم 2017/19 ش. د المؤرخة في 2017/12/05 إختصاص في تخصصات العلوم الطبيعية الأعداد المسلمة للسيد مسلم كراس من طرف المدرسة العليا للأساتذة القبة القديمة -الجزائر-

- و باقتراح من السيد مدير الجامعة ،

يقرر

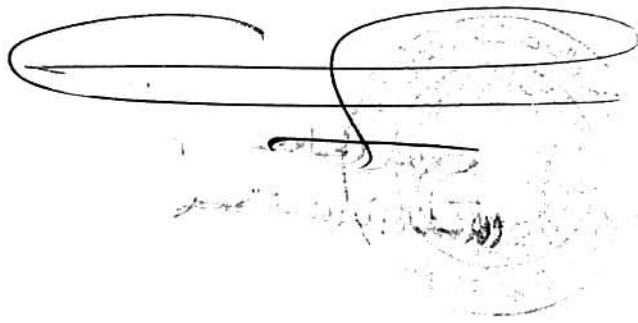
المادة الأولى : يرقى السيد مسلم كراس و يرسم في سلك الأساتذة المحاضرين رتبة أستاذ محاضر قسم "ب" ابتداء من 2017/11/30

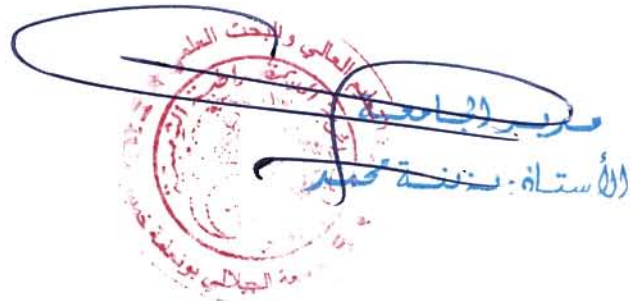
المادة الثانية : يعاد ترتيب المعني عند نفس التاريخ في الصف : خارج الصف قسم فرعي 4 الدرجة الثانية الرقم الاستدلالي 1238.

المادة الثالثة : يكلف المدير الفرعي للمستخدمين والتكوين و المدير الفرعي للمالية والمحاسبة بتنفيذ هذا المقرر.

حرر ب : 03 جوان 2018

نسخة طبق الأصل







الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الجليلي بونعامة - خميس مليانة

كلية العلوم والتكنولوجيا

خميس مليانة في : 2020/08/25

الرقم: 111 لك ع ت / ج ج ب خ م / 2020

شهادة توظيف

إن عميد كلية العلوم والتكنولوجيا يشهد أن :

الـ _____ سيد (ة) : كراس مسلم

الـ _____ مولود (ة) بتاريخ : 1973/07/26 ب : جنندل - عين الدفلى

الـ _____ رتبة : أستاذ محاضر قسم ب

الـ _____ وظيفة : مسؤول فريق الإختصاص

موظف (ة) بمصالحنا ابتداء من : 2012/12/25 إلى يومنا هذا .

سلمت هذه الشهادة بطلب من المعني (ة) لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون

ع / العميد



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الداخلية والجماعات المحلية

ولاية عين الدفلى

قائمة خميس مليانة

بلدية خميس مليانة

شهادة الميلاد

(نسخة كاملة (1) / مخرج (2))

رقم الشهادة

...00640..

1973/07/26

في يوم (3) ... السادس والعشرون ... جويلية ... ألف وتسعمائة وثلاثة وسبعون

على الساعة ... الثامنة مساء

بلدية جندل

المسمى (3) (4) ... كراس ... مسلم

الجنس ... ذكر

ابن (3) ... محمد بن يوسف

و ... بواط ... سعدة

السكانين بغي فاطم

حرر في ... السابع والعشرون ... جويلية ... 1973

بإعلان أدلى به السيد (3) ... الأب

و بعد اللاوة وتبع معنا نحن ... بوزار عمر

البيانات الهامشية:

... تزوج مع ... سفير ... كريمة يوم 20/02/2003 بد خميس مليانة رقم العقد 33

مسلمة من وفاي
حررت هذه الوثيقة من طرف
العون / كسشود سنهام



حررت بد خميس مليانة ... في 2020/08/26

ضابط الحالة المدنية

الاسم اللقب الصنة التوقيع والختم



الكتابة السابقة للاسم واللقب بالأحرف اللاتينية

... KARRAS Meselem ...

1 و 2 أنشطت العائمة الزائدة

3- بكامل الحروف

4- اسم واللقب الولاد



خميس مليانة في : 2020/01/23

رقم: 18/ن.م.ت.ع.ب.ع.م.ت/ج.ب.خ.م/2020

شهادة عدم وجود التأهيل

يشهد السيد نائب مدير الجامعة المكلف بالتكوين العالي في الطور الثالث والتأهيل الجامعي والبحث العلمي وكذا التكوين العالي فيما بعد التدرج لدى جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة.
بأن الجامعة غير مؤهلة لتسليم التأهيل الجامعي، وعليه نرخص للدكتور : كراس مسلم أستاذ محاضر قسم " ب " بكلية العلوم و التكنولوجيا، بجامعتنا بإيداع ملف التأهيل الجامعي في جامعة أخرى.
حررت هذه الشهادة بطلب من المعني للإدلاء بها في حدود ما يسمح به القانون.

نائب مدير الجامعة المكلف بالتكوين العالي في الطور الثالث
والتأهيل الجامعي والبحث العلمي وكذا التكوين العالي فيما بعد التدرج



المنشورات في مجلات
علمية

Publications

Mean value of an arithmetic function associated with the Piltz divisor function

Meselem Karras* and Abdallah Derbal†

*Faculty of Science and Technology
Djilali Bounaama Khemis Miliana University, 44225, Algeria*

*Department of Mathematics, E.N.S.
BP 92. Kouba 16016, Algiers, Algeria*

**karras.m@hotmail.fr*

†abderbal@yahoo.fr

Communicated by B. Diarra

Received April 7, 2018

Revised October 16, 2018

Accepted October 19, 2018

Published December 12, 2018

Let k be a fixed integer, we define the multiplicative function $D_k(n) = \frac{d_k(n)}{d_k^*(n)}$, where $d_k(n)$ is the Piltz divisor function and d_k^* is the unitary analogue function of d_k . The main purpose of this paper to use elementary methods to study the mean value of the function $D_k(n)$.

Keywords: The Piltz divisor function; mean value; unitary analogue function.

AMS Subject Classification: 11N37, 11A25

1. Introduction

Let k be a fixed integer. We recall that $d_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \dots d_k = n} 1$ is the Piltz divisor function, and d_k^* is the unitary analogue function of d_k . The latter one is defined recurrently as follows, see [5]

$$d_2^*(n) = d^*(n) = \sum_{d|*n} 1 \quad \text{and} \quad d_k^*(n) = \sum_{d|*n} d_{k-1}^*(d) \quad (k \geq 2), \quad (1)$$

where $d|*n$ means d divides n and $\gcd(d, n/d) = 1$. Notice that for all fixed integer $k \geq 2$, the function $d_k^*(n)$ is multiplicative and for a prime power, one has

$$d_k^*(p^m) = k. \quad (2)$$

It is clear that from (1) and (2) one gets $d_k^*(n) = k^{\omega(n)}$ where $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ is the number of distinct prime divisors of n .

†Corresponding author.

For all prime number p and all integer m , the relation

$$d_k(p^m) = \binom{k+m-1}{m} \tag{3}$$

holds (see e.g. [4, 5, 9]). For many properties of these functions, see e.g. [5, 6].

We now define the multiplicative function $D_k(n)$ by

$$D_k(n) = \frac{d_k(n)}{d_k^*(n)} = \frac{d_k(n)}{k^{\omega(n)}} \quad (k \geq 2). \tag{4}$$

By using (2) and (3), then we get

$$D_k(n) = \prod_{p^m \parallel n} \frac{(k+m-1)!}{k!m!}, \tag{5}$$

where $p^m \parallel n$ means $p^m \mid n$ and $p^{m+1} \nmid n$.

In paper [2], we have proved the following result (case $k = 2$):

$$\sum_{n \leq x} D_2(n) = A_2 x + R(x), \quad \text{where } A_2 = \frac{\pi^2}{6} \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3} \right),$$

and

$$|R(x)| \leq \frac{3}{2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta \left(\frac{2}{3} \right) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{5}}).$$

For the general case $k \geq 2$,

$$\sum_{n \leq x} D_k(n) \ll_k x, \tag{6}$$

indeed, for any integer n , we have $D_k(n) \leq d_k(n)$, and by [1, Lemma 4.24], we infer

$$\frac{1}{x} \sum_{p \leq x} D_k(p) \log p = \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \log p \leq \log 4,$$

and

$$\sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{D_k(p^\alpha) \log p^\alpha}{p^\alpha} = \sum_{p \leq x} \log p \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha d_k(p^\alpha)}{k p^\alpha} \leq (k+1) 2^{k+2},$$

finally, using [1, Theorem 4.22] we get the result. On the other hand, by [1, Theorem 4.55] with $\mathbf{k} = 1$, we get

$$\sum_{n \leq x} D_k(n) = A_k x + \mathcal{O} \left(x \sqrt{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} \right), \tag{7}$$

where $A_k = \prod_p (1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}(1 - \frac{1}{p})^{-k})$. We immediately, by applying [1, Corollary 4.57] with $\mathbf{k} = 1$, we conclude that

$$\sum_{n \leq x} \frac{D_k(n)}{n} = A_k \ln x + \mathcal{O}_k(1),$$

where the constant A_k is given in (7).

2. Main Result

Here we establish a result concerning the mean value of the function $D_k(n)$, in the case when $k \geq 2$. More precisely, we prove the following theorem:

Theorem 1. *Let $k \geq 2$ be a fixed integer, for all $x \geq 1$ we have*

$$\sum_{n \leq x} D_k(n) = A_k x + \mathcal{O}(x^{1/2}(\ln x)^{k-2}),$$

where

$$A_k = \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}\right).$$

Some values of A_k .

k	2	3	4	5	6
A_k	1, 427656	2, 22416	3, 8004	7, 10848	14, 4491

In order to prove the above result, we first establish some auxiliaries lemmas.

Lemma 2. *The following inequality holds:*

$$D_k(nm) \leq D_k(n)D_k(m)k^{\omega((n,m))}, \tag{8}$$

for all integers $n, m \geq 1$.

Proof. Let $n, m \geq 1$ be two arbitrary integers. By [8, Lemma 11.1.2], one has

$$d_k(nm) \leq d_k(n)d_k(m).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} D_k(nm) &= \frac{d_k(nm)}{k^{\omega(nm)}} = \frac{d_k(nm)}{k^{\omega(n)+\omega(m)-\omega((n,m))}} \\ &\leq \frac{d_k(n)d_k(m)}{k^{\omega(n)+\omega(m)}} k^{\omega((n,m))} = D_k(n)D_k(m)k^{\omega((n,m))}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 3. *For each integer $k \geq 2$, and for each real number x satisfying $|x| < 1$, we have*

$$x(k-1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha+1} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} = (1-x)^{1-k} - 1. \tag{9}$$

Proof. By using the generalized binomial coefficient see [9], we have

$$(1-x)^{-k} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} x^\alpha,$$

by integration, we obtain

$$\frac{(1-x)^{1-k}}{k-1} = x \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + c,$$

for $x = 0$ we find the result. □

Lemma 4. For each integer $k \geq 2$, we have

$$D_k * \mu = \frac{k-1}{k} (s_2 \times D_{k-1}) := g_k, \tag{10}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-k} \right),$$

where s_2 is the characteristic function of the 2-full integers.

Proof. One remarks that the function $D_k * \mu$ is multiplicative. For prime powers p^m ($m \geq 2$), we have

$$(D_k * \mu)(p^m) = \frac{k-1}{k} \frac{(k+m-2)!}{m!(k-1)!}.$$

Using the property of the function s_2 , it follows that

$$(s_2 \times D_{k-1})(p^m) = \frac{(k+m-2)!}{m!(k-1)!}.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} &= \prod_p \left(1 + \frac{k-1}{k} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{D_{k-1}(p^\alpha)}{p^\alpha} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{k} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} \binom{k+\alpha-2}{\alpha} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{kp} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} \binom{k+\alpha-1}{\alpha+1} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{k-1}{kp} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+1)p^\alpha} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

and by (9), we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} &= \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{k} - \frac{k-1}{kp} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{1-k} \right\} \\ &= \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{1-k} \right\} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-k} \right). \end{aligned}$$

□

Lemma 5. *Let $k \geq 1$ be a fixed integer. For any real $x \geq e$ sufficiently large we have*

$$\sum_{n \leq x} D_k(n^2) \ll x(\ln x)^{k-1}.$$

Proof. Let δ_k be a multiplicative function defined by $\delta_k(n) = D_k(n^2)$. For any prime powers p^α , we have

$$\delta_k(p^\alpha) = \frac{d(p^{2\alpha})}{k^{\omega(p^{2\alpha})}} = \frac{1}{k} \binom{k + 2\alpha - 1}{2\alpha} \leq \frac{k^{2\alpha}}{k} = k^{2\alpha-1},$$

and $\delta_k(n) \leq d_k(n^2) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$, so that the function satisfies well the hypotheses of Shiu's theorem, see [7 Theorem 1; 3, 1], which provides

$$\delta_k(n) \ll \frac{x}{\ln x} \exp\left(\sum_{p \leq x} \frac{k}{p}\right) \ll \frac{x}{\ln x} \exp(k \ln(\ln x)) = x(\ln x)^{k-1}. \quad \square$$

Remark. Application of Shiu's theorem we have taken $a = k = 1$ and $y = x$.

Lemma 6. *Let $k \geq 1$ be a fixed integer. For any real $x \geq e$ sufficiently large we have*

$$\sum_{n \leq x} \mu(n)^2 D_k(n^3) k^{\omega(n)} \ll x(\ln x)^{\frac{1}{6}(k-1)(k^2+4k+6)}.$$

Proof. Let γ_k be a multiplicative function defined by

$$\gamma_k(n) = \mu(n)^2 D_k(n^3) k^{\omega(n)} = \mu(n)^2 d_k(n^3).$$

As in Lemma 5, we verify that the function γ_k satisfies the hypotheses of Shiu's theorem [7], which gives the announced result by noting that, for every prime p ,

$$\gamma_k(p) = \frac{1}{6}(k-1)(k^2+4k+6),$$

that which completes the proof. □

A partial summation directly drives the following result.

Corollary 7. *Let $k \geq 1$ be a fixed integer. For any real $x \geq e$ sufficiently large we have*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)^2 D_k(n^3) k^{\omega(n)}}{n^{3/2}} \ll 1.$$

Proof of Theorem 1. By applying (10), we have

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq x} D_k(n) &= x \sum_{n \leq x} \frac{g_k(n)}{n} + \mathcal{O} \left(\sum_{n \leq x} |g_k(n)| \right) \\
 &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} + \mathcal{O} \left(\sum_{n \leq x} |g_k(n)| + x \sum_{n > x} \frac{|g_k(n)|}{n} \right) \\
 &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} + \mathcal{O} \left(\sum_{n \leq x} g_k(n) + x \int_x^{\infty} \left(\sum_{n \leq t} g_k(n) \right) \frac{dt}{t^2} \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

By writing each 2-full integer n in the form $n = a^2 b^3$ with $\mu(b)^2 = 1$, one obtains for all $t \geq 1$

$$\sum_{n \leq t} g_k(n) = \frac{k-1}{k} \sum_{b \leq t^{1/3}} \mu(b)^2 \sum_{a \leq \sqrt{t/b^3}} D_{k-1}(a^2 b^3). \quad (12)$$

We use inequality (8) as follows: if $k \geq 2$, we get

$$\begin{aligned}
 D_{k-1}(a^2 b^3) &\leq D_{k-1}(a^2) D_{k-1}(b^3) k^{\omega((a,b))} \\
 &\leq D_{k-1}(a^2) D_{k-1}(b^3) k^{\omega(b)}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Delaying (12) in (13) and using the Lemma 5 and the Corollary 7, he comes

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq t} g_k(n) &\leq \frac{k-1}{k} \sum_{b \leq t^{1/3}} \mu(b)^2 D_{k-1}(b)^3 (k-1)^{\omega(b)} \sum_{a \leq \sqrt{t/b^3}} D_{k-1}(a)^2 \\
 &= \mathcal{O} \left(t^{1/2} (\ln t)^{(k-1)} \sum_{b \leq t^{1/3}} \frac{\mu(b)^2 D_{k-1}(b^3) (k-1)^{\omega(b)}}{b^{3/2}} \right) \\
 &= \mathcal{O}(t^{1/2} (\ln t)^{(k-1)}).
 \end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq x} D_k(n) &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} + \mathcal{O}(x^{1/2} (\ln x)^{(k-1)}) \\
 &= A_k x + \mathcal{O}(x^{1/2} (\ln x)^{k-2}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Acknowledgment

The authors deeply thank Prof. Olivier BORDELLÈS for the help and the attention he gave them to obtain this result.

References

1. O. Bordellès, *Arithmetic Tales* (Springer, 2012).
2. A. Derbal and M. Karras, Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, *C. R. Math.* **354** (2016) 555–558.
3. M. Nair and G. Tenenbaum, Short sums of certain arithmetic functions, *Acta Math.* **180** (1998) 119–144.
4. M. B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory* (Springer-Verlag, New York, 2000), pp. 181–195.
5. J. Sándor, On the arithmetical functions $d_k(n)$ and $d_k^*(n)$, *Port. Math.* **53** (1996) 107–115.
6. J. Sándor, On the arithmetical functions $d_k(n)$, *L'anal. Numér. Theor. Approx.* **18** (1989) 89–94.
7. P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980) 161–170.
8. V. Sitaramaiah and M. V. Subbarao, Unitary divisor problems for arithmetic progressions, *Ann. Univ. Sci. Budapest.* **32** (2010) 73–89.
9. G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory* (Cambridge University Press 1995).



Communications in Mathematics
30. dubna 22
70103 Ostrava
Czech Republic

Confirmation of acceptance

Ostrava, February 10, 2020

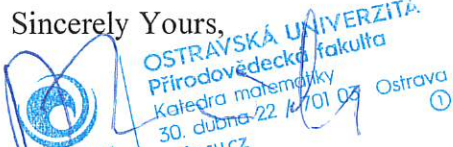
To whom it may concern.

We hereby confirm that the paper

Asymptotic formula for the multiplicative function $((d(n))/(k^{\omega(n)}))$

by Meselem Karras has been accepted for publishing in the journal Communications in Mathematics. This journal is owned by University of Ostrava and published by Sciendo.

Sincerely Yours,


Rasha Zusmanovich
Editor-in-Chief

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky
30. dubna 22 701 03 Ostrava
prf.osu.cz

Asymptotic formula for the multiplicative function $\frac{d(n)}{k^{\omega(n)}}$

Meselem KARRAS

Faculty of Science and Technology Djilali Bounaama Khemis Miliana

University, 44225 , (Algeria)

karras.m@hotmail.fr

Abstract

For a fixed integer k , we define the multiplicative function $D_{k,\omega}(n) := \frac{d(n)}{k^{\omega(n)}}$, where $d(n)$ is the divisor function and $\omega(n)$ is the number of distinct prime divisors of n . The main purpose of this paper is the study of the mean value of the function $D_{k,\omega}(n)$ by using elementary methods.

Keywords : Divisor function, number of distinct prime divisors, mean value.

Classification: 11N37, 11A25, 11N36.

1 Introduction

Let $k \geq 2$ be a fixed integer. We recall that $d(n) := \sum_{d|n} 1$ is the number of divisors of n , and $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$ is the number of distinct prime divisors of n . We define the function $D_{k,\omega}(n)$ by

$$D_{k,\omega}(n) := \frac{d(n)}{k^{\omega(n)}}. \tag{1}$$

Notice that for every fixed integer $k \geq 2$, the function $D_{k,\omega}(n)$ is multiplicative and for every prime number p and all integer m the relation

$$D_{k,\omega}(p^m) = \frac{m+1}{k}, \tag{2}$$

holds. By using (2), we get

$$D_{k,\omega}(n) = \prod_{p^m || n} \frac{m+1}{k}$$

where $p^m || n$ means $p^m | n$ and $p^{m+1} \nmid n$. In the particular case $k = 2$, the function $D_{2,\omega}(n)$ is exactly $D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)}$, (see [1]). For $k \geq 3$, we can easily check that

$$\sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) \ll_k x (\log x)^{2/k-1}. \tag{3}$$

Indeed, for any integer n , we have $D_{k,\omega}(n) \leq d(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$. Furthermore, the hypotheses of Shiu's theorem are satisfied, see theorem 1 in [2] and [3, p.1]. One gets

$$\sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) \ll_k \frac{x}{\log x} \exp\left(\sum_{p \leq x} \frac{2}{kp}\right).$$

Now, by using Lemma 4.63 in [4], it follows that

$$\sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) \ll_k \frac{x}{\log x} \exp\left(\frac{2}{k} \log(2e^\gamma \log x)\right) \ll_k x (\log x)^{2/k-1}.$$

2) Main result

In this section, we establish two results concerning the mean value of the function $D_{k,\omega}(n)$. We start giving a weak result

Theorem 1 *Let $k \geq 2$ be a fixed integer. For all $x \geq 1$ large enough, we have*

$$\sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) = \frac{x(\log x)^{2/k-1}}{\Gamma(2/k)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2/k} \left(1 + \frac{2p-1}{kp(p-1)^2}\right) + O(x(\log x)^{-1} (\log \log x)^{4/k}).$$

The proof of this result is based on Tulyaganov's theorem; this theorem is summarized as follows:

Theorem 2 *Let f be a complex valued multiplicative function. Suppose there $z \in \mathbb{C}$, independent of p , with $|z| \leq c_1$ and*

$$\begin{aligned} a) \quad \sum_{p \leq x} f(p) \log p &= zx + O\left(xe^{-c_2\sqrt{\log x}}\right) & b) \quad \sum_{p \leq x} |f(p)| \log p &\ll x \\ c) \quad \sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|f(p^\alpha)| \log p^\alpha}{p^\alpha} &\ll (\log \log x)^2 & d) \quad \sum_p \frac{|f(p)|^2 \log p}{p^2} &< c_3 \end{aligned}$$

for some real numbers c_1, c_2 and c_3 . Then, for all $x \geq 1$ sufficiently large, we have

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &= \frac{x(\log x)^{z-1}}{\Gamma(z)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \left\{1 + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x}\right)\right\} \\ &\quad + O\left(x(\log x)^{\max(0, \operatorname{Re} z-1)-1} (\log \log x)^{2(A-\max(0, \operatorname{Re} z-1))}\right), \end{aligned}$$

where $A > 0$ satisfies

$$\sum_{u < p \leq v} |f(p)| p^{-1} \leq A \log(\log v / \log u) + O(1).$$

Proof. This theorem is a consequence of theorem 4 in [5], where we take $g = f$. ■

To complete the demonstration of the main result we have the following lemmas.

Lemma 1 *For any fixed integer $k \geq 2$, we have the estimate*

$$\sum_{p \leq x} |D_{k,\omega}(p)| \log p \ll x.$$

Proof. By Chebyshev's estimates [6], we have

$$\sum_{p \leq x} |D_{k,\omega}(p)| \log p = \frac{2}{k} \sum_{p \leq x} \log p < \frac{2}{k} (1.000081x) \ll x.$$

■

Lemma 2 *For any fixed integer $k \geq 2$, there is a constant $c > 0$, such that*

$$\sum_{p \leq x} D_{k,\omega}(p) \log p = \frac{2}{k} x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

Proof. We have

$$\sum_{p \leq x} D_{k,\omega}(p) \log p = \frac{2}{k} \sum_{p \leq x} \log p = \frac{2}{k} \theta(x),$$

and by theorem 6.9 in [7], there is a constant $c > 0$ such that

$$\theta(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$

which implies the desired result. ■

Lemma 3 *For any fixed integer $k \geq 2$, we have*

$$\sum_p \frac{|D_{k,\omega}(p)|^2}{p^2} \log p < \infty.$$

Proof. We first check the inequality $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m(m-1)} \leq \log 4$, and using the following

$$\sum_p \frac{\log p}{p^2} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m^2} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log m}{m(m-1)},$$

then we have

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{|D_{k,\omega}(p)|^2}{p^2} \log p &= \frac{4}{k^2} \sum_p \frac{\log p}{p^2} \\ &< \frac{4 \log 4}{k^2}. \end{aligned}$$

■

Lemma 4 For any fixed integer $k \geq 2$, we have

$$\sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|D_{k,\omega}(p^\alpha)| \log(p^\alpha)}{p^\alpha} \leq \frac{28}{k}.$$

Proof. For every integer $k \geq 3$, we write

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|D_{k,\omega}(p^\alpha)| \log(p^\alpha)}{p^\alpha} &= \frac{1}{k} \sum_{p \leq x} \log p \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{p^\alpha} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{p^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

and the infinite series $\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{p^{\alpha-1}}$ converges to $\frac{2}{(1-1/p)^3} - 2$, since

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|D_{k,\omega}(p^\alpha)| \log(p^\alpha)}{p^\alpha} &= \frac{2}{k} \sum_{p \leq x} \frac{3p^2 - 3p + 1}{p(p-1)^3} \log p \\ &\leq \frac{28}{k} \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^2}. \end{aligned}$$

By lemma 70.1 in [8], we have $\sum_p \frac{\log p}{p^\alpha} < \frac{1}{\alpha - 1}$ for all $\alpha > 1$, consequently

$$\sum_{p \leq x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|D_{k,\omega}(p^\alpha)| \log(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{28}{k}.$$

Finally, by lemma 1, 2, 3 and 4 we have shown that the function $D_{k,\omega}(n)$ satisfies the conditions of theorem 2. As we have

$$\sum_{u < p \leq v} \frac{|D_{k,\omega}(p)|}{p} = \frac{2}{k} \sum_{u < p \leq v} \frac{1}{p} \leq \frac{2}{k} \log \frac{\log v}{\log u} + o(1),$$

then the constant A in theorem 2 is $\frac{2}{k}$. ■

The next result is improved over the previous one.

Theorem 3 *Let $k \geq 2$ be a fixed integer. For all $x \geq 1$ large enough, we have*

$$\sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) = \frac{x(\log x)^{2/k-1}}{\Gamma(2/k)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2/k} \left(1 + \frac{2p-1}{k(p-1)^2}\right) + O_k(x(\log x)^{2/k-2}).$$

the demonstration is based on the following lemmas:

Lemma 5 *Let $k \geq 2$ be a fixed integer. For every $s := \sigma + it \in \mathbb{C}$ such that $\sigma > 1$ and $L(s, D_{k,\omega}(n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{k,\omega}(n)}{n^s}$, we have*

$$L(s, D_{k,\omega}(n)) = \zeta(s)^{2/k} L(s, g_k)$$

or $L(s, g_k)$ is a series of Dirichlet absolutely convergent in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$.

Proof. If $\sigma > 1$, then

$$\begin{aligned} L(s, D_{k,\omega}(n)) &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{D_{k,\omega}(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\alpha + 1}{k p^{\alpha s}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{2p^s - 1}{k(p^s - 1)^2}\right), \end{aligned}$$

on the other hand we have

$$\left(1 + \frac{2p^s - 1}{k(p^s - 1)^2}\right) = \left((1 - p^{-s})^{-2/k}\right) \left(1 + \frac{h(s)}{k(p^s - 1)^2}\right),$$

such that

$$h(s) = (1 - p^{-s})^{2/k} (kp^{2s} - 2(k-1)p^s + k - 1) - k(p^s - 1)^2.$$

Since

$$(1 - p^{-s})^{2/k} = 1 - \frac{2}{kp^s} - \frac{k-2}{k^2p^{2s}} - O\left(\frac{k}{p^{3\sigma}}\right),$$

he comes

$$\begin{aligned} h(s) &= \left(1 - \frac{2}{kp^s} - \frac{k-2}{k^2p^{2s}} - O\left(\frac{k}{p^{3\sigma}}\right)\right) (kp^{2s} - 2(k-1)p^s + k - 1) - k(p^s - 1)^2 \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{k}\right) + O(p^{-\sigma}), \end{aligned}$$

which implies the announced result. ■

Lemma 6 ([9]) *Let $A > 0$. Uniformly for $x \geq 2$ and $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| \leq A$, we have*

$$\sum_{n \leq x} \tau_z(n) = \frac{x (\log x)^{z-1}}{\Gamma(z)} + O_A\left(x (\log x)^{\operatorname{Re} z - 2}\right).$$

$\tau_z(n)$ is the multiplicative function defined by $\tau_z(p^\alpha) = \binom{z + \alpha - 1}{\alpha}$.

Proof of theorem 3. According to the Lemma 5, we have $D_{k,\omega} = \tau_{2/k} * g_k$. Then, by lemma 6

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} D_{k,\omega}(n) &= \sum_{d \leq x} g_k(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \tau_{2/k}(m) \\ &= \sum_{d \leq x} g_k(d) \left\{ \frac{x (\log \frac{x}{d})^{2/k-1}}{d\Gamma(2/k)} + O_k\left(\frac{x}{d} \left(\log \frac{x}{d}\right)^{2/k-2}\right) \right\} \\ &= \sum_{d \leq x} g_k(d) \left\{ \frac{x (\log x)^{2/k-1}}{d\Gamma(2/k)} + O_k\left((\log x)^{2/k-2} \log d\right) + O_k\left(\frac{x}{d} \left(\log \frac{x}{d}\right)^{2/k-2}\right) \right\} \\ &= \frac{x (\log x)^{2/k-1}}{\Gamma(2/k)} \sum_{d \leq x} \frac{g_k(d)}{d} + O_k\left(x (\log x)^{2/k-2} \sum_{d \leq x} \frac{|g_k(d)|(1 + \log d)}{d}\right). \end{aligned}$$

The series $L(s, g_k)$ is absolutely convergent on the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, then for all $\varepsilon > 0$

$$\sum_{d \leq x} |g_k(d)| \ll_{k, \varepsilon} x^{1/2+\varepsilon},$$

hence by partial summation

$$\sum_{d \leq x} \frac{|g_k(d)| (1 + \log d)}{d} \ll_{k, \varepsilon} x^{-1/2+\varepsilon}$$

and therefore

$$\sum_{n \leq x} D_{k, \omega}(n) = L(1, g_k) \frac{x(\log x)^{2/k-1}}{\Gamma(2/k)} + O_k(x(\log x)^{2/k-2}) + O_{k, \omega}(x^{1/2+\varepsilon}).$$

which completes the demonstration. ■

Acknowledgments

The author deeply thanks Professor Olivier Bordellès for his help and attention to this work.

References

- [1] A. Derbal, M. Karras, Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, *Comptes Rendus Mathématique* 354 (2016), 555 – 558.
- [2] P. Shiu, A. Brun –Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* 313 (1980), 161 – 170.
- [3] M. Nair, G. Tenenbaum, Short sums of certain arithmetic functions, *Acta Math.* 180(1998), 119 – 144.
- [4] O. Bordellès, *Arithmetic Tales*, Springer, 2012.
- [5] S. T. Tulyaganov, On the summation of multiplicative arithmetical functions, *Number theory. Vol. I. Elementary and analytic, Proc. Conf., Budapest/Hung. 1987, Coll. Math. Soc. János Bolyai* 51 (1990), 539 – 573.
- [6] P. Dusart, Sharper bounds for ψ, θ, π, p_n Rapport de recherche 1998 – 2006, Université de Limoges.

- [7] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 97, 2007.
- [8] R. R. Hall, G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press, 1988.
- [9] A. Selberg, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* 18 (1954), 83 – 87.

An asymptotic formula of a sum function involving gcd
and characteristic function of the set of r -free numbers

Mihoub BOUDERBALA⁽¹⁾, Meselem KARRAS⁽²⁾

Abstract

Let $\text{gcd}(k, j)$ represent the greatest common divisor of the positive integers k, j . For any positive real number $x > 1$ and any fixed positive integers s, r , we give an asymptotic formula of the sum function

$$\sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\text{gcd}(j, k))$$

such that μ_r is the characteristic function of the set of r -free numbers.

Keywords : gcd-sum functions, Dirichlet convolution, sum function.

MSC2020: 11A25, 11N37.

1 Introduction

Let $k, j \geq 1$ be an integer. We denote by $\text{gcd}(k, j)$ the greatest common divisor of the integers k and j . For any two arithmetical functions f and g , let the sum function

$$S_k(j) = S_{f,g}(k, j) := \sum_{d|\text{gcd}(k,j)} f(d) g(k/d), \quad (1)$$

the sum (1) is a generalization of the following sum

$$S_{f,g}(k) := \sum_{d|k} f(d) g(k/d) = (f * g)(k),$$

where the symbol $*$ denotes the Dirichlet convolution of arithmetic functions. We warn that D. R. Anderson and T. M. Apostol [1] are the first to create this sum function. The study for the function $S_k(j)$ by several researchers, for example by K. R. Johnson [6], T. M. Apostol [2], and I. Kiuchi, M. Minamide and M. Ueda [9]. In particular, I. Kiuchi [8] proved the following formula

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s S_k(j) &= \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \frac{(f * g)(n)}{n} + \frac{1}{s+1} \sum_{n \leq x} \left(\frac{f}{Id} * g \right) (n) \\ &+ \frac{1}{s+1} \sum_{m=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{s+1}{2m} B_{2m} \sum_{n \leq x} \left(\frac{f}{Id} * \frac{g}{Id_{2m}} \right) (n) \end{aligned} \quad (2)$$

is valid for any positive integer k and any fixed positive integer s , where the number B_m is Bernoulli's number and $[t]$ is the integer part of t . Such that, for any positive integer n , the functions Id , Id_m and the unit function 1 are given by $Id(n) = n$, $Id_m(n) = n^m$ for any real numbers m and $1(n) = 1$. We take note that the formula (2) has a lot of interesting applications (see [7]). The sums of the form

$$\sum_{n \leq x} \sum_{j=1}^n f(\gcd(j, n)) \quad (3)$$

have also been studied by many researchers (see [3] and also [4]). In 2010, O. Bordellès [4], gave an asymptotic formula of (3) (see Theorem 4) such that $x \geq 1$ is sufficiently large and f is an arithmetic function verifying certain hypotheses.

Let μ_r and f_r be two functions defined by, for all $r \geq 2$ a fixed integer

$$f_r(n) = \begin{cases} \mu(m), & \text{if } n = m^r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

and

$$\mu_r(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \text{ is } r\text{-free number} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

wher μ is the Möbius function.

In all of the following, $\zeta(s)$ denotes the Riemann zeta-function.

Lemma 1 *For any fixed integer $r \geq 2$, we have*

$$\mu_r = 1 * f_r. \quad (5)$$

i.e

$$\sum_{d^r | n} \mu(d) = \mu_r(n).$$

Proof. Firstly, the function f_r it is clearly multiplicative, then μ_r is multiplicative, so that the convolution product of two multiplicative functions is a multiplicative function. Therefore, it suffices to show that

$$\mu_r(p^\alpha) = (1 * f_r)(p^\alpha)$$

for all prime powers p^α . Indeed,

$$\begin{aligned} (1 * f_r)(p^\alpha) &= \sum_{\alpha=0}^r f_r(p^\alpha) = 1 + \sum_{\alpha=1}^r f_r(p^\alpha) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha < r \\ 0, & \alpha \geq r \end{cases} \\ &= \mu_r(p^\alpha). \end{aligned}$$

■

We use the identity $\mu_r = 1 * f_r$ and the formula (2) to give an asymptotic formula of the following quantity

$$\sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\gcd(j, k)).$$

Now we can state our main result.

Theorem 1 *For any positive real number $x > 1$ and any fixed positive integer s , we have*

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\gcd(k, j)) &= \frac{x}{(s+1)\zeta(2r)} + \frac{\log x}{2\zeta(r)} + L(r; s) \\ &\quad - \frac{1}{s+1} \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \psi\left(\frac{x}{d^r}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-1+\frac{1}{r}} \log x\right) \end{aligned}$$

where

$$L(r; s) = \frac{1}{2(s+1)\zeta(r)} \left((s+1) \left(\gamma - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right) - 1 + 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{s+1}{2m} B_{2m} \zeta(2m) \right).$$

The proof of this result is based on the following lemmas:

Lemma 2 *For any positive real number $x > 1$ and any fixed positive integer s we have*

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\gcd(k, j)) &= \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \frac{\mu_r(n)}{n} + \frac{1}{s+1} \sum_{d \leq x} \frac{f_r(d)}{d} \quad (6) \\ &\quad + \frac{1}{s+1} \sum_{m=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{s+1}{2m} B_{2m} \sum_{d \leq x} \frac{f_r(d)}{d} \frac{1}{d^{2m}}. \end{aligned}$$

Proof. First, in the left side of (6), by the two formulas (1), (5) and by definition (4) we get

$$\begin{aligned} S_k(j) &= S_{f_r,1}(k,j) = \sum_{d|\gcd(k,j)} f_r(d) \\ &= \sum_{d^r|\gcd(k,j)} \mu(d) \\ &= \mu_r(\gcd(k,j)) \end{aligned}$$

so,

$$\sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s S_{f_r,1}(k,j) = \sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\gcd(k,j)).$$

On the other hand, the right side of (6), It is a direct application of formula (2) where $f = f_r$ and $g = 1$. ■

Lemma 3 For any $x > 1$ and $r \geq 2$, we have

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu_r(n)}{n} = \frac{\log x}{\zeta(r)} + \frac{\gamma}{\zeta(r)} - r \frac{\zeta'(r)}{\zeta^2(r)} + \mathcal{O}\left(x^{-1+\frac{1}{r}} \log x\right). \quad (7)$$

Proof. Using the identity (3), and the known formula

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}(x^{-1}),$$

we have

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\mu_r(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \left(\frac{f_r}{Id} * \frac{1}{Id} \right)(n) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{f_r(d)}{d} \sum_{m \leq x/d} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \sum_{m \leq x/d^r} \frac{1}{m} \\ &= \log x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^r} - r \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log d}{d^r} + \gamma \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^r} + A(x), \end{aligned}$$

where

$$A(x) = \log x \sum_{d>x^{1/r}} \frac{\mu(d)}{d^r} - r \sum_{d>x^{1/r}} \frac{\mu(d) \log d}{d^r} + \gamma \sum_{d>x^{1/r}} \frac{\mu(d)}{d^r} + \mathcal{O}\left(\frac{d^r}{x} \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r}\right).$$

By the known identity $\frac{1}{\zeta(r)} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^r}$ for all $r > 1$, we have

$$\frac{\zeta'(r)}{\zeta^2(r)} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log d}{d^r},$$

and using the estimate $\sum_{n>x} \frac{1}{n^r} = \mathcal{O}(x^{-1+r})$ for all $r > 1$, we get

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu_r(n)}{n} = \frac{\log x}{\zeta(r)} + \frac{\gamma}{\zeta(r)} - r \frac{\zeta'(r)}{\zeta^2(r)} + \mathcal{O}\left(x^{-1+\frac{1}{r}} \log x\right).$$

■

Lemma 4 For any $x > 1$ and $r \geq 2$, we have

$$\sum_{dl \leq x} \frac{f_r(d)}{d} = \frac{x}{\zeta(2r)} - \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \psi\left(\frac{x}{d^r}\right) - \frac{1}{2\zeta(r)} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{r}-1}\right). \quad (8)$$

Proof. Let $x > 1$ and $r \geq 2$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{dl \leq x} \frac{f_r(d)}{d} &= \sum_{d^r l \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \\ &= \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \sum_{l \leq x/d^r} 1 \\ &= \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \left\lfloor \frac{x}{d^r} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Using the fact that $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, we get

$$\begin{aligned} \sum_{dl \leq x} \frac{f_r(d)}{d} &= x \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^{2r}} - \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \psi\left(\frac{x}{d^r}\right) - \frac{1}{2} \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \\ &= \frac{x}{\zeta(2r)} - \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \psi\left(\frac{x}{d^r}\right) - \frac{1}{2\zeta(r)} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1-r}{r}}\right). \end{aligned}$$

■

Lemma 5 For any $x > 1$ and for the two fixed integers $r \geq 2$, $m \geq 0$, we have

$$\sum_{dl \leq x} \frac{f_r(d)}{d} \frac{1}{l^{2m}} = \frac{\zeta(2m)}{\zeta(r)} + \mathcal{O}\left(x^{-1+1/r}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-2m/r+1/r}\right). \quad (9)$$

Proof. Let $x > 1$ and $r \geq 2$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{dl \leq x} \frac{f_r(d)}{d} \frac{1}{l^{2m}} &= \sum_{d^r l \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \frac{1}{l^{2m}} \\ &= \sum_{d \leq x^{1/r}} \frac{\mu(d)}{d^r} \sum_{l \leq x^{1/r}/d} \frac{1}{l^{2m}} \\ &= \sum_{d \leq x^{1/r}} \frac{\mu(d)}{d^r} \left(\zeta(2m) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x^{1/r}}{d}\right)^{1-2m}\right) \right) \\ &= \frac{\zeta(2m)}{\zeta(r)} + \mathcal{O}\left(x^{-1+1/r}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-2m/r+1/r}\right). \end{aligned}$$

■

Proof of Theorem 1. Substituting formulas (7), (8), (9) in (6), we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \frac{1}{k^{s+1}} \sum_{j=1}^k j^s \mu_r(\gcd(k, j)) &= \frac{x}{(s+1)\zeta(2r)} + \frac{\log x}{2\zeta(r)} + L(r; s) \\ &\quad - \frac{1}{s+1} \sum_{d^r \leq x} \frac{\mu(d)}{d^r} \psi\left(\frac{x}{d^r}\right) + \mathcal{O}\left(x^{-1+\frac{1}{r}} \log x\right) \end{aligned}$$

where

$$L(r; s) = \frac{1}{2(s+1)\zeta(r)} \left((s+1) \left(\gamma - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta(r)} \right) - 1 + 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{s+1}{2m} B_{2m} \zeta(2m) \right).$$

Note that, since for all $t \in \mathbb{R}$, $|\psi(t)| \leq \frac{1}{2}$, we see that the absolute value of the ψ -sum is $\leq \frac{\zeta(r)}{4\zeta(2r)} \leq \frac{5}{4\pi^2} < \frac{2}{5}$. Moreover, using Euler's formula

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} 2^{2m-1} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}$$

we write

$$2 \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{s+1}{2m} B_{2m} \zeta(2m) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{s+1}{2m} (-1)^{m+1} 2^{2m} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}^2.$$

■

Acknowledgements

We thank the anonymous referee's for a good reading of the manuscript and for their valuable suggestions and corrections, which improved the presentation of the article. We also express our gratitude to O. Bordollès for his contribution as well.

References

- [1] D. R. Anderson and T. M. Apostol, The evaluation of Ramanujan's sum and generalizations, *Duke Math. J.* 20 (1952), 211–216.
- [2] T. M. Apostol, Arithmetical properties of generalized Ramanujan sums, *Pacific J. Math.* 41 (1972) 281–293.
- [3] K. A. Broughan, The average order of the Dirichlet series of the gcd-sum function, *J. Integer Sequences* 10 (2007), Article 07.4.2.
- [4] O. Bordellès, The composition of the gcd and certain arithmetic functions, *J. Integer Sequences* 13 (2010), Article 10.7.1.
- [5] O. Bordellès, *Arithmetic Tales*, Springer, 2012.
- [6] K. R. Johnson, An explicit formula for sums of Ramanujan type sums, *Indian J. pure appl. Math.* 18S (8) (1987), 675–677.
- [7] I. Kiuchi, Sums of averages of gcd-sum functions, *J. Number Theory* 176 (2017), 449 – 472.
- [8] I. Kiuchi, On sums of averages of generalized Ramanujan sums, *Tokyo J. Math.*, 40 (2017), 255-275.
- [9] I. Kiuchi, M. Minamide and M. Ueda, Averages of Anderson–Apostol sums, *J. Ramanujan Math. Soc.* 31 4 (2016), 339–357.

⁽¹⁾Mihoub BOUDERBALA

Institute of Mathematics-USTHB, LA3C, Houari-Boumediène University

of Science and Technology, Bab Ezzouar, Algeria.

mihoub75bouder@gmail.com

⁽²⁾Meselem KARRAS

Djilali Bounaama Khemis Miliana University, FIMA Laboratory, Algeria.

karras.m@hotmail.fr



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Théorie des nombres

Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier

Abdallah Derbal, Meselem Karras

Département de mathématiques, École normale supérieure, Vieux-Kouba Alger, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 12 décembre 2015

Accepté après révision le 14 mars 2016

Disponible sur Internet le xxxx

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Soient $d(n)$ et $d^*(n)$ le nombre de diviseurs et le nombre de diviseurs unitaires de l'entier n , et posons $S(x) = \sum_{n \leq x} D(n) = \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{d^*(n)}$ ($x \geq 1$). Un diviseur d d'un entier n est dit unitaire s'il est premier avec $\frac{n}{d}$. Dans cet article, nous montrons que $S(x) \sim Ax$ ($x \rightarrow +\infty$), où $A = \frac{\pi^2}{6} \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) = 1,4276565\dots$, et que pour tout $x \geq 1$, $S(x) = Ax + R(x)$, tel que

$$|R(x)| \leq \frac{3}{2} \zeta \left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta \left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let $d(n)$ and $d^*(n)$ be the numbers of divisors and the numbers of unitary divisors of the integer n , and let $S(x) = \sum_{n \leq x} D(n) = \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{d^*(n)}$ ($x \geq 1$). A divisor d of a integer n is called unitary if it is prime with $\frac{n}{d}$. In this paper, we prove that $S(x) \sim Ax$ ($x \rightarrow +\infty$), where $A = \frac{\pi^2}{6} \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) = 1.4276565\dots$, and for all $x \geq 1$, $S(x) = Ax + R(x)$ such that

$$|R(x)| \leq \frac{3}{2} \zeta \left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta \left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresses e-mail : abderbal@yahoo.fr (A. Derbal), karras.m@hotmail.fr (M. Karras).<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.03.007>

1631-073X/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Il est connu que les grandes valeurs de la fonction $D(n)$ oscillent indéfiniment autour de la fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln 2}{3} \frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)$ ($x > e$) [2]; en revanche, la fonction $D(n)$ prend la valeur 1 sur tout nombre premier p . Ce comportement erratique de $D(n)$ incite à l'étudier en moyenne, ce qui revient à l'étude de la fonction sommatoire réelle $S(x) = \sum_{n \leq x} D(n)$ ($x \geq 1$). Dans une

première étape, on a fait un test numérique sur la suite $\frac{S(n)}{n}$, à partir duquel, on a constaté qu'elle se stabilisait autour du nombre $1,4270 \dots$ pour $n = 9 \times 10^5, \dots, 10^6$, ce qui suggère que la limite du rapport $\frac{S(x)}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ est une constante A proche de la valeur $1,4270 \dots$ et que la fonction $S(x)$ est asymptotiquement très proche de la fonction linéaire Ax . Il s'agit donc de montrer que $S(x) \sim Ax$ ($x \rightarrow +\infty$) où, A est une constante proche de $1,427$, et d'étudier ensuite le reste $R(x) = S(x) - Ax$.

Le point de départ est l'évaluation de la série génératrice de la fonction $D(n)$.

Dans cette direction, nous avons obtenu, pour $\Re(s) > 1$, la relation suivante :

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{D(n)}{n^s} = \zeta(s)G(s), \text{ où } G(s) = \zeta(2s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right). \tag{1}$$

Ici et dans toute la suite, $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann. On se propose ici d'établir le résultat suivant.

Théorème. Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\sum_{n \leq x} D(n) = Ax + R(x) \text{ avec } A = \frac{\pi^2}{6} \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right)$$

et

$$|R(x)| \leq \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

2. Lemmes préparatifs

Lemme 1. La série de Dirichlet génératrice de la fonction arithmétique $D(n)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{D(n)}{n^s} = \zeta(s)G(s), \text{ où } G(s) = \zeta(2s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right) \left(\Re(s) > \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration. La fonction $D(n)$ étant multiplicative, la série $\mathcal{L}(s)$ est un produit eulérien donné par la formule :

$$\prod_p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(p^n)}{p^{ns}} = \prod_p \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2p^{ns}}\right).$$

Remarquons que, pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2p^{ns}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2 = 1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}$$

alors, en multipliant et divisant $\mathcal{L}(s)$ par $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2$, on obtient

$$\mathcal{L}(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}\right) (\zeta(s))^2 \quad (\Re(s) > 1).$$

Comme on a

$$\left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}}\right) \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right)$$

alors pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\mathcal{L}(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} (\zeta(s))^2.$$

Le résultat annoncé découle alors de la relation suivante

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \text{ ([1] page 231).}$$

Définition. On dit que l'entier n est quadratiquement saturé (en anglais *squarefull*) si $n = 1$, ou si, pour tout p premier, la valuation p -adique $v_p(n)$ satisfait $v_p(n) \geq 2$.

Proposition. Un entier n est quadratiquement saturé si et seulement si n s'écrit de manière unique sous la forme $n = a^2b^3$ avec a, b des entiers strictements positifs et b sans facteurs carrés.

Lemme 2. La fonction multiplicative $g(n)$ définie par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s} = G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}} + \frac{1}{2p^{4s}} + \dots\right), \Re(s) > \frac{1}{2}$$

est strictement positive si et seulement si n est quadratiquement saturé.

Démonstration. Remarquons que pour tout nombre premier p on a

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Alors, $0 \leq g(n) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 2$ et $g(n) > 0$ si et seulement si n est quadratiquement saturé.

Lemme 3. Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\sum_{n^2m^3 \leq x} 1 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Démonstration. Ce lemme résulte des Théorèmes 5.1 et 5.2 de [4].

Démonstration du théorème. La relation (1) fournit un prolongement analytique de $\mathcal{L}(s)$ dans le demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$, dont la seule singularité est un pôle simple, de résidu $G(1)$, en $s = 1$. Ceci implique que la fonction $h(s) = \zeta(s)G(s) - \frac{G(1)}{s-1}$ est analytique dans le demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$; le théorème d'Ikehara ([3], page 332, et [5], page 10) entraîne $S(x) \sim G(1)x$ ($x \rightarrow +\infty$).

On a donc $S(x) \sim Ax$ ($x \rightarrow +\infty$), où

$$A = G(1) = \zeta(2) \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) = 1,4276565 \dots$$

Posons $S(x) = Ax + R(x)$, où $R(x)$ est le terme d'erreur.

La méthode élémentaire d'estimation de $S(x) = \sum_{n \leq x} D(n)$ donne

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d \leq x} g(d) \left[\frac{x}{d}\right] \leq x \sum_{d \geq 1} \frac{g(d)}{d} = xG(1) = Ax,$$

d'où $0 \leq -R(x) = Ax - S(x)$.

Pour $T(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$ et $U(x) = \sum_{n > x} \frac{g(n)}{n}$; en appliquant le lemme 2, on obtient

$$T(x) = \sum_{n \leq x} g(n) = \sum_{n^2m^3 \leq x} g(n^2m^3) \leq \frac{1}{2} \sum_{n^2m^3 \leq x} 1$$

et par le lemme 3, on a

$$T(x) \leq \frac{1}{2} \left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} \right) + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

On a ainsi, par l'intégrale de Stieltjes :

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n>x} \frac{g(n)}{n} = \int_x^{+\infty} \frac{d[T(u)]}{u} du = -\frac{T(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{T(u)}{u^2} du \\ &\leq \int_x^{+\infty} \frac{T(u)}{u^2} du \leq \int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right) u^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{1}{3}} \right) + O\left(u^{\frac{1}{5}}\right)}{u^2} du \\ &\leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{2}{3}} + O\left(x^{-\frac{4}{5}}\right). \end{aligned}$$

On observe que

$$-R(x) = \sum_{d \leq x} g(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} + x \sum_{d > x} \frac{g(d)}{d} \leq T(x) + xU(x),$$

d'où il résulte

$$-R(x) \leq \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Références

- [1] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.
- [2] A. Derbal, Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, *Integers* 12 (2012).
- [3] K. Ford, Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta Function, *Proc. Lond. Math. Soc.* 85 (2002) 565–633.
- [4] E. Krätzel, *Lattice Points*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [5] D.P. Parent, *Exercices de théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1978.

الشهادات المتحصل

عليها

Les diplômes

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

شهادة البكالوريا

بمقتضى المرسوم رقم 495/63 المؤرخ في 31 ديسمبر 1963 والمتضمن تأسيس شهادة بكالوريا التعليم الثانوي.
بمقتضى المرسوم رقم 46/68 المؤرخ في 08 فبراير 1968 والمتضمن إحداث بكالوريا التقني.

فإن وزير التربية الوطنية

الرقم : 152974

بناء على محضر لجنة المداولات لدورة جوان 1992
يمنح شهادة البكالوريا للتعليم الثانوي

بتقدير : قريب من الجيد

السيد(ة) : **كراس مسلم**

المولد(ة) في : 26 جويلية 1973 بـ : وادي الجمعة ولاية عين الدفلى

ع / وزير التربية الوطنية



الجزائر في : 07 ماي 2012

لا يمنح نظير آخر من هذه الشهادة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NORMALE SUPERIEURE - KOUBA

LICENCE D'ENSEIGNEMENT EN SCIENCES

ATTESTATION PROVISOIRE

N° 5662 رقم

Le Directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba - Alger

Vu la délibération du jury d'examen en date du 16/09/1996

Vu le décret 71/229 du 25 Août 1971, certifie que :

L'étudiant **KARRAS Meselem**

Né 1973/07/26 à : Oued El Djemaa Wilaya : AIN DEFLA

a obtenu la **LICENCE** en **MATHEMATIQUES**

auprès de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba

المدير
مدير المدرسة العليا للأستاذة
القائمة الجزائر
الإستاذ: عبد الحميد مرغني

2012/10/17

الجزائر في :



مدير الدراسات
مكلف بالدراسات
أحمد العاطف

ملاحظة: لتسلم سوى نسخة واحدة من هذه الشهادة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأستاذة - القبة

ليسانس التعليم في العلوم

شهادة مؤقتة

إن مدير المدرسة العليا للأستاذة بالقبة . الجزائر

بعد اطلاعه على محضر لجنة الامتحان المؤرخ في 16/09/1996

بناء على المرسوم 229/71 المؤرخ في 25 أوت 1971 يشهد أن :

الطالب **كراس مسلم**

المولود 1973/07/26 بواي الجمعة ولاية عين الدفلى

حصل على شهادة الليسانس تخصص رياضيات

من المدرسة العليا للأستاذة بالقبة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة-الجزائر

رقم: 2012/07 ش.م

شهادة ماجستير مؤقتة

إن مدير المدرسة العليا للأساتذة بالقبة - الجزائر

- بناء على المرسوم التنفيذي رقم 254/98 المؤرخ في : 1998/08/17
والمعلق بالتكوين في الدكتوراه و التأهيل الجامعي
وبعد الإطلاع على محضر مداوات لجنة المناقشة بتاريخ: 2012/06/17

يشهد بأن:

الطالب(ة): كراس مسلم

المولود(ة) في: 1973/07/26 ب: واد الجمعة ولاية: عين الدفلى

قد ناقش(ت) بالمدرسة العليا للأساتذة رسالة ماجستير في : الرياضيات

تخصص : جبر و نظرية الأعداد وذلك بتاريخ : 2012/06/17

و بعد المداولة، أعلنت اللجنة نجاحه(ا) و منحته(ا) درجة : جيد

الجزائر في : 2012/06/28

المدير

مدير المدرسة العليا للأساتذة

القبة - الجزائر
الدكتور: عبد الحميد مرغني

نائب المدير المكلف بالبحث العلمي

و الدراسات ما بعد التدرج

نائب المدير المكلف بالبحث
و الدراسات ما بعد التدرج

أجبالى إسماعيل

ملاحظة : تسلم نسخة واحدة فقط من هذه الشهادة



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

VIEUX-KOUBA-ALGER

N° : 07/2012/D.MAG.

**ATTESTATION PROVISOIRE
DE MAGISTER**

Le Directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba-Alger

-Vu le décret exécutif N° 98/254 du 17/08/1998

relatif à la formation doctorale et à l'habilitation universitaire.

-Vu le P.V. de délibération du jury de soutenance en date du : **17/06/2012**

Atteste que :

L'étudiant (e) : **KARRAS Meselem**

Né(e) le : **26/07/1973** à : **Oued El Djemaa** Wilaya : **AIN DEFLA**

a soutenu le : **17/06/2012** à l'E.N.S

Un Magister en : **Mathématiques** Option : **Algèbre et Théorie des Nombres**

et le jury l'a déclaré (e) admis (e) et lui a décerné la mention : **Bien**

ALGER LE : **28/06/2012**

**Le Sous-Directeur Chargé de
Recherche et de la Post-Graduation**

نائب المدير المساعد
للدراسات والبحوث
التدرج
أجيبالي إسماعيل



Le Directeur

الدكتور عبد الحميد مرغانر
القبة الجزائر
المدرسة العليا للأساتذة

N.B : Il ne sera délivré qu'un seul exemplaire de cette attestation.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة-الجزائر

رقم: 2017/19 ش.د

شهادة دكتوراه مؤقتة

إن مدير المدرسة العليا للأساتذة بالقبة - الجزائر

- بناء على المرسوم التنفيذي رقم 254/98 المؤرخ في : 1998/08/17
والمتعلق بالتكوين في الدكتوراه و التأهيل الجامعي
وبعد الإطلاع على محضر مداولات لجنة المناقشة بتاريخ : 2017/11/30

يشهد بأن:

الطالب(ة) : كراس مسلم

المولود(ة) في : 1973/07/26 ب: واد الجمعة ولاية : عين الدفلى

قد ناقش(ت) بالمدرسة العليا للأساتذة رسالة دكتوراه في العلوم

شعبة : الرياضيات تخصص : جبر و نظرية الأعداد

وذلك بتاريخ : 2017/11/30

و بعد المداولة، أعلنت اللجنة نجاحه(ا) و منحته(ا) درجة : **مشرّف جدًا**

الجزائر في : 2017/12/05

المدير

نائب المدير المكلف بالدراسات

وما بعد التدرج والبحث العلمي

مدير المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة-الجزائر
الدكتور : عبد الحميد مرغني



ملاحظة : تسلم نسخة واحدة فقط من هذه الشهادة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
VIEUX-KOUBA-ALGER

N° : 19/2017/D.DOC.

**ATTESTATION PROVISOIRE
DE DOCTORAT**

Le Directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba-Alger

-Vu le décret exécutif N° 98/254 du 17/08/1998
relatif à la formation doctorale et à l'habilitation universitaire.

-Vu le P.V. de délibération du jury de soutenance en date du : **30/11/2017**

Atteste que :

L'étudiant (e) : **KARRAS MESELEM**

Né(e) le : **26/07/1973** à : **Oued El Djemaa** Wilaya : **AIN DEFLA**

a soutenu le : **30/11/2017** à l'E.N.S

Un Doctorat en Sciences

Fillière : **Mathématiques** Spécialité : **Algèbre et Théorie des
Nombres**

et le jury l'a déclaré (e) admis (e) et lui a décerné la mention : **Très Honorable**

ALGER LE : 05/12/2017

Le Sous-Directeur Chargé de la Post-Graduation
et de la Recherche Scientifique

Le Directeur







الدكتور : **عبد الحميد مرغني**

N.B : Il ne sera délivré qu'un seul exemplaire de cette attestation.



Réf.:	DPGRS/103/2017	المرجع:		date:	2017/11/26	التاريخ:
-------	----------------	---------	--	-------	------------	----------

محضر مداولات مناقشة أطروحة دكتوراه

بتاريخ : 2017/11/30

قام السيد (ة) : كراس مسلم

المولود (ة) في : 1973/07/26 ب : واد الجمعة ولاية : عين الدفلى.

بمناقشة علمية لأطروحة دكتوراه

فرع : رياضيات

تخصص : جبر و نظرية الأعداد

عنوان الرسالة :

« Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et leurs séries de Dirichlet associées »

أمام لجنة المداولات أسفله التي قررت بعد المداولة :

الاقتراح على السيد وزير التعليم العالي والبحث العلمي، منح شهادة : دكتوراه العلوم

للمترشح (ة) : كراس مسلم

في : رياضيات

تخصص : جبر و نظرية الأعداد

بتقدير : Très honorable

لجنة المناقشة :

الإمضاء
رئيساً
ممتحناً
ممتحناً
ممتحناً
مشرفاً

أستاذ
أستاذ
أستاذ
أستاذ
أستاذ

السيد بن عياط جلالى
السيد بن شريف فريد
السيد حرنان محند
السيد بوروي صادق
السيد دربال عبد الله



السيرة الذاتية مفصلة

Curriculum vitae

détaillé



CURRUCULUM VITAE

Nom : KARRAS

Prénom : Meselem

Fonction : Enseignant

Lieu d'exercice : Département de mathématiques et informatique, FST, université Djilali Bounaama, Khemis Miliana.

Diplôme : Doctorat.

Grade Pédagogique : Maître de conférences classe B.

Email : m.karras@univ-dbkm.dz

Etudes supérieures :

- Licence en Mathématiques (1996) : ENS Vieux Kouba, Alger.
- Magister en Mathématiques (2012), option Algèbre et Théorie des Nombres: ENS Vieux Kouba, Alger.
- Doctorat en Sciences (2017), filière mathématiques, option Algèbre et Théories des Nombres : ENS Vieux Kouba, Alger.

Activités d'enseignement:

- De 1996 jusqu'à 2012 : Professeur dans l'enseignement secondaire.
- De 2010 jusqu'à 2012, enseignant vacataire à l'université de Khemis Miliana.
- De décembre 2012 jusqu'à maintenant, enseignant titulaire à l'université de Khemis Miliana.

Matières enseignées:

- 1) Analyse 1 et 2 (TD), L1 MI.
- 2) Algèbre 1 et 2 (Cours et TD), L1MI.

- 3) Algèbre 3 et 4 (Cours et TD), L2 Maths.
- 4) Analyse Complexe (Cours et TD), L2 Maths.
- 5) Introduction à l'analyse hilbertienne (Cours et TD), L3 Maths
- 6) Les fonctions Holomorphes, (Cours et TD), Master1 MAA.
- 7) Introduction à la théorie des opérateurs linéaires (TD), L3 Maths.

Activités d'encadrements:

1) Chérifa Laraba

Thème : Sur les fonctions arithmétiques, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2015. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/xmlui/bitstream/handle/123456789/602/mémoire%20finale.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

2) Khadidja Hibatallah Kouache

Thème : Quelques outils d'analyse réelle et complexe en théorie analytique des nombres , Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2016. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/jspui/bitstream/123456789/1999/1/Quelques%20outils%20d'analyse%20réelle%20et%20c%20complexe%20en%20théorie%20analytique%20des%20nombres.pdf>

3) Yaqot Baha

Thème : Sur les séries de Dirichlet, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2016. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/xmlui/bitstream/handle/123456789/1993/Sur%20les%20séries%20de%20Dirichlet.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

4) Amel Hamadou

Thème : La transformée de Mellin et quelques applications, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2017. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/xmlui/bitstream/handle/123456789/1863/hamadou%205.06.2017.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

5) Fatima Zahra Achour

Thème : Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de fonctions arithmétiques, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2018. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/jspui/bitstream/123456789/2664/1/Mémoire.pdf>

6) Fadhila Bekhouche

Thème : Sur La Fonction Nombre de facteurs premiers d'un entier n , Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2019. Université Khemis Miliana.

<http://dspace.univ-km.dz/jspui/bitstream/123456789/2969/1/Sur%20La%20Fonction%20Nombre.pdf>

Activités scientifiques:

- Membre du projet CNEPRU N° B00L02UN44012014000: Détermination du spectre d'énergie relatif aux états « l » ; pour des familles de potentiels de forme exponentielle via les intégrales de chemin de Feynman, (2013- 2017).
- Membre d'une équipe de recherche de laboratoire FIMA, Université Khemis Miliana.
- Membre du conseil scientifique de la faculté ST.
- Membre du conseil scientifique de département MI.
- Responsable de l'équipe de la spécialité Mathématiques (Licence).

Articles publiés:

- 1) A. Derbal, M. Karras, Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, Comptes Rendus Mathématique 354 (2016), 555-558.
- 2) M. Karras, A. Derbal, Mean value of an arithmetic function associated with the Piltz divisor function, A- E. Journal of Mathematics (2018).

Articles acceptés:

- 1) M. Karras, Asymptotic formula for the multiplicative function $((d(n))/(k^{\omega(n)}))$, Communications in Mathematics (2020).
- 2) M. Bouderbala, M. Karras, Asymptotic formula of a sum function attached to the functions $\mu_{\{r\}}$ and gcd, Contributions to Mathematics.

Articles soumis:

- 1) M. Karras , M. Bouderbala, On a sum of an additive function related to the integer part function, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics (2020).

Communications Internationals:

- 1) An inequality of an arithmetical function related to the number of divisors of integer, The 3rd International Conference On Applied Algebra (Icaa2015) , April 28-30, 2015, Mohamed Boudiaf University, M'sila.
- 2) Valeurs moyennes d'une fonction arithmétique liée aux nombre de diviseurs d'un entier, International Conference on Advances in Applied Mathematics (ICAAM2017), December, 18-21,2017, Hammamet, Tunisia.
- 3) Valeur moyenne d'une fonction arithmétique associée à une fonction de diviseurs de Piltz, MYRPAM : Maghrebien meeting of Young Researchers in Pur and Applied Mathematics 1^{ère} édition, 9-12 Décembre 2019, Hammamet, Tunisie.

Recueils, photocopiés et livres:

- M. KARRAS. Photocopié de Cours: **Espaces Vectoriels normés**, destiné aux étudiants de troisième année en mathématiques. Université Djilali Bounaama Khemis Miliana Faculté ST, Département de Mathématiques et informatique (2019/2020).

المداخلات العلمية

Communications

Scientifiques

International Conference on **Advances** in **Applied Mathematics**

December, 18-21, 2017, Hammamet, Tunisia

<https://sites.google.com/site/icaam2017/>

CERTIFICATE

The Organizing Committee certifies that:

Karras Meselem* and Abdallah Derbal

attended the International Conference on Advances in Applied Mathematics and presented an oral
contribution :

Valeurs moyennes d'une fonction arithmétique liée aux nombre de diviseur d'un entier



Prof. Dr. Aref Jeribi

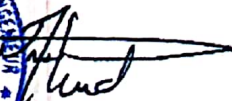
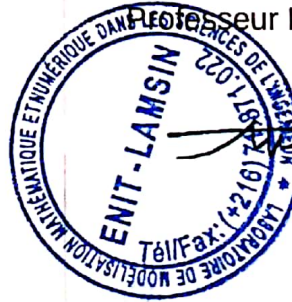

MYRPAM: Maghrebian meeting of Young Researchers in Pure and Applied Mathematics

1ère édition, 9-12 Décembre 2019, Hammamet, Tunisie

<https://www.myrpam19.lamsin.tn/accueil>

Je, soussignée Professeur Hend BEN AMEUR, présidente du colloque
« Maghrebian meeting of Young Researchers in Pure and Applied Mathematics » ;
confirme que Mr. **Meselem Karras** a participé à MYRPAM 2019 et y a présenté une
communication intitulée « **Valeur moyenne d'une fonction arithmétique associée
à une fonction de diviseurs de Piltz** ».

Présidente du congrès
Professeur Hend BenAmeur



الأعمال البيداغوجية

Production pédagogique

- *Cours dispenses*
- *Encadrement*

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Khemis Miliana



جامعة خميس مليانة

Faculté des Sciences et de la
Technologie

كلية العلوم والتكنولوجيا

خميس مليانة في : 2020/2 /18

Matières enseignée

Département: MI

Nom: KARRAS

Prénom : Meselem

Diplôme: Doctorat

Spécialité : Algèbre et théorie des nombres

Grade: MCB.

E-mail: karras.m@hotmail.fr

Matières	Nature	Niveau
Analyse 1 et 2	TD	L1-MI
Algèbre 1 et 2	Cours et TD	L1-MI1 MI.
Algèbre 3 et 4	Cours et TD	L2-Maths
Analyse Complexe	Cours et TD	L2-Maths
Introduction à l'analyse hilbertienne	Cours et TD	L3-Maths
Les fonctions Holomorphes	Cours et TD	Master1 MAA
Introduction à la théorie des opérateurs	TD	L3-Maths



UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAËMA-KHEMIS MILIANA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présenté par

ACHOUR Fatima Zahra

**Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de
fonctions arithmétiques**

Soutenue publiquement le 23 juin 2018 devant le jury composé de

M. A. KRELIFA	MCB UDBKM , Khemis Miliana	Président
M. M. BOUDERBALA	MAA UDBKM , Khemis Miliana	Examineur
M. M. HOUASNI	MAA UDBKM , Khemis Miliana	Examineur.
M. M. KARRAS	MCB UDBKM , Khemis Miliana	Encadrant

Année Universitaire : 2017/2018



PROCES VERBAL DE SOUTENANCE
DE MEMOIRE DE MASTER



Après avoir entendu l'exposé du mémoire de master de l'étudiant(e) :

• Achour Fatima Zahra

Thème :

Résultats asymptotiques pour les sommes courtes
d'une classe de fonctions arithmétiques

Pour l'obtention du diplôme de Master en : **Mathématiques**

Option : **Analyse Mathématique et Applications**

Le jury de délibération a décidé de vous déclarer :

- Admis (e) - Ajourné (e) - Note : 16/20 - Mention : Très bien

En date du : 28.06.2018

Le jury

Le Président : KRELIÇA ALI

Le Promoteur : KARRAS Muelem

Les Examineurs : BAUDERBALA Niboub

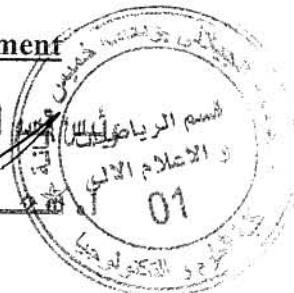
HOUASNI Med

Emargement

[Signature]
[Signature]
[Signature]
[Signature]

Le Chef de département

[Signature]
[Signature]
[Signature]
[Signature]
[Signature]



Université de Djilali BOUNAËMA Khemis Miliana
Faculté des sciences et de la technologie
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Réalisé par :

Mlle : HAMADOU Amel

La transformée de Mellin et quelques applications

Soutenu publiquement le : 12/juin/2017

Devant le jury :

Mr. SADAOUI. B	Président.
Mr. BOUDERBALA. M	Examinateur.
Mr. KRELIFA. A	Examinateur.
Mr. KARRAS. M	Encadrant.

Année Universitaire 2016/2017



PROCES VERBAL DE SOUTENANCE
DE MEMOIRE DE MASTER



Après avoir entendu l'exposé du mémoire de master de l'étudiant(e) :

• Hamadou Amel

Thème :

..... La transformée de Mellin et quelques applications

Pour l'obtention du diplôme de Master en : **Mathématiques**

Option : **Analyse Mathématique et Applications**

Le jury de délibération a décidé de vous déclarer :

- Admis (e)

- Ajourné (e)

- Note : 14,6/20

- Mention : Bien

En date du : ... 12/06/2017

Le jury

Le Président : ... SADAOUI B

Le Promoteur : ... KARRAS M

Les Examineurs : ... KRELIQA A

BOU DERBALA

Emargement

.....
.....
.....
.....

Le Chef de département

رئيس قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

.....
.....



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Djilali BOUNAËMA, Khemis Miliana



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté

Pour l'obtention de diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal

Titre :

Sur les fonctions arithmétiques

Réalisé par : **Larabat Chérifa**

Soutenu publiquement le : 20/06/2015

devant le jury composé de:

Mr **Chaouchi. B**

Président

Mr **Saadaoui. B**

Examineur1

Mr **Krelifa. A**

Examineur2

Mr **Karras. M**

Encadreur

Année Universitaire 2014/2015

النشاطات العلمية

Activités Scientifiques

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama de Khemis-Miliana
Laboratoire de Recherche Fluides Industriels Mesures et Applications

N° :01/FIMA-UDBKM/2020

ATTESTATION D'AFFILIATION

Je soussigné, le **Directeur du Laboratoire de Recherche Fluides Industriels Mesures et Applications "FIMA"** de l'Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana, atteste que :

Monsieur : **KARRAS Meselem**

Grade : **Maître de Conférences Classe B**

est membre de notre laboratoire de recherche "FIMA" en qualité de **membre d'équipe de recherche.**

La présente attestation est délivrée à l'intéressé, pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Khemis-Miliana le : 27/01/2020

Le Directeur du Laboratoire


The stamp is circular with Arabic text: 'جامعة خميس مليانة' (University of Khemis Miliana) at the top, 'مديرية المخبر' (Directorate of the Laboratory) in the center, and 'صندوق الوثائق الصناعية قاسان' (Industrial Documents Fund, Qasane) at the bottom. The signature is written in blue ink over the stamp.



خميس مليانة في : 29 جاني 2020

رقم:/ن.م.ت.ع.ب.ع.م.ت/ج.ب.خ.م/2020

شهادة العضوية في مشروع بحث CNEPRU

يشهد السيد نائب مدير الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث و التأهيل الجامعي و البحث العلمي و كذا التكوين العالي فيما بعد التدرج أن:

الأستاذ : كراس مسلم

الرتبة : أستاذ محاضر قسم "ب"

الكلية : كلية العلوم والتكنولوجيا

منخرط بصفته مدير البحث في وحدة بحث CNEPRU المعتمدة من طرف وزارة التعليم العالي و البحث العلمي ، ابتداء من 2014/01/01 إلى 2017/12/31 ، بجامعة خميس مليانة في مشروع بحث بعنوان: " تحديد طيف الطاقات للحالات بعائلة الكمونات الأسيية بواسطة تكاملات المسار فيمان " تحت رمز .D03920130021

سلمت هذه الشهادة للمعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

نائب مدير الجامعة للتكوين العالي في الطور الثالث
و التأهيل الجامعي و البحث العلمي
و كذا التكوين العالي فيما بعد التدرج



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة خميس مليانة

رقم : 1582 / ج خ م / 2018



مقرر تجديد تعيين في منصب عالي لمؤسسة عمومية

المسارقة المسماة

دم - تعيين الصنف 3

ابن وزير التعليم العالي والبحث العلمي،

بمقتضى الأمر رقم 06-03 المؤرخ في 19 جمادى الثانية عام 1427 الموافق 15 يوليو سنة 2006 والمتضمن القانون الأساسي العام للوظيفة العمومية. وبمقتضى المرسوم الرئاسي رقم 07-304 المؤرخ في 17 رمضان عام 1428 الموافق 29 سبتمبر سنة 2007 الذي يحدد الشبكة الاستدلالية لمرتبات الموظفين و نظام دفع رواتبهم.

وبمقتضى المرسوم الرئاسي رقم 07-307 المؤرخ في 17 رمضان عام 1428 الموافق 29 سبتمبر سنة 2007 الذي يحدد كفاءات منح الزهادة الاستدلالية لشاغلي المناصب العليا في المؤسسات والإدارات العمومية.

وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 90-99 المؤرخ في أول رمضان عام 1410 الموافق 27 مارس سنة 1990 المتعلق بسلطة التعيين والتسيير الإداري بالنسبة للموظفين وأعاون الإدارة المركزية والولايات و البلديات والمؤسسات العمومية ذات الطابع الإداري.

وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 12-247 المؤرخ في 14 رجب عام 1433 الموافق 04 يونيو سنة 2012 والمتضمن إنشاء جامعة خميس مليانة.

وبمقتضى المرسوم التنفيذي رقم 08-130 المؤرخ في 27 ربيع الثاني عام 1429 الموافق 3 مايو سنة 2008 يتضمن القانون الأساسي الخاص بالأستاذ الباحث لا سيما المادة 65 منه.

بناء على القرار الوزاري المشترك المؤرخ في 8 رجب عام 1425 الموافق 24 غشت سنة 2004 ، يحدد التنظيم الإداري لمديرية الجامعة والكلية والمعهد وملحقه الجامعة ومصالحها المشتركة.

وبناء على القرار رقم 15/5424 المؤرخ في 01/09/2015 المتضمن تعيين السيد : مسلم كراس في المنصب العالي بصفة مسؤول فريق إختصاص بكلية العلوم والتكنولوجيا لمدة ثلاث (03) سنوات قابلة للتجديد مرة واحدة ابتداء من تاريخ 01/09/2015.

وباقتراح من السيد مدير الجامعة

يقرر

المادة الأولى : يحدد تعيين السيد : مسلم كراس في المنصب العالي بصفة مسؤول فريق إختصاص بكلية العلوم والتكنولوجيا لمدة ثلاث (03) سنوات ابتداء من تاريخ 01/09/2018.

المادة 2: يكلف المدير الفرعي للمستخدمين والتكوين والمدير الفرعي للمالية والمحاسبة كل فيما يخصه بتنفيذ هذا المقرر.

حردب : 13 صفر 2018

نسخة طبق الأصل

عن الوزير و بتفويض منه
مدير المواقف البشرية بالنيابة

امضاء : بوزيد فريد



مطبوعة الدروس

Polycopié

Khemis Miliana le : 08/07/2020

**Extrait du P.V. du Comité Scientifique du Département
de la réunion du 19/12/2019**

Objet : Expertise de polycopié pédagogique

Le CSD a étudié la demande formulée par Dr. Karras Meselem concernant l'avalisation du polycopié pédagogique suivant :

- Auteur : Karras Meselem
- Titre : Espaces Vectoriels normés.
- Niveau et spécialité : 3^{ème} année Mathématiques.

Après examen du polycopié et des rapports d'expertises, le comité scientifique du département a émis un avis favorable.

*Le Président du comité scientifique du département de
Mathématiques et Informatique*

Pr. Mohammed Hachama



رئيس اللجنة العلمية لقسم
الرياضيات و الإعلام الآلي
أ.حشامة محمد



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة
بوسعادة



Dr. Dahia Elhadj (M. C. A)
Département de Sciences Exactes
ENS de Bousaada

À Monsieur le Président du conseil scientifique du Département Mathématiques et Informatique, Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana.

Objet : Expertise du polycopié de cours de Dr. Karras Meselem

Le document présenté par Dr. Karras Meselem intitulé **Espaces Vectoriels normés** contenant environ 66 pages, s'adresse aux étudiants de la troisième année licence Mathématiques. Ce cours composé de trois parties, couvre le programme de la matière **Espaces Vectoriels normés**.

- 1) Les propriétés générales des espaces normés et les opérateurs linéaires continus.
- 2) L'étude des espaces préhilbertiens et espaces Hilbertiens.
- 3) Un nombre considérable d'exercices résolus.

Nous voudrions souligner que le contenu de ce polycopié est exactement le même proposé dans l'offre de formation officiel applicable dans tous les départements de Mathématiques des universités Algériennes.

Le polycopié présenté est bien structuré, rédigé dans un style clair et concis.

Enfin, je conclus que le polycopié présenté par Dr. Karras Meselem est très intéressant et acceptable et peut servir nos étudiants dans leur apprentissage.

Bousaada le 03/11/2019

Dr. Dahia Elhadj

Pr. HACHAMA Mohammed
Département des Mathématiques et Informatique
Université de Khemis Miliana
Email: hachamam@gmail.com
<http://sites.google.com/site/hachamam>



Khemis Miliana, le 16/12/2019

A Monsieur : Le Chef de département «Maths-Info»

Objet : Rapport d'expertise du polycopié « Espaces Vectoriels normés », Dr. Meselem KARRAS

Le polycopié couvre le programme de la matière « Espaces Vectoriels normés », et est destiné aux étudiants de troisième année de la Licence Mathématiques.

Le manuscrit est organisé en deux chapitres (en plus d'une courte introduction) qui couvrent le programme officiel de la matière, adopté en 2015 : Espace de Banach, Espace de Hilbert. Chaque chapitre présente un exposé pédagogique rigoureux du cours (définitions et théorèmes avec quelques démonstrations), et des exemples d'illustration. Un troisième chapitre est réservé à des exercices corrigés et non-corrigés portant sur le deuxième chapitre.

La manuscrit est bien structuré et les chapitres convenablement équilibrés. Le contenu est adéquat et d'un bon niveau technique. La rédaction est claire et pédagogique.

Cela dit, le manuscrit, comme tout travail, peut encore être amélioré. Je résume mes remarques dans les points suivants.

1. Je propose de rajouter des exercices sur le chapitre 1.
2. Je recommande de rajouter des corrections (ou des indications) des exercices non corrigés ; et aussi des sujets d'examens.
3. Quelques corrections et propositions de modifications ont été formulées sur le manuscrit. Il serait important de les prendre en considération pour améliorer le manuscrit.

En conclusion, **je pense que le présent polycopié peut être utilisé comme un bon support de cours après avoir pris en compte les remarques ci-dessus.**

Pr. Mohammed HACHAMA

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Djilali Bounaama Khemis Miliana

Faculté ST

Département de Mathématiques

et informatique

Cours : **Espaces Vectoriels normés**

Destiné aux étudiants de troisième année en mathématiques

Présentée par : *Dr. KARRAS Meselem*

2019/2020

Table des matières

1	Espace de Banach	3
1.1	Normes	3
1.1.1	Espace vectoriel normé	5
1.1.2	Propriétés	9
1.2	Espace de Banach	12
1.2.1	Suites de Cauchy dans un e.v.n.	12
1.3	Applications linéaires continues	14
1.4	Dual d'un espace vectoriel normé.	17
2	Espace de Hilbert	20
2.1	Espace préhilbertien	20
2.2	Orthogonalité	28
2.3	Espace de Hilbert	31
2.3.1	Bases Hilbertiennes	32
2.4	Séries de Fourier	47
2.5	Système trigonométrique	48
3	Exercices	51
	Bibliographie	76

Introduction

Ce cours est basé sur le contenu de nouveau programme de la matière "**espaces vectoriels normés**" adressé aux étudiants de troisième année mathématiques LMD.

Ce cours comporte trois chapitres, le premier est **l'espaces de Banach**. On donne d'abord, un bref aperçu sur les normes et les espaces vectoriels normés et quelques propriétés. On donne encore quelques exemples sur les espaces de Banach et on termine par les applications linéaires continues et le dual d'un espace vectoriel normé.

Le deuxième chapitre contient "**l'espace de Hilbert**". On traite en particulier les espaces préhilbertiens et les espaces de Hilbert et encore le théorème de la projection, théorème de Riesz, système orthogonal. On donne à la fin dans le troisième chapitres quelques exercices certains sont résolus.

Chapitre 1

Espace de Banach

Dans tous qui suit la lettre \mathcal{K} désigne le corps des nombres réels \mathbb{R} ou bien le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

1.1 Normes

Définition 1.1 Une application \mathcal{N} d'un \mathcal{K} - espace vectoriel E dans \mathbb{R} est appelée *norme* si, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathcal{K}$ on a :

- 1) $\mathcal{N}(x) \geq 0$ et $\mathcal{N}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- 2) $\mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$,
- 3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Remarque 1.1 La norme est généralement symbolisée par $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1 Soit $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{K}^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$$

sont des normes.

Exemple 1.2 Soit E un espace vectoriel sur \mathcal{K} ($\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension fini n .

On suppose que pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ tels que $x_i \in \mathcal{K}$ et $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de E . L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur E .

En effet, Si $x = 0$, on a $x = (0, 0, \dots, 0)$ donc $\|x\| = 0$, et si $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = 0$,

alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0$ et cela implique que $|x_i|^2 = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et donc $|x_i| = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, par conséquent $x = 0$. D'autre part, pour tous $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha|^2 |x_i|^2 \right)^{1/2} = \alpha \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \alpha \|x\|.$$

Enfin, la troisième condition repose sur l'inégalité de Holder dans le cas $p = q = 2$ suivante :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2},$$

donc pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{x}_i y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

par suite $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 1.3 Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note par l^p , l'espace vectoriel des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans \mathcal{K} tel que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad \text{et } \sup \{|x_n| : n \geq 1\} < \infty, \quad \text{si } p = \infty.$$

L'application $\|\cdot\|_p$ définie sur l^p ($1 \leq p < \infty$) pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur l^p , et l'application $\|\cdot\|_{\infty}$ définie sur l^{∞} pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{|x_n| : n \geq 1\}$$

est une norme sur l^{∞} .

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.2 Un espace vectoriel sur E muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n) et noté $(E, \|\cdot\|)$ ou seulement E .

Définition 1.3 Soit E un espace vectoriel normé. Un sous-espace vectoriel F de E est un espace vectoriel normé muni de la norme induite par la restriction de celle de E . On définit une distance $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

Cette distance possède deux propriétés importantes :

Elle est invariante par translation i.e. elle vérifie $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ pour tous vecteurs x, y et a de E et elle est homogène i.e. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ pour tous vecteurs x, y de E et tout λ de \mathcal{K} . Inversement, toute distance d sur E invariante par translation et homogène définit une norme sur E par la formule

$$\|x\| = d(0, x).$$

Définition 1.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une boule ouverte (resp. fermée) $B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ est définie par :

$$B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\} \quad (\text{resp } B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| \leq r\}).$$

Une partie U non vide de E est dite ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$. D'autre part on dit qu'une partie de E est fermée si son complémentaire dans E est un ouvert.

La famille \mathcal{F} de toutes les parties ouvertes de E forme une topologie sur E qu'on appelle topologie canonique de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple 1.4 1. L'espace vectoriel \mathbb{R} muni de l'application "valeur absolue" est un espace vectoriel normé (e.v.n.).

2. L'espace vectoriel \mathbb{C} muni de l'application "module" est un un espace vectoriel normé.

3. L'espace des suites bornées l^∞ est un espace vectoriel normé avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4. L'espace $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions continues bornés sur \mathbb{R} est un espace normé avec la même norme $\|\cdot\|_\infty$.

5. L'espace des suites sommables l^1 est un espace vectoriel normé avec la norme $\|\cdot\|_1$.

6. L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un espace topologique compact K est un espace vectoriel normé avec la norme définie par $\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$.

Remarque 1.2 Si E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|$, alors un vecteur unitaire dans E est un vecteur x tel que $\|x\| = 1$. Pour tout vecteur non nul x de E on peut construire un vecteur unitaire y défini par : $y = \frac{x}{\|x\|}$.

Lemme 1.1 (Lemme de Riesz) .

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $V \neq E$ un sous espace vectoriel de E . On suppose que V est fermé. Alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe un vecteur $x \in E$ de norme 1 tel que $d(x, V) > 1 - \alpha$ avec d est la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Preuve. Rappelons que $d(x, V) = \inf \{d(x, z) : z \in V\}$. Soit $y \notin V$, alors on a $d(y, V) > 0$. Soit $\alpha \in]0, 1[$, puisque $1 \leq \frac{1}{1-\alpha}$ alors $d(y, V) \leq \frac{d(y, V)}{1-\alpha}$. Donc il existe $h \in V$ tel que

$$\|y - h\| = d(y, h) \leq \frac{d(y, V)}{1-\alpha}. \quad (1.1)$$

Comme $y \notin V$, donc $\|y - h\| \neq 0$. Alors on pose $x = \frac{y - h}{\|y - h\|}$, donc $\|x\| = 1$.

Pour tout $z \in V$, on a

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \left\| \frac{y - h}{\|y - h\|} - z \right\| \\ &= \left\| \frac{y - h}{\|y - h\|} - \frac{\|y - h\|}{\|y - h\|} z \right\| \\ &= \frac{1}{\|y - h\|} \|y - h - \|y - h\| z\| \\ &= \frac{1}{\|y - h\|} \|y - (h + \|y - h\| z)\|. \end{aligned}$$

Par conséquent $\|y - (h + \|y - h\| z)\| \geq d(y, V)$ car $h + \|y - h\| z \in V$. Alors

$$\|x - z\| \geq \frac{d(y, V)}{\|y - h\|},$$

et par (1.1) on obtient $\frac{1}{\|y - h\|} \geq \frac{1-\alpha}{d(y, V)}$, donc pour tout $\|x - z\| \geq 1 - \alpha$. ■

Théorème 1.1 (Théorème de Riesz) .

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si, et seulement si sa boule d'unité fermée $B_F(0, 1)$ est compacte.

Preuve. 1) Si E est de dimension finie, alors la boule d'unité fermée $B_F(0, 1)$ est par définition est bornée, et comme on l'on est en dimension finie donc elle est compact.

2) Montrons que si la boule d'unité fermée $B_F(0, 1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.

On suppose que E n'est pas de dimension finie .i.e. $\dim(E) = \infty$. On suppose avoir construit n vecteurs e_1, \dots, e_n de E tels que $\|e_k\| = 1$ et $\|e_m - e_k\| \geq 1/2$ pour tous $k, m \in \{1, \dots, n\}$ et $m \neq k$. Soit V_n le sous espace vectoriel de E défini par

$V_n = \text{vect} \{e_1, \dots, e_n\}$. On a V_n est de dimension finie, donc il est fermé, et comme E est de dimension infinie alors $V_n \neq E$. On peut alors appliquer le lemme précédent de Riesz. Alors il existe un vecteur e_{n+1} de E tel que $\|e_{n+1}\| = 1$ et $d(e_{n+1}, V_n) \geq 1/2$. Par conséquent $d(e_{n+1}, e_k) \geq 1/2$ pour $k = 1, \dots, n$. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est sans point d'accumulation. En effet une suite extraite $(e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie $d(e_{n_{k+1}}, e_{n_k}) \geq 1/2$ et ne peut pas donc converger. Normes équivalentes ■

Définition 1.5 Deux normes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 d'un \mathcal{K} - espace vectoriel E dans \mathbb{R} , sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$

$$\alpha \mathcal{N}_2(x) \leq \mathcal{N}_1(x) \leq \beta \mathcal{N}_2(x).$$

Avec cette définition, on peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les normes sur E .

Proposition 1.1 Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux sur \mathcal{K}^n ($n \geq 1$).

Preuve. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K}^n$ ($n \geq 1$). Si on pose $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| = |x_{i_0}|$, alors

$$|x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n |x_{i_0}|$$

donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

D'autre part on a

$$|x_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n |x_{i_0}|^2$$

donc

$$|x_{i_0}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq n^{1/2} |x_{i_0}|.$$

Alors $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2} \|x\|_\infty$. ■

1.1.2 Propriétés

Théorème 1.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathcal{K} . Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ deux suites dans E qu'ils convergent respectivement vers x et y dans E et soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite dans \mathcal{K} converge vers α dans \mathcal{K} . Alors

- 1) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = x + y$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Preuve. 1) Par l'inégalité triangulaire, on a $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, alors

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

D'autre par on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, donc $-(\|x\| - \|y\|) \leq \|x\| - \|y\|$.

Par conséquent

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

2) Comme on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, alors par 1) on obtient $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$ pour tout $n \geq 1$. Alors on passe à la limite on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\|x_n\| - \|x\|| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

3) Par hypothèses, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$, et on a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

On fait n aller à l'infini, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

4) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente, alors elle est bornée, donc il existe $M > 0$

tel que pour tout $n \geq 1$, $|\alpha_n| \leq M$. D'autre part on a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n (x_n - x) - (\alpha_n - \alpha) x\| \\ &\leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \\ &\leq M \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|. \end{aligned}$$

Donc par la limite on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$. ■

Théorème 1.3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E . Soit $\|\cdot\|_1$ une autre norme de E définie par

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Alors les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathcal{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on pose $\beta = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{1/2}$. on a

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \beta \|x\|_1. \end{aligned}$$

Alors $\|x\| \leq \beta \|x\|_1$.

Maintenant, Soit l'application $f : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|.$$

Cette application est continue par rapport à la distance usuelle de \mathcal{K}^n . Si on pose

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K}^n; \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\},$$

alors S est compact, donc il exist $(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{K}^n$ tel que $\alpha = f(y_1, \dots, y_n) \leq f(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K}^n$.

Si $\alpha = 0$, alors $\|\sum_{i=1}^n y_i e_i\| = 0$ donc $\sum_{i=1}^n y_i e_i = 0$ et alors $y_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Contradiction car $(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{K}^n$. Alors $\alpha > 0$. De plus, par la définition de $\|\cdot\|_1$, si $\|x\|_1 = 1$, alors $\|x\| \geq \alpha$. Donc Si $z \in E \setminus \{0\}$ on obtient

$$\left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\| = 1$$

et donc $\left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\| \geq \alpha$, par conséquent $\|y\| \geq \alpha \|y\|_1$. Cette dernière inégalité est réalisée pour $y = 0$. Alors admet un pour tout $y \in E$, $\|y\| \geq \alpha \|y\|_1$. Donc $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. ■

Théorème 1.4 ([2, p43]) *Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.*

Remarque 1.3 *Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension infinie, les normes ne sont pas forcément équivalentes, et le contre-exemple suivant illustre cela.*

Contre-exemple : Soit $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonction continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} (est un espace de dimension infini). On considère les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

et on considère la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2 x + n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}]; \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = n$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{2}$. D'autre part on a

$$\lim_n \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \lim_n (2n) = +\infty.$$

Donc il n'existe pas une constante M de \mathbb{R} tel que $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \leq M$. Alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \geq 1$ tel que

$$\|f_n\|_\infty > M \|f_n\|_1.$$

Par conséquent, les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes dans E .

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Suites de Cauchy dans un e.v.n.

Définition 1.6 Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq N \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.5 Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Alors :

- 1) Toute suite convergente est de Cauchy.
- 2) Toute suite de Cauchy est bornée.
- 3) L'image d'une suite de Cauchy par une application f uniformément continue est de Cauchy.
- 4) Si deux normes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sont équivalentes sur E , alors, toute suite de Cauchy pour \mathcal{N}_1 est également une suite de Cauchy pour \mathcal{N}_2 .

Définition 1.7 Un espace métrique (E, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 1.8 *Un espace de Banach est un espace normé et complet par rapport à la distance associée de sa norme.*

Proposition 1.2 *Un sous-espace vectoriel V d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach si, et seulement si, il est fermé dans E .*

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach. Supposons que $(V, \|\cdot\|)$ est complet, et soit $l \in \bar{V}$. Il existe donc une suite (y_n) de V telle que $y_n \rightarrow l$ pour $n \rightarrow +\infty$. Comme la suite (y_n) est convergente dans E , alors c'est une suite de Cauchy ; et comme $(V, \|\cdot\|)$ est complet, (y_n) converge dans V , donc $l \in V$, d'où V est fermé. Réciproquement, supposons V fermé dans E et soit (y_n) suite de Cauchy dans V ; comme c'est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$ complet, elle converge vers une limite $l \in E$, et comme $y_n \in V$ et V est fermé, alors $l \in V$. Donc V est complet. ■

Théorème 1.6 (Critère de complétude) *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si, et seulement si chaque série absolument convergente dans E converge dans E .*

Preuve. Soit E un espace de Banach, et soit $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ une série absolument convergente, donc on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad (1.2)$$

Pour tout $k \geq 1$, on pose $S_k = \sum_{n=1}^k x_n$. Nous allons prouver que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Par complétude de E , il suffit de montrer que la suite $(S_k)_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy, c'est à dire que pour tout $q > p$ on a

$$\|S_p - S_q\| \rightarrow 0 \text{ si } p, q \rightarrow +\infty.$$

On utilise l'inégalité triangulaire et l'hypothèse 1.2 pour obtenir

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^q x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^q \|x_n\|.$$

Donc si $p, q \rightarrow +\infty$, alors $\sum_{n=p+1}^q \|x_n\| \rightarrow 0$ (le reste d'une série convergente). Ceci termine la preuve de la nécessité.

Pour la preuve de la seconde implication, nous supposons que E ne soit pas complet. Donc il existe une suite de Cauchy $(y_n)_{n \geq 1}$ dans E , qui est divergente. Alors toute sous-suite de $(y_n)_{n \geq 1}$ diverge. Par conséquent une sous-suite $(w_n)_{n \geq 1}$ de $(y_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\|w_{n+1} - w_n\| \leq \frac{1}{2^n}$$

est divergente. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n := w_{n+1} - w_n$ donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est absolument convergente dans E . D'autre part, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = w_{n+1} - w_1$$

est clairement diverge. Alors on a dans un cas d'une série absolument convergente dans E mais elle est diverge dans E . ■

- 1) Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est un espace de Banach.
- 2) Soit (E, d) un espace métrique compact, l'ensemble $C_{\mathcal{K}}(E)$ des fonctions continues de E dans \mathcal{K} est un espace de Banach.
- 3) L'espace l^p est un espace de Banach tel que $1 \leq p \leq \infty$.

1.3 Applications linéaires continues

Définition 1.9 Une application A entre deux espaces vectoriels E et F sur le même corps \mathcal{K} est appelée application linéaire (ou opérateur linéaire) si pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

On note par $L(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires (ou opérateurs linéaires) de E dans F .

Définition 1.10 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur A de $L(E, F)$ est dit borné si

$$\exists c > 0, \quad \|Ax\|_F \leq c \|x\|_E \quad \forall x \in E. \quad (1.3)$$

Définition 1.11 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur A de $L(E, F)$ est dit continu au point x_0 de E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon.$$

A est continu sur E s'il est continu en chaque point de E .

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ à l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F .

Définition 1.12 (Norme d'un opérateur) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur borné de $L(E, F)$. On appelle norme de l'opérateur A le nombre $\|A\|$, défini par :

$$\|A\| = \inf \{c \geq 0; \quad \|Ax\|_F \leq c \|x\|_E \quad \forall x \in E\}.$$

Alors la norme de A est la plus petite constante c dans (1.3).

Proposition 1.3 Soit A un opérateur borné de $L(E, F)$. Alors on a

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (1.4)$$

Proposition 1.4 Soit $A \in L(E, F)$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est continue.
2. A est continue en 0.

3. Il existe $x_0 \in E$ tel que A est continue en x_0 .

4. A est borné.

Preuve. L'implication 1) \implies 2) est évidente.

Montrons l'implication 2) \implies 3). On suppose que A est continue en 0, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|y\| < \delta \implies \|Ay\| < \varepsilon.$$

Soit $y \in E$, pour tout $x \in E$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y = x - x_0$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|y\| < \delta$

$$\|Ay\| = \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon.$$

Donc pour tout $x \in E$, si $\|x - x_0\| < \delta$ alors $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

On montre maintenant l'implication 3) \implies 4) : Soit $x_0 \in E$ tel que A est continue en x_0 . Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < \delta$ alors $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Soit $\varepsilon = 1$, alors il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < \delta_1$ alors $\|Ax - Ax_0\| < 1$. Si on pose $x = x_0 + \delta_1 y$ avec $y \in E$ et $\|y\| = 1$, alors on a

$$\|A(\delta_1 y)\| = \|A(x - x_0)\| = \|Ax - Ax_0\| \leq 1$$

donc $\delta_1 \|Ay\| \leq 1$, cela donne $\|Ay\| \leq 1/\delta_1$, par conséquent $\|A\| \leq 1/\delta_1$.

Finalement, pour l'implication 4) \implies 1) : Soit $x \in E$ et soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Si pour tout $x \in E$, $\|x - x_0\| < \delta$, alors

$$\begin{aligned} \|Ax - Ax_0\| &= \|A(x - x_0)\| \\ &\leq \|A\| \|x - x_0\| \\ &\leq \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc A est continu en x_0 , et comme x_0 est arbitraire dans E , alors A est continu. ■

1.4 Dual d'un espace vectoriel normé.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de **la norme d'opérateur** forme un espace vectoriel normé. En effet, l'homogénéité et la positivité sont évidentes. Considérons deux applications linéaires bornées f et g de $\mathcal{L}(E, F)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(f + g)(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|f(x)\| + \|g(x)\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|g(x)\| \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Dans le cas $F = \mathcal{K}$, l'espace $\mathcal{L}(E, \mathcal{K})$ est noté par E^* , cet espace est appelé l'espace **dual** topologique de E .

Théorème 1.7 *Si E est un espace vectoriel normé et F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Nous allons montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace complet. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$. Comme cet espace est métrique alors $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\|T_n\| \leq M$. Soit $x \in E$. Alors pour tous $n, m \geq 1$, on a

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq M \|x\|.$$

Comme $(T_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, alors $(T_n x)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans F . D'autre part F est complet, donc la suite $(T_n x)_{n \geq 1}$ est convergente. On définit maintenant l'application $T : E \rightarrow F$ par

$$Tx = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x.$$

Le but est de démontrer que $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. Soient $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathcal{K}$. On a

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n y \\ &= \alpha T x + T y, \end{aligned}$$

donc T est linéaire. D'autre part on a

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\| \leq M \|x\|.$$

Donc T est borné, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(T_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, on a

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

alors pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et pour tous $n, m \geq N$, on a

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $Tx = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N_1$, on a

$$\|Tx - T_m x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $n \geq N$ et $m \geq N_1$, on a

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\| &= \|Tx - T_m x + T_m x - T_n x\| \\ &\leq \|Tx - T_m x\| + \|T_m x - T_n x\| \\ &\leq \|Tx - T_m x\| + \|T_m - T_n\| \|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$ tel que $n \geq N$, on a

$$\|Tx - T_n x\| = \|(T - T_n)x\| < \varepsilon.$$

Donc $\|T - T_n\| < \varepsilon$. Alors $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. D'où, la suite de Cauchy $(T_n)_{n \geq 1}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$. ■

Corollaire 1.1 *L'espace dual E' de l'espace vectoriel normé E est un espace vectoriel normé complet sous la norme définie par 1.4.*

Chapitre 2

Espace de Hilbert

Dans tout ce chapitre \mathcal{K} désigne ou bien le corps des nombres réels \mathbb{R} ou bien le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

2.1 Espace préhilbertien

Définition 2.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathcal{K} . Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans \mathcal{K} est appelée produit scalaire si elle satisfait : Pour tout x, y, z de E et pour tout α de \mathcal{K}

$$1) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$3) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$4) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in E \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

Remarque 2.1 1) Pour tous x, y, z de E et pour tous α, β de \mathcal{K} on a

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \overline{\langle \alpha y, x \rangle + \langle \beta z, x \rangle} \\ &= \overline{\langle \alpha y, x \rangle} + \overline{\langle \beta z, x \rangle} \\ &= \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \\ &= \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

2) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite *sesquilinéaire* sur E si elle vérifie les deux conditions 2) et 3) et dite *forme hermitienne* si elle vérifie de plus la condition 1)

3) Si l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie 1), 2), 3), 4) on dit que c'est une *forme hermitienne positive et non-dégénérée*.

Remarque 2.2 Soit E un espace vectoriel sur \mathcal{K} . Pour tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E , l'application $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

est une norme sur E . Cette norme est appelée la *norme induite par le produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemple 2.1 L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Ce produit scalaire est appelé *produit scalaire usuel* sur \mathbb{R}^n .

Exemple 2.2 L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ est un produit scalaire sur \mathbb{C}^n . Ce produit scalaire est appelé *produit scalaire usuel* sur \mathbb{C}^n .

Définition 2.2 Un espace **préhilbertien** E est un espace vectoriel sur \mathcal{K} sur lequel est défini un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et muni de la norme induite $\|\cdot\|$ par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemple 2.3 Le plus important exemple c'est l'espace préhilbertien \mathbb{C} qui est muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = x \bar{y}$.

Exemple 2.4 Soit $E = \mathcal{K}^n$ ($n \geq 1$) ($\mathcal{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}). Pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathcal{K}^n on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire de \mathcal{K}^n (le produit scalaire usuel de \mathcal{K}^n). La norme induite de x est

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Dans le cas général, pour un entier $p \geq 1$, on peut définir la norme $\|\cdot\|_p$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

La démonstration repose sur les inégalités de Hölder et Minkowski.

Exemple 2.5 L'espace $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{C})$ de toutes les fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs complexes muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

est un espace préhilbertien.

Exemple 2.6 L'espace $L^2(\mathbb{R})$ de toutes les fonctions à valeurs complexes qui sont carré intégrables ou sens de Lebesgue (i.e. $|f|^2 \in L(\mathbb{R})$) muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

est un espace préhilbertien.

Exemple 2.7 Si $E = E_1 \times E_2$ tels que $(E_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_1})$ et $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_2})$ sont deux espaces préhilbertiens, alors E muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle_E = \langle x, u \rangle_{E_1} + \langle y, v \rangle_{E_2}$$

est un espace préhilbertien. La norme induite par ce produit scalaire est défini par

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|_{E_1}^2 + \|y\|_{E_2}^2}.$$

On peut encore définir une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $E = E_1 \times E_2$ par

$$\|(x, y)\| = \|x\|_{E_1} + \|y\|_{E_2}.$$

Théorème 2.1 (L'identité de polarisation) Soit H un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors pour tout $x, y \in H$ on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle),$$

c-à-d

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Preuve.

Soient $x, y \in H$. Par définition du produit scalaire on a

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \blacksquare$$

et on trouve par la soustraction

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle &= 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) \\ &= 4\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2 (L'identité du parallélogramme) Soit H un espace préhilbertien sur \mathcal{K} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors pour tout $x, y \in H$ on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (2.1)$$

Preuve.

Soient $x, y \in H$. On a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3 Cette identité signifie que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales de ce parallélogramme

Théorème 2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit E un espace préhilbertien sur \mathcal{K} . Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Preuve.

Si x ou y est égal à 0 l'inégalité est immédiate. Sinon on pose $z = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$. Par positivité on a

$$\langle z, z \rangle \geq 0.$$

En développant $\langle z, z \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle &= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle \\ &\quad + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0 \end{aligned}$$

donc $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ ce qui donne le résultat. ■

Lemme 2.1 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On considère les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de E et on suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
 |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\
 &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\
 &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\
 &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|.
 \end{aligned}$$

Comme la suite $(x_n)_n$ est convergente alors $\|x_n\|$ est borné, donc le terme droit de cette inégalité tend à zéro quand $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

■

Théorème 2.4 *Soit $(H, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. H est un espace préhilbertien si, et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Preuve.

Nous avons vu que la condition est nécessaire. Alors nous démontrons qu'elle est suffisante. Soit pour tous $x, y \in H$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On pose $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. Nous prouvons que l'application $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire vérifiant $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

1) Pour tous $x, y, z \in H$, on a

$$\begin{aligned}
4 \langle x + y, z \rangle &= \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\
&= \|x + (y + z)\|^2 - \|x + (y - z)\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y + z\|^2 - \|x - (y + z)\|^2 \\
&\quad - [2\|x\|^2 + 2\|y - z\|^2 - \|x - (y - z)\|^2] \\
&= 2\|y + z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - \|(x - z) - y\|^2 + \|(x + z) - y\|^2 \\
&= 2\|y + z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - 2\|x - z\|^2 - 2\|y\|^2 \\
&\quad + \|x - z + y\|^2 + 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + z + y\|^2 \\
&= 2\|y + z\|^2 - 2\|y - z\|^2 - 2\|x - z\|^2 \\
&\quad + 2\|x + z\|^2 + \|x - z + y\|^2 - \|x + z + y\|^2 \\
&= 8 \langle y, z \rangle + 8 \langle x, z \rangle - 4 \langle x + y, z \rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

2) Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2) = \langle y, x \rangle$$

3) Pour tout $x \in H$, on a $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = 0$ donc $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

4) Il reste de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y \in H$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Dans l'égalité $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ et pour $y = x$ on obtient $\langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle nx, z \rangle = n \langle x, z \rangle$ et nous montrons que

$$\langle (n + 1)x, z \rangle = (n + 1) \langle x, z \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \langle (n+1)x, z \rangle &= \langle nx + x, z \rangle \\
 &= \langle nx, z \rangle + \langle x, z \rangle \\
 &= n \langle x, z \rangle + \langle x, z \rangle \\
 &= (n+1) \langle x, z \rangle.
 \end{aligned}$$

On a encore $\langle 0, x \rangle = 0$ et $\langle (-1)x, z \rangle = \langle -x, z \rangle = -\langle x, z \rangle$, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle nx, z \rangle = n \langle x, z \rangle.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ on pose $\alpha = \frac{p}{q}$ tel que p et q des entiers et $q \neq 0$, on a

$$\left\langle \frac{p}{q}qx, z \right\rangle = p \langle x, z \rangle = q \left\langle \frac{p}{q}x, z \right\rangle$$

alors

$$\left\langle \frac{p}{q}x, z \right\rangle = \frac{p}{q} \langle x, z \rangle.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque \mathbb{Q} dense dans \mathbb{R} , alors il existe une suite $(\alpha_n)_n$ dans \mathbb{Q} converge vers α dans \mathbb{R} . Donc on a

$$\begin{aligned}
 4 |\langle \alpha_n x, z \rangle - \langle \alpha x, z \rangle| &= \left| \|\alpha_n x + z\|^2 - \|\alpha_n x - z\|^2 - \|\alpha x + z\|^2 + \|\alpha x - z\|^2 \right| \\
 &\leq \left| \|\alpha_n x + z\|^2 - \|\alpha x + z\|^2 \right| + \left| \|\alpha_n x - z\|^2 - \|\alpha x - z\|^2 \right| \\
 &\leq \left| \|\alpha_n x + z\| - \|\alpha x + z\| \right| (\|\alpha_n x + z\| + \|\alpha x + z\|) + \\
 &\quad \left| \|\alpha_n x - z\| - \|\alpha x - z\| \right| (\|\alpha_n x - z\| + \|\alpha x - z\|) \\
 &\leq (\|\alpha_n x\| + \|\alpha x\| + 2\|z\|) (\|\alpha_n x\| + \|\alpha x\| + 2\|z\|) \\
 &\leq 2(M + \|x\| + 2\|z\|) \|(\alpha_n - \alpha)x\| \text{ tel que } M = \max\{|\alpha|, \sup \alpha_n\} \\
 &\leq 2(M + \|x\| + 2\|z\|) |\alpha_n - \alpha| \|x\|.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \alpha_n x, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \alpha_n x, z \rangle.$$

Par conséquent, pour tous $x, z \in H$, on a

$$\langle \alpha x, z \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n x, z \right\rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \alpha_n x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle.$$

La démonstration du théorème est terminée. ■

Remarque 2.4 Dans le cas $(H, \|\cdot\|)$ un \mathbb{C} -espace vectoriel normé, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ comme suit

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \text{ et} \\ \operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2). \end{cases}$$

2.2 Orthogonalité

Définition 2.3 Soit E un espace préhilbertien sur \mathcal{K} . Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dit orthogonaux, si $\langle x, y \rangle = 0$, et qu'on note $x \perp y$.

Définition 2.4 (Orthogonal d'un ensemble) Soit E un espace préhilbertien sur \mathcal{K} . Soit A un sous ensemble de E . L'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de A est dit l'orthogonale de A , on le note par A^\perp . On a donc

$$A^\perp = \{x \in E, \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in A\}.$$

Définition 2.5 Deux parties A et B d'un espace préhilbertien E sont orthogonaux, si pour tout $x \in A$ et $y \in B$ on a $\langle x, y \rangle = 0$ et on écrit $A \perp B$.

Exemple 2.8 Dans l'espace préhilbertien \mathbb{R}^n , les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ sont orthogonaux deux à deux.

Théorème 2.5 (Pythagore) Soit E un espace préhilbertien sur \mathcal{K} . pour tout $x, y \in E$ on a

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Preuve.

Pour tout $x, y \in E$ on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$, donc si $x \perp y$ alors $\langle x, y \rangle = 0$, d'où $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ■

Remarque 2.5 Dans le cas général, si $\{x_n\}_{n=1}^m$ une famille des vecteurs orthogonaux deux à deux d'un espace préhilbertien E , alors on a

$$\left\| \sum_{n=1}^m x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^m \|x_n\|^2.$$

Théorème 2.6 Soit F un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien E . Alors $x \in F^\perp$ si et seulement si $\|x - y\| \geq \|x\|$ pour tout $y \in F$.

Preuve.

On suppose que $x \in F^\perp$, alors pour tout $y \in F$ on a $\langle x, y \rangle = 0$, donc

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Alors on a $\|x - y\|^2 \geq \|x\|^2$ et donc $\|x - y\| \geq \|x\|$.

Soit $x \in E$ et on suppose que $\|x - y\| \geq \|x\|$ pour tout $y \in F$. Montrons que $\langle x, y \rangle = 0$.

Si $y = 0$, alors $\langle x, y \rangle = 0$. Si $y \neq 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathcal{K}$ on a $\alpha y \in F$ et

$$\|x\|^2 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

donc on a

$$0 \leq |\alpha|^2 \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

on pose $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$ alors on obtient

$$0 \leq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - 2 \operatorname{Re} \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle = -\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

donc $|\langle x, y \rangle| = 0$ et alors $\langle x, y \rangle = 0$. On conclut $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$, d'où $x \in F^\perp$. ■

Lemme 2.2 Soit E un espace préhilbertien et soit $A \subset E$. Alors

- 1) $0 \in A^\perp$.
- 2) Si $0 \in A$, alors $A \cap A^\perp = \{0\}$, sinon $A \cap A^\perp = \emptyset$.
- 3) $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
- 4) Si $B \subset A$ alors $A^\perp \subset B^\perp$.
- 5) A^\perp est un sous-espace fermé de E .
- 6) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Preuve.

- 1) On a $\langle 0, x \rangle = 0$ pour tout $x \in A$. Donc $0 \in A^\perp$.
- 2) On suppose que $x \in A \cap A^\perp$, donc $\langle x, x \rangle = 0$, alors par définition du produit scalaire on a $x = 0$.
- 3) Soit $x \in E^\perp$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$. En particulier $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$. Donc $E^\perp \subset \{0\}$ et alors $E^\perp = \{0\}$. D'autre part, pour tout $x \in E$, on a $\langle x, 0 \rangle = 0$, donc $x \in \{0\}^\perp$. Alors $E \subset \{0\}^\perp$ et donc $\{0\}^\perp = E$.
- 4) Soit $x \in A^\perp$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in A$, et comme $B \subset A$, alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in B$. D'où $x \in B^\perp$.
- 5) Soient $x, y \in A^\perp$ et λ un scalaire. Pour $z \in A$ on a

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle = 0.$$

Donc $x + \lambda y \in A^\perp$, d'où A^\perp est un sous-espace vectoriel de E . Soit maintenant $(x_n)_n$ une suite de A^\perp convergente vers $x \in E$. Donc

$$\langle x - x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle,$$

on passe à la limite, donc on a $\lim_n \langle x - x_n, z \rangle = \left\langle x - \lim_n x_n, z \right\rangle = \langle 0, z \rangle = 0$, alors $\langle x, z \rangle = 0$, d'où $x \in A^\perp$. Par conséquent A^\perp est fermé.

6) Soit $x \in A$. Pour tout $y \in A^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} = 0$, donc $x \in (A^\perp)^\perp$, alors $A \subset (A^\perp)^\perp$. ■

2.3 Espace de Hilbert

Définition 2.6 (Espace de Hilbert) *Un espace préhilbertien H sur \mathcal{K} est un espace de Hilbert s'il est complet pour la distance induite définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Exemple 2.9 *L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.*

Exemple 2.10 *L'espace $L^2([a, b])$ des fonctions mesurables et de carré intégrable sur $[a, b]$ pour la mesure de Lebesgue est un espace de Hilbert.*

Exemple 2.11 *L'espace vectoriel $\mathcal{C}[-1, 1]$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs complexes muni du produit scalaire défini par*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

est un espace préhilbertien mais n'est pas un espace de Hilbert. En effet, considérons la suite des fonctions continues $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - 4nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{4n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Cette suite est de Cauchy et convergente vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue sur $[-1, 1]$.

Exemple 2.12 *L'espace E des suites $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ muni du produit*

scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

est un espace préhilbertien mais n'est pas un espace de Hilbert. En effet, la suite

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}, 0, 0 \cdots \right)$$

est de Cauchy car pour tous entiers n et m tel que $n \leq m$, on a

$$x_m - x_n = \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{m}, 0, 0 \cdots \right),$$

et

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|x_n - x_m\|^2 = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{k^2} = 0,$$

mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \right) \notin E$.

2.3.1 Bases Hilbertiennes

Définition 2.7 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit I un ensemble quelconque de \mathbb{N} . Une famille $(e_n)_{n \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour tout $n \in I$, $e_n \neq 0$ et pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$ on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Si de plus on a $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in I$, on dit que $(e_n)_{n \in I}$ est orthonormale.

Remarque 2.6 Si la famille $(e_n)_{n \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale, alors la famille $\left(\frac{e_n}{\|e_n\|} \right)_{n \in I}$ est une famille orthonormale. En effet; si on pose pour tout $n \in I$, $u_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}$ alors on a

$$\|u_n\| = \left\| \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\| = \frac{1}{\|e_n\|} \|e_n\| = 1.$$

D'autre part, pour tous $i, j \in I$ tel que $i \neq j$, on a

$$\langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \frac{e_i}{\|e_i\|}, \frac{e_j}{\|e_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|e_i\| \|e_j\|} \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Exemple 2.13 Soit $E = l^2(\mathbb{R})$. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E tel que $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 à la $n^{\text{ème}}$ place) est une famille orthonormale.

Théorème 2.7 (Inégalité de Bessel) Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors, pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose $y_k = \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$. On a

$$\begin{aligned} \|x - y_k\|^2 &= \langle x - y_k, x - y_k \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y_k\|^2 - \left\langle \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y_k\|^2 - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle - \sum_{n=1}^k \overline{\langle x, e_n \rangle} \langle x, e_n \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y_k\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2, \end{aligned}$$

et comme

$$\|y_k\|^2 = \sum_{n=1}^k \|\langle x, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2 \|e_n\|^2 = \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

alors

$$\|x - y_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2 &= \|x\|^2 - \|x - y_k\|^2 \\ &\leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

La suite $(z_k)_k$ tel que $z_k = \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2$ est croissante et bornée donc si on passe à la limite ($k \rightarrow +\infty$) on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Théorème 2.8 Soient H un espace de Hilbert sur \mathcal{K} et $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H . Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de \mathcal{K} . Alors la série vectorielle $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$

converge si, et seulement si, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ converge. Si cela est vrai, alors

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2.$$

Preuve.

On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$ est convergente et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$. Alors pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n, e_k \right\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle e_n, e_k \rangle \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Bessel, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

On suppose maintenant que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$, et on pose pour tout entier $k \geq 1$,

$x_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n$. Alors pour tout $m \geq k$, on a

$$\begin{aligned} \|x_k - x_m\|^2 &= \left\| \sum_{n=k+1}^m \alpha_n e_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=k+1}^m \|\alpha_n e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=k+1}^m |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$ alors $\lim_{k,m \rightarrow +\infty} \sum_{n=k+1}^m |\alpha_n|^2 = 0$, par conséquent,

$$\lim_{k,m \rightarrow +\infty} \|x_k - x_m\|^2 = 0.$$

Alors la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ est de Cauchy dans H , donc elle est convergente.

Pour terminer, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n e_n \right\|^2 \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \|\alpha_n e_n\|^2 \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.1 Soient H un espace de Hilbert sur \mathcal{K} et $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H . Pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente.

Théorème 2.9 Soient H un espace de Hilbert sur \mathcal{K} et $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$.
- 2) $\overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}} = H$.
- 3) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ pour tout $x \in H$.
- 4) $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ pour tout $x \in H$.

Preuve.

1) \implies 4) : On suppose que $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$. Soit $x \in H$ et on pose

$$y = x - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \langle y, e_m \rangle &= \left\langle x - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle \\ &= \langle x, e_m \rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle \\ &= \langle x, e_m \rangle - \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle \\ &= \langle x, e_m \rangle - \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \langle x, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

Alors $y \in \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp$, donc $y = 0$. D'où $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

2) \implies 1) : Soit $x \in \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle x, e_n \rangle = 0$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in \{x\}^\perp$. D'autre part on a $\{x\}^\perp$ un sous-espace de H , donc $\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \{x\}^\perp$ et comme il est fermé alors on obtient

$$\overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}} \subset \overline{\{x\}^\perp} = \{x\}^\perp,$$

mais $H = \overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$ et $x \in H$, alors $x \in \{x\}^\perp$. D'où $x = 0$.

4) \implies 2) : Soit $x \in H$, alors on a

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Mais $\sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$ est un élément de $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$, donc il est clair que $x \in \overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$. Par conséquent $H \subset \overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$, d'où le résultat.

4) \implies 3) : Soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$. A lors

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\ &= \left\langle \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_n \rangle} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.7 Si on a $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$, on dit que le système orthonormal $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est total (**S.O.T**). Dans ce cas, on a l'égalité de Bessel-Parceval :
Pour tout $x \in H$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Définition 2.8 Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H . Si l'une des assertions est vraie dans le théorème précédente, on dit que $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base orthonormale de H où encore, base hilbertienne.

Exemple 2.14 La famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de vecteurs de $l^2(\mathbb{N})$ tel que $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 à la $n^{\text{ème}}$ place) est une base orthonormale de $l^2(\mathbb{N})$. En effet, soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in$

$l^2(\mathbb{N})$, alors $\langle x, e_n \rangle = x_n$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Alors la famille orthonormale $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est totale.

Projection hilbertienne

Définition 2.9 Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel E est dit convexe si, pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Théorème 2.10 (de projection) Soit H un espace de Hilbert sur \mathcal{K} et soit F une partie convexe fermée non vide de H . Alors pour tout x de H , il existe un unique élément a de F , noté $P_F(x)$, tel que

$$\|x - a\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

De plus la caractérisation de l'élément $P_F(x)$ est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} P_F(x) \in F \\ \operatorname{Re} \langle x - P_F(x), y - P_F(x) \rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in F. \end{array} \right.$$

Preuve.

Soit $x \in H$. On pose $M = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Par hypothèse $F \neq \emptyset$, donc $M < +\infty$. La définition de la borne inférieure fournit que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite (a_n) de F tel que

$$\|x - a_n\|^2 \leq M^2 + \frac{1}{n}.$$

On montre que cette suite (a_n) est de Cauchy. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\|^2 + \|2x - (a_n + a_m)\|^2 &= \|(x - a_n) + (x - a_m)\|^2 + \|(x - a_n) - (x - a_m)\|^2 \\ &= 2\|x - a_n\|^2 + 2\|x - a_m\|^2 \\ &\leq 4M^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m}, \quad (\text{l'égalité du parallélogramme}) \end{aligned}$$

alors

$$\|a_n - a_m\|^2 \leq 4M^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4 \left\| x - \frac{a_n + a_m}{2} \right\|^2,$$

et comme F est une partie convexe alors $\frac{a_n + a_m}{2} \in F$, donc

$$\left\| x - \frac{a_n + a_m}{2} \right\|^2 \geq M^2.$$

Par conséquent on a

$$\|a_n - a_m\|^2 \leq 4M^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4M^2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}.$$

Cette dernière inégalité prouve que la suite (a_n) est de Cauchy dans H . Alors la limite de (a_n) existe, et suite de la fermeture de F on obtient $\lim a_n = a \in F$.

Par la continuité de la norme, on obtient

$$\lim_n \|x - a_n\|^2 = \left\| x - \lim_n a_n \right\|^2 = \|x - a\|^2 \leq \lim_n \left(M^2 + \frac{1}{n} \right) = M^2$$

donc $\|x - a\|^2 \leq M^2$, et comme on a $\|x - a\|^2 \geq M^2$ alors $\|x - a\|^2 = M^2$, d'où

$$\|x - a\| = M = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Montrons maintenant l'unicité. On suppose qu'il ya un autre point b de F tel que $\|x - b\| = M$. Comme $\frac{a+b}{2} \in F$, alors par la convexité on obtient

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 \geq M^2.$$

On utilise l'égalité du parallélogramme sur $x - a$ et $x - b$, il vient

$$\|(x - a) - (x - b)\|^2 + \|(x - a) + (x - b)\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - b\|^2$$

d'autre part on a

$$\|(x - a) - (x - b)\|^2 + \|(x - a) + (x - b)\|^2 = \|y - b\|^2 + 4 \left\| x - \frac{a + b}{2} \right\|^2,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \|y - b\|^2 &= 2 \|x - a\|^2 + 2 \|x - b\|^2 - 4 \left\| x - \frac{a + b}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2M^2 + 2M^2 - 4M^2 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $\|a - b\|^2 = 0$, d'où $b = a$.

Soient $x \in H$ et $a = P_F(x)$. On a $a \in F$ et pour tout $y \in F$ on a $\lambda y + (1 - \lambda)a \in F$ pour $\lambda \in [0, 1]$ car F est convexe. Donc

$$\begin{aligned} \|x - a\|^2 &\leq \|x - (\lambda y + (1 - \lambda)a)\|^2 = \|(x - a) - \lambda(y - a)\|^2 \\ &\leq \|x - a\|^2 + \lambda^2 \|y - a\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle, \end{aligned}$$

alors pour $\lambda \neq 0$, on a

$$\operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|y - a\|^2.$$

En faisant tendre λ vers 0^+ on en déduit le résultat. Inversement, la propriété $\operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$ donne

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - a) - (y - a)\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 + \|y - a\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \\ &\geq \|x - a\|^2. \end{aligned}$$

Alors comme cette inégalité est vraie pour tout $y \in F$, donc

$$\|x - a\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x; F).$$

■

Théorème 2.11 Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace Hilbertien H et soit $x \in H$. Alors, il existe un unique élément a de F , noté $P_F(x)$, tel que

$$\|x - a\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

De plus la caractérisation de l'élément $P_F(x)$ est donné par

$$\begin{cases} P_F(x) \in F \text{ et} \\ x - P_F(x) \in F^\perp. \end{cases}$$

Corollaire 2.2 Soit F un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H . Alors

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Preuve.

Soit $x \in H$, alors $P_F(x)$ existe. On écrit $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, et comme $x - P_F(x) \in F^\perp$, alors pour tout $x \in H$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$. D'où $H = F + F^\perp$. D'autre part on a $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $H = F \oplus F^\perp$.

■

Corollaire 2.3 Soit F un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H . Alors

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Théorème 2.12 Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H . Alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Preuve. Tout d'abord on a $F \subset \overline{F}$, donc $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$ et encore $(F^\perp)^\perp \subset (\overline{F}^\perp)^\perp$, et comme \overline{F} est un fermé, alors $(\overline{F}^\perp)^\perp = \overline{F}$. Par suite $(F^\perp)^\perp \subset \overline{F}$. D'autre part on a $F \subset (F^\perp)^\perp$, et comme $(F^\perp)^\perp$ est un fermé, alors $\overline{F} \subset \overline{(F^\perp)^\perp} = (F^\perp)^\perp$. ■

Théorème 2.13 Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Pour tout

$x \in H$, il existe un unique élément $y \in F$ et un unique élément $z \in F^\perp$ tel que $x = y + z$. De plus, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Preuve.

Comme F est un sous-espace fermé de H , alors il est convexe et fermé et non vide, donc pour tout $x \in H$, il existe $y \in F$ tel que, pour tout $a \in F$, $\|x - y\| \leq \|x - a\|$. On pose $z = x - y$, donc $x = y + z$, alors pour tout $a \in F$, on obtient

$$\|z - a\| = \|x - y - a\| \geq \|x - y\| = \|z\|.$$

Par le Théorème 6, on a $z \in F^\perp$. On montre maintenant l'unicité, pour cela on suppose que

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$$

tels que $y_1, y_2 \in F$ et $z_1, z_2 \in F^\perp$. Alors $y_1 - y_2 = z_1 - z_2$, par conséquent $y_1 - y_2, z_1 - z_2 \in F \cap F^\perp = \{0\}$. D'où $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$. Finalement, comme $\langle y, z \rangle = 0$, alors

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

■

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 2.14 Soit H un espace de Hilbert sur \mathcal{K} . On considère l'application $\Phi : H \rightarrow H^*$, $y \mapsto \Phi(y)$ tel que, pour tout $x \in H$,

$$\Phi(y)(x) = \langle x, y \rangle.$$

Alors :

- 1) Pour tout $y \in H$, $\|\Phi(y)\| = \|y\|$ (c'est-à-dire Φ est isométrie).
- 2) Pour tout $f \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que

$$f = \Phi(y) \text{ et } \|f\| = \|y\|.$$

Preuve. Si on pose pour tout $y \in H$, $\Phi(y) = \Phi_y$ alors la forme linéaire $\Phi_y : H \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\Phi_y(x) = \langle x, y \rangle$ est continue. En effet d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Donc $\Phi_y \in H^*$.

1) On suppose que $y \neq 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\Phi_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

donc $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$. D'autre part on a $\Phi_y(y) = \langle y, y \rangle = \|y\|^2$. Alors on en conclut que $\|\Phi_y\| \geq \|y\|$, d'où $\|\Phi(y)\| = \|y\|$.

2) Soit $f \in H^*$, si on suppose $f = 0$ alors nous pouvons prendre $f = \Phi(0)$. On suppose maintenant que $f \neq 0$. On pose $F = \ker f$, et on a $\ker f$ est un sous-espace fermé de H , car f est continue. Par le théorème de la projection orthogonale, on a $F^\perp \neq \{0\}$. Donc il existe $y_0 \in F^\perp - \{0\}$. Il en résulte que $f(y_0) \neq 0$. Alors il existe $y_1 = \frac{y_0}{f(y_0)} \in F^\perp - \{0\}$ et puis $f(y_1) = 1$.

Pour tout $x \in H$, on a

$$f(x - f(x)y_1) = f(x) - f(f(x)y_1) = f(x) - f(x)f(y_1) = 0.$$

Donc $(x - f(x)y_1) \in F$. Alors on obtient

$$\langle x - f(x)y_1, y_1 \rangle = 0.$$

Par conséquent

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle f(x)y_1, y_1 \rangle = f(x) \langle y_1, y_1 \rangle = f(x) \|y_1\|^2.$$

Comme $y_1 \neq 0$, alors

$$f(x) = \frac{1}{\|y_1\|^2} \langle x, y_1 \rangle = \left\langle x, \frac{y_1}{\|y_1\|^2} \right\rangle.$$

Finalement $f(x) = \langle x, y \rangle$ tel que $y = \frac{y_1}{\|y_1\|^2}$ ■

Proposition 2.1 Soient E et F deux espaces de Hilbert, et soit A une application de $\mathcal{L}(E, F)$ i.e. une application linéaire continue. Alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

De plus, on a $\|A^*\| = \|A\|$. (L'application A est appelée l'application adjointe de A (ou l'opérateur adjoint de l'opérateur A).

Preuve. Soit $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ de H dans \mathbb{C} est linéaire et continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté A^*y tel que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

On définit l'application $A^* : F \rightarrow E$ grace à l'unicité de A^*y .

Montrons maintenant que A^* est linéaire et continue.

Pour tous $y, z \in F$, on a

$$\langle Ax, y + z \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Ax, z \rangle = \langle x, A^*y \rangle + \langle x, A^*z \rangle = \langle x, A^*y + A^*z \rangle.$$

Par l'unicité on obtient $A^*(y + z) = A^*y + A^*z$. De même, pour λ un scalaire, on a $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Alors A est linéaire.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle x, A^*y \rangle| = |\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Alors pour $x \neq 0$, et $x = A^*y$ on a

$$|\langle A^*y, A^*y \rangle| \leq \|A\| \|A^*y\| \|y\|,$$

par conséquent $\|A^*y\| \leq \|A\| \|y\|$. Alors on en déduit que A^* est continu et que $\|A^*\| \leq \|A\|$. D'autre part comme l'adjoint d'un opérateur est unique alors $(A^*)^* = A$.

Par ce qui précède on en déduit que $\|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, donc on a $\|A\| \leq \|A^*\|$. Alors $\|A^*\| = \|A\|$.

■

Exemple 2.15 *Le shift (opérateur de décalage à droite)*

Soit l'application linéaire $S : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ définie par

$$S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_0, \alpha_1, \dots).$$

Cherchons l'application adjointe S^* de S . Par définition on a

$$\begin{aligned} \langle S^*(\alpha_n), (\beta_n) \rangle &= \langle (\alpha_n), S(\beta_n) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{n+1} \beta_n \\ &= \langle (\alpha_{n+1}), (\beta_n) \rangle \end{aligned}$$

Alors $S^*(\alpha_n) = (\alpha_{n+1})$. De même on peut définir l'opérateur de décalage à gauche T comme suit $T(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$.

Proposition 2.2 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. L'application $\varphi : A \mapsto A^*$ est une isométrie de $\mathcal{L}(E; F)$ dans $\mathcal{L}(F; E)$; elle est linéaire si les espaces sont réels et antilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, pour tout $A, B \in \mathcal{L}(E; F)$, $(A^*)^* = A$ et $\|A^*A\| = \|A\|^2$ et $(AB)^* = B^*A^*$.*

Preuve. Pour tout $(x, y) \in E \times F$ et $A, B \in \mathcal{L}(E; F)$, et α un scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi(A + \alpha B)y \rangle &= \langle x, (A + \alpha B)^*y \rangle \\ &= \langle (A + \alpha B)x, y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle + \alpha \langle Bx, y \rangle \\ &= \langle x, A^*y \rangle + \alpha \langle x, B^*y \rangle \\ &= \langle x, \varphi(A)y \rangle + \alpha \langle x, \varphi(B)y \rangle \\ &= \langle x, \varphi(A)y + \bar{\alpha}\varphi(B)y \rangle \end{aligned}$$

Alors $\varphi(A + \alpha B)y = \varphi(A)y + \bar{\alpha}\varphi(B)y$ pour tout $y \in F$. Donc $\varphi(A + \alpha B) = \varphi(A) + \bar{\alpha}\varphi(B)$. Alors l'application φ est linéaire si $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons maintenant que φ est isométrie, i.e. pour tous $A \in \mathcal{L}(E; F)$, on a $\|\varphi(A)\| = \|A\|$. Soit $A \in \mathcal{L}(E; F)$, alors on a

$$\|\varphi(A)\| = \|A^*\| = \|A\|.$$

Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a

$$\begin{aligned} \langle A^{**}x, y \rangle &= \overline{\langle y, A^{**}x \rangle} \\ &= \overline{\langle A^*y, x \rangle} \\ &= \langle x, A^*y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle. \end{aligned}$$

Alors pour tout $x \in E$, on $A^{**}x = Ax$. Donc $A^{**} = A$.

On sait que $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$. D'autre part, pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \langle A^*Ax, x \rangle \\ &\leq \|A^*Ax\| \|x\| \\ &\leq \|A^*A\| \|x\|^2. \end{aligned}$$

Donc $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$. Alors $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Il reste de prouver que $(AB)^* = B^*A^*$.

■

Proposition 2.3 (Opérateur positif dans un Hilbert) *Soit H un espace de Hilbert réel et $A \in L(H)$ une application linéaire. On suppose que A est positif au sens suivant*

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in H,$$

alors T est continu.

Preuve. Montrons que le graphe de A est fermé.

Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x dans H telle que $(Tx_n)_n$ converge vers y . Il faut montrer que $y = Tx$. On pose $z = y - Tx$. Pour tout $h \in H$,

$$\langle T(x_n + h), x_n + h \rangle = \langle Tx_n + Th, x_n + h \rangle \geq 0.$$

On passe à la limite on obtient

$$\langle y + Th, x + h \rangle \geq 0,$$

ou encore

$$\langle z + Tx + Th, x + h \rangle \geq 0.$$

On pose maintenant $h + x = ty$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ fixé, il vient $\langle z + tTy, ty \rangle \geq 0$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$t \langle z, y \rangle + t^2 \langle Ty, ty \rangle \geq 0$$

Donc $t \langle z, y \rangle \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Cela implique $\langle z, y \rangle = 0$, et comme y est arbitraire, alors $z = 0$. Ce qui montre $y = Tx$. ■

2.4 Séries de Fourier

Soit $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables ou sens de Lebesgue $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$. On muni ce espace le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$. On a donc un espace préhilbertien.

On pose $N = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} / f = 0 \text{ p.p.}\}$. L'espace quotient

$$L^2([-\pi, \pi]) = \frac{\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])}{N}$$

est identifier à l'espace $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ avec la notion égalité presque partout, cet espace

est complet pour la norme

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On conclu, l'espace $L^2([-\pi, \pi])$ est un espace de Hilbert et ces éléments sont des classes d'équivalence de fonctions ; mais on peut les considérer comme des fonctions, i.e. des éléments de $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$.

2.5 Système trigonométrique

Définition 2.10 *Un système trigonométrique est une famille $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$e_n = \exp(int), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Pour tout $f \in L^2([-\pi, \pi])$, le nombre $\langle f, e_n \rangle$ est appelé le coefficient de Fourier d'ordre n de f .

Proposition 2.4 *Le système trigonométrique $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormale de $L^2([-\pi, \pi])$.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il est clair que $e_n \in L^2([-\pi, \pi])$. Montrons que pour tous n, m avec $n \neq m$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|e_n\| = (\langle e_n, e_n \rangle)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \right)^{1/2} = 1.$$

■

Théorème 2.15 *Le système trigonométrique $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est une base Hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$.*

Définition 2.11 (Séries trigonométriques) *On appelle série trigonométrique, toute série de la forme*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$$

ou de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$.

Exemple 2.16 *Soit f une fonction de $L^2([-\pi, \pi])$. La série de Fourier de f est une série trigonométrique de la forme*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} \text{ tel que } a_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

ou de la forme

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt$ et $\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt$.

Définition 2.12 (Fonction continue par morceaux) *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ si*

- 1) f est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points x_1, \dots, x_k .
- 2) En chacun des points x_1, \dots, x_k les limites à gauche et à droite de f existent. En particulier $f(a_+)$ et $f(b_-)$ existent.

Remarque 2.8 *On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R} si, elle est continue par morceaux sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

Définition 2.13 (Fonction lisse par morceaux) *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite lisse par morceaux sur $[a, b]$ si f et f' sont continues par morceaux sur $[a, b]$. En particulier, $f'(a_+)$ et $f'(b_-)$ existent.*

Théorème 2.16 (Dirichlet, 1824) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique et “lisse par morceaux” sur \mathbb{R} , et soit

$$S_N(f) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) = \sum_{-N}^N a_n e^{int}$$

où α_n , β_n et a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f . Alors pour tout x

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

En particulier, si f est continue, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = f(x).$$

Chapitre 3

Exercices

Exercice 3.1 Montrer que si f est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe E , telle que $f(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$, alors f est une forme hermitienne.

Solution : Soit f est une forme sesquilinéaire. On suppose que pour tout $x \in E$, $f(x, x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$f(x + y, x + y) \in \mathbb{R} \text{ et } f(x + iy, x + iy) \in \mathbb{R}$$

alors comme $f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$, donc $f(x, y) + f(y, x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et d'autre part on a $f(x + iy, x + iy) = f(x, x) - if(x, y) + if(y, x) + f(y, y)$ alors $f(y, x) - f(x, y) = i\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. Il en résulte que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) \text{ et } f(y, x) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta).$$

Alors

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Exercice 3.2 On définit pour tous P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

Solution : On a $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=-1}^1 P(i) Q(i)$. Tout d'abord on montre la symétrie la bilinéarité. Pour tous P, Q et L de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= \sum_{i=-1}^1 P(i) Q(i) \\ &= \sum_{i=-1}^1 Q(i) P(i) = \langle Q, P \rangle, \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \langle P + \alpha Q, L \rangle &= \sum_{i=-1}^1 (P(i) + \alpha Q(i)) L(i) \\ &= \sum_{i=-1}^1 P(i) L(i) + \alpha \sum_{i=-1}^1 Q(i) L(i) \\ &= \langle P, L \rangle + \alpha \langle Q, L \rangle. \end{aligned}$$

Pour la définie positivité, on remarque que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i=-1}^1 P(i) P(i) = \sum_{i=-1}^1 (P(i))^2 \geq 0,$$

l'expression $\sum_{i=-1}^1 (P(i))^2$ est nulle si et seulement si $P(i) = 0$ pour tout entier $i = -1, 0, 1$. Alors le polynôme P admet trois racines différentes, mais P est un polynôme de degré au plus 2, donc forcément $P = 0$. D'autre part $\langle 0, 0 \rangle$ ce qui montre la définie positivité.

2) On a par définition $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \langle P, Q \rangle = 0 \text{ pour tout } Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, on a pour tout $Q \in \mathbb{R}_1[X]$, $\langle P, Q \rangle = 0$ si et seulement si $\langle P, 1 \rangle = 0$ et $\langle P, x \rangle = 0$ car $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}\{1, x\}$. Alors

$$\langle P, 1 \rangle = 0 \text{ et } \langle P, x \rangle = 0$$

impliquent

$$2a + 3c = 0 \text{ et } 2b = 0$$

donc $c = -\frac{2}{3}a$ et $b = 0$. Alors $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \{P(x) = ax^2 - \frac{2}{3}a, a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3.3 On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Solution : Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n).$$

On pose $x = (1, \dots, 1)$ et $y = (|a_1|, \dots, |a_n|)$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \left| \sum_{i=1}^n 1 \times |a_i| \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Exercice 3.4 Soit H un espace préhilbertien sur \mathcal{K} , et $x, y \in H$. Montrer que

- 1) Si $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ ou $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle$ pour tout $z \in H$, alors $x = y$.
- 2) La fonction $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

est une norme sur H .

Exercice 3.5 Soit H un espace préhilbertien, $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites de H qui convergent respectivement, vers $x \in H$ et $y \in H$. Alors $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.6 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Montrer que l'application qui, à deux éléments x et y associe leur produit scalaire est une fonction continue sur $E \times E$.

Exercice 3.7 Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$, avec n dans \mathbb{N} et x_n dans \mathcal{K} ($\mathcal{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}), telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_n^2| < \infty.$$

1) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur \mathcal{K} .

2) On pose, pour x et y dans $l^2(\mathbb{N})$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i. \quad (3.1)$$

Montrer que (1) définit bien un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.

3) Donner les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski avec ce produit scalaire.

4) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire usuel.

Exercice 3.8 Soit $H = l^2$ l'espace de Hilbert des suites réels $(x_n)_{n \geq 1}$ de carré sommable. Soient $\alpha > 1$ un réel et $k \geq 1$ un entier fixe. On pose

$$F = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in l^2; x_k = 0 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} x_n = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un s.e.v fermé de H et déterminer F^\perp .

Solution : On sait que le produit scalaire usuel sur H est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Soit pour $n \geq 1$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ (1 est dans $n^{\text{ème}}$ place). Alors $F = \{e_n; n \geq 1\}$ est la base hilbertienne canonique de H . On pose $\alpha = (\alpha^{-n})_{n \geq 1}$, on remarque que $\alpha \in H$, et par la définition de F on a $\langle x, \alpha \rangle = 0$ pour tout $x \in F$. Alors

$$x \in F \iff x \perp \alpha \text{ et } x \perp e_k.$$

Par conséquent,

$$x \in F \iff x \in (\text{vect} \{\alpha, e_k\})^\perp$$

tel que $\text{vect} \{ \alpha, e_k \}$ est le sous-espace vectoriel de H engendré par les deux vecteurs α, e_k . Donc $F = (\text{vect} \{ \alpha, e_k \})^\perp$. Par suite, comme l'orthogonal d'une partie quelconque de H est un s.e.v fermé de H , alors F est s.e.v fermé de H . Par conséquent, comme la dimension de $\text{vect} \{ \alpha, e_k \}$ est finie, alors il est fermé donc

$$F^\perp = (\text{vect} \{ \alpha, e_k \})^{\perp\perp} = \text{vect} \{ \alpha, e_k \}.$$

Exercice 3.9 Soit $H = L([0, 1])$ l'espace de Hilbert des fonctions réels f tel que $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$. On pose

$$F = \left\{ f \in L([0, 1]); \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un s.e.v fermé de H et déterminer F^\perp .

Solution : On sait que le produit scalaire usuel sur H est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

On a pour tout $f \in H$, $f \in F$ si et seulement, si $\langle f, 1 \rangle = 0$ tel que 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$. Donc si on pose $D = \text{vect} \{ 1 \}$, alors

$$f \in F \iff f \in D^\perp.$$

Alors $F = D^\perp$ et donc F est un s.e.v de H car F est l'orthogonale d'une partie de H . Comme la dimension de D égale à 1, alors D est fermé, par conséquent

$$F^\perp = D^{\perp\perp} = D.$$

Exercice 3.10 Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1])$ muni du produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

1) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.

2) Soit $c > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sin(cnx)$. Déterminer $c > 0$ pour que f_n et f_{n+1} soit orthogonales.

Exercice 3.11 Soit $E = C([-1, 1]; \mathbb{R})$ et soit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)dx.$$

Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ et on pose $f(x) = x^3$.

- 1) Justifier bien l'existence de la projection orthogonale de f sur F .
- 2) Déterminer $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F .

Exercice 3.12 Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

- 1) Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$
- 2) Justifier la convergence des intégrales $\langle P, Q \rangle$ pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$.
- 3) Vérifier que l'application est bien définie.
- 4) Vérifier que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 5) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ avec la méthode de Gram – Schmidt.
- 6) Soit $P(X) = 1 + X + X^3$. Déterminer $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|P - Q\|$ soit minimal. $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.13 Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- 1) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.

2) Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de G-Schmidt, une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.14 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H .

Montrer que $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ (\overline{F} est l'adhérence de F dans H).

Solution : Soit $x \in (\overline{F})^\perp$. Alors pour tout $y \in \overline{F}$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, en particulier $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$. Alors

$$(\overline{F})^\perp \subset F^\perp.$$

Soit maintenant $x \in F^\perp$, alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in \overline{F}$, donc il existe une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ de F tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - z\| = 0.$$

Comme le produit scalaire est une application continue et $\langle x, z_n \rangle = 0$, alors

$$\langle x, z \rangle = \left\langle x, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, z_n \rangle = 0.$$

Donc $x \in (\overline{F})^\perp$ et alors

$$F^\perp \subset (\overline{F})^\perp.$$

Exercice 3.15 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H . Montrer que F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Solution : On suppose que F est dense dans H , donc $\overline{F} = H$ et alors

$$(\overline{F})^\perp = H^\perp = \{0\}$$

et comme $F^\perp = (\overline{F})^\perp$, donc $F^\perp = \{0\}$. Réciproquement, on suppose que $F^\perp = \{0\}$.

comme \overline{F} est fermé, alors par le théorème de décomposition, on a

$$\begin{aligned} H &= \overline{F} + (\overline{F})^\perp \\ &= \overline{F} + F^\perp \\ &= \overline{F}. \end{aligned}$$

Exercice 3.16 On considère l'espace préhilbertien $H = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1) Soit $f \in H$ une fonction non nulle sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{[f(x)]^2} dx \right) \geq 1.$$

2) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.

3) Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4) On pose $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $f(x) = x^2$.

- Justifier l'existence de la projection orthogonale de f sur F .

- Déterminer $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F .

- Calculer le minimum de

$$I_{a,b} = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

5) H est un espace de Hilbert ? justifier.

Solution : 1) Comme la fonction f est non nulle sur $[0, 1]$ alors $1/f \in H$. l'inégalité

de Cauchy-Schwarz sur les deux fonctions f et $1/f$ donne

$$|\langle f, 1/f \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle 1/f, 1/f \rangle$$

donc

$$\left(\int_0^1 f(x) \frac{1}{f(x)} dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_0^1 [1/f(x)]^2 dx \right),$$

et comme

$$\left(\int_0^1 f(x) \frac{1}{f(x)} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 dx \right)^2 = 1$$

alors

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_0^1 [1/f(x)]^2 dx \right) \geq 1.$$

2) La fonction g est de norme 1, alors $1 = \|g\|^2 = \langle g, g \rangle$ et donc $\int_0^1 [ax + b]^2 dx = 1$, il vient

$$\frac{a^2}{3} + ab + b^2 = 1,$$

et on a g orthogonale à 1, donc $\langle g, 1 \rangle = 0$, d'où $\int_0^1 (ax + b) dx = 1$ et donc $\frac{a}{2} + b = 0$ ou $a = -2b$. Par conséquent on a

$$\left[a = -2\sqrt{3}, b = \sqrt{3} \right] \text{ ou } \left[a = 2\sqrt{3}, b = -\sqrt{3} \right].$$

.3) Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[x]$.

On sait que $\{1, x\}$ est une base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[x]$, alors on pose $e_1 = 1$ et $e_2 = x$. Par la méthode de Gram-Schmidt, on pose $u_1 = e_1$ donc $\|u_1\|^2 = \int_0^1 dx = 1$, alors $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1$ et on a

$$u_2 = e_2 - \langle e_2, v_1 \rangle v_1 = x - \langle x, 1 \rangle = x - \int_0^1 x dx = x - \frac{1}{2}$$

d'autre part

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

d'où $\|u_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ alors $v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$. Donc $\{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[x]$.

4) *) $H = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien et $F = \mathbb{R}_1[x]$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors il est complet et convexe. Alors le théorème de la projection orthogonale fournit l'existence de la projection orthogonale de f sur F .

*) Déterminons $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F . On sait que $P_F(f) = \sum_{i=1}^2 \langle f, v_i \rangle v_i$ donc

$$\begin{aligned} P_F(f) &= \langle x^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle x^2, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} \rangle \cdot (2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) \\ &= \int_0^1 x^2 dx + (2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) \int_0^1 x^2 (2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x) = x - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$d(f; F) = \inf_{h \in F} \|f - h\| = \|f - P_F(f)\|,$$

et comme $f - P_F(f) \in F^\perp$ alors

$$\|f\|^2 = \|f - P_F(f) + P_F(f)\|^2 = \|f - P_F(f)\|^2 + \|P_F(f)\|^2$$

donc

$$\|f - P_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|P_F(f)\|^2 = \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180}$$

d'où $\|f - P_F(f)\| = \frac{\sqrt{5}}{30}$.

*) Le minimum de $I_{a,b} = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

Remarquons que $I_{a,b} = \langle f - h, f - h \rangle = \|f - h\|^2$ tel que $h(x) = ax + b$. Alors $I_{a,b}$ soit minimum si et seulement si $h = P_F(f)$. Dans ce cas

$$I_{a,b} = \|f - P_F(f)\|^2 = \frac{1}{180}.$$

Alors $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

5) L'espace $H = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien mais il n'est pas complet.

Exercice 3.17 Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$, on définit les deux opérateurs $S, T : X \rightarrow X$ par

$$\begin{aligned} Sf(x) &= x \int_0^1 f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ Tf(x) &= xf(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

1) Montrer que $ST \neq TS$.

2) Calculer la norme de S, T, ST et TS .

Exercice 3.18 Soit X un espace vectoriel normé de dimension finie et $A : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. Montrer que A est borné.

Exercice 3.19 Soit T l'opérateur de $l^2(\mathbb{N})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ tel que pour tout élément $x = (x_n)_{n \geq 1}$ de $l^2(\mathbb{R})$, on a

$$Tx = (a_n x_n)_{n \geq 1}$$

ou $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite des nombres complexes.

1) Montrer que T est borné si et seulement si, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

2) Calculer l'opérateur adjoint T^* de T .

3) On suppose que

$$(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}.$$

Vérifier que T est borné et calculer T^{-1} l'opérateur inverse de T .

Solution : 1) On suppose que T est borné. Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in l^2(\mathbb{R})$

$$\|Tx\| \leq M \|x\|.$$

En particulier, pour $x = (e_i) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ on a $\|x\| = 1$ et comme $\|Tx\|^2 = |a_i|^2$ alors $|a_i|^2 \leq M^2$ pour tout i . Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée. On suppose maintenant

que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée et soit $M = \sup_{n \geq 1} a_n$. Donc pour tout $x \in l^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 |x_n|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \\ &\leq M^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Alors $\|Tx\| \leq M \|x\|$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

2) Soient $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ deux éléments de $l^2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle T(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \rangle \\ &= \langle (a_n x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x_n) \overline{y_n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{(a_n y_n)} \\ &= \langle (x_n)_{n \geq 1}, (\overline{a_n y_n})_{n \geq 1} \rangle = \langle x, (\overline{a_n y_n})_{n \geq 1} \rangle. \end{aligned}$$

Par la définition de l'opérateur adjoint de T on conclut que

$$T^*y = T^*(y_n)_{n \geq 1} = (\overline{a_n y_n})_{n \geq 1}.$$

3) Soit $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$. Pour tout $x \in l^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|. \end{aligned}$$

Donc T est borné. Soit T^{-1} l'opérateur inverse de T , donc

$$TT^{-1} = T^{-1}T = Id.$$

Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l^2(\mathbb{R})$, alors on a

$$TT^{-1}x = T(T^{-1}x) = T(z_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{z_n}{n}\right)_{n \geq 1} = x = (x_n)_{n \geq 1}$$

donc pour tout $n \geq 1$, $\frac{z_n}{n} = x_n$, par conséquent $(z_n)_{n \geq 1} = (nx_n)_{n \geq 1}$. D'où

$$T^{-1}x = T^{-1}(x_n)_{n \geq 1} = (nx_n)_{n \geq 1}.$$

D'autre part

$$T^{-1}Tx = T^{-1}(Tx) = T^{-1}\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(n\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1} = (x_n)_{n \geq 1} = x.$$

Alors l'opérateur inverse de T est l'opérateur T^{-1} défini sur $l^2(\mathbb{R})$ par

$$T^{-1}(x_n)_{n \geq 1} = (nx_n)_{n \geq 1}.$$

Exercice 3.20 On considère l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum |x_n|^2 < +\infty$. On suppose donnée une suite bornée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de scalaires et on pose pour tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2(\mathbb{N})$

$$Ax = (\alpha_{n+1}x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

- 1) Montrer que l'opérateur A est linéaire continue de $l^2(\mathbb{N})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2) On suppose $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. Exprimer la norme de A et Déterminer l'adjoint A^* .
- 3) Montrer que A est compact si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Exercice 3.21 Soit X un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs

linéaires continus de X dans X . Pour $f \in \mathcal{L}(X)$, on pose

$$\|f\| = \{\|f(x)\|; \|x\| \leq 1, \forall x \in X\}.$$

- 1) Prouver que $\|\cdot\|$ définit une norme sur X .
- 2) Démontrer que pour tous $f \in \mathcal{L}(X)$ et $x \in X$, on a

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|.$$

- 3) En déduire que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(X)$, alors

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|.$$

Exercice 3.22 Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\pi - x & \text{si } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est impaire sur $[-\pi, \pi]$.
- 2) Tracer le graphe de f .
- 3) Donner la série de Fourier de f .
- 4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Solution : On a f est 2π -périodique et elle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\pi - x & \text{si } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

1) Montrons que f est impaire sur $[-\pi, \pi]$.

Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $-x \in [-\pi, \pi]$ et on a si $x \in]0, \pi[$, alors $-x \in]-\pi, 0[$ et

$$f(-x) = -\pi - (-x) = -(\pi - x) = -f(x)$$

et si $x \in]-\pi, 0[$, alors $-x \in]0, \pi[$ et

$$f(-x) = \pi - (-x) = \pi + x = -(-\pi - x) = -f(x).$$

Donc f est impaire.

2) Le graphe de f .

3) La série de Fourier de f . On a par définition

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

On sait que $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ et $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$, donc $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ car f est impaire. On a encore

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{n}.$$

Alors

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(nx)}{n}.$$

4) La somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Si f est continue en x alors $S_f(x) = f(x)$ (f vérifie les conditions du théorème de Dirichlet). **■**

Donc pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(n \frac{\pi}{2})}{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi)}{2n} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1) \frac{\pi}{2})}{2n+1} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n \frac{\pi}{2})}{2n+1} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad \blacksquare$$

Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Examen final- Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 15/01/2017

Exercice 1 (5 points) (Questions de cours)

Soit B une forme hermitienne sur E . Si B est positive. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 2 (6 points)

Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$, avec n dans \mathbb{N} et x_n dans \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}), telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_n^2| < \infty.$$

- 1) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{k} .
- 2) On pose, pour x et y dans $l^2(\mathbb{N})$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i. \tag{3.2}$$

Montrer que (1) définit bien un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.

3) Donner les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski avec ce produit scalaire.

4) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire usuel.

Exercice 3 (5 points)

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1])$ muni du produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

- 1) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.
- 2) Soit $c > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sin(cnx)$. Déterminer $c > 0$ pour que f_n et f_{n+1} soit orthogonales.

Exercice 4 (4 points)

Soient H_1 et H_2 deux espaces hilbertiens, \langle, \rangle_1 le produit scalaire sur H_1 et \langle, \rangle_2 le produit scalaire sur H_2 et soient C_1 un convexe fermé de H_1 et C_2 un convexe fermé de H_2 .

Pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H_1 \times H_2$, on définit le produit scalaire sur $H_1 \times H_2$ par

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 + \langle y_1, y_2 \rangle_2.$$

- 1) Montrer que $C = C_1 \times C_2$ est un convexe fermé.
- 2) Donner la propriété qui caractérise la projection orthogonale sur la partie $C = C_1 \times C_2$, en déduire que $pr_C = pr_{C_1} \times pr_{C_2}$.

Rattrapage - Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 16/03/2017

Exercice 1 (3+3 points)

1) Après avoir introduit un produit scalaire convenable, montrer les inégalités suivantes :

(a) Pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, $|xx' + 2yy'| \leq \sqrt{x^2 + 2y^2} \sqrt{x'^2 + 2y'^2}$.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\left(\int_{-1}^1 t^2 P(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{5} \int_{-1}^1 [P(t)]^2 dt$

2) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max\{|x|, |y|, |x - y|\}$.

Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 . Dessiner la boule unité associée.

Exercice 2 (7 points)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $p \in]0, +\infty[$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

Soit la boule unité $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p \leq 1\}$.

1. Montrer que $\|x\|_p$ n'est pas une norme pour $p \in]0, 1[$.
2. Montrer que $\|x\|_p$ est une norme pour $p \in [1, \infty[$.

(Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de vérifier que B_p est convexe)

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty .$$

En déduire $\|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 (7 points)

Calculer le minimum sur \mathbb{R}^2 de

$$f(a, b) = \int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x) dx.$$

Indication : On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t) g(t) \sin(t) dt.$$

Examen - Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 14/01/2018

Exercice 1 (9 points : 2+2+2+3)

Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$, avec n dans \mathbb{N} et x_n dans \mathbb{k}

($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}), telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_n^2| < \infty.$$

1) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{k} .

2) On pose, pour x et y dans $l^2(\mathbb{N})$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i. \quad (3.3)$$

Montrer que (1) définit un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.

3) Donner les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski avec ce produit

scalaire.

4) Montrer que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire usuel.

Exercice 3 (11 points : 1+1+1+2+3+3)

Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$$

- 1) Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$
- 2) Justifier la convergence des intégrales $\langle P, Q \rangle$ pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$.
- 3) Vérifier que l'application est bien définie.
- 4) Vérifier que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 5) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ avec la méthode de *Gram - Schmidt*.
- 6) Soit $P(X) = 1 + X + X^3$. Déterminer $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|P - Q\|$ soit minimal. $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Rattrapage - Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 10/04/2018

Exercice 1 (2+5 points)

1) On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

2) On définit pour tous P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

Exercice 3 (3+4 points)

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale

à la fonction constante égale à 1.

2) Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de G-Schmidt, une base orthonormale

de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3 (2+4 points)

Soit $E = C([-1, 1]; \mathbb{R})$ et soit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)dx.$$

Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ et on pose $f(x) = x^3$.

1) Justifier bien l'existence de la projection orthogonale de f sur F .

2) Déterminer $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F .

Examen - Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 07 /02/2019

Exercice 1 (14 points)

On considère l'espace préhilbertien $H = C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1) Soit $f \in H$ une fonction non nulle sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{[f(x)]^2} dx \right) \geq 1.$$

2) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.

3) Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale

de $\mathbb{R}_1[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4) On pose $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $f(x) = x^2$.

- Justifier l'existence de la projection orthogonale de f sur F .

- Déterminer $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F .

- Calculer le minimum de

$$I_{a,b} = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

5) H est un espace de Hilbert ? justifier.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\pi - x & \text{si } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est impaire sur $[-\pi, \pi]$.

2) Tracer le graphe de f .

3) Donner la série de Fourier de f .

4) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Rattrapage - Introduction à l'analyse hilbertienne -

Le 25 /05/2019

Exercice 1 (5 points)

- 1) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^4 P(i) Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
- 2) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2 (3 points)

Soit $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel de dimension n , muni de la norme

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Montrer que cette norme n'est pas issue d'un produit scalaire.

Exercice 2 (6 points)

On considère l'espace préhilbertien $H = \mathcal{C}([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire \langle, \rangle défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

On pose $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $f(x) = x^3$.

- 1) Justifier l'existence de la projection orthogonale de f sur F .
- 2) Déterminer $P_F(f)$, puis la distance $d(f; F)$ de f à F .
- 3) Calculer le minimum de $I_{a,b} = \int_{-1}^1 (x^3 - ax - b)^2 dx$ et dire pour quelles valeurs de a et b ce minimum est atteint.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = -\pi, \\ 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$.
- 2) Tracer avec précision le graphe de f .
- 3) Donner $S(x)$ la série de Fourier de f .

soit minimal. (**Indication** : utiliser la projection orthogonal).

Bibliographie

- [1] H. Chebli, *Analyse hilbertienne*, Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2001.
- [2] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, © Springer-Verlag London Limited 2008.
- [3] Y. Privat, *Espaces Vectoriels Normés et Topologie*, Polycopié de cours.
- [4] P. D. Lax, *Functional Analysis* (Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts).
- [5] S. Axler, *Linear Algebra Done Right* (Undergraduate Texts in Mathematics), Second Edition. © 1997, 1996 Springer-Verlag New York, Inc.
- [6] J-Y. Chemin, *Bases d'analyse fonctionnelle*.
- [7] Y. Privat, *Espaces Vectoriels Normés et Topologie*, Polycopié de cours.
- [8] B. Bekka, *Espaces vectoriels normés*, Cours L3 Rennes 2009/2010.

حوصلة لنشاطات البحث

Synthèse

Synthèse des travaux pédagogiques, administratifs et scientifiques

Ce rapport comprend deux parties: premièrement, nous proposons des activités pédagogiques et administratives, tandis que la deuxième partie résume les activités scientifiques.

1- Activités pédagogiques et administratives

Tout d'abord, j'ai commencé ma carrière en tant que professeur d'enseignement secondaire à partir de 1996 jusqu'à 2012.

Entre 2010 et 2011, j'ai enseigné à l'université Djilali Bounaama, Khemis Miliana en tant que enseignant vacataire, où j'ai assuré les TD de deux matières (Algèbre 1 et 2 et Analyse 1 et 2).

Après avoir été nommé en décembre 2012 comme maître-assistant (B) au sein de la faculté des sciences et de la technologie de à l'université Djilali Bounaama, Khemis Miliana, j'ai enseigné les matières suivantes :

- 1) Algèbre 1 et 2
- 2) Algèbre 3 et 4
- 3) Analyse Complexe
- 4) Introduction à l'analyse hilbertienne
- 5) Fonctions Holomorphes et Méromorphes
- 6) Introduction à la théorie des opérateurs.

1.1- Encadrement des mémoires de fin d'étude Licence et Master

J'ai encadré plusieurs étudiants en licence de mathématiques dans des mémoires de fin d'étude jusqu'en 2015. En outre, les étudiants de master en mathématiques suivants :

- 1) Chérifa Laraba

Thème : Sur les fonctions arithmétiques, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal, soutenu en 2015. Université Khemis Miliana.

2) Khadidja Hibatallah Kouache

Thème: Quelques outils d'analyse réelle et complexe en théorie analytique des nombres, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications, soutenu en 2016. Université Khemis Miliana.

3) Yaqot Baha

Thème: Sur les séries de Dirichlet, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications, soutenu en 2016. Université Khemis Miliana.

4) Amel Hamadou

Thème: La transformée de Mellin et quelques applications, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications, soutenu en 2017. Université Khemis Miliana.

5) Fatima Zahra Achour

Thème: Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de fonctions arithmétiques, Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications, soutenu en 2018. Université Khemis Miliana.

6) Fadhila Bekhouche

Thème: Sur La Fonction Nombre de facteurs premiers d'un entier n , Mémoire Master en Mathématiques, Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications, soutenu en 2019. Université Khemis Miliana.

1.2- Polycopié

J'ai réalisé un polycopié de cours adressé aux étudiants de troisième année mathématiques LMD. Ce cours basé sur le contenu de nouveau programme de la matière "espaces vectoriels normés" il comporte trois chapitres, le premier est l'espaces de Banach, le deuxième chapitre contient " l'espace de Hilbert" et en termine par quelques exercices certains sont résolus dans le dernier chapitre.

M.KARRAS. Cours: Espaces Vectoriels normés. Destiné aux étudiants de troisième année en mathématiques, 2019/2020.

1.3- Responsabilités administratives et scientifiques

- 1) Membre du conseil scientifique de la faculté ST.
- 2) Membre du conseil scientifique de département MI.
- 3) Responsable de l'équipe de la spécialité Mathématiques (Licence).
- 4) Membre du projet CNEPRU N° B00L02UN44012014000: Détermination du spectre d'énergie relatif aux états « I » ; pour des familles de potentiels de forme exponentielle via les intégrales de chemin de Feynman, (2013- 2017).
- 5) Membre d'une équipe de recherche de laboratoire FIMA, Université Khemis Miliana.

2- Activités scientifiques

a) Avant le Doctorat

J'ai commencé la recherche en poste-graduation alors que je préparais un mémoire de magister sous la direction du professeur Abdallah Derbal à l'Ecole Normale Supérieure, Vieux Kouba, Alger.

Dans ce mémoire j'ai présenté une démonstration détaillée d'abord du théorème de Wigert, ensuite de celui de J. L. Nicolas et G. Robin.

La démonstration du dernier théorème est basée sur la connaissance et le calcul effectif des nombres hautement composés supérieurs (h.c.s.) de S. Ramanujan.

Références

- 1: A. Derbal, A. Smati, Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).
- 2: A. Derbal, Le nombre des diviseurs unitaires d'un entier dans les progressions arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 255--258.
- 3: A. Smati (Limoges, France), sur un problème d'Erdős et Kátai , Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 35 (2011) 205-216.

4: J.L. Nicolas, G. Robin, Majorations explicites pour le nombre des diviseurs de n , Canad. Math. Bull. 26(4) (1983)485-492.

5: J.L. Nicolas, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Can. J. Math., Vol. 23, No.1(1971) pp. 116-130.

6: J.L. Nicolas, Répartition des nombres largement composés. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12, n °2 (1977-1978).

7: N. Minculete, L. Toth, exponential unitary divisors, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 35(2011)205-216.

8: P. Dussart, Sharper bounds for ψ , θ , π , $p_{\{n\}}$ Rapport de recherche 1998-2006, Université de Limoges.

9: P. Erdős et J. L. Nicolas, répartition des nombres super abondants.
Bull.Soc.math.France, 103, 1975, p.65-90.

10: S. Ramanujan, Highly composite numbers, P. Lond. Math. Soc. Ser. 214(1915) 347-400; S. Ramanujan, Collected Papers, Chelsea, 1962, pp. 78-128.

11: T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag Berlin, 1976.

11: W.J. Ellison & M. M. France, Les nombres premiers, Hermann, Paris (1975).

b) Durant le Doctorat

L'étape de préparation au doctorat était centrée sur les fonctions arithmétiques et leurs valeurs moyennes, ce sujet de recherche appartient à la théorie analytique des nombres où cette dernière est considérée comme un axe de recherche très important en algèbre et théorie des nombres.

Dans ma thèse, nous nous sommes intéressés à certaines méthodes élémentaires et analytiques utilisées dans ces études. Avec ces méthodes, nous avons obtenu des résultats pour la fonction $D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) où $d(n)$ et $d^*(n)$ désignant respectivement le nombre de diviseurs et le nombre de diviseurs unitaires du nombre n . Ces résultats ont donné lieu à un article scientifique intitulé :

Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier. (Réf 9)

Références

- 1:** T. M. APOSTOL, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag Berlin, 1976.
- 2:** O. BORDELLES, Arithmetic Tales, Springer-Verlag London, 2012.
- 3:** A. BLANCHARD, Introduction a la théorie analytique des nombres premiers, Dunod Paris, 1990.
- 4:** O. BORDELLES, Multiplicative function over short segments, Actia Arithmetica-january 2013.
- 5:** O. BORDELLES, On short sums of certain multiplicative functions, Journal of Inequalities in Pure and Applied.
- 6:** O. BORDELLES, Mathematical Reviews/MathSciNet Reviewer Number: 45535. Mathematics· January 2002.
- 7:** H.CARTAN : H. CARTAN, Théorie élémentaire des fonctions analytiques. D'une ou plusieurs variables complexes
- 8:** A. DERBAL, Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier, Integer 12 (2012).
- 9 :** A. DERBAL, M. KARRAS, Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier. C. R., Math., Acad. Sci. Paris 354, No. 6, 555-558, (2016).
- 10 :** A. DERBAL, Le nombre des diviseurs unitaires d'un entier dans les progressions arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005)255-258.
- 11:** J. M. DE KONINCK and A. IVIC, Topics in Arithmetical Functions, Copyright: © North Holland 1980.
- 12:** W. J. ELLISON et M. MENDES-FRANCE, Les Nombres Premiers, Hermann Paris, 1975, actualités scientifiques et industrielles Numéro 1366.
- 13:** K. FORD, Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta Function, Proceedings of the London Mathematical Society, 2002, vol. 85, p. 565-633.
- 14:** A. J. HILDEBRAND, introduction to Analytic Number Theory, math 531 Lecture Notes, Fall 2005.

- 15:** A. IVIC, The Riemann-Zeta Function. Theory and Applications, Dover, 2003.
- 16:** E. KOWALSKI, Un cours de théorie analytique, Société Mathématique de France, 2004.
- 17:** A. A. KARATSUBA, Complex analysis in number theory, CRS Press.
- E. Kratz: E. KRÄTZEL, Lattice points, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- 18 :** J. L. NICOLAS, G. ROBIN, Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de N , Can. Math. Bull. 26 (1983) 485-492.
- 19:** M. B. NATHANSON, Elementary Methods in Number Theory, Springer-Verlag New York, 195 (2000).
- 20:** D. P. PARENT, Exercices de théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1978.
- 21:** M. RAM MURTY, Problems in Analytic Number Theory, Second Edition, September 2007.
- 22:** S. RAMANUJAN, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. serie 2, 14, (1915), pp. 347-409.
- 23:** J. SÁNDOR, On the arithmetical functions $d_{\{k\}}(n)$ and $d_{\{k\}^{\{*\}}}(n)$, Portugaliae Math. 53 (1996), 107-115.
- 24:** J. SÁNDOR, On the arithmetical functions $d_{\{k\}}(n)$, L'analyse Numér. Th. Approx., 18 (1989), 89-94.
- 25:** F. SMARANDACHE. Only Problems, Not solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- 26:** V. SITARAMAIAH & M. V. SUBBARAO, Unitary divisor problems for arithmetic progressions, Annales Univ. Sci.Budapest 32 (2010), 73-89.
- 27:** G. TENENBAUM, Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory, English edition © Cambridge University Press 1995.
- 28:** S. WIGERT, Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, Arkiv för Matematik, vol. 3, no. 18, (1907) pp. 1-9.
- 29:** P. Shui, A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions.

c) Après le Doctorat

Les recherches après le doctorat, resté dans le même contexte , où j'ai travaillé sur une fonction arithmétique multiplicative plus général que la fonction $D(n)$ qui été définie dans l'article (9), c'est la fonction $D_{\{k\}}(n)=((d_{\{k\}}(n))/(d_{\{k\}^{\{*\}}}(n)))$, tel que $d_{\{k\}}(n)$ est la fonction de diviseurs de Piltz et $d_{\{k\}^{\{*\}}}$ est sa fonction unitaire . On collaboration du professeur Abdallah Derbal, nous avons obtenu un résultat asymptotique de la fonction sommatoire de $D_{\{k\}}(n)$, elle été publié en 2018 sous le titre « Mean value of an arithmetic function associated with the Piltz divisor function »

J'ai également démontré un résultat important concerne la fonction multiplicative $D_{\{k,\omega\}}(n)=((d(n))/(k^{\{\omega(n)\}}))$ tel que $\omega(n)$ est le nombre de diviseurs premiers distincts de l'entier n , ce résultat a fait l'objet d'un article accepté dans la revue « Communications in Mathematics» en Janvier 2020.

D'autre part, un travail sur une fonction additive liée avec la fonction partie entière m'a amené à prouver une formule asymptotique été soumis dans la revue

« Notes on Number Theory and Discrete Mathematics» sous le titre: On a sum of an additive function related to the integer part function.

Enfin, on a appliqué un résultat important de I. Kiuchi à une fonction arithmétique, ce qui a donné des résultats importants, où ce travail est résumé dans un article accepté dans la revue scientifique « Contributions to Mathematics » sous le titre -An asymptotic formula of a sum function involving gcd and characteristic function of the set of r -free numbers.

Références

1: M. KARRAS, A. DERBAL, Mean value of an arithmetic function associated with the Piltz divisor function, Asian-European Journal of Mathematics, October 2018.

DOI: [10.1142/S179355712050062X](https://doi.org/10.1142/S179355712050062X)

2: M. BOUDERBALA, M. KARRAS, An asymptotic formula of a sum function involving gcd and characteristic function of the set of r -free numbers, Contributions to Mathematics (2020).

ملخص رسالة الدكتوراه

Résumé de la thèse

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Ecole Normale Supérieure, Kouba-Alger
Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Option: Algèbre et théorie des nombres

Intitulé de la thèse

Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives
et leurs séries de Dirichlet associées

Présentée par: *Mr KARRAS Meselem*

Dirigée par: *Pr DERBAL Abdallah*

Résumé

En théorie analytique des nombres, les fonctions arithmétiques est un thème central . Une fonction arithmétique est une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{C} . On peut la considérer comme une suite complexe définie sur \mathbb{N}^* . Une catégorie particulière de ces fonctions est intensément étudiée. Il s'agit des fonctions arithmétiques multiplicatives. Une fonction arithmétique est dite multiplicative si l'on a $f(1) = f(1)$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ dès que n et m sont premiers entre eux dans \mathbb{N}^* . D'abord les recherches furent axées sur les ordres maximaux de certaines fonctions arithmétiques.

Ce type de fonctions possèdent un comportement irrégulier. A titre d'exemple la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de l'entier naturel n , vaut 2 sur tous les nombres premiers et prend de grandes valeurs sur une infinité de nombres composés.

La fonction arithmétique multiplicative $D(n)$ définie par

$$D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)},$$

où $d^*(n)$ est le nombre de diviseurs unitaires n , est une fonction irrégulière. En effet, elle vaut 1 sur tous les nombres premiers, en particulier, la suite de ses valeurs sur les entiers entre 1 et 20 est

$$1, 1, 1, \frac{3}{2}, 1, 1, 1, 2, \frac{3}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}, 1, 1, 1, \frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}.$$

Une régularité apparaît lorsque l'on considère la quantité

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} D(n),$$

pour x assez grand. Dans cette direction, on a établi le résultat suivant

$$\sum_{n \leq x} D(n) = Ax + R(x), \tag{1}$$

tels que

$$A = 1.4276565 \dots \text{ et } |R(x)| \leq \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{5}}\right),$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann.

Dans cette thèse, nous étudions quelques méthodes analytiques et élémentaires utilisées dans l'étude des valeurs moyennes des fonctions arithmétiques multiplicatives, elle s'organise en cinq chapitres.

Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires et encore quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions arithmétiques multiplicatives.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté également les séries de Dirichlet, les définitions et quelques théorèmes comme la formule du produit eulérien, formule de Perron, et théorème de Ikehara.

Le chapitre trois est consacré pour calculer la valeur moyenne de la fonction multiplicative $D(n)$. Selon les étapes de la recherche, on a démontré trois résultats classés en termes d'importance. On a appliqué le théorème de Selberg-Deleng pour prouver le premier résultat suivant

$$\sum_{n \leq x} D(n) = Ax + \mathcal{O}\left(xe^{-C\sqrt{\ln x}}\right),$$

avec $A = 1.4276565 \dots$. Ainsi, on a utilisé, une formule de Perron qui améliore un peu le résultat précédent et on a établi le deuxième résultat suivant

$$\sum_{n \leq x} D(n) = Ax + \mathcal{O}\left(x \exp(-b(\ln x)^c)\right),$$

avec $A = 1.4276565 \dots$ et $b = b(c) > 0$ une constante et $c \in]0, 1[$. La dernière étape, on a démontré le résultat (1) de l'article [2]. La démonstration est basé sur les théorèmes et lemmes et tsuivants

Theorem 1 ([22, Th 5.1]) *On a*

$$\mathcal{D}(a, b, x) = H(a, b, x) + \Delta(a, b, x),$$

avec le terme principal

$$H(a, b, x) = \begin{cases} \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}} & \text{pour } 1 \leq a < b, \\ x(\ln x + 2\gamma - 1) & \text{pour } a = b = 1, \end{cases}$$

et le reste

$$\Delta(a, b, x) = - \sum_{n^{a+b} \leq x} \left\{ \psi\left(\left(\frac{x}{n^b}\right)^{\frac{1}{a}}\right) + \psi\left(\left(\frac{x}{n^a}\right)^{\frac{1}{b}}\right) \right\} + \mathcal{O}(1),$$

tels que ζ désigne la fonction zêta de Riemann et γ la constante d'Euler.

Theorem 2 ([22, Th 5.2]) *Avec les mêmes notations du théorème (3.4), on a*

$$\Delta(a, b, x) \ll x^{\frac{1}{a+b}}.$$

Proposition 3 *Un entier n est quadratiquement saturé si et seulement si n s'écrit de manière unique sous la forme $n = a^2 b^3$ avec a, b des entiers strictement positifs et b sans facteurs carrés.*

Lemma 4 *La série génératrice de la fonction arithmétique $D(n)$ est donnée par:*

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{D(n)}{n^s} = \zeta(s) G(s) \text{ où } G(s) = \zeta(2s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}}\right) \left(\Re(s) > \frac{1}{2}\right). \quad (2)$$

Lemma 5 *La fonction multiplicative $g(n)$ définie par*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s} = G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{2p^{3s}} + \frac{1}{2p^{4s}} + \dots\right), \Re(s) > \frac{1}{2}$$

est strictement positive si et seulement si n est quadratiquement saturé.

Lemma 6 *Pour tout $x \geq 1$ on a*

$$\sum_{n^2 m^3 \leq x} 1 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{5}}\right).$$

Le chapitre quatre est consacré à l'étude de la fonction $D(n)$ sur un sous-ensemble des entiers positifs $S_k(n)$, vérifiant la propriété suivante: pour tout entier k fixé et $n \geq 1$

$$S_k(n) = \min \{m \in \mathbb{N}^*, n \mid m^k\}.$$

Dans le dernier chapitre on introduit la fonction $D_k(n)$ définie par

$$D_k(n) = \frac{d_k(n)}{d_k^*(n)}$$

pour un entier fixe $k \geq 2$, telle que $d_k(n)$ est la fonction de diviseur de Piltz et d_k^* est la fonction unitaire analogue de la fonction d_k . En fait, cette fonction ce n'est qu'une généralisation de la fonction $D(n)$. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

$$\sum_{n \leq x} D_k(n) = A_k x + \mathcal{O}_k \left(x^{1/2} (\ln x)^{k-2} \right), \quad (3)$$

avec

$$A_k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-k} \right).$$

Quelques valeurs de A_k .

k	2	3	4	5	6
A_k	1,427656	2,22416	3,8004	7,10848	14,4491

La démonstration de ces résultats est basé sur les lemmes suivants

Lemma 7 *L'inégalité suivante existe*

$$D_k(nm) \leq D_k(n) D_k(m) k^{\omega(\min(n,m))}, \quad (4)$$

pour tout entier $n, m \geq 1$.

Lemma 8 *Pour tout entier $k \geq 2$, et pour tout réel x satisfaisant $|x| < 1$, on a*

$$x(k-1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha+1} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} = (1-x)^{1-k} - 1. \quad (5)$$

Lemma 9 *Pour tout entier $k \geq 2$, on a*

$$D_k * \mu = \frac{k-1}{k} (s_2 \times D_{k-1}) := g_k \quad (6)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_k(n)}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-k} \right),$$

où s_2 est la fonction caractéristique des entiers quadratiquement saturé (2-plein).

References

- [1] A. DERBAL, *Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier*, Integer 12 (2012).
- [2] A. DERBAL, M. KARRAS, *Valeurs moyennes d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier*. C. R., Math., Acad. Sci. Paris 354, No. 6, 555 – 558, (2016).
- [3] A. DERBAL, *Le nombre des diviseurs unitaires d'un entier dans les progressions arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005)255 – 258
- [4] A. BLANCHARD, *Introduction a la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod Paris, 1990.
- [5] B.MELVYN NATHANSON, *Elementary Methods in Number Theory*.
- [6] D. P. PARENT, *Exercices de théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1978.
- [7] EMMANUEL KOWALSKI, *Un cours de théorie analytique*, Société Mathématique de France, 2004.
- [8] G. TENENBAUM, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, English edition © Cambridge University Press 1995.
- [9] MARUTI RAM MURTY, *Problems in Analytic Number Theory*, Second Edition, September 2007.
- [10] O. BORDELLES, *Arithmetic Tales*, Springer-Verlag London, 2012.
- [11] T. M. APOSTOL, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.
- [12] W.J.ELLISON ET MICHEL MENDES-FRANCE, *Les Nombres Premiers*, Hermann Paris, 1975, actualités scientifiques et industrielles Numéro 1366.
- [13] H.CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques. D'une ou plusieurs variables complexes*
- [14] J. M. DE KONINCK AND A. IVIC, *Topics in Arithmetical Functions*, Copyright: © North Holland 1980.
- [15] O. BORDELLES, *Mathematical Reviews/MathSciNet Reviewer Number: 45535*.
- [16] A.IVIĆ, *The Riemann-Zeta Function. Theory and Applications*, Dover, 2003.
- [17] A.J. HILDEBRAND, *introduction to Analytic Number Theory*, math 531 Lecture Notes, Fall 2005.
- [18] J. L. NICOLAS, G. ROBIN, *Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de N*, Can. Math. Bull. 26 (1983) 485 – 492.
- [19] ANATOLY A. KARATSUBA, *Complex analysis in number theory*, CRS Press.

- [20] O. BORDELLÈS, Multiplicative function over short segments, *Actia Arithmetica*-january 2013.
- [21] O. BORDELLÈS, On short sums of certain multiplicative functions, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*· January 2002.
- [22] E. KRÄTZEL, *Lattice points*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [23] K. FORD, Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta Function, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2002, vol. 85, p. 565 – 633.
- [24] F. SMARANDACHE. *Only Problems, Not solutions*. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [25] V. SITARAMAIAH & M. V. SUBBARAO, Unitary divisor problems for arithmetic progressions, *Annales Univ. Sci.Budapest* 32 (2010), 73 – 89.
- [26] J. SÁNDOR, On the arithmetical functions $d_k(n)$ and $d_k^*(n)$, *Portugaliae Math.* 53 (1996), 107 – 115.
- [27] J. SÁNDOR, On the arithmetical functions $d_k(n)$, *L'analyse Numér. Th. Approx.*, 18 (1989), 89 – 94.
- [28] M. B. NATHANSON, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer-Verlag New York, 195 (2000) .
- [29] S. WIGERT, Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier, *Arkiv för Matematik*, vol. 3, no. 18, (1907) pp. 1 – 9.
- [30] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc. serie 2*, 14, (1915), pp. 347 – 409.