REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Application de la théorie des opérateurs m-accrétifs sur un problème elliptique non linéaire

---

Présentée par :

M^{elle} BENMIMOUNA Saida

SENGOUGA Abdelmohcen	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
BOUGHRARA Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
TALLAB Abdelhamid	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadreur Mr : BOUGHRARA Brahim, d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, le sérieux et la compétence. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses orienté, et aidé.

Je tiens à remercie les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je remercie tous les professeurs de département mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf de M'SILA, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers, ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci.

Dédicaces

Invocations à ALLAH, pour toute puissance.

À ma très chère mère,

À mon très cher père,

À mon frère et mes soeurs,

À toute ma famille,

À mes meilleurs amis

Et à tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce travail.

Saida

Notations

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$	
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
$\|.\|_X$	La norme sur l'espace X.
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$	Gradient de u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien de u.
$p.p.$	Presque partout.
p^*	Exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
$f_n \rightharpoonup f$	La convergence faible de la suite f_n vers f.
$f_n \to f$	La convergence fort de la suite f_n vers f.
$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$	La convergence faible étoile de la suite f_n vers f.
$< .,. >_X$	Le produit scalaire de X.
$(.,.)$	Le crochet de dualité entre l'espace X et son dual topologique X^*.
X^*	Espace dual de X.
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions de classe k dans Ω.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ à support compact .
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
$sign$	La fonction signe sur X : si $x \neq 0$ et $sign 0 \in [0,1]$.
$E \hookrightarrow F$	L'injection continue de E dans F.
$E \hookrightarrow_c F$	L'injection compacte de E dans F.
$J(x)$	L'application de dualité.
$D(A)$	Domaine de l'opérateur A.
$G(A)$	Graphe de l'opérateur A.
$R(A)$	Image de l'opérateur A.
J_λ	Résolvante de l'opérateur$A$.
A_λ	L'approximation de Yosida de l'opérateur$A$.

Table des matières

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, les méthodes fonctionnelles ont joué un rôle croissant dans la théorie qualitative des équations aux dérivées partielles. Les méthodes spectrales et la théorie des semi-groupes C_0 des opérateurs linéaires ainsi que la théorie des degrés de Leray-Schauder, les théorèmes du point fixe et la théorie des opérateurs non linéaires maximaux monotones sont maintenant des outils fonctionnels essentiels pour le traitement des problèmes aux limites linéaires et non linéaires associés aux équations aux dérivées partielles.

Dans la plupart des situations, les opérateurs m-accrétifs apparaissent comme des opérateurs différentiels partiels sur un domaine Ω avec des conditions aux limites appropriées. Ces problèmes aux limites n'ont pas de formulation appropriée dans un cadre fonctionnel variationnel (comme dans le cas des problèmes aux limites elliptiques dans les espaces $L^p(\Omega)$ où celui des problèmes elliptiques non linéaires de type divergence) mais ont, cependant, un traitement adéquat dans le cadre de la théorie des opérateurs m-accrétifs.

Dans ce travail, nous étudions ce type de problème elliptique avec des conditions aux limites de homogènes de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\beta(u)$ un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Á l'aide de la théorie générale des opérateurs m-accrétifs non linéaires dans les espaces de Banach avec des applications à nous répondons à la question d'existence de la solution des problèmes aux limites elliptiques non linéaires dans les espaces $L^p(\Omega)$.

Nous avons décomposé ce mémoire en trois chapitres : Dans le premier chapitre on rappelle quelques résultats fondamentaux sur les espace de Banach, topologie faible, les espaces de Sobolev, ainsi que problèmes aux limites elliptiques.

Nous donnons dans le second chapitre, des définitions et rappels de certaines propriétés des opérateurs accrétifs dans les espaces de Banach, l'application de dualité et quelques proposition importants.

Le dernier chapitre est consacré à démontrer deux théorème d'existence pour un problème elliptique semi linéaire, pour un opérateur m-accrétif défini par :

$$\begin{cases} -\Delta u + \widetilde{\beta}(u) \ni f, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\widetilde{\beta}(u)$ est l'opérateur m-accrétif dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ défini par :

$$\widetilde{\beta}(u(x)) = \{v \in L^p(\Omega);\ v(x) \in \beta(u(x)),\ p.p.x \in \Omega\}.$$

Et l'équation de milieux poreux dans $L^1(\Omega)$, défini par

$$\begin{cases} u + Au \ni f, & p.p.x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où l'opérateur A définit comme suivant :

$$\begin{cases} Au = -\Delta\beta(u), \quad \forall u \in D(A), \\ D(A) = \left\{u \in L^1(\Omega); \beta(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta\beta(u) \in L^1(\Omega)\right\}. \end{cases}$$

Où $\beta(u)$ un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONELLE

Dans ce chapitre, on donner et rappel quelques notions et résultats classiques fondamentaux de topologie et d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder la suite.

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1. *(a) Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E dit est complet si tout suite de Cauchy dans E est convergente dans E.*

(b) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.2. *Soit E un espace vectoriel normé. On désigne par E^* le dual topologique de E. C'est l'ensemble des formes linéaires continues sur E, E^* est un muni de la norme dual*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E\leq 1}} \frac{|(f(x),x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} |(f(x),x)|.$$

On notera généralement $(.,.)$ le crochet de dualité entre l'espace E et E^*.

Définition 1.3. ***(Espace réflexif)***[2] *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^{**}. On dit que E est réflexif si : $J(E) = E^{**}$.*

Définition 1.4. *L'espace E est dit strictement convexe si la boule unité B de E est strictement convexe, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in \partial B, \exists \lambda \in]0,1[\, : \lambda x + (1-\lambda)y \notin \partial B.$$

Définition 1.5. ***(uniformément convexe)***[2] *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$(x, y \in E, \| x \|\leq 1, \| y \|\leq 1 \textit{ et } \|x-y\| \geq \varepsilon) \Rightarrow (\|x+y\| < 2(1-\delta(\varepsilon)))\,.$$

Proposition 1.1. *1. Tout espace uniformément convexe X est strictement convexe.*

2. *Les espaces de Hilbert, les espaces $L^p(\Omega)$, pour $1 < p < \infty$, sont des espaces uniformément convexes.*

Théorème 1.1. ***(Milman-Pettis**[2]**)*** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

1.1.1 Théorème du points fixes d'applications contractantes

Définition 1.6. [3] Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application. On dit que f est strictement contractante s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq \alpha \|x - y\|_E.$$

Et on dit que f est contractante si

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_E.$$

Définition 1.7. ***(Point fixe de Picard)*** *Soit E un espace de Banach et soit $f : E \to E$ une application. On dit que f admet un point fixe s'il existe $x \in E$ tel que*

$$f(x) = x.$$

Théorème 1.2. [3] Soients E un espace de Banach et $f : E \to F$ une application strictement contractante. Alors f admet un point fixe unique.

1.1.2 Topologie faible

Définition 1.8. *(**Convergence faible**) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et x un élément de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et on note*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ dans } E,$$

si

$$(x^*, x_n) \to (x^*, x)\,, \quad \forall x^* \in E^*.$$

La convergence forte (i.e. la convergence au sens de la norme $\|x_n - x\|_X \to 0$) sera notée :

$$x_n \to x \text{ dans } E.$$

Proposition 1.2. [6] *Si la limite faible d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est unique.*

Définition 1.9. *(**convergence faible-$*$**) On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E^* converge faible-$*$ vers f et on note*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ dans } E^*,$$

si

$$(f_n, x) \to (f, x), \quad \forall x \in E.$$

Proposition 1.3. *Soit (f_n) une suite de E^*. Alors*

– *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E^* alors $||f_n||$ est bornée et $||f|| \leq \liminf ||f_n||$.*

1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$

Dans toute la suite, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $n \geq 1$, et soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p^* l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.10. *1. Pour $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$L^P(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty\}$$

muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

2. Pour $p = \infty$, on pose

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ est mesurable et } \exists\, C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess\, |f(x)| = \inf\{C : \ |f(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Proposition 1.4.

1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)})$ est un espace de Banach .*
2. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable .*
3. *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif, et le dual de $L^p(\Omega)$ s'indentifie avec $L^{p^*}(\Omega)$, où : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.*
4. *Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx,$$

dont la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Théorème 1.3. ***(Inégalité de Hölder généralisée)*** *Soient p, q et $r \geq 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.1}$$

Si $r = 1$, cette inégalité s'appelle de ***Hölder****.*

Si $r = 1$, $p = q = 2$, cette inégalité s'appelle de ***Cauchy Schwartz****.*

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Yaung)*** *Soient a, b deux réels positifs. $p > 1$, alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}(\epsilon a)^p + \frac{1}{p^*}\left(\frac{b}{\epsilon}\right)^{p^*} = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p^*},$$

pour tout $\varepsilon = \epsilon^p/p > 0$.

Théorème 1.5. ***(Convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que :*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$,*
2. *il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$.*

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

1.3 Espaces de Sobolev

1.3.1 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$, on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compacte inclus dans Ω. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$, on note

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,$$

et sont au sens des distributions.

Définition 1.11. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\right\}.$$

munit de la norme suivant :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.5. [6] *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :*
- *Un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *Un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
- *Un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Définition 1.12. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit les espace $W_0^{m,p}(\Omega)$comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, on écrit :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega);\ \exists (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) : \|u - \varphi_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \right\}.$$

Remarque 1.1. *Pour p=2, on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$et $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire suivant :*

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.6. ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.Alors pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.3.2 Dualité

Définition 1.13. *On définit l'espace $W^{-1,p^*}(\Omega)$, comme l'espace dual de $W_0^{1,p^*}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$.*

Autrement dit un élément f de $W^{-1,p^*}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $(.,.)$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p^*}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que

$$\|f\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} = \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|(f,v)|}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}=1} |(f,v)|,$$

et

$$(f,v) \leq \|f\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)},\ \textit{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.6. ***(Caractérisation de** $W^{-1,p^*}(\Omega)$**)*** *Soit $F \in W^{-1,p^*}(\Omega)$. Alors il existe*

$$f_0, f_1, ..., f_n \in L^{p^*}(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$(F,v) = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

et

$$\max_{0\leq i\leq n} \| f_i \|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|F\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} .$$

Si Ω est borné, on peut prendre $f_0 = 0$.

Théorème 1.7. ***(Formule de Green)*** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Alors pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega), v \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds - \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx.$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x).\eta(x)$.
$\eta(x)$: le vecteur normal unitaire et extérieur à de Ω en x.

1.3.3 Injections de Sobolev

Soit E, F deux espaces de Banach.

Définition 1.14. *On dit que E s'injecte dans F de manière continue.*
Si l'injection canonique :

$$\begin{aligned} id : E &\longmapsto F \\ x &\longmapsto id(x) = x, \end{aligned}$$

est bien défini (i.e. $E \subset F$) et continue, et on note :

$$E \hookrightarrow F,$$

de manière équivalent, $E \hookrightarrow F$ si :

$$\exists C > 0, \forall x \in E : \|id(x)\|_F = \|x\|_F \leq C \|x\|_E .$$

Définition 1.15. *On dit que E s'injecte dans F de manière compacte.*
Si l'injection canonique :

$$\begin{aligned} id : E &\longmapsto F \\ x &\longmapsto id(x) = x, \end{aligned}$$

est bien défini (i.e. $E \subset F$) et compacte, et on note :

$$E \hookrightarrow_c F,$$

c'est à dire de toute suite bornée $(x_n)_n$ de E on peut extraire une sous-suite convergente dans F.

Théorème 1.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, avec $\partial\Omega$ borné, Soit $1 \leq p \leq \infty$. On a*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si\ 1 \leq p < \dfrac{N}{m},\ \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}, \\ L^q(\Omega), & si\ p = \dfrac{N}{m},\ \forall q \geq p, \\ L^\infty(\Omega) & si\ p > \dfrac{N}{m}, \end{cases}$$

avec injections continues.

Théorème 1.9. ***(Rellich-Kondrachov)***. *Soit Ω un ouvert borne de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors on a les injections compactes suivantes*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \begin{cases} L^q(\Omega) & si\ p < N,\ \forall q \in [1, p^*[\ où\ \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ L^q(\Omega), & si\ p = N,\ \forall q \in [1, +\infty[, \\ C(\overline{\Omega}) & si\ p > N. \end{cases}$$

1.4 Problèmes aux limites elliptiques

1.4.1 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème suivant sert à démontrer l'existence de la solution pour les problèmes elliptiques linéaires.

Théorème 1.10. *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$. Supposons que*

$$a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes

1. *a est continue. C'est à dire il existe $C > 0$:*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in H,$$

2. *a est coercive. C'est à dire il existe $\alpha > 0$:*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad \forall u \in H,$$

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (i.e. $f \in H^*$). Alors il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H.$$

1.4.2 La solutions faibles au problème de Dirichlet

Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

où Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, et f est une fonction donnée sur Ω.

Définition 1.16. *La fonction u est une solution faible de la Problème de Dirichlet 1.2 si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.3}$$

1.4.3 Régularité des solutions faibles

Théorème 1.11. [2] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H_0^1$ une solution faible de 1.2. Alors $u \in H^2(\Omega)$ et*

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq C \| f \|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.4}$$

où C est indépendant de f.

Théorème 1.12. *(**Agmon, Douglis, Nirenberg** [7]) On suppose que Ω est ouvert borné et de classe C^2 avec $\partial\Omega$ borné . Soit $1 < p < \infty$. Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ unique solution de du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

De plus, on a

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

où C est indépendant de u.
Si Ω est de classe C^{m+2} et $f \in W^{m,p}(\Omega)$ $(m \geq 1)$, alors

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad et \quad \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Théorème 1.13. *(Voir [4],[1]) Soit $f_i \in L^p(\Omega), i = 0, 1, ..., N, p > N$. Le problème aux limite*

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} & dans\ \Omega, \\ \varphi = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

a une solution faible unique $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et*

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.7}$$

CHAPITRE 2

LES OPÉRATEURS D'UN ESPACE DE BANACH

Soient $(X, ||.||_X)$ un espace de Banach, X^* son dual et $(.,.)$ le crochet de dualité entre X^* et X. L'espace X^* muni de la topologie faible-$*$ est noté X^*_w

2.1 Notations et définitions

Soient X et Y deux espaces vectoriels. On note $X \times Y$ leur produit cartésien. Les éléments de $X \times Y$ s'écrit $[x, y]$, où $x \in X$ et $y \in Y$.

Définition 2.1. *Un opérateur multivoque de X dans Y est un sous ensemble $A \subset X \times Y$. De manière équivalente c'est une application A de X dans $2^Y := P(Y)$.*

On définit aussi :

- *L'image de x : $Ax = \{y \in Y;\ [x, y] \in A\}$,*
- *Le domaine de A : $D(A) = \{x \in X;\ Ax \neq \phi\}$,*
- *Le rang ou l'image de A : $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$,*
- *L'inverse de A : $A^{-1} = \{[y, x];\ [x, y] \in A\}$.*

Remarque 2.1. *Nous identifierons A avec son graphe dans $X \times Y$, i.e.*

$$A \equiv G(A) = \{[x, y] \in X \times Y; y \in Ax\} .$$

S'il n'y a pas de confusion, on dira seulement opérateur au lieu opérateur multivoque.

Notation 2.1. *Soient $A, B \subset X \times Y$ deux opérateurs multivoques. On introduit les notations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\lambda A = \{[x, \lambda y];\ [x, y] \in A\} \quad \lambda \in \mathbb{R},\\
&A + B = \{[x, y + z];\ [x, y] \in A,\ [x, z] \in B\} ,\\
&AB = \{[x, z];\ [x, y] \in B,\ [y, z] \in Ay \in Y\} .
\end{aligned}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&D(A + B) = D(A) \cap D(B),\\
&D(\lambda A) = D(A)\ si\ \lambda \neq 0,\\
&D(A^{-1}) = R(A).
\end{aligned}$$

2.2 Application de dualité

Définition 2.2. [10]*On définit l'application de dualité* $J : X \to 2^{X^*}$ $\big($ *où* $2^{X^*} = \mathcal{P}(X^*)\big)$ *par :*

$$J(x) = \left\{x^* \in X^*; (x, x^*) = ||x||^2 = ||x^*||^2\right\}, \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

On définit aussi de l'application inverse $J^{-1} : X^* \to 2^X$ *par*

$$J^{-1}(x^*) = \{x \in X : x^* \in J(x)\} = \left\{x \in X; ||x|| = ||x^*||, (x, x^*) = ||x||^2 = ||x^*||^2\right\}. \tag{2.2}$$

On a les propriété suivantes :

Propriétés 2.1.
- $\forall x \in X$ *:* $J(x)$ *est non vide (conséquence de théorème de Hahn-Banach (voir Brézis* [2])).
- L'application de dualité $J : X \to 2^{X^*}$ est un opérateur multivoque.

Définition 2.3. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $A : X \to X$ *un opérateur.*

A est dit demi-continu dans X, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge fortement vers x, la suite $(A(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge faiblement- vers $A(x)$ dans X^* (où $Ax_n \to Ax$ dansX^*_w).*

Théorème 2.1. [10] *Soit* X *un espace de Banach.*
- *Si l'espace dual X^* est strictement convexe, alors l'application de dualité $J : X \to X^*$ est à valeur unique et demi-continue.*
- *Si l'espace X^* est uniformément convexe, alors l'application de dualité J est uniformément continu sur chaque sous-ensemble borné de X.*

Démonstration.
1. On montrer que si X^* est strictement convexe alors $J(x)$ est à valeur unique.

   Pour tout $x \in X$, $J(x)$ est ensemble fermée convexe dans X^*, car $J(x) \subset \partial B$, où B la boule ouvert de centre 0 et de rayon $||x||$ notée $B(0, ||x||)$, on en déduit que si X^* est strictement convexe alors $J(x)$ est un valeur unique.
2. On montrer que si X^* est strictement convexe alors $J(x)$ est demi-continue.

   Nous savons que pour tout $x_0 \in X$ il existe un certain $x_0^* \in X^*$. Soit $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \to x_0$ et $J(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} x_0^*$. (Parce que la boule unité de l'espace dual est w^*-compact (Yosida [5])). On a $(x_0^*, x_0) = ||x_0||^2 \geq ||x_0^*||^2$ car la boule fermée de rayon $||x_0||$ dans X^* est faible étoile fermée. D'où $||x_0||^2 = (x_0^*, x_0) - ||x_0^*||^2$. En d'autres termes $x_0^* = J(x_0)$, et donc

   $$J(x_n) \rightharpoonup J(x_0).$$

3. On montrer que si X^* est uniformément convexe alors $J(x)$ est uniformément continu sur chaque sous-ensemble borné de X.

Supposons maintenant que X^* est uniformément convexe, et il existe des sous-suites $(u_n), (v_n)$ dans X. Il suffit de montrer que les hypothèses

$$||u_n||, ||v_n|| \leq M, ||u_n - v_n|| \to 0, ||J(u_n) - J(v_n)|| \geq \varepsilon > 0 \ \ \forall n = 1, 2, ...,$$

conduire à une contradiction. Nous fixons $x_n = u_n||u_n||^{-1}$ et $y_n = v_n||v_n||^{-1}$. Alors $||x_n|| = ||y_n|| = 1$. Clairement, on peut supposer sans perte de généralité que $||u_n|| \geq \alpha > 0$ et $||v_n|| \geq \alpha > 0 \ \ \forall n$, et on a

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= u_n||u_n||^{-1} + v_n||u_n||^{-1} - v_n||u_n||^{-1} + v_n||v_n||^{-1} \\ &= (u_n - v_n)||u_n||^{-1} + (||u_n||^{-1} - ||v_n||^{-1})v_n \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\| &\leq \|u_n - v_n\|||u_n||^{-1} + ||v_n||||u_n||^{-1} \\ &\leq \|u_n - v_n\|||u_n||^{-1} + \|u_n - v_n\|||u_n||^{-1} \\ &\leq 2\|u_n - v_n\|||u_n||^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$\|x_n - y_n\| \to 0$$

et

$$\begin{aligned} (J(x_n) + J(y_n), x_n) &= (J(x_n), x_n) + (J(y_n), y_n) - (J(y_n), y_n) + (J(y_n), x_n) \\ &= ||x_n||^2 + ||y_n||^2 + (J(y_n), x_n - y_n) \\ &= 2 + (J(y_n), x_n - y_n) \\ &\geq 2 - \|x_n - y_n\| \to 2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|J(x_n) - J(y_n\| \geq 1 - \frac{1}{2}\|x_n - y_n\|, \quad \forall n.$$

Comme $\|J(x_n)\| = \|J(y_n)\| = 1$ et l'espace X^* est uniformément convexe, cela implique que $\lim_{n\to\infty} (J(x_n) - J(y_n)) = 0$.

D'autre part, on a $J(u_n) = J(||u_n||x_n) = ||u_n||J(x_n)$, et $J(v_n) = ||v_n||J(y_n)$, on obtient

$$\begin{aligned} J(u_n) - J(v_n) &= ||u_n||J(x_n) + ||u_n||J(y_n) - ||u_n||J(y_n) - ||v_n||J(y_n) \\ &= ||u_n|| \left(J(x_n) - J(y_n)\right) + \left(||u_n|| - ||v_n||\right) J(y_n) \end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty} (J(u_n) - J(v_n)) = 0$ fortement dans X^*. Contradiction.

□

Lemme 2.1. *Soit X un espace de Banach uniformément convexe. Si*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ et } \limsup_{n\to 0} \|x_n\| \leq \|x\|,$$

alors $x_n \to x$ quand $n \to 0$.

La proposition suivante donne quelques exemples sur l'application de dualité :

Proposition 2.1. 1. *$X = H$ est un espace de Hilbert identifié avec son propre dual. Alors $J = I$, l'opérateur d'identité dans H.*

Si H n'est pas identifié avec son dual H^*, alors l'application de dualité $J : H \to H^*$ est l'isomorphisme canonique Λ de H sur H^*.

2. *$X = L^p(\Omega)$, où $1 < p < \infty$ et Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$, l'application de dualité de X est donné par*

$$J(u)(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)||u||^{2-p}_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in L^p(\Omega), p.p.x \in \Omega \tag{2.3}$$

l'application de dualité J de $L^p(\Omega)$ est à valeur unique (car $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour $p > 1$).

3. *$X = L^1(\Omega)$,*

$$J(u)(x) = \left\{ v \in L^\infty(\Omega);\ v(x) \in sign(u(x)).\, ||u||_{L^1(\Omega)}, \quad p.p.x \in \Omega \right\}$$

tel que

$$sign(r) = \begin{cases} 1 & pour \quad r > 0, \\ [-1, 1] & pour \quad r = 0, \\ -1 & pour \quad r < 0. \end{cases}$$

4. *$X = W^{1,p}_0(\Omega)$, où $1 < p < \infty$ et Ω est un sous-ensemble borné et ouvert de $\mathbb{R}^N$.Alors,*

$$J(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) ||u||^{2-p}_{W^{1,p}_0(\Omega)}.$$

Autrement dit, $J : W^{1,p}_0(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, est défini par

$$(J(u), v) = \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx||u||^{2-p}_{W^{1,p}_0(\Omega)}, \quad \forall v \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Démonstration. On montrer que $J(u)(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)||u||^{2-p}_{L^p(\Omega)}$

$$J(u(x)) = \left\{ v \in (L^p(\Omega))^* = L^{p^*}(\Omega); (v, u) = \|u\|^2_{L^p} = \|v\|^2_{L^{p^*}} \right\}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

on pose $v = |u(x)|^{p-2}u(x)$, on vérifie que $v \in L^{p^*}(\Omega)$. Si $u \in L^p(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left||u|^{p-2}u\right|^{p^*} dx &= \int_\Omega (|u|^{p-1})^{p^*} dx,\\ &= \int_\Omega (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx,\\ &= \int_\Omega |u|^p dx < +\infty,\end{aligned}$$

donc $|u|^{p-2}u \in L^{p^*}(\Omega)$. Et on a d'autre part :

$$(v,u)_{L^{p*}(\Omega)\times L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{p-2}uudx = \int_\Omega |u|^p dx = \|u\|^p_{L^p}.$$

Et on a

$$\begin{aligned}\| \; v \; \|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} = \int_\Omega |v|^{p^*} dx &= \left||u|^{p-2}u\right|^{p^*} dx\\ &= \int_\Omega (|u|^{p-1})^{p^*} dx\\ &= \int_\Omega (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx\\ &= \int_\Omega |u|^p dx\\ &= \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

donc $(v,u)_{L^{p*}(\Omega)\times L^p(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \|v\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}$.
D'autre part, on a

$$(||u||^{2-p}v, u) = ||u||^{2-p}(v,u) = ||u||^2.$$

Comme J est à valeur unique, alors $J(u)(x) = ||u(x)||^{2-p}v(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)||u||^{2-p}_{L^p(\Omega)}$. $\square$

2.3 Opérateurs maximaux monotones

Soient X un espace de Banach et X^* son dual.

Définition 2.4. *L'ensemble $A \subset X \times X^*$ (de manière équivalente l'opérateur $A : X \to 2^{X^*}$) est dit monotone si*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0, \qquad \forall x_1, x_2 \in D(A), \text{ et } \forall y_1 \in Ax_1,\; y_2 \in Ax_2.$$

Définition 2.5. *Un opérateur monotone $A \subset X \times X^*$ est dit maximal monotone s'il n'existe aucun opérateur monotone prolongeant strictement A (au sens de l'inclusion des graphes).*

Définition 2.6. *Soit $A : X \to X^*$ un opérateur à valeurs uniques avec $D(A) = X$.*

- *L'opérateur A est dit hémicontinu si, pour tout $x, y \in X$,*

$$A(x + \lambda y) \rightharpoonup Ax \quad lorsque\ \lambda \to 0.$$

- *A est dit coercive si*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x^0, y_n)\|x_n\|^{-1} = \infty$$

pour certains $x^0 \in X$ et tout $[x_n, y_n] \in A$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$.

Proposition 2.2. *Soit $A \subset X \times X^*$ un opérateur maximal monotone. On a :*

(i) A^{-1} est maximal monotone dans $X \times X^*$,

(ii) Pour tout $x \in D(A)$, Ax est un sous-ensemble convexe fermé de X^*.

Remarque 2.2. *Si A est un opérateur à valeur unique de X à X^*, alors A est monotone si*

$$(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0, \qquad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

2.4 Opérateurs m-accrétif

Définition 2.7. ***(Opérateur accrétif)*** *Un sous-ensemble A de $X \times X$ (de manière équivalente, un opérateur à multivoque de Xà X) est appelé opérateur accrétif si :*

$$\forall\ [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A,\ \exists\ w \in J(x_1 - x_2) :\ (y_1 - y_2, w) \geq 0. \tag{2.4}$$

Définition 2.8. ***(Opérateur m-accrétif)*** *Un opérateur accrétif $A \subset X \times X$ est dit m-accrétif si*

$$R(I + A) = X. \tag{2.5}$$

Ici, nous avons noté I l'opérateur identité dans X.

Remarque 2.3. *Si $X = H$ est un espace de Hilbert identifié avec son dual, alors la monotonie et l'accretivité sont équivalentes.*

Définition 2.9.

- *Un opérateur $A \subset X \times X$ est dit dissipatif si l'opérateur (-A) est accrétif et il est dit m-dissipatif si l'opérateur (-A) est m-accrétif.*

- *Un opérateur $A \subset X \times X$ est dit ω-accrétif (ω-m-accrétif), où $\omega \in \mathbb{R}$, si $A + \omega I$ est accrétif (respectivement, m-accrétif). Un sous-ensemble$A \subset X \times X$ c'est-à-dire ω-accrétif où ω -m-accrétif pour certains $\omega \in \mathbb{R}$ est appelé quasi-accrétif, respectivement quasi-m-accrétif.*

Lemme 2.2. [10] *Soient $x, y \in X$. Alors :*

$$\exists w \in J(x) : (y, w) \geq 0 \Longleftrightarrow \|x\| \leq \|x + \lambda y\|\,, \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour $x = 0$, c'est évident. Nous supposons $x \neq 0$ dans la suite. Si $(y, w) \geq 0$ pour certains $w \in J(x)$, alors par defintion de $J(x)$, On a

$$(x + \lambda y, w) = (x, w) + \lambda(y, w) = \|x\|^2 + \lambda(y, w) \geq \|x\|^2,$$

donc

$$\|x\|^2 = (x, w) \leq (x + \lambda y, w) = \|x + \lambda y\|\|w\| \quad \forall \lambda > 0.$$

Comme $\|w\| = \|x\|$, on obtient

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|\,.$$

Supposons maintenant que $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ pour $\lambda > 0$. Pour chaque $\lambda > 0$, soit $w_\lambda \in J(x + \lambda y)$ et $f_\lambda = w_\lambda \|w_\lambda\|^{-1}$. On a $\|f_\lambda\| = 1$ donc $\{f_\lambda\}_{\lambda > 0}$ est borné dans X^*. D'où pour une sous suite notée encore f_λ, $\exists f \in X^* : f_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans X^*. D'autre part

$$\begin{aligned} \|x\| \leq \|x + \lambda y\| = (x + \lambda y, f_\lambda) &= (x, f_\lambda) + (\lambda y, f_\lambda) \\ &\leq \|x\|\,\|f_\lambda\| + \lambda\,(y, f_\lambda)\,, \\ &= \|x\| + \lambda\,(y, f_\lambda)\,, \end{aligned}$$

donc

$$0 \leq \lambda\,(y, f_\lambda)\,,$$

il s'ensuit que

$$(y, f_\lambda) \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Donc, $(y, f) = \lim_{\lambda \to 0}(y, f_\lambda) \geq 0$ et $\|x\| \leq (x, f)$. Car $\|f\| \leq \liminf_{\lambda \to 0} \|f_\lambda\| = 1$, cela implique que $\|x\| = (x, f)$, $\|f\| = 1$, et donc $w = f||x||$, $(x, w) = ||x||^2$ implique que $w \in J(x)$, $(y, w) \geq 0$. □

Corollaire 2.1. *Les assertions suivantes sont équivalents*

(a) *A est accrétif,*

(b) $\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|\,,\ \forall [x_i, y_i] \in A,\ i = 1, 2,\ et\ \forall \lambda > 0.$

Proposition 2.3. *Si A un opérateurs accrétif, alors l'opérateur $(I+\lambda A)^{-1}$ est à valeur unique et contractante. C'est à dire,*

$$\|(I + \lambda A)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall \lambda > 0, x, y \in R(I + \lambda A). \tag{2.7}$$

Démonstration. D'après la corollaire 2.1, $\forall [x_i, y_i] \in A$ on a

$$\|x_1 + \lambda y_1 - (x_2 + \lambda y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\| \iff \|(I + \lambda A)x_1 - (I + \lambda A)x_2\| \geq \|x_1 - x_2\|$$

on pose $x_1 = (I + \lambda A)^{-1} z_1$ et $x_2 = (I + \lambda A)^{-1} z_2$, donc

$$\left\|(I + \lambda A)^{-1} z_1 - (I + \lambda A)^{-1} z_2\right\| \leq \|z_1 - z_2\|$$

On montrer que $(I + \lambda A)^{-1}$ est à valeur unique, on supposasse que $v_1, v_2 \in (I + \lambda A)^{-1} u$, on obtient

$$\|v_1 - v_2\| = \left\|(I + \lambda A)^{-1} u - (I + \lambda A)^{-1} u\right\| \leq \|u - u\| = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2,$$

c'est à dire $(I + \lambda A)^{-1}$ est à valeur unique. □

Définition 2.10. ***(Approximation des opérateurs accretifs)***
Soit $A \subset X \times X$ un opérateurs accrétif. On définit les opérateurs J_λ et A_λ par

$$J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x, \qquad x \in R(I + \lambda A),\ \textit{pour tout } \lambda > 0, \tag{2.8}$$

$$A_\lambda x = \lambda^{-1}(x - J_\lambda x), \qquad x \in R(I + \lambda A),\ \textit{pour tout } \lambda > 0. \tag{2.9}$$

A_λ s'appelle l'approximation de Yosida de A.

Proposition 2.4. [8] *Soit $A \subset X \times X$ un opérateurs accrétif. Alors $\forall \lambda > 0$:*

(a) $\| J_\lambda x - J_\lambda y \| \leq \| x - y \|$, $\forall x, y \in R(I + \lambda A)$, *(i.e. J_λ est contractante).*

(b) *A_λ est accrétif et Lipschitzienne (avec une constante de Lipschitzienne $2\lambda^{-1}$).*

(c) $\forall x \in R(I + \lambda A),\ A_\lambda x \in A J_\lambda x$.

(d) $\|A_\lambda x\| \leq |Ax| = \inf \{\|y\|; y \in Ax\}$.

(e) *Pour $x \in D(A) \cap R(I + \lambda A)$, alors $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x$.*

Démonstration.

(a) soient $x, y \in R(I + \lambda A)$, on a

$$\begin{aligned} \|J_\lambda x - J_\lambda y\| &= \|(I + \lambda A)^{-1} x - (I + \lambda A)^{-1} y\| \\ &\leq \|x - y\|,\ (\text{car } (I + \lambda A)^{-1} \text{ contractant }). \end{aligned}$$

(b) Soient $x, y \in D(A)$ et $f \in J(x - y)$. Alors

$$\begin{aligned} (A_\lambda x - A_\lambda y, f) &= \lambda^{-1} \left((x - J_\lambda x), f\right) - \lambda^{-1} \left((y - J_\lambda y), f\right) \\ &= \lambda^{-1} \left(x - y, f\right) - \lambda^{-1} \left((J_\lambda x - J_\lambda y), f\right) \\ &\geq \lambda^{-1} \|x - y\|^2 - \lambda^{-1} \|J_\lambda x - J_\lambda y\|^2 \\ &\geq \lambda^{-1} \|x - y\|^2 - \lambda^{-1} \|x - y\|^2 = 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé 2.9 et (a). Donc A_λ est accrétif.

On démontre que A_λ est lipschitzienne. On a

$$\begin{aligned}|A_\lambda x - A_\lambda y| &= |\lambda^{-1}(x - J_\lambda x) - \lambda^{-1}(y - J_\lambda y)| \\ &= \lambda^{-1}\left|(x-y) - (J_\lambda x - J_\lambda y)\right| \\ &\leq \lambda^{-1}|x-y| + \lambda^{-1}|J_\lambda x - J_\lambda y| \\ &\leq \lambda^{-1}|x-y| + \lambda^{-1}|x-y| \\ &\leq 2\lambda^{-1}|x-y|.\end{aligned}$$

Alors A_λ est Lipschitzienne.

(c) Soit $x \in R(I+\lambda A)$, et $y = A_\lambda x = \lambda^{-1}(x - J_\lambda x)$. Si $u = J_\lambda x$, soit $u + \lambda A u = (I+\lambda A)u \ni x$, il existe $z \in Au$ avec $u + \lambda z = x$.
Ainsi $y = A_\lambda x = \lambda^{-1}(x - J_\lambda x) = \lambda^{-1}(u + \lambda z - u) = z \in AJ_\lambda x$.

(d) Soit $y \in Ax$ où $x \in D(A) \cap R(I+\lambda A)$. On a $x = J_\lambda(x + \lambda y)$ et donc

$$\|A_\lambda x\| = \lambda^{-1}\|x - J_\lambda x\| = \lambda^{-1}\|J_\lambda(x+\lambda y) - J_\lambda x\| \leq \lambda^{-1}\|x + \lambda y - x\| = \|y\|.$$

Donc $\|A_\lambda x\| \leq \inf_{y\in Ax}\|y\| = |Ax|$.

(e) Pour chaque $x \in D(A) \cap R(I+\lambda A)$, on a

$$\|J_\lambda x - x\| = \lambda\|A_\lambda x\| \leq \lambda|Ax| \to 0, \quad \lambda > 0.$$

Donc, $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x$. □

Proposition 2.5. [10] *Un ensemble accrétif $A \subset X \times X$est m-accrétif si et seulement si*

$$R(I+\lambda A) = X$$

pour tous (équivalent, pour certains) $\lambda > 0$.

Démonstration. Soit A m-accrétif et soit $y \in X$, $\lambda > 0$, arbitraire mais fixe. Alors, l'équation

$$x + \lambda A x \ni y \tag{2.10}$$

comme écrit

$$\begin{aligned}x + \frac{y}{\lambda} - \left(\frac{x}{\lambda} + Ax\right) &= x, \\ \frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x &= x + Ax, \\ &= (I+A)x,\end{aligned}$$

alors
$$x = (I + A)^{-1}\left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x\right),$$
comme $J_1 = (I + A)^{-1}$, on obtient
$$x = J_1\left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x\right).$$
On pose $F(x) = J_1\left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x\right)$,
$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \left\|J_1\left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x_1\right) - J_1\left(\frac{y}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x_2\right)\right\|$$
comme J_1 est contractante (proposition 2.4), il vient
$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| \|x_1 - x_2\|.$$
Donc F est strictement contractante avec $\alpha = \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| < 1$, alors par le théorème du point fixe de Banach, nous concluons que l'équation a une solution pour $1/2 < \lambda < +\infty$.

Maintenant, fixons $\lambda_0 > 1/2$ et écrivons l'équation précédente comme
$$x = (I + \lambda_0 A)^{-1}\left(\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)x + \frac{\lambda_0}{\lambda}y\right). \tag{2.11}$$
Parce que $J_{\lambda_0} = (I + \lambda_0 A)^{-1}$ est contractante, cette équation a une solution pour $\lambda \in (\lambda_0/2, \infty)$. En répétant cette étape n fois, on obtient que $R(I + \lambda A) = X$ pour tout $\lambda > \frac{\lambda_0}{2^n} > 0$.

Supposons maintenant que $R(I + \lambda_0 A) = X$ pour certains $\lambda_0 > 0$. Alors, si nous posons l'équation 2.10 sous la forme 2.11, Nous concluons comme avant $R(I + \lambda A) = X$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0/2, \infty)$ et $R(I + \lambda A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. □

Corollaire 2.2. *Soit* $A \subset X \times X$ *:*

- A *est m-accrétif si et seulement si pour tout* $\lambda > 0$ *l'opérateur* $(I + \lambda A)^{-1}$ *est contractante sur tout* X*.*
- A *est m-accrétif si et seulement si, pour tous* $\lambda > 0$*,*

$$\|(I + \lambda A)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Définition 2.11. *Un sous-ensemble* $A \subset X \times X$

- A *est dit fermé si* $x_n \to x,\ y_n \to y$*, et* $[x_n, y_n] \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ *impliquent que* $[x, y] \in A$*.*
- A *est dit demi-fermé s'il est fermé dans* $X \times X_w$*, c'est-à-dire si* $x_n \to x,\ y_n \rightharpoonup y$*, et* $[x_n, y_n] \in A$*, alors* $[x, y] \in A$*.*

Proposition 2.6. *Soit A un ensemble m-accrétif de $X \times X$. Alors A est fermé et si $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_n \in X$ tels que $\lambda_n \to 0$ et*

$$x_n \to x, A_{\lambda_n} x_n \to y \quad \text{pour } n \to \infty, \tag{2.12}$$

Alors $[x, y] \in A$. Si X^* est uniformément convexe, alors A est demi-fermé, et si

$$x_n \to x, A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y \quad \text{pour } n \to \infty, \tag{2.13}$$

Alors $[x, y] \in A$.

Démonstration. On montrer que A est fermé, soient $x_n \to x, y_n \to y$, et $[x_n, y_n] \in A$. Car A est accrétif, on a

$$\|x_n - u\| \leq \|x + \lambda y_n - (u + \lambda v)\|, \quad \forall [u, v] \in A, \lambda > 0.$$

D'où

$$\|x - u\| \leq \|x + \lambda y - (u + \lambda v)\|, \quad \forall [u, v] \in A, \lambda > 0,$$

Maintenant, A est m-accrétif c'est-à-dire $R(I + \lambda A) = X$, pour $z = x + \lambda y$,

$$\exists (u, v) \in A : u + \lambda v = z = x + \lambda y.$$

En substituant dans cette dernière inégalité, on obtient

$$\|x - u\| \leq \|x + \lambda y - (x + \lambda y)\| = 0$$

donc $x = u$ et $v = y \in Ax$. Maintenant, si $\lambda_n \to 0$ et $x_n \to x$ par la condition 2.12, $\{A_{\lambda_n} x_n\}$ est borné et

$$x_n - J_{\lambda_n} x_n = \lambda_n A_{\lambda_n} x_n$$

pour $\lambda_n \to 0$

$$\|x_n - J_{\lambda_n} x_n\| = |\lambda_n| \|A_{\lambda_n} x_n\| \to 0$$

donc $J_{\lambda_n} x_n \to x_n$. D'après la proposition 2.4 $A_{\lambda_n} x_n \in A J_{\lambda_n} x_n$:

$$\begin{cases} A J_{\lambda_n} x_n \to y \\ x_n \to x \end{cases}$$

$\Longrightarrow A J_{\lambda_n} x_n \to Ax$, et A est fermé donc $[x, y] \in A$.

On suppose maintenant que X^* est uniformément convexe. Soient x_n, y_n tel que $x_n \to x, y_n \rightharpoonup y, [x_n, y_n] \in A$. A est accrétif, on a

$$(y_n - v, J(x_n - u)) \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A, n \in \mathbb{N}^*.$$

D'autres part, par la (théorème 2.1) J est continu sur X, par passage à la limite $n \to 0$ on obtient

$$(y - v, J(x - u)) \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A.$$

Si on prend $[u, v] \in A$ tel que $u + v = x + y$,

$$-(x - u, J(x - u)) = -||x - u|| \geq 0$$

alors $0 \leq ||x - u|| \leq 0$ donc $x = u$ et $y = v$. D'où $[x, y] \in A$, et A est demi-fermé. La dernière partie la même manière on a $[x, y] \in A$. □

Remarque 2.4.

1. *Un ensemble m-accrétif de $X \times X$ est accrétif maximal. En effet, si $[x, y] \in X \times X$ est tel que*

$$\|x - u\| \leq \|x + \lambda y - (u + \lambda v)\|, \quad \forall [u, v] \in A, \lambda > 0,$$

alors, en choisissant $[u, v] \in A$ tel que $u + \lambda v = x + \lambda y$, on voit que $x = u$ et $v = y \in Ax$.

2. *Si X^* est uniformément convexe, alors pour chaque $x \in D(A)$, nous avons la description algébrique suivante de Ax*

$$Ax = \{y \in X; (y - v, J(x - u)) \geq 0, \quad \forall u, v \in A\}.$$

En particulier, il s'ensuit que Ax est un sous-ensemble convexe fermé de X.

Proposition 2.7. *Soit X et X^* uniformément convexe et soit A un ensemble m-accrétif de $X \times X$. Alors :*

(i) $A_\lambda x \to A^0 x$, $\forall x \in D(A)$ pour $\lambda \to 0$. (Désignez par $A^0 x$ l'élément de norme minimale sur Ax).

Démonstration. (i) Soit $x \in D(A)$. Comme le voit la proposition 2.4, $\|A_\lambda x\| \leq |Ax| = \|A^0 x\|$, $\forall \lambda > 0$. Maintenant, soit $\lambda_n \to 0$ tel que $A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$, nous savons que $y \in Ax$, et donc

$$\lim_{n \to \infty} \|A_{\lambda_n} x\| = \|y\| = \|A^0 x\|.$$

L'espace X est uniformément convexe, par conséquent, cela implique que $A_{\lambda_n} x \to y = A^0 x$ (Lemme 2.1). D'où $A_\lambda x \to A^0 x$ pour $\lambda > 0$.

□

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Banach, A un ensemble m-accrétif de $X \times X$, et soit $B : X \to X$ un opérateur m-accrétif continue avec $D(B) = X$. Alors $A + B$ est m-accrétif.*

Proposition 2.8. *Soit X un espace de Banach avec un dual uniformément convexe X^* et soit A et B deux ensembles m-accrétifs dans $X \times X$ tels que $D(A) \cap D(B) \neq \emptyset$ et*

$$(Au, J(B_\lambda u)) \geq 0, \quad \forall \lambda > 0, \; u \in D(A). \tag{2.14}$$

Alors $A + B$ est m-accrétif.

Démonstration. Soit $f \in X$ et $\lambda > 0$ être arbitraires mais fixe. Nous approchons l'équation

$$u + Au + Bu \ni f \tag{2.15}$$

par

$$u + Au + B_\lambda u \ni f, \quad \forall \lambda > 0, \tag{2.16}$$

où B_λ est l'approximation Yosida de B, c'est

$$B_\lambda = \lambda^{-1}(1 - (I + \lambda B)^{-1}).$$

Nous pouvons écrire l'équation 2.16 comme peut être écrit sous la forme équivalente suivante

$$u = \left(1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} A\right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} u\right).$$

on pose $F(u) = \left(1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} A\right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} u\right).$

$\|F(u) - F(v)\| =$

$= \left\| \left(1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} A\right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} u\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} A\right)^{-1} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} v\right) \right\|$

$\leq \left\| \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} u\right) - \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda}(I + \lambda B)^{-1} v\right) \right\|, \left(\left(1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} A\right)^{-1}\right.$ est contractante

$\leq (1+\lambda)^{-1} \left\|(I + \lambda B)^{-1} u - (I + \lambda B)^{-1} v\right\|$

$\leq (1+\lambda)^{-1} \|u - v\|, ((1 + \lambda B)^{-1}$ est contractante).

Donc F est strictement contractante, alors par le théorème du point fixe de Banach, a une solution unique $u_\lambda \in D(A)$.

Nous multiplions l'équation suivante

$$u_\lambda + Au_\lambda + B_\lambda u_\lambda \ni f, \tag{2.17}$$

par $J(B_\lambda u_\lambda)$, il vient

$$(u_\lambda, J(B_\lambda u_\lambda)) + (Au_\lambda, J(B_\lambda u_\lambda)) + (B_\lambda u_\lambda, J(B_\lambda u_\lambda)) \ni (f, J(B_\lambda u_\lambda))$$

d'après la condition 2.14 et la majoration on a

$$\|B_\lambda u_\lambda\|^2 \leq \|f\| \|B_\lambda u_\lambda\| + \|u_\lambda\| \|B_\lambda u_\lambda\|, \ \forall \lambda > 0.$$

alors

$$\|B_\lambda u_\lambda\| \leq \|f\| + \|u_\lambda\| \leq C_1. \tag{2.18}$$

D'autre part, en multipliant 2.17 par $J(u_\lambda - u_0)$, où $u_0 \in D(A) \cap D(B)$, on a

$$(u_\lambda, J(u_\lambda - u_0)) + (Au_\lambda, J(u_\lambda - u_0)) + (B_\lambda u_\lambda, J(u_\lambda - u_0)) \ni (f, J(u_\lambda - u_0))$$

où

$$\begin{aligned}(u_\lambda - u_0, J(u_\lambda - u_0)) + (u_0, J(u_\lambda - u_0)) + (Au_\lambda - Au_0, J(u_\lambda - u_0)) + (Au_0, J(u_\lambda - u_0))\\ + (B_\lambda u_\lambda - B_\lambda u_0, J(u_\lambda - u_0)) + (B_\lambda u_0, J(u_\lambda - u_0))\\ \ni (f, J(u_\lambda - u_0)),\end{aligned}$$

car A et B_λ est accrétif et J application de dualité , on a

$$\|u_\lambda - u_0\|^2 \leq \|u_0\|\|u_\lambda - u_0\| + \|Au_0\|\|u_\lambda - u_0\| + \|B_\lambda u_0\|\|u_\lambda - u_0\| + \|f\|\|u_\lambda - u_0\|,$$

on a d'après le proposition 2.4 $\|B_\lambda u_0\| \leq |Bu_0|$ et $\xi_0 \in Au_0$.

$$\|u_\lambda - u_0\| \leq \|u_0\| + \|Au_0\| + \|B_\lambda u_0\| + \|f\| \leq \|u_0\| + \|\xi_0\| + |Bu_0| + \|f\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

ce qui implique :

$$\|u_\lambda\| \leq \|u_\lambda - u_0\| + \|u_0\| \leq C_2. \tag{2.19}$$

De 2.18 et 2.19 on conclut :

$$\|u_\lambda\| + \|B_\lambda u_\lambda\| \leq (C_1 + C_2) = C, \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.20}$$

Maintenant, on montrons que $\{u_\lambda\}$ est une suite de Cauchy quand $\lambda \to 0$.

En effet, on a pour $\lambda, \mu > 0$

$$u_\lambda - u_\mu + Au_\lambda - Au_\mu + B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu \ni 0$$

et en multipliant par $J(u_\lambda - u_\mu)$, il vient

$$\|u_\lambda - u_\mu\|^2 + (Au_\lambda - Au_\mu, J(u_\lambda - u_\mu)) + (B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu, J(u_\lambda - u_\mu)), \quad \forall \lambda > 0.$$

Parce que A est accrétif, on a

$$\|u_\lambda - u_\mu\|^2 + (B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu, J(u_\lambda - u_\mu)) \leq 0, \quad \forall \lambda, \mu > 0. \tag{2.21}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&(B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu, J(u_\lambda - u_\mu))\\ &\qquad \geq (B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu, J(u_\lambda - u_\mu) - J((I + \lambda B)^{-1} u_\lambda - (I + \mu B)^{-1} u_\mu)),\end{aligned}$$

parce que B est accrétif et $B_\lambda u \in B((I+\lambda B)^{-1}u)$. Parce que J est uniformément continu sur les sous-ensembles bornés (Théorème 2.1) et par 2.20, on pose

$$\begin{aligned} z_1 &= u_\lambda - u_\mu \\ z_2 &= (I+\lambda B)^{-1}u_\lambda - (I+\mu B)^{-1}u_\mu, \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.4 on a $\|J(z_1) - J(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\|$

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\| &= \left\| \left(u_\lambda - (I+\lambda B)^{-1}u_\lambda\right) - \left(u_\mu - (I+\mu B)^{-1}u_\mu\right) \right\| \\ &\leq \left\| u_\lambda - (I+\lambda B)^{-1}u_\lambda \right\| + \left\| u_\mu - (I+\mu B)^{-1}u_\mu \right\| \\ &= \|\lambda B_\lambda u_\lambda\| + \|\mu B_\mu u_\mu\| \\ &\leq C(\lambda+\mu). \end{aligned}$$

Donc, pour $\lambda, \mu < \frac{\delta}{2C}$, alors $C(\lambda+\mu) \leq C\left(\frac{\delta}{2C} + \frac{\delta}{2C}\right) = \delta$, donc

$$\|z_1 - z_2\|_X \leq \delta \Rightarrow \|J(z_1) - J(z_2)\|_{X^*} \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |(B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu, J(X) - J(Y))| &\leq \varepsilon \, \|B_\lambda u_\lambda - B_\mu u_\mu\| \\ &\leq C.\varepsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_\lambda - u_\mu\| \leq C.\varepsilon = \varepsilon'.$$

Donc $\{u_\lambda\}$ est une suite de Cauchy, comme X complet alors

$$u_\lambda \to u \quad \text{dans } X,$$

comme X^* est uniformément convexe alors

$$\begin{aligned} & B_\lambda u_\lambda \rightharpoonup y \\ & f - B_\lambda u_\lambda - u_\lambda \rightharpoonup f - y - u = z. \end{aligned}$$

Alors, par la Proposition 2.6 on a $y \in Bu$, $z \in f - Bu - u = Au$, et donc u est une solution unique à l'équation 2.15. □

2.4.1 Exemples d'opérateurs m-accrétifs

Proposition 2.9. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et posons $X = L^p(\Omega)$, on définit l'opérateur A par*

$$\begin{cases} A_p u = -\Delta u, & \forall u \in D(A), \\ D(A) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) & si\ 1 < p < \infty. \end{cases}$$

Alors, A_p est m-accrétif dans X.

Démonstration. On montre que A_p est accrétif. $\forall u_1, u_2 \in D(A)$ et $v_1 \in A_p u_1, v_2 \in A_p u_2$,

$$A_p u_1 - A_p u_2 = v_1 - v_2 = -\Delta(u_1 - u_2),$$

il suffit de montrer d'après la définition 2.7 que

$$(v_1 - v_2, w) \geq 0,$$

Pour certain $w \in J(u_1 - u_2)$, comme $L^p(\Omega)$ est strictement convexe alors $J(u_1 - u_2)$ prend une seul valeur. Donc $J(u_1 - u_2) = \|u1 - u2\|^{2-p}_{L^p(\Omega)} w$ où

$$w = |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in D(A_p).$$

On obtient

$$(v_1 - v_2, w) = (-\Delta u, w) = -\int_\Omega \Delta u\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx,$$

et on a d'après la formule de Green

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx = &\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2))dx \\ &- \int_\Omega (\nabla(u_1 - u_2).\eta)\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)ds. \end{aligned}$$

Et comme $w = 0$ sur $\partial\Omega$, il en résulte :

$$-\int_\Omega \Delta u\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2))dx \quad \forall u_1, u_2 \in D(A_p),$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)) &= \nabla\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2) + |u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2) \\ &= \nabla((u_1 - u_2)^2)^{\frac{p-2}{2}}(u_1 - u_2) + |u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2) \\ &= \frac{p-2}{2}\left((u_1 - u_2)^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\nabla(u_1 - u_2)^2(u_1 - u_2) \\ &+ |u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2) \\ &= (p-2)\,|u_1 - u_2|^{p-4}(u_1 - u_2)^2\nabla\,|u_1 - u_2| \\ &+ |u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2) \\ &= (p-1)\,|u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2), \end{aligned}$$

donc

$$-\int_\Omega \Delta u\, |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx = (p-1)\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p-2} \mid \nabla(u_1 - u_2) \mid^2 dx \geq 0,$$

d'où

$$(v_1 - v_2, w) \geq 0.$$

C'est-à-dire $\forall p \in]1, +\infty[$, A_p est accrétif.

Pour montrer que A_p est m-accrétif il suffit de montrer que

$$R(I + A_p) = L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \forall f \in L^p(\Omega), \exists u \in D(A) : u + A_p u = f.$$

A est accrétif dans $L^p(\Omega)$, d'après le théorème 1.12 on a que $R(I + A_p) = L^p(\Omega)$ et

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \| A_p u \|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in D(A). \tag{2.22}$$

Par conséquent, A_p est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$. $\square$

Chapitre 3

Application de La théorie des opérateurs m-accrétifs sur un problème elliptique non linéaire

3.1 Opérateurs elliptiques semi-linéaires dans $L^p(\Omega)$

On considère le problème de elliptique avec des conditions aux limites de homogènes de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \widetilde{\beta}(u) \ni f, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $0 \in D(\beta)$.

Soit $\widetilde{\beta} \subset L^p(\Omega) \times L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} &\widetilde{\beta}(u(x)) = \{v \in L^p(\Omega);\ v(x) \in \beta(u(x)),\ p.p.x \in \Omega\}, \\ &D(\widetilde{\beta}) = \{v \in L^p(\Omega);\ \exists v \in L^p(\Omega)\ so\ that\ v(x) \in \beta(u(x)),\ p.p.x \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On voit facilement que $\widetilde{\beta}$ est m-accrétif dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} ((I + \lambda\widetilde{\beta})^{-1}u) =& (1 + \lambda\beta)^{-1}u(x), && p.p.x \in \Omega, \lambda > 0, \\ (\widetilde{\beta}_\lambda u)(x) =& \beta_\lambda(u(x)), && p.p.x \in \Omega, \lambda > 0, u \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence de la solution du problème 3.1.

Théorème 3.1. [10] *Soit $A : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ l'opérateur défini par*

$$\begin{aligned} &Au = -\Delta u + \widetilde{\beta}(u), && \forall u \in D(A), \\ &D(A) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \cap D(\widetilde{\beta}(u)) && si\ 1 < p < \infty, \\ &D(A) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\} \cap D(\widetilde{\beta}) && si\ p = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Alors A est m-accrétif et surjectif dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. La démonstration se fera en deux étapes :

Étape(1) : On montre que A est accrétif.

Soient $u_1, u_2 \in D(A)$ et $v_1 \in Au_1, v_2 \in Au_2$,

$$v_1 - v_2 \in Au_1 - Au_2 = -\Delta(u_1 - u_2) + \widetilde{\beta}(u_1) - \widetilde{\beta}(u_2). \tag{3.4}$$

Cas 1. $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega)$ et $D(A) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \cap D(\widetilde{\beta}(u))$ il suffit de montrer d'après la définition de l'opérateur accrétif

$$(v_1 - v_2, w) \geq 0$$

Pour certain $w \in J(u_1 - u_2)$, comme $L^p(\Omega)$ est strictement convexe alors $J(u_1 - u_2)$ est prend une seul valeur donc

$$w = \|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)}^{p-2} J(u_1 - u_2) = |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in D(A)$$

(d'après la proposition 2.1), on obtient

$$(v_1 - v_2, w) = (-\Delta u, w) + (\widetilde{\beta}(u_1) - \widetilde{\beta}(u_2), w), \quad \forall u_1, u_2 \in D(A).$$

Où encore sous la forme

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx = -\int_\Omega \Delta(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx$$
$$+ \int_\Omega (\widetilde{\beta}(u_1) - \widetilde{\beta}(u_2)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx.$$

En utilisant la formule de Green, il en résulte

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_\Omega \Delta(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx \\ &= \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2))dx - \int_\Omega (\nabla(u_1 - u_2).\eta)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)ds \end{aligned}$$

Et comme $w = 0$ sur $\partial\Omega$, il en résulte :

$$I_1 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2))dx \quad \forall u_1, u_2 \in D(A)$$

on a

$$\nabla(|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)) = (p-1)|u_1 - u_2|^{p-2}\nabla(u_1 - u_2)$$

donc

$$I_1 = (p-1)\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p-2} \mid \nabla(u_1 - u_2) \mid^2 dx \geq 0$$

et on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \left(\widetilde{\beta}(u_1) - \widetilde{\beta}(u_2)\right)|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx \\ &= \int_\Omega (\beta(u_1) - \beta(u_2))|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx \geq 0. \end{aligned}$$

Car β est monotone, d'où

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}(v_1 - v_2, J(u_1 - u_2)) = (p-1)\int_\Omega (\nabla(u_1 - u_2))^2 |u_1 - u_2|^{p-2} dx$$
$$+ \int_\Omega (\beta(u_1) - \beta(u_2))|u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2)dx \geq 0.$$

Cas 2. $p = 1$, $X = L^1(\Omega)$, $D(A) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\} \cap D(\widetilde{\beta})$ considérons la fonction $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & pour \quad r > \varepsilon \\ \theta_\varepsilon(r) & pour \quad -\varepsilon \leq r \leq \varepsilon \\ -1 & pour \quad r < -\varepsilon. \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\theta_\varepsilon \in C^2[-\varepsilon, \varepsilon], \theta_\varepsilon^{'} > 0 \; sur \; (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = 0, \\ \theta_\varepsilon(\varepsilon) = 1, \\ \theta_\varepsilon(-\varepsilon) = -1, \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \theta_\varepsilon^{'}(\varepsilon) = 0, \\ \theta_\varepsilon^{'}(-\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

La fonction γ_ε est une approximation régulière et croissante de la fonction à plusieurs valeurs $sign$,

$$sign(r) = \begin{cases} 1 & pour \quad r > 0, \\ [-1, 1] & pour \quad r = 0, \\ -1 & pour \quad r < 0. \end{cases}$$

Soit $[u_i, v_i] \in A, i = 1, 2$. Alors en multipliant l'équation 3.4 par la fonction $\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)$ il vient :

$$(v_1 - v_2, \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)) = (-\Delta(u_1 - u_2), \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)) + \left(\widetilde{\beta}(u_1) - \widetilde{\beta}(u_2), \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)\right)$$

où encore

$$\begin{aligned} (v_1 - v_2, \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)) = &- \int_\Omega \Delta(u_1 - u_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \\ &+ \int_\Omega (\beta(u_1) - \beta(u_2))\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $u_1, u_2 \in D(A)$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta(u_1 - u_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx = &\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2))dx \\ &- \int_{\partial\Omega} (\nabla(u_1 - u_2).\eta)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)ds \end{aligned}$$

Et on a par définition $\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) = 0$ sur $\partial\Omega$, il vient :

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta(u_1 - u_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \; &= \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2))dx \\ &= \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)\gamma_\varepsilon^{'}(u_1 - u_2))dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)\,|^2 \gamma_\varepsilon^{'}(u_1 - u_2)dx. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx = \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)\,|^2\,\gamma_\varepsilon'(u_1 - u_2)dx$$
$$+ \int_\Omega (\beta(u_1) - \beta(u_2))\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx, \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

On a

$$\text{Si} \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 & \text{alors} \quad (\beta(u_1) - \beta(u_2))\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) = 0, \\ u_1 - u_2 > 0 & \text{alors} \quad (\beta(u_1) - \beta(u_2)) > 0, \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) > 0, \\ u_1 - u_2 < 0 & \text{alors} \quad (\beta(u_1) - \beta(u_2)) < 0, \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx = \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)\,|^2\,\gamma_\varepsilon'(u_1 - u_2)dx$$
$$+ \int_\Omega (\beta(u_1) - \beta(u_2))\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \geq 0, \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

D'autre part, on a

$$\text{pour } \varepsilon \to 0, \quad (v_1 - v_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) \longrightarrow (v_1 - v_2)g \quad p.p.$$

et

$$|(v_1(x) - v_2(x))\gamma_\varepsilon(u_1(x) - u_2(x))| \leq |v_1(x) - v_2(x)| \in L^1(\Omega).$$

D'après la théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir la théorème 1.5), on a

$$\int_\Omega (v_1(x) - v_2(x))g(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (v_1(x) - v_2(x))\gamma_\varepsilon(u_1(x) - u_2(x))dx \geq 0.$$

Et d'après la proposition 2.1, $g \in J(u_1 - u_2).||u_1 - u_2||^{-1}_{L^1(\Omega)} = sign(u_1 - u_2)$, $p.p.$ sur Ω, donc

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)sign(u_1 - u_2)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (v_1 - v_2)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \geq 0.$$

D'où A est accrétif.

Étape(2) : on montre que A est m-accrétif.

Cas 1. $1 < p < \infty$. Notons pour $1 < p < \infty$, par A_p l'opérateur $-\Delta$ avec le domaine $D(A_p) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. Nous avons déjà vu que A_p est m-accrétif dans $L^p(\Omega)$. Prouvons maintenant que $R(I + A_p + \widetilde{\beta}) = L^p(\Omega)$. il suffit de montrer d'après la proposition 2.8 que

$$(A_p u, J(\widetilde{\beta}_\lambda u)) \geq 0.$$

Par la formule de Green, pour tous $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned}(A_p u, J(\widetilde{\beta}_\lambda u)) &= -\int_\Omega \Delta u J(\widetilde{\beta}_\lambda u)dx \\ &= -\int_\Omega \Delta u|\widetilde{\beta}_\lambda(u)|^{p-2}\widetilde{\beta}_\lambda(u)\|\widetilde{\beta}_\lambda(u)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)})dx \\ &= -\|\widetilde{\beta}_\lambda(u)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)}\int_\Omega \Delta u|\beta_\lambda(u)|^{p-2}\beta_\lambda(u)dx \\ &= \|\widetilde{\beta}_\lambda(u)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)}\int_\Omega \nabla u\nabla\left(|\beta_\lambda(u)|^{p-2}\beta_\lambda(u)\right)dx \\ &= \|\widetilde{\beta}_\lambda(u)\|^{2-p}_{L^p(\Omega)}\int_\Omega |\nabla u|^2\frac{d}{du}(|\beta_\lambda(u)|^{p-2}\beta_\lambda(u))dx \geq 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous concluons que $R(I + A_p + \widetilde{\beta}) = L^p(\Omega)$, et d'après le théorème 1.12 on a

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \| A_p u \|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in D(A_p). \tag{3.7}$$

D'où A est m-accretif.

Pour prouver la surjectivité de $A_p + \widetilde{\beta}$, on considère l'équation approchée

$$\varepsilon u + A_p u + \widetilde{\beta}(u) \ni f, \qquad \varepsilon > 0,\ f \in L^p(\Omega), \tag{3.8}$$

qui, comme on a vu précédemment (preuve de la proposition 2.8), l'équation 3.8 admet une solution unique u_ε, et $u_\varepsilon = \lim_{\lambda\to 0} u^\varepsilon_\lambda$ dans $L^p(\Omega)$, où u^ε_λ est la solution de l'équation d'approximation $\varepsilon u + A_p u + \widetilde{\beta}_\lambda(u) \ni f$.

Par $(A_p u^\varepsilon_\lambda, v^\varepsilon_\lambda)$, il s'ensuit que $\| A_p u^\varepsilon_\lambda \|_{L^p(\Omega)} \leq C$, où C est indépendant de ε et λ. Donc, lorsque $\lambda \to 0$, on obtient $\| A_p u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \leq C$, $\forall\varepsilon > 0$, qui, par estimation 3.7

$$\| u_\varepsilon \|_{W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \| A_p u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}$$

implique que

$$\begin{aligned}&\{u_\varepsilon\} \text{ est borné dans } W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),\\ &A_p u_\varepsilon \text{ est borné dans } L^p(\Omega),\\ &\widetilde{\beta}_\varepsilon(u_\varepsilon) \text{ est borné dans } L^p(\Omega),\end{aligned}$$

pour une sous suite notée encore $\{u_\varepsilon\}$, et on a $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$ donc

$$\begin{cases} u_\varepsilon & \rightharpoonup u \quad dans\ W^{2,p}(\Omega),\\ u_\varepsilon & \to u \quad dans\ L^p(\Omega),\\ A_p u_\varepsilon & \rightharpoonup g \quad dans\ L^p(\Omega),\\ \widetilde{\beta}_\varepsilon(u_\varepsilon) & \rightharpoonup v \quad dans\ L^p(\Omega).\end{cases}$$

Comme la convergence dans $L^p(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors

$$\begin{cases} u_\varepsilon & \to u \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega), \\ \Delta u_\varepsilon & \to g \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon & \to \Delta u \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega), \\ \Delta u_\varepsilon & \to g \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Par unicité de la limite $\Delta u = g \in L^p(\Omega)$. Donc

$$A_p u_\varepsilon \rightharpoonup A_p u \quad \text{dans } L^p(\Omega).$$

Alors par Proposition2.6 on a $v \in \widetilde{\beta}(u)$, donc on déduit que u est la solution de l'équation $A_p u + \widetilde{\beta}(u) \ni f$, c'est à dire $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Cas 2. $p = 1$. On montre directement que $R(A_1 + \widetilde{\beta}) = L^1(\Omega)$, pour $f \in L^1(\Omega)$, l'équation 3.9 admet une solution $u \in D(A_1) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta u \in L^1(\Omega)\right\}$.$(A_1 = -\Delta$ avec le domaine $D(A_1))$.

Pour tout $f \in L^1(\Omega)$, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$. Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \beta(u_n) \ni f_n, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

admet une solution unique $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Soit $v_n = f_n + \Delta u_n \in \beta(u_n(x)),\ p.p.x \in \Omega$. Par 3.10 on suppose qu'il y a deux solution $u_n, u_m \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Alors $(u_n - u_m) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est une solution faible l'équation

$$v_n - v_m = f_n - f_m + \Delta(u_n - u_m) \in \beta(u_n(x)) - \beta(u_m(x)), \quad \text{p.p.} x \in \Omega.$$

On multiplier l'équation par $\theta \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\theta(x) \in sign(u)(x)\ p.p.x \in \Omega$, on obtient

$$\int_\Omega (v_n(x) - v_m(x))\theta(x)dx = \int_\Omega (f_n(x) - f_m(x))\theta(x)dx + \int_\Omega \Delta(u_n(x) - u_m(x))\theta(x)dx.$$

Comme $-\Delta$ est accrétif dans $L^1(\Omega)$ et β est monotone,

$$\int_\Omega \Delta(u_n(x) - u_m(x))\theta(x)dx \le 0, \quad \forall u_n, u_m \in D(A_1).$$

D'où

$$\int_\Omega (v_n(x) - v_m(x))\theta(x)dx \le \int_\Omega (f_n(x) - f_m(x))\theta(x)dx$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} p.p.\ x \in \Omega^+ & = \{v_n - v_m > 0\} : \theta(u_1(x) - u_2(x)) = 1, \\ p.p.\ x \in \Omega^- & = \{v_n - v_m < 0\} : \theta(u_1(x) - u_2(x)) = -1, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v_n(x) - v_m(x))\theta(x)dx &= \int_{\Omega^+} (v_n(x) - v_m(x))dx + \int_{\Omega^-} -(v_n(x) - v_m(x))dx \\ &= \int_\Omega |v_n(x) - v_m(x)|dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega |v_n(x) - v_m(x)|dx \leq \int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|dx.$$

On a $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, donc

$$\begin{cases} v_n & \to v \quad \text{dans } L^1(\Omega), \\ \Delta u_n & \to \xi \quad \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit maintenant $h_i \in L^p(\Omega), i = 0, 1, ..., N, p > N$. Ensuite, d'après le théorème 1.13 le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = h_0 + \sum_{i=1}^N \dfrac{\partial h_i}{\partial x_i} & dans\ \Omega, \\ \varphi = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

admet une solution unique $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\|\varphi\|_{L^\infty((\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^N \|h_i\|_{L^p(\Omega)}, \quad h_i \in L^p(\Omega). \tag{3.13}$$

En multipliant l'équation 3.12 par $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, il vient

$$-\int_\Omega \Delta\varphi.\Psi dx = \int_\Omega h_0\Psi dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Psi \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dx \quad \forall\Psi \in H_0^1(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $\Psi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\Psi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\nabla\Psi ds = \int_\Omega h_0\Psi dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} h_i.\Psi.\eta ds \quad \forall\Psi \in H_0^1(\Omega),$$

et on a $\Psi = 0$ sur $\partial\Omega$, il en résulte

$$\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla\Psi dx = \int_\Omega h_0\Psi dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} dx \quad \forall\Psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

En posant $\Psi = u_n$ dans 3.14, on obtient, par la formule de Green,

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u_n dx = \int_\Omega \nabla\varphi . \nabla u_n dx = \int_\Omega h_0 u_n dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx,$$

et, par conséquent, par 3.13,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega h_0 u_n dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx\right| &= \left|-\int_\Omega \varphi \Delta u_n dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |\varphi \Delta u_n|\, dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Delta u_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \|h_i\|_{L^p(\Omega)} \|\Delta u_n\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Car $\{h_i\}_{i=0}^N \subset (L^p(\Omega))^{N+1}$ sont arbitraires, nous concluons que la suite

$$\left\{\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right)\right\}_{n=1}^\infty$$

est borné dans $(L^q(\Omega))^{N+1}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)} &\leq C\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \\ &\leq C \sup_{\|v\|=1} (u_n, v)_{W_0^{1,q}(\Omega)\times W^{-1,p}(\Omega)} \\ &\leq C \sup \left|\left(u_n, h_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right)\right| \\ &\leq C \sup \left(\left|\int_\Omega u_n.h_0 dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} h_i dx\right|\right) \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \|h_i\|_{L^p(\Omega)} \|\Delta u_n\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\|v\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|\Delta u_n\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C\|\Delta u_n\|_{L^1(\Omega)}, \quad avec\ 1 < q = \frac{p}{p-1} < \frac{N}{N-1}. \tag{3.15}$$

Donc, $\{u_n\}$ est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ comme $W^{1,q} \hookrightarrow_c L^1(\Omega)$, on a pour une sous suite. Alors

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u\ dans\ W^{1,q}(\Omega) \\ u_n \to u\ dans\ L^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

Alors

$$u_n \to u \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega),$$

par 3.11

$$\Delta u_n \to \xi \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega),$$

donc

$$\begin{cases} \Delta u_n & \to \Delta u \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega), \\ \Delta u_n & \to \xi \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Par unicité de la limite $\Delta u = \xi \in L^1(\Omega)$, donc

$$\Delta u_n \to \Delta u \quad \text{dans } L^1(\Omega),$$

et parce que l'opérateur $\widetilde{\beta}$ est fermé dans $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ on voit par 3.11 et 3.16 que $v(x) \in \beta(u(x))$, p.p. $x \in \Omega$, et $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Donc $R(A) = L^1(\Omega)$ et en particulier, A est m-accrétif.

Nous avons donc prouvé le résultat d'existence suivant pour le problème aux limites elliptiques semi-linéaires dans $L^1(\Omega)$. □

Corollaire 3.1. *Pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, & p.p.\ dans\ \Omega, \\ u = 0 & dans\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

admet une solution unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^1(\Omega)$, $1 \leq q < N/(N-1)$. De plus, l'estimation suivante :

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall f \in L^1(\Omega) \tag{3.18}$$

En particulier, A_1 est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$, $D(A_1) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$, et

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall u \in D(A_1). \tag{3.19}$$

Remarque 3.1. *On déduit de la démonstration précédente que le théorème 3.1 et le corollaire 3.1 restent vrais pour les opérateurs elliptiques du second ordre linéaires plus généraux A_p sur Ω.*

3.2 L'équation des milieux poreux dans $L^1(\Omega)$

On considère l'équation de milieux poreux suivant

$$\begin{cases} u + Au \ni f, & p.p.x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Dans l'espace $X = L^1(\Omega)$, on définit l'opérateur A comme suivant :

$$\begin{cases} Au = -\Delta\beta(u), \quad \forall u \in D(A), \\ D(A) = \left\{u \in L^1(\Omega); \beta(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta\beta(u) \in L^1(\Omega)\right\}, \end{cases} \tag{3.21}$$

avec β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $0 \in \beta(0)$ et Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Plus précisément $A \subset L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ est défini par

$$A = \left\{[u, -\Delta\eta], u \in L^1(\Omega), \eta \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta\eta \in L^1(\Omega), \eta(x) \in \beta(u(x)), p.p.x \in \Omega\right\}. \tag{3.22}$$

On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2. *L'opérateur A est m-accrétif dans $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$. Autrement dit le problème 3.20 admet une solution.*

Démonstration. 1. On montrer que A est accrétif. Soient $u, v \in D(A)$ et soit $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une approximation régulière de $sign$ définie par

$$\gamma_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & pour \quad r > \varepsilon, \\ \theta_\varepsilon(r) & pour \quad -\varepsilon \leq r \leq \varepsilon, \\ -1 & pour \quad r < -\varepsilon. \end{cases} \tag{3.23}$$

Où $\theta_\varepsilon \in C^2\left([-\varepsilon, \varepsilon]\right), \theta_\varepsilon' > 0 \; sur \; (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = 0, \\ \theta_\varepsilon(\varepsilon) = 1, \\ \theta_\varepsilon(-\varepsilon) = -1, \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \theta_\varepsilon'(\varepsilon) = 0, \\ \theta_\varepsilon'(-\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

On va montrer que

$$(Au - Av, \gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))) \geq 0.$$

Alors, on a

$$(Au - Av, \gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))) = \int_\Omega (Au - Av)\, \gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))dx, \quad \text{pour tout } u, v \in D(A)$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (Au - Av)\, \gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v)) &= \int_\Omega -\Delta\left(\beta(u) - \beta(v)\right) \gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))dx \\ &= \int_\Omega \nabla\left(\beta(u) - \beta(v)\right) \nabla\gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \nabla\left((\beta(u) - \beta(v)).\eta\right) \left(\gamma_\varepsilon(\beta(u) - \beta(v))\right), ds \end{aligned}$$

on a par définition $\gamma_\varepsilon(\beta(u)-\beta(v)) = 0$ sur $\partial\Omega$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (Au - Av)\,\gamma_\varepsilon(\beta(u)-\beta(v)) &= \int_\Omega \nabla\left(\beta(u)-\beta(v)\right)\nabla\gamma_\varepsilon(\beta(u)-\beta(v))dx\\ &= \int_\Omega \left|\nabla\left(\beta(u)-\beta(v)\right)\right|^2 \gamma_\varepsilon^{'}(\beta(u)-\beta(v))dx \geq 0.\end{aligned}$$

On a quand $\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon(t) \to \xi(t) \in sgn(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. D'où $\gamma_\varepsilon\left(\beta(u(x)) - \beta(v(x))\right) \to \xi(x) \in sign\left(\beta(u(x)) - \beta(v(x))\right)$, $p.p.$ dans Ω. En appliquant le théorème de convergence dominer, on peut passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus, et on obtient

$$\int_\Omega (Au - Av)\,\xi dx \geq 0.$$

D'où A est accrétif.

2. On montrer que $R(I + A) = L^1(\Omega)$. Pour $f \in L^1(\Omega)$, on démontre que l'équation

$$u + Au \ni f,$$

admet une solution, alors l'équation précédente est équivalente à

$$\beta^{-1}(v) - \Delta v \ni f\ sur\ \Omega, \quad v \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta v \in L^1(\Omega). \tag{3.24}$$

D'après le corollaire 3.1, l'équation 3.24 admet une solution $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\Delta v \in L^1(\Omega)$, $1 < q < N/(N-1)$.

□

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence un problème aux limites elliptique semi linéaire dans les espaces $L^p(\Omega)$ et l'équation des milieux poreux dans $L^1(\Omega)$. La méthode de la résolution s'appelle la méthode des opérateurs m-accrétifs.

Bibliographie

[1] G. Stampacchia, Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinues, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1966.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Lecture Notes 5, North-Holland (1972).

[4] J. Dautray, J.L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[5] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] R. Adams, J. Fournier, The Sobolev Spaces , Academic Press, (2003).

[7] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 623–727.

[8] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, Nonlinear Functional Analysis, F. Browder (Ed.), American Mathemathical Society, Providence, RI, 1970, pp. 138–161.

[9] V. Barbu, Continuous perturbation of nonlinear m-accretive operators in Banach spaces, Boll. Unione Mat. Ital., 6 (1972), pp. 270–278.

[10] V. Barbu, Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces. Springer New York, 2010.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème elliptique avec des conditions aux limites de homogènes de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\beta(u)$ un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Á l'aide de la théorie générale des opérateurs m-accrétifs non linéaires dans les espaces de Banach avec des applications à nous répondons à la question d'existence de la solution des problèmes aux limites elliptiques non linéaires dans les espaces $L^p(\Omega)$.

Mot clés : Espace de Banach, opérateurs m-accrétifs, problèmes aux limites elliptiques non linéaires, ...

Abstract

In this memoir, We are interested in the study of a elliptic problem with boundary conditions of homogen Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, & p.p. \text{ in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

let $\beta(u)$ be a maximal monotone graph in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, and Ω is a bounded and open subset of $\mathbb{R}^N$.

Using the general theory of nonlinear m-accretive operators in Banach spaces with applications to we answer the question of existence of the solution of nonlinear elliptic boundary value problem in $L^p(\Omega)$ spaces.

Keywords : Banach spaces, m-accretive operator, nonlinear elliptic boundary value problem, ...