UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

# Continuité de la Fonction maximale sur les $\mathbf{L}^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$

**Zeghad zouheyr**

23-06-2013

# *Remerciements*

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur D. Drihem pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur soutient tout au long de mes études.

## Résumé

La fonction maximale de Hardy-Littelwood est continue sur les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si le variable exposant $p$ est vérifié certain condition finalement on donne la continuité de l'opérateur de Calderón-Zygmund sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ comme une conséquence du résultat obtenu sur la continuité de la fonction maximale.

# Table des matières

# Introduction

En 2004, Diening dans [3] a été étudié la continuité de la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f$ sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ avec $p$ une variable exposant satisfait la condition de uniformément continue

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\ln \ |x-y|}, \tag{*}$$

pour tout $|x-y| \leq \frac{1}{2}$, et la fonction maximale définie par:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

où $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Le but de ce mémoire est réponde la question suivant: quelle sont les conditions sur le variable exposant $p$ pour la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f$ est continue sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ .

Finalement nous présentons les résultats obtenus sur la continuité de l'opérateur de Calderón-Zygmund sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ où l'opérateur de Calderón-Zygmund définie par :

$$T\varphi\,(x) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} K\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,dy,$$

où $K$ le noyau de Calderón-Zygmund.

Le mémoire se divise en quatre parties.

En premier chapitre, nous avons donné quelques rappelés des notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire par exemple la fonction modular et la propriété $\Phi$-fonction et l'espace semi-modular et rappelés quelques propriétés fondamentales dans la mesure.

En deuxième chapitre, nous avons donné quelques propriétés des espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

En troisième chapitre, on étudie la continuité de la fonction maximale de Hardy-littlewood sur les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ avec $(1 < p \leq \infty)$ et satisfait la condition (*).

En quatrième chapitre, on donne L'opérateur de Calderón-Zygmund comme une application.

# Chapitre 1

# Quelques résultats préliminaires

L'objet de ce chapitre est rappelé quelque propriété fondamentale qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire.

Nous définirons quelque notion de fonction modular et l'espace semi-modular pour définit le variable exposant de Lebesgue.

## 1.1 Semi-modular

**Définition 1.1.1** *Soit* $(A, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré complet* $\sigma$*-finie. On désigne* $L^0(A, \mu)$ *par l'espace des fonctions* $\mu$*-mesurable sur* $A$ *à valeur dans* $\mathbb{k}$*.*

**Définition 1.1.2** *Soit* $X$ *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel une fonction* $\varrho : X \to [0, \infty]$ *est dit semi-modular sur* $X$ *si les propriétés suivantes sont vérifiés.*

a) $\varrho(0) = 0$

b) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ pour tout $x \in X$ , $\lambda \in \mathbb{k}$ avec $|\lambda| = 1$.

c) $\varrho$ est convexe.

d) $\varrho$ est continue à gauche.

e) $\varrho(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$ implique $x = 0$.

Une semi-modular $\varrho$ est dit modular si

f) $\varrho(x) = 0$ implique $x = 0$.

Est dit continue si

g) L'application $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ est continue sur $[0,\infty)$ pour tout $x \in X$.

**Exemple 1.1.1** *(a) Si $1 \leq p < \infty$ alors*

$$\varrho_p(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx.$$

Définit une modular continue sur $L^0(\Omega)$.

(b) Soit $\varphi_\infty(t) := \infty . \chi_{(1,\infty)}(t)$ pour tout $t \geq 0$,i.e.

$$\varphi_\infty(t) = \begin{cases} \infty & t \in (1,\infty)\,, \\ 0 & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Alors

$$\varrho_\infty(f) := \int_{\Omega} \varphi_\infty\left(|f(x)|\right) dx.$$

Définit une semi-modular sur $L^0(\Omega)$ mais n'est pas continue.

(c) Soit $\omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec $\omega > 0$ presque partout et $1 \leq p < \infty$. Alors

$$\varrho(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^p \, \omega\,(x) \, dx.$$

Définit une modular continue sur $L^0(\Omega)$.

(d) Si $1 \leq p < \infty$ alors

$$\varrho((x_j)) := \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \,.$$

Définit une modular continue sur $\mathbb{R}^n$.

(e) Pour $f \in L^0(\Omega)$ on définit $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$ par la formule $f^*(s) := \{t : ||f| > t| > s\}$. Pour $1 \leq q \leq p < \infty$ cette expression,

$$\varrho(f) := \int_{0}^{\infty} \left| f^*(s^{\frac{p}{q}}) \right|^q ds.$$

Définit une modular continue sur $L^0(\Omega)$.

Soit $\varrho$ une semi-modular sur $X$. Puisque $\varrho$ est positive et convexe et $\varrho(0) = 0$ ce que implique que $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ n'est pas décroisant sur $[0, \infty)$ pour tout $x \in X$. De plus

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x) = \varrho(|\lambda|\, x) \leq |\lambda|\, \varrho(x) \quad \text{pour tout } |\lambda| \leq 1 \\ \varrho(\lambda x) = \varrho(|\lambda|\, x) \geq |\lambda|\, \varrho(x) \quad \text{pour tout } |\lambda| \geq 1 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

## 1.2 L'espace semi-modular

**Définition 1.2.1** *Si $\varrho$ une semi-modular ou modular sur $X$ alors*

$$X_\varrho := \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x) = 0 \right\},$$

*est dit espace semi-modular ou espace modular.*

D'après l'inégalité (1.1.1) on peut définir l'ensemble $X_\varrho$ par une d'autre formule

$$X_\varrho := \{x \in X : \varrho(\lambda x) < \infty \text{ quelque soit } \lambda \in (0, \infty)\}.$$

L'orsque pour $\lambda' < \lambda$ l'inégalité (1.1.1) on a:

$$\varrho(\lambda' x) = \varrho(\frac{\lambda'}{\lambda} \lambda x) \leq \frac{\lambda'}{\lambda} \varrho(\lambda x) \to 0.$$

Quand $\lambda' \to 0$.

Dans le théorème suivant on démontre que $X_\varrho$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel normé.

**Théorème 1.2.1** *Soit $\varrho$ une semi-modular sur $X$. Alors $X_\varrho$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel normé. Cette norme est dit norme de Luxemburg est définit par:*

$$\|x\|_\varrho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho(\frac{1}{\lambda} x) \leq 1 \right\}.$$

**Preuve.** Nous avons montrons que l'ensemble $X_\varrho$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel. Soient $x, y \in X_\varrho$ et $\alpha \in \Bbbk \backslash \{0\}$. Par la définition de l'espace $X_\varrho$ et comme $\varrho(\alpha x) = \varrho(|\alpha|\, x)$, il est clair que $\alpha x \in X_\varrho$, et par la convexité de $\varrho$ on a

$$0 \leq \varrho(\lambda(x + y)) \leq \frac{1}{2} \varrho(2\lambda x) + \frac{1}{2} \varrho(2\lambda y) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0.$$

Donc $x+y \in X_\varrho$, il est clair que $0 \in X_\varrho$, donc $X_\varrho$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Il est clair que $\|x\|_\varrho < \infty$ pour toute $x \in X_\varrho$, et $\|0\|_\varrho = 0$. Pour $\alpha \in \mathbb{k}$ on a:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_\varrho &= \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho(\frac{\alpha x}{\lambda}) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \, \|x\|_\varrho . \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire s'obtient facilement. Soient $x, y \in X$ et $\|x\|_\varrho < u$ et $\|y\|_\varrho < v$. Alors $\varrho(\frac{x}{u}) \leq 1$ et $\varrho(\frac{y}{v}) \leq 1$, donc par la convexité de $\varrho$ on a:

$$\begin{aligned} \varrho(\frac{x+y}{u+v}) &= \varrho(\frac{u}{u+v}\frac{x}{u} + \frac{v}{u+v}\frac{y}{v}) \\ &\leq \frac{u}{u+v}\varrho(\frac{x}{u}) + \frac{v}{u+v}\varrho(\frac{y}{v}) \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

donc $\|x+y\|_\varrho \leq u+v$, on obtient $\|x+y\|_\varrho \leq \|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho$. Si $\|x\|_\varrho = 0$, alors $\varrho(\alpha x) \leq 1$ pour tout $\alpha > 0$. Par conséquent,

$$\varrho(\lambda x) \leq \beta \varrho(\frac{\lambda x}{\beta}) \leq \beta.$$

Pour toute $\lambda > 0$ et $\beta \in [0,1]$, en utilisant (1.1.1) on a $\varrho(\lambda x) = 0$ pour toute $\lambda > 0$, ainsi $x = 0$. ■

**Exemple 1.2.1** *Soit $1 \leq p \leq \infty$ alors l'espace modular $(L^0(\Omega))_{\varrho_p}$ coïncide avec l'espace de Lebesgue $L^p$*

$$\|f\|_p := \|f\|_{\varrho_p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } \ 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |f(x)| & \text{si } \ p = \infty. \end{cases}$$

Pour $x_k, x \in X_\varrho$ on dit que $x_k$ converge fortement en norme vers $x$ si $\|x_k - x\|_\varrho \longrightarrow 0$.

**Lemme 1.2.1** *Soit $\varrho$ une semi-modular sur $X$ et $x_k \in X_\varrho$. Alors $x_k \to 0$ quand $k \to \infty$ si et seulement si, $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.*

**Preuve.** On suppose que $\|x_k\|_\varrho \to 0$ et $\lambda > 0$. Alors $\|k\lambda x_k\|_\varrho < 1$ pour tout $k > 1$. Pour $k$ assez grand on a:

$$\varrho(\lambda x_k) \leq \frac{1}{k}\varrho(k\lambda x_k) \leq \frac{1}{k},$$

l'inégalité (1.1.1) $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ quand $k \to \infty$.

Maintenant on suppose que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$ alors $\varrho(\lambda x_k) \leq 1$ pour $k$ assez grand donc $\|x_k\|_\varrho \leq \frac{1}{\lambda}$ comme $\lambda$ est arbitraire, nous concluons que $\|x_k\|_\varrho \to 0$ i.e. $x_k \to 0$. ∎

**Définition 1.2.2** *Soit $\varrho$ une semi-modular sur $X$ et $x_k, x \in X_\varrho$. Alors on dit que $x_k$ converge en modular vers $x$ si il existe $\lambda > 0$ tel que $\varrho(\lambda(x_k - x)) \to 0$ et on note par $x_k \xrightarrow{\varrho} x$.*

**Lemme 1.2.2** *Soit $X_\varrho$ un espace semi-modular alors:*

*La converge en modular $\Longleftrightarrow$ la converge en norme si, et seulement si, $\varrho(x_k) \to 0$ implique $\varrho(2x_k) \to 0$.*

**Preuve.** " $\Rightarrow$": Soit $\varrho(x_k) \to 0$ avec $x_k \in X_\varrho$. Alors par le lemme (1.2.1) on a $\varrho(2x_k) \to 0$.

" $\Leftarrow$" : Soit $x_k \in X_\varrho$ tel que $\varrho(x_k) \to 0$. On obtient $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$. Pour $\lambda$ fixe on choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \geq \lambda$ par la hypothèse on a: $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0$. Alors $0 \leq \lim\limits_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) = 0 \leq \lambda 2^{-m} \lim\limits_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0$ par (1.2.1) on obtient que $x_k \to 0$. Ceci qui termine la preuve. ∎

**Lemme 1.2.3** ***(propriétés d'un modular norme dans la boule d'unité)*** *Si $\varrho$ une semi-modular sur $X$. Alors $\|x\|_\varrho \leq 1 \Leftrightarrow \varrho(x) \leq 1$ si $\varrho$ est continue, alors aussi $\|x\|_\varrho < 1 \Leftrightarrow \varrho(x) < 1$, et aussi $\|x\|_\varrho = 1 \Longleftrightarrow \varrho(x) = 1$.*

**Preuve.** Si $\varrho(x) \leq 1$ alors par la défintion de $\|.\|_\varrho$ on a $\|x\|_\varrho \leq 1$.

D'autre part on suppose que $\|x\|_\varrho \leq 1$ alors $\varrho(\frac{x}{\lambda}) \leq 1$ pour tout $\lambda > 1$. Lorsque $\varrho$ est continue à gauche on obtient $\varrho(x) \leq 1$. Soit $\varrho$ est continue si $\|x\|_\varrho < 1$, alors il existe $\lambda < 1$ avec $\varrho(\frac{x}{\lambda}) \leq 1$. Donc l'inégalité (1.1.1) on a: $\varrho(x) \leq \lambda\varrho(\frac{x}{\lambda}) \leq \lambda < 1$. D'autre part on suppose que $\varrho(x) < 1$ comme $\varrho$ continue il existe $\gamma > 1$ tel que $\varrho(\gamma x) < 1$ ce qui implique que $\|\gamma x\|_\varrho \leq 1$ et $\|x\|_\varrho \leq \frac{1}{\gamma} < 1$. Et $\|x\|_\varrho = 1 \Longleftrightarrow \varrho(x) = 1$. Il résulte de les deux cas "$\leq 1$" et "$< 1$". ■

**Corollaire 1.2.1** *Soit $\varrho$ une semi-modular sur $X$ et $x \in X_\varrho$.*

*(a) Si $\|x\|_\varrho \leq 1$, alors $\varrho(x) \leq \|x\|_\varrho$.*

*(b) Si $1 < \|x\|_\varrho$, alors $\|x\|_\varrho \leq \varrho(x)$.*

*(c)$\|x\|_\varrho \leq \varrho(x) + 1$.*

**Preuve.** (a) Le cas $x = 0$ est évident et pour le cas $x \neq 0$, on suppose que $0 < \|x\|_\varrho \leq 1$. Par la propriété de la boule d'unité (lemme (1.2.3)) et $\left\|\frac{x}{\|x\|_\varrho}\right\|_\varrho = 1$ on obtient $\varrho(\frac{x}{\|x\|_\varrho}) \leq 1$. Comme $\|x\|_\varrho \leq 1$, par l'inégalité (1.1.1) on a $\frac{\varrho(x)}{\|x\|_\varrho} \leq 1$.

(b) On suppose que $\|x\|_\varrho > 1$, alors $\varrho(\frac{x}{\lambda}) > 1$ pour tout $1 < \lambda < \|x\|_\varrho$. Et l'inégalité (1.1.1) on a $1 < \frac{\varrho(x)}{\lambda}$. Car $\lambda$ est arbitraire, nous concluons que $\varrho(x) \geq \|x\|_\varrho$.

(c) Immédiate à (b). ■

**Théorème 1.2.2** ***de convergence monotone***

*Soit $(A, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-finie complet et soit $(f_k)$ une suite des fonctions $\mu$-mesurable avec $f_k \nearrow f$ $\mu$-presque partout et $\int_A f_1 \, d\mu > -\infty$ alors*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_A f_k \, d\mu = \int_A f d\mu$$

**Lemme 1.2.4** ***(Fatou)*** *Soit $(A, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-finie complet et soit $(f_k)$ une suite des fonctions $\mu$-mesurable et soit $g \in L^1(A, \mu)$, si $f_k \geq g$ $\mu$-presque partout pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\int_A \liminf_{k \longrightarrow \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_A f_k \, d\mu.$$

*Soit $(f_k) \in L^s(A, \mu)$ et $\lambda(E) := \limsup_{k \longrightarrow \infty} \int_E |f_k|^s \, d\mu$ pour tout ensemble $E \subset A$ alors $(f_k)$ est equi-intégrable si*

*1) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ avec $\lambda(E) < \epsilon$ pour tout ensemble $E$ mesurable et $\mu(E) < \delta$.*

*2) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une ensemble mesurable $A_0$ avec $\mu(A_0) < \infty$ et $\lambda(\frac{A}{A_0}) < \epsilon$.*

**Théorème 1.2.3** ***(convergence Dominèe)***

*Soit $(A, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-finie complet et soit $(f_k)$ une suite des fonctions $\mu$-mesurable avec $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout si il existe une fonction $h \in L^1(A, \mu)$ telle que $|f_k| \leq h$ $\mu$-presque partout pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$f \in L^1(A, \mu),$$

*et*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

**Définition 1.2.3** *Soit $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction convexe et continue à gauche avec $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t \longrightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, on dit que $\varphi$ est une $\Phi$-fonction, si $\varphi(t) > 0 \ \forall \ t > 0$ est dit $\Phi$-fonction positive.*

**Lemme 1.2.5** *Soit $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ et soit $\varrho$ un prolongement de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$, i.e. $\varrho(t) := \varphi(|t|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi$ est une $\Phi$-fonction si, et seulement si, $\varrho$ est une semi-modular sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$. De plus $\varphi$ est une $\Phi$-fonction positive si et seulement si, $\varrho$ est une modular sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$.*

**Preuve.** " $\Rightarrow$": Soit $\varphi$ une $\Phi$-fonction lorsque $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$, avec $X_\varrho = \mathbb{R}$. On démontre que $\varrho$ est une semi-modular sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $\varrho(\lambda t_0) = 0$ pour tout $\lambda > 0$ implique que $t_0 = 0$. On suppose que $\varrho(\lambda t_0) = 0$ pour tout $\lambda > 0$. Comme $\lim_{t \longrightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, alors il existe $t_1 > 0$ avec $\varphi(t_1) > 0$ ainsi n'est existe pas $\lambda > 0$ tel que $t_1 = \lambda t_0$, ce qui implique que $t_0 = 0$ donc $\varrho$ est une semi-modular. On suppose que $\varphi$ positive si $\varrho(s) = 0$, alors $\varphi(|s|) = 0$. Par conséquent $s = 0$. Donc $\varrho$ est une modular.

" $\Leftarrow$" : Soit $\varrho$ est une semi-modular sur $\mathbb{R}$ avec $X_\varrho = \mathbb{R}$. Comme $X_\varrho = \mathbb{R}$ il existe $t_2 > 0$ telle que $\varphi(t_2) < \infty$. l'inégalité (1.1.1) on a $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{t}{t_2}\varphi(t_2)$ pour tout $t \in [0, t_2]$ ce qui implique que $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$. Car $1 \neq 0$ il existe $\lambda > 0$ telle que $\varrho(\lambda 1) \neq 0$ en particulier il existe $t_3 > 0$ avec $\varphi(t_3) > 0$ et l'inégalité (1.1.1) on a $\varphi(Kt_3) \geq K\varphi(t_3) > 0$ pour tout $K \in \mathbb{N}$. Lorsque $K$ est arbitraire, nous concluons que $\lim_{t \longrightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. Ce qui montre que $\varphi$ est une $\Phi$-fonction. On suppose que $\varrho$ est une modular. En particulier $\varrho(t) = \varphi(|t|) = 0$ implique $t = 0$. Donc par négation on obtient $t > 0$ implique $\varphi(t) > 0$ , ainsi $\varphi$ est positive.

■

**Définition 1.2.4** *Soit* $(A, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré* $\sigma$*-finie complet, une fonction réel* $\varphi$ : $A \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ *est dit* $\Phi$*-fonction généralise sur* $(A, \Sigma, \mu)$ *si :*

*(a)* $\varphi(y, .)$ *est une* $\Phi$*-fonction pour chaque* $y \in A$.

*(b)* $y \longrightarrow \varphi(y, t)$ *est mesurable pour chaque* $t \geq 0$.

*Si* $\varphi$ *est* $\Phi$*-fonction généralise sur* $(A, \Sigma, \mu)$*, on écrire* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$.

**Définition 1.2.5** *Soit* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ *et Soit* $\varrho_\varphi$ *définit par:*

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(y, |f(y)|) d\mu(y).$$

*Pour tout* $f$ *alors l'espace semi-moduler*

$$\begin{aligned} (L^0(A, \mu))_{\varrho_\varphi} &= \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_\varphi(\lambda f) = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \varrho_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ pour certain } \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

*Est dit l'espace de Musielak-orlicz et note par* $L^\varphi(A, \mu)$*, où* $L^\varphi$ *mini de la norme*

$$\|f\|_{\varrho_\varphi} := \|f\|_\varphi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

**Théorème 1.2.4** *[2] Soit* $\varrho$ *une semi-modular sur* $X$*, alors* $\varrho$ *est semi-continue inférieurement sur* $X_\varrho$ *,i.e.*

$$\varrho(x) \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \varrho(x_k).$$

$x_k, x \in X_\varrho$ *avec* $x_k \longrightarrow x$ *(en norme) pour* $k \longrightarrow \infty$.

**Lemme 1.2.6** *tout* $\Phi$*-fonction est semi-continue inférieurement.*

***Exemple 1.2.2*** *Soit* $1 \leq p < \infty$ *on définit*

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &:= \frac{1}{p} t^p, \\ \varphi_\infty(t) &:= \infty . \chi_{(1,\infty)}(t), \end{aligned}$$

*pour toute* $t \geq 0$. *Alors* $\varphi_p$ *et* $\varphi_\infty$ *est une* $\Phi$*-fonction. De plus* $\varphi_p$ *est continue et positive avec* $\varphi_\infty$ *est le seulement qui continue à gauche et semi-continue inférieurement mais n'est pas positive.*

**Théorème 1.2.5** *Si $\varphi \in \Phi(A, \mu)$. Alors $L^{\varphi}(A, \mu)$ est un espace de Banach.*

**Lemme 1.2.7** *Soit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ et $f_k, f, g \in L^0(A, \mu)$.*

*(a) Si $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, alors $\varrho_{\varphi}(f) \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \varrho_{\varphi}(f_k)$.*

*(b) Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu$-presque partout, alors $\varrho_{\varphi}(f) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \varrho_{\varphi}(f_k)$.*

*(c) Si $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, et $|f_k| \leq |g|$ $\mu$-presque partout, et $\varrho_{\varphi}(\lambda g) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$, alors $f_k \longrightarrow f$ dans $L^{\varphi}$.*

**Preuve.** Par le lemme (1.2.6) l'application $\varphi(y, .)$ est semi-continue inférieurement. En utilisant lemme de Fatou on a:

$$\begin{aligned}
\varrho_{\varphi}(f) &= \int_A \varphi(y, \lim_{k \longrightarrow \infty} |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&\leq \int_A \liminf_{k \longrightarrow \infty} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&\leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_A \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&= \liminf_{k \longrightarrow \infty} \varrho_{\varphi}(f_k).
\end{aligned}$$

Ce qui montre (a). Pour (b), soit $|f_k| \nearrow |f|$. Par la continuité à gauche et la mon city de $\varphi(y, .)$ on a $0 \leq \varphi(., |f_k(y)|) \nearrow \varphi(., |f_k(.)|)$ presque partout. D'après le théorème de la convergence monotone on a:

$$\begin{aligned}
\varrho_{\varphi}(f) &= \int_A \varphi(y, \lim_{k \longrightarrow \infty} |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&= \int_A \lim_{k \longrightarrow \infty} \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_A \varphi(y, |f_k(y)|) d\mu(y) \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} \varrho_{\varphi}(f_k).
\end{aligned}$$

Ce qui montre (b).

Pour (c), on peut supposer que $f_k \longrightarrow f$ presque partout $|f_k| \leq |g|$ presque partout et $\varrho(\lambda g) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$. Alors $|f_k - f| \longrightarrow 0$ presque partout et $|f_k - f| \leq 2|g|$.

Lorsque $\varrho_\varphi(2\lambda g) < \infty$. On appliquer le théorème de la convergence dominèe on obtient

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \varrho_\varphi(\lambda |f - f_k|) = \int_A \varphi\left(y, \lambda \lim_{k\longrightarrow\infty} |f(y) - f_k(y)|\right) d\mu(y) = 0,$$

puisque $\lambda > 0$ est arbitraire cette formule avec lemme (1.2.1) implique que $f_k \longrightarrow f$ dans $L^\varphi$. ■

**Théorème 1.2.6** *Soit $\varphi \in \Phi(A,\mu)$. Les propriétés suivantes sont satisfont.*

*(a) $\|f\|_\varphi = \||f|\|_\varphi$ pour tout $f \in L^\varphi$.*

*(b) Si $f \in L^\varphi$, $g \in L^0(A,\mu)$, et $0 \leq |g| \leq |f|$ $\mu$-presque partout, alors $g \in L^\varphi$ et $\|g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi$.*

*(c) Si $f_k \longrightarrow f$ presque partout, alors $\|f\|_\varphi \leq \liminf_{K\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi$.*

*(d) Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu$-presque partout, avec $f_k \in L^\varphi(A,\mu)$ et $\sup_K \|f_k\|_\varphi < \infty$, alors $f \in L^\varphi(A,\mu)$ et $\|f_k\|_\varphi \nearrow \|f\|_\varphi$.*

**Preuve.** Les deux propriétés (a) et (b) sont claires, nous avons montrent (c). Soit $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, alors cette inégalité est évidente pour $\liminf_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi = \infty$. Soit $\lambda > \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi$ pour $k$ assez grand on a $\|f_k\|_\varphi < \lambda$ Par la propriété de la boule d'unité on a $\varrho_\varphi(\frac{f_k}{\lambda}) \leq 1$ pour $k$ assez grand. On appliquer lemme (1.2.7) on obtient $\varrho_\varphi(\frac{f}{\lambda}) \leq 1$, ainsi Par la propriété de la boule d'unité on obtient $\|f\|_\varphi < \lambda$ ce qui implique que $\|f\|_\varphi \leq \liminf_{K\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi$.

Pour démontrer (d) on suppose que $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu$-presque partout, où $\sup_K \|f_k\|_\varphi < \infty$. Par (a) et (c) on a $\|f\|_\varphi \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi \leq \sup_k \|f_k\|_\varphi < \infty$ donc $f \in L^\varphi$. D'autre part, $|f_k| \nearrow |f|$ avec (b) ce qui implique que $\|f_k\|_\varphi \nearrow \limsup_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi$. Donc $\lim_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_\varphi = \|f\|_\varphi$ et $\|f_k\|_\varphi \nearrow \|f\|_\varphi$. ■

# Chapitre 2

# Les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Dans ce chapitre, nous donné la définitions des espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ où $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ s'appelé le variable exposant de Lebesgue cette définition introduite par Orlicz en 1931, pour généralise quelques résultats classique sur cette espace comme la continuité de la fonction maximale.

## 2.1 Quelques propriétés des espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

### 2.1.1 variable exposant de Lebesgue

**Définition 2.1.1** *Soit $(A, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré complet $\sigma$-finie. On définit $\mathcal{P}(A, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions $p : A \to [1, \infty]$ $\mu$-mesurable , la fonction $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ est dite variable exposant sur $A$ et on définit $p^- := p_A^- := \inf_{y \in A} ess\ p(y)$ et $p^+ := p_A^+ := \sup_{y \in A} ess\ p(y)$. Si $p^+ < \infty$, alors $p$ est appelée variable exposant borné. Si $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ , alors on définit $p' \in \mathcal{P}(A, \mu)$ par $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1$, où $\frac{1}{\infty} := 0$. La fonction $p'$ est dit le dual de variable exposant $p$. Si $\mu$ est une mesure de Lebesgue et $\Omega$ un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans ce cas on note $\mathcal{P}(\Omega) := \mathcal{P}(\Omega, \mu)$.*

***Définition 2.1.2*** *Pour $t \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$ on définie*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_p(t) &:= \frac{1}{p} t^p, \\ \bar{\varphi}_p(t) &:= t^p. \end{aligned}$$

*De plus*

$$\bar{\varphi}_{\infty}(t) := \tilde{\varphi}_{\infty}(t) := \infty.\chi_{(1,\infty)}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0,1], \\ \infty & si \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

*Pour une variable exposant $p \in \mathcal{P}(A,\mu)$ on définit pour $y \in A$ et $t \geq 0$*

$$\tilde{\varphi}_{p(\cdot)}(y,t) := \tilde{\varphi}_{p(y)}(t), \qquad et \qquad \bar{\varphi}_{p(\cdot)}(y,t) := \bar{\varphi}_{p(y)}(t).$$

***Lemme 2.1.1*** *L'application $a \longrightarrow \tilde{\varphi}_{\frac{1}{a}}(t)$ est continue et convexe sur $[0,1]$ pour chaque $t \geq 0$.*

**Preuve.** pour $t = 0$ est évident. Si $t > 0$, on pose $g(a) := at^{\frac{1}{a}}$ pour tout $a \in [0,1]$. Alors $g(a) := \tilde{\varphi}_{\frac{1}{a}}(t)$. On montre que $g$ est convexe sur $[0,1]$. Il est clair que $g$ est continue sur $[0,1]$ et

$$g''(a) = t^{\frac{1}{a}} \frac{(\log t)^2}{a^3} \geq 0,$$

pour tout $a \in [0,1]$ ainsi $g$ est convexe. ■

**Remarque 2.1.1** *Soient $q_0, q_1 \in [1,\infty]$. Pour $\theta \in [0,1]$ soit $q_\theta \in [q_0,q_1]$ où $\frac{1}{q_\theta} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Alors*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{q_\theta}(t) &\leq (1-\theta)\tilde{\varphi}_{q_0}(t) + \theta\tilde{\varphi}_{q_1}(t), \\ \min\left\{\bar{\varphi}_{q_0}(t), \bar{\varphi}_{q_1}(t)\right\} &\leq \bar{\varphi}_{q_\theta}(t) \leq \max\left\{\bar{\varphi}_{q_0}(t), \bar{\varphi}_{q_1}(t)\right\}. \end{aligned}$$

*Pour tout $t \geq 0$.*

La première estimation est immédiate par la convexité lemme (2.1.1) et en utilisant la définition de $\bar{\varphi}$, on obtient le deuxiéme estimation.

**Définition 2.1.3** *Soit $\varphi \in \Phi(A,\mu)$ pour chaque $y \in A$ on note $\varphi^*(y,.)$ la fonction conjugué de $\varphi(y,.)$, et définie par :*

$$\varphi^*(y,u) = \sup_{t\geq 0}(tu - \varphi(y,t)),$$

*pour tout $u \geq 0$. En particulier si $\Phi$-fonction (non généralise), dans ce cas*

$$\varphi^*(u) = \sup_{t\geq 0}(tu - \varphi(t)),$$

*pour tout $u \geq 0$.*

**Lemme 2.1.2** *[2] Soit* $1 \leq q \leq \infty$. *Alors* $\left(\tilde{\varphi}_q\right)^* = \tilde{\varphi}_{q'}$ *et*

$$\left(\tilde{\varphi}_q\right)^*(t) \leq \bar{\varphi}_{q'}(t) \leq \left(\tilde{\varphi}_q\right)^*(2t) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

**Lemme 2.1.3** *Soit* $1 \leq q \leq \infty$. *Alors*

$$\tilde{\varphi}_q(t) \leq \bar{\varphi}_q(t) \leq \tilde{\varphi}_q(2t) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

**Preuve.** Pour $q = \infty$ on a $\bar{\varphi}_\infty := \tilde{\varphi}_\infty$ donc il suffit de montrer l'inégalité pour $1 \leq q < \infty$. Pour $t = 0$ on a $\tilde{\varphi}_q(0) = 0 = \bar{\varphi}_q(0)$. Pour $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\varphi}_q(t)}{\bar{\varphi}_q(t)} &= \frac{1}{q} \leq 1, \\ \frac{\tilde{\varphi}_q(2t)}{\bar{\varphi}_q(t)} &= \frac{2^q}{q} \geq e \log 2 \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci qui termine la preuve. ■

**Définition 2.1.4** *Soit* $\varphi$ *est une* $\Phi$*-fonction on définit* $\varphi^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *par*

$$\varphi^{-1}(t) := \inf \{\tau \geq 0 : \varphi(\tau) \geq t\},$$

*Pour tout* $t \geq 0$. *Cette fonction est dite l'inverse continue à gauche de* $\varphi$, *pour toute* $y \in A$ *soit* $\varphi^{-1}(y, .) = (\varphi(y, .))^{-1}$, *et tous les propriétés satisfaits pour* $\varphi$ *et aussi satisfaits pour* $\varphi^{-1}$*de plus* $\varphi^{-1}(0) = 0$ *et*

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(t)\right) \leq t,$$

*pour tout* $t \geq 0$ *et aussi*

$$t \leq \varphi\left(\varphi^{-1}(t)\right),$$

*pour tout* $t \geq 0$ *avec* $\varphi(t) < \infty$.

**Lemme 2.1.4** *[2] Si* $q \in [1, \infty)$, *alors* $\tilde{\varphi}_q^{-1}(t) = (qt)^{\frac{1}{q}}, \bar{\varphi}_q^{-1}(t) = t^{\frac{1}{q}}$ *et* $\bar{\varphi}_\infty(t) := \tilde{\varphi}_\infty(t) = \chi_{(1,\infty)}(t)$ *pour tout* $t \geq 0$. *Si* $q \in [1, \infty]$ *et* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, *alors*

$$t \leq \varphi_q^{-1}(t)\varphi_{q'}^{-1}(t) \leq 2t,$$

*pour tout* $t \geq 0$.

**Remarque 2.1.2** *Pour tout $\lambda > 1$ il existe $c_\lambda \geq 1$ telle que $\tilde{\varphi}_q(t) \leq \bar{\varphi}_q(t) \leq c_\lambda \tilde{\varphi}_q(\lambda t)$ pour tout $t \geq 0$ et $1 \leq q \leq \infty$.*

**Définition 2.1.5** *Soit $p \in P(A, \mu)$ et soit $\varphi_{p(.)} := \tilde{\varphi}_{p(.)}$ ou $\varphi_{p(.)} := \bar{\varphi}_{p(.)}$. Alors on obtient une semi-modular:*

$$\varrho_{L^{p(.)}(A)}(f) = \int \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx.$$

*On définit l'espace de Lebesgue $L^{p(.)}(A, \mu)$ comme l'espace de Musielak-orlicz $L^{\varphi_{p(.)}}(A, \mu)$ avec la norme $\|.\|_{L^{p(.)}(A,\mu)} = \|.\|_{L^{\varphi_{p(.)}}(A,\mu)}$. En particulier l'espace de Lebesgue $L^{p(.)}(A, \mu)$ est l'ensemble suivant*

$$L^{p(.)}(A, \mu) = \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_{L^{p(.)}(A)}(\lambda f) = 0 \right\}.$$

*Équivalente à:*

$$L^{p(.)}(A, \mu) = \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \varrho_{L^{p(.)}(A)}(\lambda f) < \infty \text{ pour certain } \lambda > 0 \right\}.$$

*Muni de la norme*

$$\|f\|_{L^{p(.)}(A,\mu)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{L^{p(.)}(A)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \right\}.$$

On dit que $\varrho_{L^{p(.)}(A)}$ est une modular si $p$ est finie partout, telle que $\varrho_{p(.)}$ désigne $\varrho_{L^{p(.)}(A)}$ et $\|.\|_{p(.)}$ désigne $\|.\|_{L^{p(.)}(A,\mu)}$. Si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et $\mu$ est une mesure de Lebesgue tout simplement écrire $L^{p(.)}(\Omega)$. par le lemme (2.1.3) il est clair que $L^{\tilde{\varphi}_{p(.)}} = L^{\bar{\varphi}_{p(.)}}$ et

$$\|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}} \leq \|f\|_{\tilde{\varphi}_{p(.)}} \leq 2 \|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}}. \tag{2.1.1}$$

Ainsi, les deux normes dans la définition sont équivalence.

**Définition 2.1.6** *$E^{p(.)}(A, \mu)$ est un ensemble des éléments finie de $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Lemme 2.1.5** *Si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\|f\|_{p(.)} \leq 1 \Leftrightarrow \varrho_{p(.)}(f) \leq 1$. Pour $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ on a:*

*(a) Si $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, alors $\varrho_{p(.)}(f) \leq \|f\|_{p(.)}$.*

*(b) Si $1 < \|f\|_{p(.)}$, alors $\|f\|_{p(.)} \leq \varrho_{p(.)}(f)$.*

**Preuve.** D'après le lemme (1.2.3), et le corollaire (1.2.1), il est facilement de vérifié que ce lemme est analogue. ■

**Lemme 2.1.6** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $p^- < \infty$. *Si* $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) > 0$ *ou* $p^+ < \infty$, *alors*

$$\min\left\{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \leq \|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}} \leq \max\left\{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\}. \tag{2.1.2}$$

**Preuve.** Supposons que $p^+ < \infty$. Si $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) \leq 1$ dans ce cas il suffit de prouver que

$$\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}} \leq \|f\|_{p(.)} \leq \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}},$$

par l'homogénéité, partie droite de l'inégalitè est équivalente à $\left\|\frac{f}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}}}\right\|_{p(.)} \leq 1$ où par la propriété de la boule d'unité est équivalente à

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}}}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Puisque $\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{-\frac{p(x)}{p^+}} \leq \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{-1}$, donc

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}}}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Le cas $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) \geq 1$ il est analogue que

$$\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^+}} \leq \|f\|_{p(.)} \leq \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}$$

On considérer $p^+ = \infty$, et $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) > 0$. Dans ce cas l'inégalité (2.1.2) est équivalente à

$$\min\left\{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, 1\right\} \leq \|f\|_{p(.)} \leq \max\left\{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}, 1\right\}$$

Si $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) \leq 1$ alors $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, donc partie droite de l'inégalitè est vérifié. Si $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) > 1$ alors il suffit de prouver que

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Comme $\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{-1} < 1$ il résulte que

$$\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{-\frac{p(x)}{p^-}} \leq \begin{cases} 0, & \text{si } p(x) = \infty, \\ \bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{-1} & \text{si } p(x) < \infty. \end{cases}$$

Donc

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}}\right)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\bar{\varrho}_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}}} dx = 1.$$

Alors partie droite de l'inégalitè est vérifié. Ceci qui termine la preuve. ■

**Lemme 2.1.7** *Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $s > 0$ telle que $sp^- \geq 1$. Alors*

$$\||f|^s\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}} = \||f|^s\|_{\bar{\varphi}_{sp(.)}}.$$

**Preuve.** On utilisant la formule $\bar{\varphi}_{sp}(t) = \bar{\varphi}_{p}(t^s)$ on a:

$$\begin{aligned} \||f|^s\|_{\bar{\varphi}_{sp(.)}} &= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \bar{\varrho}_{sp(.)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\right\}\right)^s \\ &= \inf\left\{\lambda^s > 0 : \bar{\varrho}_{p(.)}(\frac{|f|^s}{\lambda^s}) \leq 1\right\} \\ &= \||f|^s\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Théorème 2.1.1** *[2] Si $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$, alors $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ est un espace de Banach.*

**Lemme 2.1.8** *Soit $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ et $f_k$, $f$, $g \in L^0(A, \mu)$.*

*(a) Si $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, alors $\varrho_{p(.)}(f) \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \varrho_{p(.)}(f_k)$.*

*(b) Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu$-presque partout, alors $\varrho_{p(.)}(f) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \varrho_{p(.)}(f_k)$.*

*(c) Si $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, et $|f_k| \leq |g|$ $\mu$-presque partout et $g \in E^{p(\cdot)}$, alors $f_k \longrightarrow f$ dans $L^{p(\cdot)}$.*

**Théorème 2.1.2** *[2] Si $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$, alors on a*

*$\varrho_{p(.)}(f) \leq \liminf_{K\longrightarrow\infty} \varrho_{p(.)}(f_k)$ si $f_k \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$.*

**Lemme 2.1.9** *[2] Soit $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ et soit $f_k \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$.*

*(a) Si $f_k$ est une suite de Cauchy, alors il existe une sous-suite de $f_k$ converge $\mu$-presque partout vers une fonction mesurable $f$.*

*(b) si $\mu(A) < \infty$ et $\|f_k\|_{p(.)} \longrightarrow 0$, alors $f_k \longrightarrow 0$ dans l'espace mesure*

Théorème (1.2.6) implique que $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ est satisfait lemme de Fatou et admet la propriété de Fatou i.e.

- $\|f\|_{p(.)} = \||f|\|_{p(.)}$ pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$.
- Si $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$, $g \in L^0(A, \mu)$ et $0 \leq |g| \leq |f|$ $\mu$-presque partout, alors $g \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ et $\|g\|_{p(.)} \leq \|f\|_{p(.)}$.
- Si $f_k \longrightarrow f$ $\mu$-presque partout, alors $\|f\|_{p(.)} \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_{p(.)}$.
- Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu$-presque partout, avec $f_k \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ et $\sup_k \|f_k\|_{p(.)} < \infty$. Alors $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ et $\|f_k\|_{p(.)} \nearrow \|f\|_{p(.)}$.

**Lemme 2.1.10** ***(Inégalité de Young)*** *Soient $p, q, s \in [1, \infty]$ avec*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

*Alors pour toute $a, b \geq 0$*

$$\varphi_s(ab) \leq \varphi_p(a) + \varphi_q(b), \tag{2.1.3}$$

$$\bar{\varphi}_s(ab) \leq \frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a) + \frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b), \tag{2.1.4}$$

*en convenant que $\frac{s}{p} = \frac{s}{q} = 1$ pour $s = p = q = \infty$. De plus, si $1 \leq s < \infty$ alors pour tout $a \geq 0$*

$$\tilde{\varphi}_p(a) = \sup_{b \geq 0}(\tilde{\varphi}_s(ab) - \tilde{\varphi}_q(b)). \tag{2.1.5}$$

**Preuve.** pour preuve (2.1.3) on suppose que $s = \infty$ donc nécessairement $p = q = \infty$. Si $a, b \in [0, 1]$ Il est clair que l'inégalité est vérifié puisque dans ce cas $\varphi_s(ab) = 0$. On suppose que $a > 1$ ou $b > 1$. Alors $\varphi_\infty(a) = \infty$ ou $\varphi_\infty(b) = \infty$ donc l'inégalité est vérifié.

Le cas $1 \leq s < \infty$ pour preuve (2.1.3) pour $\tilde{\varphi}$ il suffit de preuver (2.1.5). Si $s = 1$ , alors $p = q'$ et par le lemme (2.1.2) $\tilde{\varphi}_p = \left(\tilde{\varphi}_q\right)^*$ donc

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_p(a) &= \left(\tilde{\varphi}_q\right)^*(a) \\
&= \sup_{b \geq 0}(ab - \tilde{\varphi}_q(b)) \\
&= \sup_{b \geq 0}(\tilde{\varphi}_1(ab) - \tilde{\varphi}_q(b)),
\end{aligned}$$

pour toute $a, b \geq 0$. Si $1 < s < \infty$, alors

$$1 = \frac{1}{p/s} + \frac{1}{q/s},$$

par le lemme (2.1.2) on a $\left(\tilde{\varphi}_{\frac{p}{s}}\right)^* = \tilde{\varphi}_{\frac{q}{s}}$ en utilisant le cas $s = 1$ en déduire que

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_p(a) &= \frac{1}{s}\tilde{\varphi}_{\frac{p}{s}}(a^s) \\
&= \frac{1}{s}\sup_{b \geq 0}(a^s b^s - \tilde{\varphi}_{q/s}(b^s)) \\
&= \sup_{b \geq 0}(\tilde{\varphi}_s(ab) - \tilde{\varphi}_q(b)),
\end{aligned}$$

pour toute $a, b \geq 0$. Il reste de preuve l'inégalité (2.1.4), car cette inégalité est plus forte que (2.1.3) pour $\varphi = \bar{\varphi}$. si $s = \infty$ alors $s = p = q = \infty$ et (2.1.4) est immédiate à (2.1.3) puisque $\bar{\varphi}_\infty = \tilde{\varphi}_\infty$ ainsi soit $1 \leq s < \infty$. Maintenant $s \leq p$ et $s \leq q$ et on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_s(ab) &= s\tilde{\varphi}_s(ab) \\ &\leq s(\tilde{\varphi}_p(a) + \tilde{\varphi}_q(b)) \\ &= \frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a) + \frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b) \\ &\leq \bar{\varphi}_p(a) + \bar{\varphi}_q(b), \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ∎

**Lemme 2.1.11** ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $p, q, s \in \mathcal{P}(A, \mu)$ telle que*

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)},$$

*pour $\mu$-presque partout $y \in A$. Alors*

$$\varrho_{s(.)}(fg) \leq \varrho_{p(.)}(f) + \varrho_{q(.)}(g), \tag{2.1.6}$$

$$\|fg\|_{s(.)} \leq 2\, \|f\|_{p(.)}\, \|g\|_{q(.)}\,, \tag{2.1.7}$$

$$\|f\|_{\bar{\varphi}_{s(.)}} \leq \left( (\frac{s}{p})^+ + (\frac{s}{q})^+ \right) \|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}}\, \|g\|_{\bar{\varphi}_{q(.)}}\,, \tag{2.1.8}$$

*pour tout $f \in L^{p(.)}(A, \mu)$ et $g \in L^{q(.)}(A, \mu)$.*

**Preuve.** Soient $f \in L^{p(.)}$ et $g \in L^{q(.)}$. Comme $f, g$ sont mesurables donc $fg$ est aussi mesurable alors (2.1.6) immédiatement (2.1.3) par intégration sur $y \in A$.

Si $\|f\|_{p(.)} \leq 1$ et $\|g\|_{q(.)} \leq 1$ alors Par la propriété de la boule d'unité on a $\varrho_{p(.)}(f) \leq 1$ et $\varrho_{q(.)}(g) \leq 1$. Utilisant (2.1.6) on a l'estimation suivante

$$\varrho_{s(.)}(\frac{1}{2}fg) \leq \frac{1}{2}\varrho_{s(.)}(gf) \leq \frac{1}{2}\left(\varrho_{p(.)}(f) + \varrho_{q(.)}(g)\right) \leq 1,$$

par la propriétés de boule d'unité on a $\|fg\|_{s(.)} \leq 2$ ce qui preuve (2.1.7).

Maintenant soient $\|f\|_{\bar{\varphi}_{p(.)}} \leq 1$ et $\|g\|_{\bar{\varphi}_{q(.)}} \leq 1$ alors Par la propriété de la boule d'unité on a $\bar{\varrho}_{p(.)}(f) \leq 1$ et $\bar{\varrho}_{q(.)}(g) \leq 1$. Utilisant (2.1.4) par intégration sur $y \in A$ on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_{s(.)}(fg) &\leq (\frac{s}{p})^+\bar{\varrho}_{p(.)}(f) + (\frac{s}{q})^+\bar{\varrho}_{q(.)}(g) \\ &\leq (\frac{s}{p})^+ + (\frac{s}{q})^+, \end{aligned}$$

par la propriétés de boule d'unité on a $\|fg\|_{\bar{\varphi}_{s(.)}} \leq \text{sup ess}\, \frac{s}{p} + \text{sup ess}\, \frac{s}{q}$ ce qui preuve (2.1.8).

∎

**Théorème 2.1.3** *[2] Soient $p, q, r \in \mathcal{P}(A, \mu)$ avec $p \leq q \leq r$ $\mu$-presque partout dans $A$ alors*

$$L^{p(.)}(A, \mu) \cap L^{r(.)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{p(.)}(A, \mu) + L^{r(.)}(A, \mu).$$

# Chapitre 3

# Continuité de la fonction maximale sur les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

## 3.1 Fonction maximale de Hardy-Littelwood

**Définition 3.1.1** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f$ est définie par*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

*Cette fonction est mesurable dans $[0,\infty]$ et la définition suivante est équivalente avec le première*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int\limits_{|y|\leq r} |f(x-y)|\, dy,$$

*$\mathcal{M}$ est aussi appelé l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood. Plus généralement*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int\limits_{B} |f(y)|\, dy,$$

*où le sup est sur tous les boules contenant $x$ et $|B|$ indique la mesure de Lebesgue de $B$.*

Parfois, nous avons besoin d'utiliser les fonctions maximales suivantes. Pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\acute{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int\limits_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

avec $Q(x,r)$ désigne le cube de centre $x$ et de longueur $r$.

**Proposition 3.1.1** *$\mathcal{M}$ est une application sous linéaire*

**Preuve.** Pour tout $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f+g)(x) &= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)+g(y)|\, dy \\ &\leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |g(y)|\, dy \\ &= \mathcal{M}f(x) + \mathcal{M}g(x). \end{aligned}$$

De plus

$$\mathcal{M}(\lambda f)(x) = |\lambda|\, \mathcal{M}(f)(x).$$

■

**Proposition 3.1.2** *[8] il existe des constantes $C_1, C_2, C_3$ dépendant que de la dimension $n$ telle que*

$$C_1 \mathcal{M}f(x) \leq C_2 \acute{\mathcal{M}}f(x) \leq C_3 Mf(x),$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

**Remarque 3.1.1** *La fonction maximale de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ en généralement n'est pas borne sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nous ne considérons le cas $n = 1$. Prenez $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, $\forall\, r > 0$ on a:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &\geq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \\ &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} \chi_{[-1,1]}(y) dy. \end{aligned}$$

*On suppose que $x > 1$ et $r = x$ alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &\geq \frac{1}{2x}\int_{0}^{2x} \chi_{[-1,1]}(y) dy \\ &= \frac{1}{2x}\int_{0}^{1} dy = \frac{1}{2x}, \end{aligned}$$

*donc* $\mathcal{M}f(x) \geq \frac{1}{2x}, \forall\ x > 1$. *On sait que* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2.$$

*Mais*

$$\|\mathcal{M}f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \mathcal{M}f(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty.$$

*Ce qui implique que* $\mathcal{M}f \notin L^1(\mathbb{R})$, *alors la fonction maximale* $\mathcal{M}$ *en généralement n'est pas borne sur* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

**Remarque 3.1.2** *La fonction maximale* $\mathcal{M}$ *est borne sur* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *on vérifier que* $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

*Si* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *donc* $|f(y)| \leq \|f\|_\infty$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy &\leq \|f\|_\infty \int_{B(x,r)} dy, \qquad \forall x, \forall r > 0 \\ &= |B(x,r)|\, \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

*On divise sur* $|B(x,r)|$ *donc*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \leq \|f\|_\infty.$$

*Alors*

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

**Théorème 3.1.1** *[8] Soit* $f$ *une fonction mesurable sur* $\mathbb{R}^n$.

**(a)** *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *alors* $\mathcal{M}f$ *est finie presque-partout.*

**(b)** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *alors pour tout* $\lambda > 0$, *il existe une constante* $C = C(n) > 0$ *telle que:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

**(c)** *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 < p \leq \infty)$ *alors* $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* $C = C(n,p) > 0$ *telle que* $\|\mathcal{M}f\|_p \leq C\|f\|_p$.

**Théorème 3.1.2** *[8] **(Théorème de Lebesgue)** Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour presque-tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a:*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy = f(x).$$

**Corollaire 3.1.1** *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour presque-tout $x$ , on a:*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

**Définition 3.1.2** *Soient $(X, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$ et $f$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $f \in L^p$-faible, s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right)^{1/p} \leq C.$$

*Et on note $L^p$-faible par $L^{p,\infty}(X, \mu)$ est par définition*

$$L^{p,\infty}(X, \mu) = \left\{f \ \textit{mesurable} : \|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty\right\},$$

*où*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right)^{1/p},$$

Dans la suite $B$ est la boule arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ et $B_r$ est la boule de rayon $r$ et $B(x)$ la boule de centre $x$. Pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on note

$$\mathcal{M}_B f := \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy.$$

I.e. la fonction maximale de Hardy-Littlewood dèfinit par

$$Mf(x) := \sup_{B(x)} \mathcal{M}_{B(x)} f.$$

## 3.2 Continuitè de la Fonction maximale sur $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$

**Lemme 3.2.1** *Soit $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

**(i)** $p$ est uniformément continue avec $|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\ln\ |x-y|}$, pour toute $|x - y| \leq \frac{1}{2}$.

**(ii)** Pour toute boule ouverte $B$ on a $|B|^{p_B^- - p_B^+} \leq C_1$.

**Preuve.** (i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que $p$ est uniformément continue avec $|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\ln\ |x-y|}$, pour toute $|x-y| \leq \frac{1}{2}$. Il existe $r_0$ avec $0 < r_0 < \frac{1}{2}$, telle que pour tout $0 < r < r_0$ et $x, y \in B_r$ on a l'inégalité suivante

$$\frac{n}{2} \leq \frac{(\ln |B_r|)}{\ln (2r)} = \frac{\ln(Cr^n)}{\ln (2r)} \leq 2n. \tag{1}$$

et comme $0 < r < r_0$ et $r_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow r < r_0 < \frac{1}{2}$ ce qui implique que $|B_r| \leq |B_{r_0}| \leq 1$ et $\left|p_{B_r}^- - p_{B_r}^+\right| \leq \frac{C_0}{-\ln\ (2r)}$ pour tout $x, y \in B_r$ et par conséquent

$$\begin{aligned} |B_r|^{\ p_{B_r}^- - p_{B_r}^+} &\leq |B_r|^{\frac{C_0}{\ln\ (2r)}} \\ &= \exp\left(\frac{C_0 \ln |B_r|}{\ln\ \ (2r)}\right) \\ &\overset{1}{\leq} \exp(2C_0 n). \end{aligned}$$

Si $r \geq r_0$, alors $|B_r|^{\ p_{B_r}^- - p_{B_r}^+} \leq |B_{r_0}(0)|^{p^- - p^+}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $0 < |x-y| < \frac{1}{2}$. Alors il existe $B_r$ avec $x, y \in B_r$ et $\frac{|x-y|}{2} < r < |x-y|$, puisque $|B_r| \leq (2r)^n$, on a

$$\begin{aligned} (4\,|x-y|)^{-|p(x)-p(y)|} &\leq (2r)^{-|p(x)-p(y)|} \\ &\leq |B_r|^{\frac{-|p(x)-p(y)|}{n}} \\ &\leq |B_r|^{\frac{p_B^- - p_B^+}{n}} \leq C_1^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Puisque $p^+ < \infty$, donc $|x-y|^{-|p(x)-p(y)|} \leq C$ pour certain $C > 1$. Donc on obtient

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{\ln C}{-\ln\ \ |x-y|}.$$

■

**Lemme 3.2.2** *Soit $p$ une exposant borné sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait à l'une des deux conditions équivalentes de lemme (3.2.1). Alors il existe une constante $C(p) > 0$ telle que pour toute $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, on a*

$$(\mathcal{M}_B f)^{q(x)} \leq C(p)\left(\mathcal{M}\left(|f|^{\frac{p}{p^-}}\right)(x) + 1\right) \quad \textit{pour toute } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Preuve.** Soit $q := \frac{p}{p^-}$, alors $q$ est aussi un exposant borné et satisfait à l'une des deux conditions équivalentes de lemme (3.2.1). Soit $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, alors $\varrho_p(f) \leq 1$. Si $r \geq \frac{1}{2}$ alors on a:

$$(\mathcal{M}_B f)^{q(x)} = \left( \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)|\, dy \right)^{q(x)}.$$

Et comme $p(y) \geq 1$ alors $|f(y)| \leq |f(y)|^{p(y)} + 1$ et donc

$$(\mathcal{M}_B f)^{q(x)} \leq \left( \frac{1}{|B|} \int\limits_B \left( |f(y)|^{p(y)} + 1 \right) dy \right)^{q(x)}.$$

D'autre part on a:

$$\frac{1}{|B|} \int\limits_B \left( |f(y)|^{p(y)} + 1 \right) dy \leq \frac{1}{|B|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)}\, dy + \frac{1}{|B|} \int\limits_B dy = |B|^{-1} \varrho_p(f) + 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_B f)^{q(x)} &\leq \left( |B|^{-1} \varrho_p(f) + 1 \right)^{q(x)} \\ &\leq \left( \left| B_{\frac{1}{2}}(0) \right|^{-1} + 1 \right)^{q^+}. \end{aligned}$$

Si $0 < r < \frac{1}{2}$, alors $|B| \leq (2r)^n < 1$ et

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_B f)^{q(x)} &\leq \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^{q_B^-}\, dy \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}} \\ &\leq \left( \int_B \frac{1}{|B|} \left( |f(y)|^{q(y)} + 1 \right) dy \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}}. \end{aligned}$$

Et comme $\frac{q(x)}{q_B^-} \leq \frac{q^+}{q_B^-} \leq q^+$ alors

$$(\mathcal{M}_B f)^{q(x)} \leq |B_r|^{-\frac{q(x)}{q_B^-}} 3^{q^+} \left( \frac{1}{3} \int_B \left( |f(y)|^{q(y)} + 1 \right) dy \right)^{\frac{q(x)}{q_B^-}}.$$

Puisque

$$\frac{1}{3} \int_B \left( |f(y)|^{q(y)} + 1 \right) dy \leq \frac{1}{3} \int_B \left( |f(y)|^{p(y)} + 2 \right) dy \leq \frac{1}{3} \varrho_p(f) + \frac{2}{3} |B| < 1,$$

on a les inégalités suivantes:

$$\begin{array}{lcl}(\mathcal{M}_B f)^{q(x)} & \leq & |B|^{-\frac{q(x)}{q_B^-}} 3^{q^+}\left(\frac{1}{3}\int_B |f(y)|^{q(y)}\,dy + \frac{2}{3}|B|\right) \\ & \leq & |B_r|^{\frac{q_B^- - q_B^+}{q_B^-}} 3^{q^+-1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|^{q(y)}\,dy + 2\right) \\ & \overset{\text{lemme (3.2.1)}}{\leq} & C_0 3^{q^+-1}(\mathcal{M}_B(|f|^q)+2).\end{array}$$

On prendre le *sup* sur la boule $B(x)$ ce qui termine la preuve. ■

**Lemme 3.2.3** *Soit $p$ une exposant borné sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait à l'une des deux conditions équivalentes de lemme (3.2.1).*

*Et une constante à l'extérieur de certain boule $B_R(0)$. Alors il existe une constante $C(p) > 0$ et $h \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute $\|f\|_{p(.)} \leq 1$ ,*

$$(\mathcal{M}f)^{\frac{p(x)}{p^-}} \leq C(p)\mathcal{M}\left(|f|^{\frac{p}{p^-}}\right)(x) + h(x) \quad \textit{pour toute } x \in \mathbb{R}^n .$$

**Preuve.** Soit $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, alors $\varrho_p(f) \leq 1$. On décompose $f$ comme somme de deux fonctions $f_0, f_1$ avec $f_0 := \chi_{B_R} f$ et $f_1 := \chi_{\mathbb{R}^n \backslash B_R} f$. Soit $p_\infty$ est la valeur de $p$ sur le complémentaire de $B_{\mathbb{R}}(0)$. Soit $q = \frac{p}{p^-}$ et $q_\infty = \frac{p_\infty}{p^-}$, alors $q$ est satisfait l'équivalentes des deux conditions de lemme (3.2.1). Et ainsi par conséquent satisfait l'hypothèse de lemme (3.2.2) et donc pour toute $x \in B_{2R} := B_{2R}(0)$

$$(\mathcal{M}f(x))^{q(x)} \leq C(q)\mathcal{M}\left(|f|^{q(x)}\right) + C(q). \tag{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ alors $|x| - R \geq \frac{1}{2}|x|$ et $\left|B_{|x|-R}\right| \geq C|x|^n$ donc

$$\begin{array}{lcl}(\mathcal{M}f_0(x))^{q(x)} & \leq & \left(\sup\limits_{r>|x|-R} \dfrac{1}{|B_r|} \displaystyle\int\limits_{B_r(x)} |f_0(y)|\,dy\right)^{q(x)} \\ & \leq & \left(\dfrac{1}{\left|B_{|x|-R}\right|} \displaystyle\int\limits_{B_{\mathbb{R}}(0)} |f(y)|\,dy\right)^{q(x)} \\ & \leq & \left(\dfrac{c}{|x|^n} \displaystyle\int\limits_{B_{\mathbb{R}}(0)} |f(y)|\,dy\right)^{q(x)} \\ & \leq & \left(\dfrac{c}{|x|^n} \displaystyle\int\limits_{B_{\mathbb{R}}(0)} |f(y)|^{p(x)} + 1dy\right)^{q(x)}\end{array}$$

$$\leq \frac{C(q)}{|x|^n}, \tag{3}$$

car le supp $f_0 \subset B_R$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}f_1(x))^{q(x)} &\leq (\mathcal{M}f_1(x))^{q_\infty} \\ &\leq \mathcal{M}(|f_1|^{q_\infty})(x) \\ &\leq \mathcal{M}(|f|^q)(x).\end{aligned} \tag{4}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}f(x))^{q(x)} &\leq \chi_{B_{2R}}(\mathcal{M}f(x))^{q(x)} + \chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{2R}}(\mathcal{M}(f_0)(x) + \mathcal{M}(f_1)(x))^{q(x)} \\ &\leq \chi_{B_{2R}}(\mathcal{M}f(x))^{q(x)} + C(q)\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{2R}}\left((\mathcal{M}f_0(x))^{q(x)} + (\mathcal{M}f_1(x))^{q(x)}\right) \\ &\overset{(2)(3)(4)}{\leq} C(q)\mathcal{M}\left(|f|^q\right)(x) + \underbrace{\chi_{B_{2R}}C(q) + \chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{2R}}C(q)\,|x|^{-n}}_{:=h}.\end{aligned}$$

Le fait que $h \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui termine la preuve de lemme. ■

**Théorème 3.2.1** *Soit $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3) avec $p^- > 1$. Alors $M$ est borné sur $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ i.e.*

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(.)} \leq C(p)\,\|f\|_{p(.)}.$$

**Preuve.** Puisque $\mathcal{M}f$ est homogène positive, i.e. $\mathcal{M}(\lambda f) = |\lambda|\,\mathcal{M}f$, il suffit de prouver que $\|\mathcal{M}f\|_{p(.)} \leq C$ pour tout $f$ avec $\|f\|_{p(.)} \leq 1$. Puisque $p^+ < \infty$, ainsi il suffit de prouver que $\varrho_p(\mathcal{M}f) \leq C$ pour toute $\|f\|_{p(.)} \leq 1$. Soit $f \in L^{p(.)}$ avec $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, alors $\varrho_p(f) \leq 1$ et soit $q = \frac{p}{p^-}$. Par le lemme (3.2.3) il existe $h \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\mathcal{M}f)^q \leq C(p)\mathcal{M}(\|f\|^q) + h$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varrho_p(\mathcal{M}f) &= \|(\mathcal{M}f)^q\|_{p^-}^{p^-} \\ &\leq \left(C(p)\,\|\mathcal{M}(|f|^q)\|_{p^-} + \|h\|_{p^-}\right)^{p^-}.\end{aligned}$$

Comme $p^- > 1$ l'application $f \longrightarrow \mathcal{M}f$ est continue sur $L^{p^-}(\mathbb{R}^n)$. Donc

$$\begin{aligned}\varrho_p(\mathcal{M}f) &\leq \left(C(p)\,\||f|^q\|_{p^-} + \|h\|_{p^-}\right)^{p^-} \\ &= \left(C(p)\varrho_{p(.)}(f)^{\frac{1}{p^-}} + \|h\|_{p^-}\right)^{p^-} \\ &\leq C(p).\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

# Chapitre 4

# Application

Dans ce chapitre, nous étudions quelques résultats importent sur l'opérateur de Calderón-Zygmund et pour démontrer ces résultats on utilise la continuité de la fonction maximale.

## 4.1 L'opérateur de Calderón-Zygmund

**Définition 4.1.1** *Soit* $1 < s < \infty$ *et* $f \in L^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Alors pour toute boule* $B$ *on définie:*

$$\mathcal{M}_{s,B}f = \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}}, \qquad et \qquad \mathcal{M}_s f(x) := \sup_{x \in B} \mathcal{M}_{s,B(x)} f,$$

$$\mathcal{M}^{\sharp}_{s,B}f = \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}}, \quad et \qquad \mathcal{M}^{\sharp}_s f(x) := \sup_{x \in B} \mathcal{M}^{\sharp}_{s,B} f \; .$$

*En particulier l'opérateur de fonction* $\mathcal{M}^{\sharp} f$ *définie par*

$$\mathcal{M}^{\sharp} f := \mathcal{M}^{\sharp}_1 f,$$

$\mathcal{M}^{\sharp} f$ *est borne sur* $L^s(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $1 < s < \infty$, *de plus* $\mathcal{M}^{\sharp}_{s_1} f \leq \mathcal{M}^{\sharp}_{s_2} f, \ \forall s_1 \leq s_2$ .

**Théorème 4.1.1** *[2] Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $p^+ < \infty$, *alors* $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

**Définition 4.1.2** *Soit $K$ un noyau localement intégrable sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ on dit que $K$ satisfait les estimations standard s'il existe $\delta > 0$ et $c > 0$ tel que $\forall x, y \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, avec $|x-z| < \frac{1}{2}|x-y|$ les inégalités suivant sont vérifiés*

$$\begin{array}{lcl} |K(x,y)| & \leq & c\,|x-y|^{-n}, \\ |K(x,y) - K(z,y)| & \leq & c\,|x-z|^{\delta}\,|x-y|^{-n-\delta}, \\ |K(y,x) - K(y,z)| & \leq & c\,|x-z|^{\delta}\,|x-y|^{-n-\delta}. \end{array} \tag{4.1.1}$$

*Dans ce cas on dit que $K$ un noyau standard.*

*Soit $T : C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire borne est dit associé à un noyau $K$ si*

$$\langle Tf, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) g(x) dx dy,$$

*Pour tout $f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ avec $supp(f) \cap supp(g) = \emptyset$,où $\mathcal{D}'$ l'espace de distribition.*

*Si $K$ un noyau standard, dans ce cas $T$ est dit l'opérateur d'intégrale singulière. Si $T$ est prolonge un opérateur borne sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $T$ est de Calderón-Zygmund.*

**Proposition 4.1.1** *[2] Tout opérateur de Calderón-Zygmund est fortement borne de $L^s(\mathbb{R}^n)$ dans $L^s(\mathbb{R}^n)$, $(1 < s < \infty)$ et faiblement borne de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

**Définition 4.1.3** *Pour $\epsilon > 0$ on définit l'opérateur $T_\varepsilon$ associé à un noyau $K_\varepsilon$ comme une valeur principale.*

$$T_\varepsilon f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x,y) f(y) dy,\ \epsilon > 0,$$

*avec*

$$K_\varepsilon(x,y) := K(x,y)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}}(x).$$

**Proposition 4.1.2** *[2] Soit $K$ un noyau sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ on suppose que $N(x,z) := K(x, x-z)$ est homogène de degré $-n$ dans $z$ telle que*

*(a) Pour tout $x$, $N(x,z)$ est une fonction intégrable sur la sphère $|z| = 1$ et d'intégrale nulle.*

*(b) Pour certain $\sigma > 1$ et $\forall x$, $|N(x,z)|^{\sigma}$ est intégrable sur la sphère $|z| = 1$ et d'intégrale uniformèment borne est dépendant sur $x$.*

*Alors pour tout $s \in [\sigma', \infty)$ l'opérateur $T_\varepsilon$ est uniformèment borne sur $L^s(\mathbb{R}^n)$ est dépendant sur $\varepsilon$ de plus*

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_\varepsilon f(x),$$

*existe presque partout et $T_\varepsilon f \longrightarrow Tf$ presque partout dans $L^s(\mathbb{R}^n)$. En particulier $T$ est borne sur $L^s(\mathbb{R}^n)$.*

**Définition 4.1.4** ***(condition(D)).*** *Pour un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ on définie*

$$D_{B(x_0,r)}K(y) := \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int\limits_{B(x_0,r)} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int\limits_{B(x_0,r)} |K(z,y) - K(x,y)|\, dxdz.$$

*On dit que un noyau $K$ satisfait la condition (D) s'ils existent $c, N > 0$ telle que*

$$\sup_{r>0} \int\limits_{|y-x_0|>N_r} |f(y)|\, D_{B(x_0,r)}K(y)dy \leq c\mathcal{M}f(x_0),$$

*pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

*Il est facilement de vérifier que le noyau standard satisfait la condition (D). Soit $r > 0$ et $B := B(x_0, r)$. Si $|x_0 - y| > 5r$, alors $|x - z| < 2r < \frac{1}{2}|x - y|$ et $|x - y| < \frac{4}{5}|x_0 - y|$ pour $x, z \in B$ ainsi par (4.1.1) on a:*

$$D_B K(y) \leq \frac{1}{|B|} \int\limits_B \frac{1}{|B|} \int\limits_B c\,|x - z|^\delta\, |x - y|^{-n-\delta}\, dxdz \leq cr^\delta\, |x_0 - y|^{-n-\delta}.$$

*Soit $A := 10B \diagdown 5B$ alors*

$$\int\limits_{2^jA} |f|\, D_B K dy = \int\limits_{2^jA} |f| \left(\frac{r}{|y - x_0|}\right)^\delta |y - x_0|^{-n}\, dy \leq c2^{-j\delta}\mathcal{M}f(x_0),$$

*Pour $j \geq 0$ puisque $\left(\frac{r}{|y-x_0|}\right)^\delta \approx 2^{-j\delta}$ et $|y - x_0|^{-n} \approx |2^jA|^{-1}$ pour $y \in 2^jA$. Donc*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \diagdown 5B} |f|\, D_B K = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{2^jA} |f|\, D_B K dy \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\delta}\mathcal{M}f(x_0) = C(\delta)\mathcal{M}f(x_0).$$

*Ainsi la condition (D) est vérifiée.*

**Proposition 4.1.3** *[2] Soit $T$ un opérateur associé à un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ satisfait la condition (D). On suppose que $T$ prolonge un opérateur borne définit sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour $0 < s < 1$, il existe une constante $c = c(s) > 0$ tel que*

$$\left(\mathcal{M}^\sharp(|Tf|^s)\right)^{\frac{1}{s}} \leq c\mathcal{M}f(x),$$

*pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$.*

**Théorème 4.1.2** *[2] Soit $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3), alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\|f\|_{p(.)} \leq c\left\|\mathcal{M}^\sharp f\right\|_{p(.)},$$

*pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

**Théorème 4.1.3** *Soit $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3) soit $T$ un opérateur associé à un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ satisfait la condition (D) on suppose que $T$ prolonger un opérateur borne définit sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ alors $T$ fortement borne de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** Puisque $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3), alors pour $0 < s < 1$, $\frac{p}{s}$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3). D'après le théorème (4.1.2) on a

$$\|Tf\|_{p(.)} = \||Tf|^s\|_{\frac{p(.)}{s}}^{\frac{1}{s}} \leq c\left\|\mathcal{M}^\sharp(|Tf|^s)\right\|_{\frac{p(.)}{s}}^{\frac{1}{s}} = c\left\|\left(\mathcal{M}^\sharp(|Tf|^s)\right)^{\frac{1}{s}}\right\|_{p(.)}.$$

D'après la proposition (4.1.3) on obtient

$$\left(\mathcal{M}^\sharp(|Tf|^s)\right)^{\frac{1}{s}} \leq c\mathcal{M}f(x),$$

pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ainsi

$$\|Tf\|_{p(.)} \leq \|\mathcal{M}f\|_{p(.)} \leq c\|f\|_{p(.)}.$$

Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Ce qui termine la preuve. ■

**Corollaire 4.1.1** *[2] Soit $T$ un opérateur de Calderón-Zygmund associé à un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ et $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3). Alors $T$ est borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Proposition 4.1.4** *[2] Soit $T$ un opérateur de Calderón-Zygmund associé à un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$. Alors il existe une constante $c = c(s) > 0$ telle que*

$$T^* f(x) \leq c\left(\mathcal{M}(Tf)(x) + \mathcal{M}f(x)\right),$$

*pour tout $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ avec $1 < s < \infty$ où $T^*$ l'opérateur de translation et définit par:*

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

**Corollaire 4.1.2** *Soit $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3), et $T$ un opérateur de Calderón-Zygmund associé à un noyau $K$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ alors $T^*$est borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|f\|_{p(.)} \leq 1$ d'après le théorème (3.2.1) l'opérateur $\mathcal{M}$ est borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et d'après le corollaire (4.1.1) $\|Tf\|_{p(.)} \leq c$, de plus $\|\mathcal{M}(Tf)\|_{p(.)} + \|Tf\|_{p(.)} \leq c$. D'après la proposition (4.1.4) on obtient $\|T^* f\|_{p(.)} \leq c$ lorsque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ donc $\|T^* f\|_{p(.)} \leq c$ pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Ce qui termine la preuve. ■

**Corollaire 4.1.3** *Soit $K$ un noyau standard définit sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \neq y\}$ satisfaits les conditions (a) et (b) de proposition (4.1.2). Soit $p$ satisfait les conditions de lemme (3.2.3), alors l'opérateur $T_\varepsilon$ est uniformèment borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ est dépendant sur $\varepsilon$ de plus*

$$Tf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_\varepsilon f(x),$$

*existe et $T_\varepsilon f \longrightarrow Tf$ presque partout dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. En particulier $T$ est borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** D'après le corollaire (4.1.1) et le corollaire (4.1.2) $T$ et $T^*$ sont borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et par la définition de $T^*$ on a $|T_\varepsilon f(x)| \leq T^* f(x)$ donc $T_\varepsilon$ est uniformèment borne sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. On fixe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. D'après la proposition (4.1.2) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} T_\varepsilon g = Tg$ dans $L^{p^-}(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^{p^+}(\mathbb{R}^n)$ donc est ainsi dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $T$, $T_\varepsilon$ sont continues alors il est clair pour $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ puisque $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ appartient dans $L^{p^-}(\mathbb{R}^n) + L^{p^+}(\mathbb{R}^n)$ on trouve le résultat. ■

# Conclusion

La condition obtenu sur le variable exposant $p$ pour que la fonction maximale de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f$ soit continue est un résultat très important dans l'analyse harmonique et dans l'intégrale singulière.

# Bibliographie


[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, et C. Neugebauer. The maximal function on variable $L^{p(x)}$ spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 28:223–238; 29 (2004), 247–249, 2003

[2] L. Diening et al., Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics 2017, DOI 10.1007/978-3-642-18363-8 1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

[3] L. Diening. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl., 7:245–253, 2004

[4] L. Diening. Maximal function on Orlicz–Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull. Sci. Math., 129:657–700, 2005.

[5] T. Futamura et Y. Mizuta. Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1. Hiroshima Math. J., 36(1):23–28, 2006.

[6] V. Kokilashvili et S. Samko. Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Georgian Math. J., 10:145–156, 2003.

[7] V. Kokilashvili et A. Meskhi. Weighted criteria for generalized fractional maximal functions and potentials in Lebesgue spaces with variable exponent. Integral Transforms Spec. Funct., 18:609–628, 2007.

[8] Elias M. Stein, Singular Integrals and Diferentiability Properties of Functions, Princeton University Press, 1970.