UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

par: SMATI Abdellatif

Sujet du mémoire

Relations entre opérateurs compacts et opérateurs normaux

Devant le jury composé de:

GASMI Abdelkader	Professeur université de M'sila	Président
MOSTEFA Nadir	Professeur université de M'sila	Rapporteur
RAHMOUN Azzedine	Professeur université de B.B.A	Examinateur

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mr, Mostefa NADIR professeur à l'université Mohamed Boudiaf de M'sila qui m'a constamment guidé et m'a encouragé tout au long de ce projet.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères qui m'ont toujours encouragé.

Mes remerciements à tous les professeurs du départements de Mathématique.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues qui ont participé de loin ou de prés et qui nous ont aidé à l'élaboration de ce mémoire.

MERCI

Table des matières

Introduction

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus.

Dans un espace de Hilbert, un opérateur compact est la limite d'opérateurs de rang fini. Cette dernière propriété n'est pas vérifiée dans certains espaces de Banach.

Dans un espace de Hilbert, on dit que l'opérateur linéaire A est normal si A commute avec son adjoint , $AA^* = A^*A$.

Le travail de ce mémoire étudie les propriétés et les notions fondamentales des opérateurs compacts et les opérateurs normaux et chercher les relations entre les deux opérateurs.

Notre mémoire est composée de quatre chapitres qui sont les suivants:

Dans le chapitre 1, on donne un aperçu général sur les espaces de Hilbert et les opérateurs linéaires continus et étudie le spectre d'un opérateur linéaire.

Le deuxième chapitre concerne les opérateurs compacts et tout ce qui s'en suit, comme propriétés et notion fondamentales, comme je l'ai mentionné le théorème d'Arzela-Ascoli , la convergence faible dans les espaces de Hilbert, la racine carrée et la théorie spectrale des opérateurs compacts.

Nous étudierons dans le troisième chapitre les propriétés d'opérateurs adjoints et notions d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto-adjoints avec un accent mis sur l'opérateurs normaux et tout ce qui s'en suit, comme propriétés et résultats principaux, comme j'ai mentionné l'inverse et la racine carrée d'un opérateur normal et étudier leur spectre.

Dans le dernier chapitre j'ai étudié la diagonalisation des opérateurs compacts, auto-adjoints et normaux, et quelques notes sur les opérateurs compacts normaux.

CHAPITRE 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Espaces Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps K , E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme , c'est à dire d'une fonction $\|.\|$définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

· $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

· $\|\lambda x\| = |\lambda|\, x \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$

· $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.1.2 Espaces Euclidiens

Les espaces Euclidiens sont en général les espace vectoriels munis d'un produit scalaire ; rappelons qu'il permet de pratiquer le raisonnement de la géométrie euclidienne pour des espaces fonctionnels de dimension infinie .

Produit Scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une fonction $\langle x, y\rangle$ définie sur $E \times E$ dans $K(K = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$ possédant les proprietés suivantes

· $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\cdot \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$\cdot \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$\cdot \langle x, x \rangle \geq 0$

$\cdot \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

où les éléments x,y et z appartiennent à E et la scalaire λ appartient à K.

Remarque 1

La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes

$$\cdot \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$
$$\cdot \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien , on peut lui introduire une norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Théorème 1 *(Inégalité de Cauchy-Scwartz)*

E espace euclidien , on a $\forall x, y \in E : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

Démonstration

On considère l'expression $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$ qui est toujours positive pour tout vecteurs non nuls x,y $\in E$ et tout scalaire $\lambda \in K$, en effet

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \langle x, x + \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

on pose $\lambda = \frac{-\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$ on aura

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} + \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} \geq 0$$

d'où l'inégalité

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0$$

$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ cette inégalité est dite aussi inégalité de **Cauchy-Bouniakovsky**

Définition 1 (*Orthogonalité*)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c'est à dire $\langle x, y\rangle = 0$

et on écrit $x \perp y$.

Système Complet(total)

Un système $\{e_i\}$ est dit complet (ou total) si le plus petit sous espace fermé qui le contient coïncide avec l'espace E tout entier; autrement dit l'espace E est engendré par le système $\{e_i\}$, ou encore , l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de $\{e_i\}$ est dense dans E.

Base hilbertienne

Un système orthogonale $\{e_i\}$ est dit une base orthogonale s'il est complet, de plus si la norme de chaque élément est égale à l'unité ;le système $\{e_i\}$ est dit base **orthonormée** ou base **hilbertienne**.

1.1.3 Espaces de Hilbert

On appelle espace de Hilbert et que l'on note H , tout espace euclidien complet au sens de la métrique $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

Exemple 1

$\mathbb{C}^n$,$\mathbb{R}^n$ sont des espaces de Hilbert

Généralement l'espace H est séparable est de dimention infinie; en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$; il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

1.2 Opérateurs linéaires continus

Définition 2

Soit E *et* F *deux espaces vectoriel sur le corps* K *, et* $U : E \longrightarrow F$ *. On dit que l'opérateur u est linéaire si*

1) $\forall\ x, y \in E, \forall\lambda \in K \quad U(x + y) = U(x) + U(y)$

2)$U(\lambda x) = \lambda U(x)$

1.2.1 Opérateurs continus

Soient E *et* F *deux espaces normés, un opérateur* U *défini sur un sous ensemble* $A \subset E$ *dans* F *est dit continu au point* x_0 *de* A *si, on a la propriété suivante*

Pour toute suite x_n *de* A *converge vers* x_0*, la suite* $U(x_n)$*converge vers* $U(x_0)$ *c'est à dire*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} U(x_n) = U(\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n) = U(x_0).$$

Remarque 2

L'opérateur U *est dit continu sur* A*, s'il est continu en chaque point de l'ensemble* A*.*

Théorème 2

Soient E *et* F *deux espaces normés, un opérateur linéaire* U *défini sur un sous ensemble* $A \subset E$ *dans* F*,est dit continu partout sur* A *s'il est continu en point* x_0 *de* A

1.2.2 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire U *défini sur* E *dans* F *est dit borné s'il existe une constante positive* $C > 0$*,telle que*

$$\|U(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E\,, \forall x \in E.$$

Théorème 3

Un opérateur linéaire U *est continu , si et seulement si, il est borné.*

Remarque 3

Soit E et F deux espaces normés. L'ensemble *de tous les opérateurs linéaires continus de* E *dans* F *est notée* $\mathcal{L}(E,F)$.

- *L'ensemble* $\mathcal{L}(E,F)$*est un sous-espace vectoriel de* $L(E,F)$*, de plus ,*$\mathcal{L}(E,F)$ *muni de la norme* $\|U\|$*est un espace normé.*

1.3 Spectre d'un opérateur linéaire

Etant donné un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert H, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A-\lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. Quel que soit λ, on a $D_{A-\lambda I}=D_\lambda$.

L'inverse de $A-\lambda I$, quand il existe, est appelé *opérateur résolvant* ou *résolvante* de A, on le note $R_\lambda(A)$.

L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de $R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans H.

Définition 3

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur linéaire A*, et on le note* $\rho(A)$*, l'ensemble des valeurs de* λ *telles que* $R_\lambda(A)$ *existe, soit borné et à domaine dense.*

$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C};\ (A-\lambda I)\ \text{est bijectif de } D(A) \text{ sur } H\}$

On appelle spectre de A*, et on le note* $\sigma(A)$*, le complémentaire de* $\rho(A)$.

Pour que λ *appartienne à* $\rho(A)$ *il faut donc que trois conditions soitent satisfaites*

(1) $R_\lambda(A)$ *doit exister*

(2) $R_\lambda(A)$ *doit être borné*

(3) $R_\lambda(A)$ *doit être à domaine dense*

L'ensemble des valeurs de λ *pour lesquelles* $R_\lambda(A)$ *n'existe pas est appelé le* ***spectre ponctuel*** *(ou* ***spectre discret*** *) de* A*. On le note* $\sigma_p(A)$.

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

L'ensemble des valeurs de λ *pour lesquelles* $R_\lambda(A)$ *existe, est à domaine dense, mais n'est pas borné est appelé le spectre continu de* A. *On le note* $\sigma_c(A)$.

$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ \overline{R(A - \lambda I)} = H \ \ et \ \ (A - \lambda I)^{-1} \text{ est non borné}\right\}$$

L'ensemble des valeurs de λ *pour lesquelles* $R_\lambda(A)$ *existe,mais n'est pas à domaine dense est appelé le spectre résiduel de* A . *On le note* $\sigma_r(A)$.

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ \overline{R(A - \lambda I)} \neq H\right\}$$

on a donc : $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$

Les éléments du spectre discret sont appelés les valeurs propres de A.

En dimension finie n, *le spectre est exactement l'ensemble des valeurs propres. En effet, si* $A - \lambda I$ *est injectif, il est de rang* n *et donc bijectif.*

La situation est très différente en dimension infinie, où l'inclusion $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ *peut être stricte: Il peut exister* λ *tel que:*

$$N(A - \lambda I) = \{0\} \ \ et \ \ R(A - \lambda I) \neq X \ \begin{pmatrix} \text{Un tel } \lambda \text{ appartient au spectre mais} \\ \text{n'est pas valeur propre} \end{pmatrix}.$$

Lemme 1

Soient E, F *deux espaces normés et* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *; l'application* A^t *est injective si et seulement si* $im(A)$ *est dense dans* F.

Remarque 4

Le scalaire λ *est une valeur propre du transposé* A^t, *mais n'est pas une valeur propre de* A *; autrement dit* $A - \lambda Id_E$ *est injectif et* $(A - \lambda Id_E)^t$ *n'est pas injectif ; d'après le lemme précédent, cela se produit si et seulement si* $A - \lambda Id_E$ *est injectif mais n'a pas une image dense dans* E *(le spectre résiduel).*

Remarque 5

Il est clair que certains spectres que nous venons de définir peuvent être vides c'est, par exemple, le cas lorsque l'opérateur A est défini sur un espace de Hilbert de dimension finie, de tels opérateurs ont, en effet, uniquement un spectre discret.

La terminologie n'est pas parfaite. Le spectre discret n'est pas nécessairement un ensemble dénombrable .Quant au spectre continu ,il peut en revanche, être dénombrable et même fini.

On a évidemment:

$$\rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}$$

Si λ est une valeur propre de A le noyau de l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas $\{0\}$ ou oncore, l'équation:

$$Ax = \lambda x$$

a une solution $x \neq 0$. Une telle solution est appelée vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Définition 4

-Le rayon spectral est défini comme:

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$$

CHAPITRE 2

Théorie sur les opérateurs compacts

2.1 Opérateurs compacts

Soient E *et* F *deux espaces normés et* A *un opérateur linéaire de* E *dans* F.

On dit que A *est un opérateur compact si l'image par* A *de tout sous ensemble borné de* E *est relativement compact.*

Rappel :

$A(G)$ *est relativement compact signifie* $\overline{A(G)}$ *est compact,* $\overline{A(G)}$ *est la fermeture de* $A(G)$.

On peut donner la définition suivante

Définition 5

Soit A *un opérateur linéaire de l'espace normé* E *dans l'espace normé* F .

A *est compact si et seulement si l'image de la boule unité de* E *par* A *est relativement compacte.*

Théorème 4

Tout opérateur compact est continue.

Preuve

Comme A est compact alors $\overline{A(B(0,1))}$ est compacte donc $A(B(0,1))$ est bornée, tel que $B(0,1)$ est la boule unité de l'espace E.

Alors $\|A\varphi\| \leq C, \forall\varphi \in B(0,1), \Longrightarrow \|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|$ d'où la continuitée de A.

Théorème 5

Soient E et F deux espaces normés et l'opérateur $A : E \to F$

A est compact alors pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}_n \subset E$, on peut extraire de la suite $\{A\varphi_n\} \subset F$ une sous suite$\{A\varphi_{n_k}\}_k$ qui converge dans F .

Preuve

Soit (φ_n) une suite bornée dans E, comme A est compact , alors $A(\varphi_n)$ est relativement compact dans F, cette propriété nous donne que $A(\varphi_n)$ contient une sous suite convergente dans F.

Inversement, prenons un sous-ensemble borné dans E, et soit (ψ_n) une suite dans $A(G)$.

Alors il existe une suite bornée (φ_n) dans G, telle que $\psi_n = A\varphi_n$.

Par hypothèse $A\varphi_n = \psi_n$ contient une sous suite convergente ψ_{nk} dans F.

Danc $A(G)$ est relativement compact,car pour toute suite bornée ψ_n dans $A(G)$ il existe une sous-suite convergente ψ_{nk} dans F. Autrement dit, pour toute ensemble borné $G \subset E$, l'ensemble $A(G)$ est relativement compact dans F, d'où A est compact.

Théorème 6

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des deux opérateurs compacts A_1et A_2 est un opérateur compact, pour tous les scalaires α et β.

Preuve

Soit φ_n une suite bornée de E, et soit $A(\varphi_n)$ une suite dans F ,alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x), \text{avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Comme A_1et A_2 sont compacts , on peut extraire de la suite $A_1\varphi_n$ une sous suite convergente de même de la suite $A_2\varphi_n$ une sous suite convergente qui donne par leurs somme une sous suite de $A\varphi_n$ convergente, donc A est compact.

Théorème 7

La limite A d'une suite convergente A_n d'opérateurs linéaires compacts, définis dans un espace de Hilbert E, est un opérateur linéaire compact dans E.

Preuve

A_1 étant compact on peut extraire de la suite $A_1\varphi_n$ une sous-suite convergente ; soit φ_n^1 une sous-suite de φ_n telle que la suite $A_1\varphi_n^1$ soit convergente.

A_2 étant compact on peut extraire de la suite $A_2\varphi_n^1$ une sous-suite convergente ; soit φ_n^2 une sous-suite de φ_n^1 telle que la suite $A_2\varphi_n^2$ soit convergente.

La suite $A_1\varphi_n^2$ étant une sous-suite de la suite convergente $A_1\varphi_n^1$ est elle aussi convergente.

En considérant successivement les opérateurs $A_{1,}A_{2,}..., A_{m,}$...on détermine les suites:

$\varphi_n^1, \varphi_n^2, ..., \varphi_n^m, ...$la suite φ_n^m est une sous-suite des suites $\varphi_n^l(l = 1, 2, ..., m-1)$ et les suites $A_l\varphi_n^m(l = 1, 2, ..., m-1)$ sont convergentes.

$$\begin{array}{c} \varphi_1^1, \varphi_2^1, ...\varphi_n^1 \\ \varphi_1^2, \varphi_2^2, ...\varphi_n^2 \\ .... \\ \varphi_1^n, \varphi_2^n, ...\varphi_n^n \end{array}$$

Considérons la suite diagonale $(\varphi_1^1, \varphi_2^2 \ldots\ldots\ldots, \varphi_n^n, \ldots) = \{\varphi_n^n\}_n$; il est clair, d'après ce qui précède, que chacun des opérateurs $A_{1,}A_{2,}..., A_{m,}$...la transforme en une suite convergente.Montrons que l'opérateur A la transforme également en une suite convergente ,ce qui établira la compacité de A.

L'espace de Hilbert E étant complet , pour établir la convergence de la suite $A\varphi_n^n$ il suffit de montrer que cette suite est une suite de Cauchy.

La suite φ_n étant bornée pour tout n on a $\|\varphi_n\| < M$, on choisit alors k tel que, pour $\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}$,et $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $n > n_0(\varepsilon)$ et $m > n_0(\varepsilon)$, on ait:

$$\|A_k\varphi_n^n - A_k\varphi_m^m\| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

donc on obtient:

$$\begin{aligned}\|A\varphi_n^n - A\varphi_m^m\| &\leq \|A\varphi_n^n - A_k\varphi_n^n\| + \|A_k\varphi_n^n - A_k\varphi_m^m\| + \|A_k\varphi_m^m - A\varphi_m^m\| \\ &\leq \|A - A_k\| \, \|\varphi_n^n\| + \|A_k\varphi_n^n - A_k\varphi_m^m\| + \|A_k - A\| \, \|\varphi_m^m\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3M}M + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon\end{aligned}$$

Alors la suite $A\varphi_n^n$ est de Cauchy, est donc convergente dans E car E est un espace complet, où φ_n^n est une sous-suite arbitraire d'une suite bornée φ_n.

d'où la compacité de l'operateur A.

Théorème 8

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des deux opérateurs A ou B est compact.

Démonstration :

Soit φ_n une suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné, la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A , il existe une sous suite convergente $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ de $A(B\varphi_n(x))$,ce qui implique que AB est compact.

D'autre part, si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A donne la convergence de la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$, ce qui implique que l'opérateur AB est compact.

Définition 6 *(Opérateur de rang fini)*

L'opérateur linéaire A de l'espace normé E dans l'espace normé F est de rang fini si la dimension de l'image de A est finie.

Résultat immédiat

Si la dimension de F est finie, alors l'opérateur A est de dimension finie.

Théorème 9 *(Rang de dimension finie)*

Soit A un opérateur borné de E dans F. Si le rang de A est de dimension finie; $dim\ A(E) < \infty$, alors l'opérateur A est compact.

Démonstration

Comme A est borné, il transforme tout ensemble borné $G \subset E$ on un ensemble borné $A(G)$,et l'ensemble borné dans un espace de dimension finie est relativement compact, d'où A est compact.

Théorème 10 *(Domaine de dimension finie)*

Soit A un opérateur borné de E dans F avec le domaine E est de dimension finie $dim\ E < \infty$,alors l'opérateur A est compact.

Démonstration

En effet, l'espace E est de dimension finie $dim\ E < \infty$,implique que le rang $A(E)$ est de dimension finie ,dire

$$dim\ A(E) \leq dim\ E,$$

ce qui implique que l'opérateur A est compact.

Lemme 2

Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que,$G \neq E$, alors il existe un element $\varphi \in E$, avec$\|\varphi\| = 1$, et pour tout $\psi \in G$, on a

$$\|\varphi - \psi\| \geq \alpha \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

Preuve

Soit f un élément de E tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\psi\in G}\|f-\psi\|=\beta>0$$

choisissons un élément $g\in G$ tel que,

$$\beta\leq\|f-g\|\leq\tfrac{\beta}{\alpha}$$

Soit φ le vecteur donné par

$$\varphi=\tfrac{f-g}{\|f-g\|}$$

alors le vecteur φ est de norme égale à un ($\|\varphi\|=1$), de plus, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi-\psi\| &= \left\|\tfrac{f-g}{\|f-g\|}-\psi\right\|\\ &= \tfrac{1}{\|f-g\|}\left\|f-\left[g+\left(\|f-g\|\,\psi\right)\right]\right\|\\ &\geq \tfrac{\beta}{\|f-g\|}\geq\alpha\end{aligned}$$

Théorème 11

L'opérateur identique I d'un espace normé E dans lui même est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve

Soit φ_1 un élément de E, tel que $\|\varphi_1\|=1$, alors l'ensemble de dimension finie $G_1=span\{\varphi_1\}$ (l'espace engendré par φ_1) est un sous espace fermé de E ,d'après le lemme précédent il existe un élément $\varphi_2\in E$; tel que $\|\varphi_2\|=1$ et $\|\varphi_1-\varphi_2\|\geq\frac{1}{2}$.

prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2=span\left\{\varphi_{1,}\varphi_2\right\}$,il existe alors un élément $\varphi_3\in E$ avec $\|\varphi_3\|=1$, $\|\varphi_1-\varphi_3\|\geq\frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2-\varphi_3\|\geq\frac{1}{2}$.

On reprand la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite φ_n vérifiant $\|\varphi_n\|=1$ et $\|\varphi_n-\varphi_m\|\geq\frac{1}{2}$ pour tout $m\neq n$.

Cette suite φ_n est bornée mais ne contient aucune sous suite convergente . Ce qui implique que l'opérateur $I\varphi_n=\varphi_n$ n'est pas compact.

Et on a déjà démontré que si E est de dimension finie tout opérateur linéaire borné de E dans lui méme est compact, alors l'identique est compact.

Corollaire 12

La boule unité de l'espace normé E n'est pas compacte si E est de dimension infinie.

Démonstration

Si E est de dimension infini, l'identique I_E n'est pas compact d'après le théorème 11

Donc $\overline{I_E\left(B\left(0,1\right)\right)}$ n'est pas relativement compact $\Longrightarrow I_E\left(B\left(0,1\right)\right)=B\left(0,1\right)$ n'est pas compact. Telle que $B\left(0,1\right)$ est la boule unité de E.

Théorème 13

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Preuve

Soit $G\subset E$ un ensemble borné quelconque, alors $A(G)$ étant relativement compact, donc borné et d'après la définition d'un opérateur linéaire borné, A est borné.

Comme il est connu, l'opérateur identique$I$ de E dans E est borné mais il n'est pas compact.

Théorème 14

L'inverse A^{-1} d'un opérateur compact n'est pas borné si l'espace E est de dimension infinie.

Démonstration

Si A^{-1} est borné alors AA^{-1} est compact (le produit d'un compact et un borné).

Et puisque $AA^{-1}=I$, cela veut dire que I est compact dans un espace de dimension infinie. Contradiction.

2.1.1 Racine carrée d'un opérateur compact

Théorème 15

Tout opérateur positif $T \in B(H)$ admet un unique opérateur positif A tel que

$$T = A^2$$

De plus A commute avec tout opérateur qui commute avec T. On appelle A la racine carrée de T, et on le note $\sqrt{T}$

Théorème 16

Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$, et si T est compact, alors $f(T)$ est compact .

Preuve

f peut être approximée par des polynomes à coefficient constant nul. Pour untel polynôme, $P(T) = TP'(T)$ est compact, et donc $f(T)$ est compact comme limite en norme d'opérateurs compacts.

Proposition 1

Si T est positif compact alors $\sqrt{T}$ est compact

On prend la fonction :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longrightarrow \sqrt{x}$$

On a la fonction f est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ *avec* $f(0) = \sqrt{0} = 0$

et comme T *est compact alors, d'après la théorème précédent* $f(T) = \sqrt{T}$ *est compact.*

2.1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

A ensemble ,$A \subset C(G)$*est un relativement compact si et seulement si*

(i) *bornée i.e s'il existe une constante* M *telle que:*

$$|\varphi(x)| \leq M \qquad \forall x \in G \qquad ; \forall \varphi \in A$$

(ii) *équicontinu ie :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ *telle que,* $\forall \varphi \in A$ nous avans

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in G \;\; et \; |x - y| < \delta$$

Théorème 17

L'opérateur intégral A *de* $C(G)$ *dans* $C(G)$*à noyau continu est un opérateur compact*

$$A\varphi(x) = \int_G K(x,y)\varphi(y)dy$$

Preuve

En effet , soit E *un ensemble borné de* $C(G)$*alors ,on a*

$$\|\varphi\| \leq M \;\; pour \; tout \; \varphi \in E \; , \; de \; plus$$
$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)|$$

Cela veut dire que $A(E)$*est borné*...(1)

L'opérateur K *est uniformément continu sur le compact* $G \times G$*, d'où*

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x, y, z \in G$,

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |K(x,z) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \; pour \; tout \; \varphi \in E \quad et \quad x, y \in G \;\; , \; avec \; |x - y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ *est équicontinu* ....(2)

D'après (1) et (2) et le théorème de Arzela-Ascoli A(E) est relativement compact $\Longrightarrow$ *A est compact*

2.1.3 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Soit (H, $\langle .,. \rangle$) un espace de Hilbert séparable (i.e. qui admet une sous suite dénombrable dense).Rappelons que H admet une base hilbertienne $(e_i)_{i\geq 1}$ et que

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i e_i \in H \text{ ssi } \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty,$$

auquel cas on dispose de l'égalité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2.$$

Définition 7

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge faiblement*** *vers x et l'on note $x_n \rightharpoonup x$ si*

$$\forall h \in H, \lim_{n\to\infty} \langle x_n, h \rangle = \langle x, h \rangle .$$

Remarque 6

Si $x_n \rightharpoonup x$ alors on a convergence "coordonnée par coordonnée" dans la base hilbertienne :

$$\forall i \geq 1, x_{n,i} = \langle x_n, e_i \rangle \to \langle x, e_i \rangle = x_{i.}$$

Les premières propriétés de la convergence faible sont les suivantes :

Proposition 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert H et x, y deux éléments de H. On a alors :

(i) Convergence forte implique convergence faible :

$$x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$$

(ii) Bornitude :

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et } \|x\| \leq \liminf \|x_n\| \,;$$

(iii) Convergence fort-faible :

$$x_n \to x \text{ et } y_n \rightharpoonup y \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \,.$$

Théorème 18 *(Compacité faible de la boule unité).*

La boule unité de H est faiblement compacte. De manière équivalente, de toute suite bornée d'un espace de Hilbert séparable, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Définition 8

On dit qu'une application linéaire $T : H_1 \to H_2$ est ***faiblement continue*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1$, on a $x_n \rightharpoonup x$ implique $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.*

On a alors l'équivalence :

Proposition 3

Une application linéaire est continue si et seulement si elle est faiblement continue.

Proposition 4

Soit A un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2. Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) L'opérateur A est compact.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1$, on a $(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (A(x_n) \to A(x))$

Démonstration

Supposons d'abord que A soit compact. Soit $(x_n) \in H_1$ une suite faiblement convergente vers $x \in H_1$. Un opérateur compact étant continu, donc faiblement continu, on a $A(x_n) \rightharpoonup A(x)$. Mais toute suite faiblement convergente est bornée, donc $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite fortement convergente. La limite de cette sous-suite ne peut être que $A(x)$.

Remarquons par ailleurs que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car faiblement convergente,donc, en vertu de la compacité de A , la suite$(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact.

Comme elle admet $A(x)$ pour unique valeur d'adhérence, on en déduit que la suite toute entière converge fortement vers $A(x)$.

Réciproquement supposons que la propriété (ii) soit vérifiée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une quelconque suite bornée de H_1, Alors il existe $x \in H_1$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$. D'après l'hypothèse, on a donc $A(x_n) \to A(x)$. En conséquence, l'opérateur A est compact.

2.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Théorème 19

Soit T un opérateur compact de H dans H alors :

$\sigma(T)$ est aussi compact dans $\mathbb{C}$

preuve

Soit λ tellque $|\lambda| > \|T\|$,Montrons que $T - \lambda I$ est bijectif, Soit $f \in H$, et l'équation $Tu - \lambda u = f$. L'application $\dfrac{T-f}{\lambda}$ est contractante ,d'après du le théorème de point fixe de Banach, elle admet un unique point fixe qui est exactement la solution cherchée. On en déduit donc que $\sigma(T) \subset D(0, \|T\|)$.Il reste à montrer que le spectre est un fermé. Montrons que son complémentaire est un ouvert . Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$, Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(T)$ .Soit à résoudre $Tu - \lambda u = f$. Cette équation s'écrit $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, Elle admet une solution u qui s'écrit :

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0 u)) = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda I)^{-1}\left(\frac{f}{\lambda - \lambda_0} + u\right)$$

Soit l'application qui à u associe $(\lambda - \lambda_0)(T - \lambda I)^{-1}\left(\dfrac{f}{\lambda - \lambda_0} + u\right)$ .Si $\left\|(\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\right\| < 1$, le théorème du point fixe de Banach permet encore de conclure à l'existence et l'unicité de la solution .Il suffit donc de choisir

$$\varepsilon < \frac{1}{\left\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\right\|} .$$

Le théorème principal est le suivant :

2.2.1 Théorème de F. Riesz, 1918

Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et $T \in K(E)$. Alors :

1) $0 \in \sigma(T)$.

2) Toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre de T :

$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$, et le sous-espace propre associé $E = ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

3) $\sigma(T)$ est dénombrable, et, s'il est infini, on peut indexer les éléments de $\sigma(T) \backslash \{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ tendant vers 0.

Remarque. Dans le 2), rien n'empêche que 0 soit aussi une valeur propre.

Nous allons démontrer plusieurs résultats préliminaires sous forme de lemmes.

Lemme 3

Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, posons $T = Id - K$. Soit $M \subset H$ un sous-espace fermé tel que $T|_M$ est injectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout x dans M, et donc T(M) est un sous-espace fermé.

Démonstration

Sinon, il existerait une suite (x_n) dans M avec $\|x_n\| = 1$ et $T(x_n) \to 0$. Comme K est compact, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que (Kx$_n$) converge, mais comme Id = T + K, la suite (x$_n$) converge aussi ; soit $x \in M$ sa limite. On obtient Tx = 0 ce qui contredit l'hypothèse.

Pour démontrer que $T(M)$ est fermé, soit (y_n) une suite dans M telle que (Ty_n) converge.

L'inégalité démontrée précédemment implique que (y_n) est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note y sa limite, alors $limTy_n = Ty \in T(M)$.

Proposition 5

Soit T un opérateur compact et $\lambda \in \sigma_p(T)$. Si $\lambda \neq 0$, alors l'espace propre $ker(T-\lambda Id)$ est de dimension finie.

Démonstration

Supposons par l'absurde que $ker(T-\lambda Id)$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme T est compact, on peut extraire une sous-suite (e_{nk}) telle que (Te_{nk}) converge. Mais pour $n_k \neq n_j$, on a

$$\|Te_{nk} - Te_{nj}\| = |\lambda| \, . \, \|e_{nk} - e_{nj}\| = \sqrt{2}\, |\lambda| \, ,$$

ce qui contredit le fait que $(Te_{nk}\ )$ est une suite de Cauchy.

Lemme 4

Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, et $T = Id - K$. Alors $kerT$ est de dimension finie et ImT est fermé.

Démonstration

Le premier point a déjà été vu (proposition précédent). Soit $\mathrm{M} = \ker(\mathrm{T})^{\perp}$. On vérifie que T(M) = T(H) = Im T et que $T|_M$ est injectif. Par le lemme précédent, Im T est fermée.

Corollaire 20

Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, et soit $T = Id - K$. Alors la suite croissante $ker(T^n)_{n\geq 0}$ est stationnaire, et la suite décroissante $Im(T^n)_{n\geq 0}$ est stationnaire.

C'est une conséquence du lemme précédent. Remarquons que $\mathrm{Im}(\mathrm{T}^n)$ est fermé car T^n est de la forme $Id - K_n$ pour un certain opérateur compact K_n (conséquence de la formule du binôme de Newton)

Corollaire 21

Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, et $T = Id - K$. Alors T est surjectif ,si et seulement si, il est injectif.

Démonstration

Supposons T surjectif et non injectif. Montrons par récurrence que $ker(T^n) \neq ker(T^{n+1})$.

Pour l'étape de récurrence, soit $x \in ker(T^{n+1}) \backslash ker(T^n)$. Comme T est surjectif, il existe $y \in H$ tel que $x = Ty$. Alors $y \in ker(T^{n+2}) \backslash ker(T^{n+1})$.

De même, supposons T injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que $Im(T^n) \neq Im(T^{n+1})$.

En effet, si $x \in Im(T^n) \backslash Im(T^{n+1})$, alors $Tx \in Im(T^{n+1})$ et $Tx \notin Im(T^{n+2})$(utiliser l'injectivité de T).

Dans les deux cas on conclut par le corollaire précédent.

Corollaire 22

Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, alors

1) $0 \in \sigma(K)$

2) si $\lambda \neq 0$ on a $\lambda \in \sigma(K) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma_p(K)$

Démonstration

1) On sait que si H n'est pas de dimension finie, $\lambda = 0$ est,toujours, dans le spectre de K car K n'est pas inversible; sinon, l'opérateur $I = KK^{-1}$ serait compact ce qui impliquerait que H est de dimension finie car l'identité ne peut être compact que dans un espace de dimension finie.

2) Soit K un opérateur compact et $\lambda \neq 0$.Puisque $K - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}K)$ est injectif si λ n'est pas valeur propre, et est donc surjectif d'après le corollaire précédent, cela veut dire que $K - \lambda I$ est inversible.

donc:

$$\lambda \in \sigma(K) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma_p(K)$$

2.2.2 Théorème de Gram-Shmidt

Soit $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$*un système linéairement indépendant d'un espace euclidien E, alors il existe dans le même espace E un système orthonormé d'éléments* $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$*tel que; on a*

$$\psi_n = \alpha_{n1}\varphi_1 + \alpha_{n2}\varphi_2 + ... + \alpha_{nn}\varphi_n \ \forall n \ \textit{avec} \ \alpha_{nn} \neq 0,$$

et

$$\varphi_n = \beta_{n1}\psi_1 + \beta_{n2}\psi_2 + ... + \beta_{nn}\psi_n \ \forall n \ \textit{avec} \ \beta_{nn} \neq 0,$$

D'où

$$[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...] = [\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...]$$

Lemme 5

Soit T un opérateur compact dans $B(H)$,

Soient (φ_n)*une suite orthonormé, et* (ψ_n)*une suite bornée dans H, alors*

$$\langle T\psi_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0, \ \textit{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty$$

Plus généralement, si (φ_n) *une suite bornée telle que,*

$$\forall \varphi \in H, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle \varphi_n, \varphi \rangle = 0,$$

Et (ψ_n) *une suite bornée, alors*

$$\langle T\psi_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0, \ \textit{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty$$

Théorème 23

Soit T un opérateur compact dans $B(H)$*, alors* $\sigma(T) \setminus \{0\}$*est l'ensemble des éléments d'une suite dans* $\mathbb{C}$*, tendant vers* 0*, i.e. on peut écrire* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *sous la forme suivante*

$$\sigma(T) = \{\lambda_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}, \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n = 0$$

Démonstration

On choisit un vecteur propre φ_n associé à chaque valeur propre λ_n . La suite (φ_n) n'a pas besoin être orthonormée ,mais nous pouvons obtenir une suite orthonormée (ψ_n) par le processus de Gram-Shmidt, alors $\forall n \in N$ on a :

ψ_n est un combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2....\varphi_n$, aussi φ_n est une combinaison linéaire de $\psi_1, \psi_2....\psi_n$,ce qui implique que $\forall n \in N, \exists\ \alpha_n \neq 0$ pour lequel $\psi_n = \alpha_n \varphi_n$+combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_{n-1}$et puisque

$T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad \forall n \in N$

Alors

$$\begin{aligned} T\psi_n &= \alpha_n \lambda_n \varphi_n + \text{combinaison linéaire de } \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1} \\ &= \lambda_n \psi_n + \text{combinaison linéaire de } \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1} \\ &= \lambda_n \psi_n + \text{combinaison linéaire de } \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1} \end{aligned}$$

Alors $\langle T\psi_n, \psi_n \rangle = \lambda_n$, puisque (ψ_n) est une suite orthonormée, et il ressort du lemme précédent que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle T\psi_n, \psi_n \rangle = 0 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n$$

Ce qui résulte désiré.

Corollaire 24

Soit T un opérateur compact dans un espace de Hilbert H, alors le spectre de T est au plus dénombrable.Chaque point du spectre est isolé, à l'exception possible de 0.

Démonstration

Puisque $\sigma(T)$est compact, il suffit de montrer que tout $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ est isolé. Or, si un tel λ n'est pas isolé, il existerait une suite (λ_k), d'éléments dans $\sigma(T)$ non nuls et distincts deux à deux, qui convergerait vers λ. Comme $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, les λ_k sont des valeurs propres et le théorème dit que nécessairement (λ_k) converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$.

CHAPITRE 3

Théorie sur les opérateurs normaux

3.1 Opérateurs adjoints

Théorème 25 ***(Théorème de représentation de Riesz)***

Soit F une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H. Alors il existe un (unique) vecteur $f \in H$ tel que, pour tout $\varphi \in H$

$$F(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle$$

Théorème 26

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur linéaire borné défini sur H à valeur dans H, alors il existe un unique opérateur linéaire borné noté A^* défini de H dans H par

$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$ *pour tout φ et $\psi \in H$.*

de plus, on a $\|A\| = \|A^*\|$.

L'opérateur A^* ainsi défini est appelé adjoint de A.

Démonstration

Pour tout élément $\psi \in H$, l'opérateur F défini de H dans $\mathbb{C}$ par

$$\varphi \to F(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle$$

est un opérateur linéaire borné, car

$$|F(\varphi)| = |\langle A\varphi, \psi\rangle| \leq \|A\| \, \|\varphi\| \, \|\psi\|$$

par le théorème de Riesz, il s'ensuit qu'il existe un élément $f \in H$; unique tel que

$$F(\varphi) = \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, f\rangle$$

cette égalité définie un opérateur adjoint de A noté A^* de H dans H par

$$A^*\psi = f$$

Il est aisé de vérifier que l'opérateur A est unique et linéaire de plus, on a

$$\|A^*\psi\|^2 = \langle A^*\psi, A^*\psi\rangle = \langle AA^*\psi, \psi\rangle \leq \|A\| \, \|A^*\psi\| \, \|\psi\|$$

ce qui implique que

$$\|A^*\psi\| \leq \|A\| \, \|\psi\|$$

et par conséquence

$$\|A^*\| \leq \|A\| \qquad (1)$$

Inversement

$$\|A\varphi\|^2 = \langle A\varphi, A\varphi\rangle = \langle A^*A\varphi, \varphi\rangle \leq \|A^*\| \, \|A\varphi\| \, \|\varphi\|$$

donc

$$\|A\varphi\| \leq \|A^*\| \, \|\varphi\|$$

ce qui donne

$$\|A\| \leq \|A^*\| \qquad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$\|A\| = \|A^*\|$$

Nous donnons les propriétés suivantes qui sont bien connues, en les regroupons dans la proposition.

Proposition 6

Soient A et B deux opérateurs linéaires continus définis sur H à valeur dans H, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ on a:

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$

2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

3) $(A^*)^* = A$

4) $id_H^* = id_H$

5) $(AB)^* = B^* A^*$

6)$\|A^* \circ A\| = \|A\|^2$

Corollaire 27

Si A est un opérateur linéaire borné défini sur H dans H, alors

$\forall n \in \mathbb{N}; (A^n)^* = (A^*)^n$

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre n, Soit φ et ψdeux éléments de H ,Pour $n = 2$ on a

$$\langle A^2\varphi, \psi\rangle = \langle A\varphi, A^*\psi\rangle = \left\langle \varphi, (A^*)^2 \psi \right\rangle \quad \forall \varphi, \psi \in H$$

D'autre part,

$$\langle A^2\varphi, \psi\rangle = \left\langle \varphi, (A^2)^* \psi \right\rangle$$

D'où:

$$(A^2)^* = (A^*)^2$$

Supposons que le résultat est vrai pour n , c'est à dire $(A^n)^* = (A^*)^n$, alors il est vrai pour $(n+1)$ car :

$$\langle A^{n+1}\varphi, \psi\rangle = \langle A^n\varphi, A^*\psi\rangle = \langle \varphi, (A^n)^* A^*\psi\rangle = \langle \varphi, (A^*)^n A^*\psi\rangle = \varphi, (A^*)^{n+1}\psi \Longrightarrow$$
$$\langle A^{n+1}\varphi, \psi\rangle = \left\langle \varphi, (A^*)^{n+1}\psi\right\rangle \quad \forall\varphi, \psi \in H$$

D'autre part :

$$\langle A^{n+1}\varphi, \psi\rangle = \left\langle \varphi, (A^{n+1})^*\psi\right\rangle \quad \forall\varphi, \psi \in H$$

D'où:

$$\left\langle \varphi, (A^*)^{n+1}\psi\right\rangle = \left\langle \varphi, (A^{n+1})^*\psi\right\rangle$$

Alors : $(A^{n+1})^* = (A^*)^{n+1}$

Donc

$$(A^n)^* = (A^*)^n$$

Remarque 7

Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^*est inversible et $\left(A^*\right)^{-1} = (A^{-1})^*$

Preuve

Supposons que A^{-1}est existe dans $L(H)$, et on a $I^* = I$ donc

$$I = AA^{-1} = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^*$$
$$I = A^{-1}A = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^*$$

D'où

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^* A^*$$

Alors A^* est inversible d'inverse $(A^{-1})^*$ i.e $\left(A^*\right)^{-1} = (A^{-1})^*$

Théorème 28

Soit X et Y deux espaces de Hilbert et A un opérateur linéaire borné, Alors

$$1)\ \ (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \ker\ A^*$$
$$2)\ \ (\operatorname{Im} A^*)^{\perp} = \ker\ A$$

Démonstration

$$\begin{aligned} 1)\ \forall\psi \in\ (\operatorname{Im} A)^{\perp} &\Longleftrightarrow \langle A\varphi, \psi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in X \\ &\Longleftrightarrow \langle \varphi, A^*\psi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in X \\ &\Longleftrightarrow A^*\psi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \psi \in \ker\ A^* \end{aligned}$$

d'où

$$(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \ker\ A^*$$

$$\begin{aligned} 2)\ \ \psi \in\ (\operatorname{Im} A^*)^{\perp} &\Longleftrightarrow \langle A^*\varphi, \psi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in X \\ &\Longleftrightarrow \langle \varphi, (A^*)^*\psi\rangle = 0, \quad \forall\varphi \in X \\ &\Longleftrightarrow (A^*)^*\psi = 0 \quad (on\ a\ \ (A^*)^* = A) \\ &\Longleftrightarrow A\psi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \psi \in \ker\ A \end{aligned}$$

d'où

$$(\operatorname{Im} A^*)^{\perp} = \ker\ A$$

Proposition 7

Soit X, Y deux espaces de Hilbert et A un opérateur linéaire borné de X dans Y

1) $\operatorname{Im} A$ *est dense dans* Y *si et seulement si* A^* *est injectif*

2) $\operatorname{Im} A^*$ *est dense dans* Y *si et seulement si* A *est injectif*

Démonstration

1) Si A^*est injectif $\Longleftrightarrow \ker A^* = \{0_Y\} \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0_Y\}$

$$\iff \left((\operatorname{Im} A)^{\perp}\right)^{\perp} = (\{0_Y\})^{\perp} = Y \quad \left(on\ a\ \ \left((\operatorname{Im} A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A}\right)$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} A} = (\{0_Y\})^{\perp} = Y$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} A} = Y$$

2)Si A est injectif $\iff \ker A = \{0_Y\} \iff (\operatorname{Im} A^*)^{\perp} = \{0_Y\} = \ker A$

$$\iff \left((\operatorname{Im} A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = (\{0_Y\})^{\perp} = Y \quad \left(on\ a\ \ \left((\operatorname{Im} A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A^*}\right)$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} A^*} = (\{0_Y\})^{\perp} = Y$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} A^*} = Y$$

3.1.1 Opérateurs isométriques,normaux,unitaires,positifs,auto-adjoints

Définition 9

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E = F$, $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

1. Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé ***unitaire*** *si $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_F$.*

2. Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé ***isométrique*** *si $\|U(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$.*

3. Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé ***normal*** *si $NN^* = N^*N$.*

4. Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé ***hermitien*** *ou* ***auto-adjoint*** *si $S = S^*$.*

5. Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé ***positif*** *(notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E$ $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

3.2 Opérateurs normaux

Définition 10

On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ *est un opérateur normal si* T *commute avec son adjoint ,* $T^*T = TT^*$.

Exemple 2

La multiplication M_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L_2(0,1)$,*car*

$$(M_\varphi)^* M_\varphi = M_{\overline{\varphi}} M_\varphi = M_{\overline{\varphi}\varphi} = M_\varphi M_{\overline{\varphi}} = M_\varphi (M_\varphi)^*$$

L'opérateur M_φ est hermitien si la fonction φ est réelle.

Remarque 8

- *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est normal on a* $kerT^* = kerT$.

En effet, on a pour tout $x \in H$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

- Si $Tx = \lambda x$, on a $T^*x = \overline{\lambda}x$.

En effet, On a $\langle (T-\lambda I)^* x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda I) y\rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle x, Ty\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle \\ &= \langle T^*x, y\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle \\ &= \left\langle \left(T^* - \overline{\lambda}I\right) x, y\right\rangle \Longrightarrow (T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda}I \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|(T-\lambda I)x\|^2 &= \langle (T-\lambda I)x, (T-\lambda I)x\rangle \\ &= \langle (T-\lambda I)^* (T-\lambda I)x, x\rangle \\ &= \langle (T-\lambda I)(T-\lambda I)^* x, x\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle (T-\lambda I)^* x, (T-\lambda I)^* x \rangle$$
$$= \|(T-\lambda I)^* x\|^2$$
$$= \left\| \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) x \right\|^2$$

Donc

$$\ker (T-\lambda I) = \ker \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) .....(*)$$

si x vérifie $Tx = \lambda x \Longleftrightarrow x \in \ker (T-\lambda I) \Longleftrightarrow x \in \ker \left(T^* - \overline{\lambda} I\right) \Longleftrightarrow T^* x = \overline{\lambda} x$

Proposition 8

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a $H = ker(T) \oplus \overline{im(T)}$, et la somme est une somme orthogonale.

Démonstration.

On sait que $(kerT^*)^{\perp} = ((imT)^{\perp})^{\perp} = \overline{im(T)}$, donc

$$H = ker(T^*) \oplus ker(T^*)^{\perp} = ker(T) \oplus \overline{im(T)},$$

Proposition 9

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$,les assertions suivantes sont équivalentes

(a) A est normal

(b) $\|Ah\| = \|A^* h\|$pour tout $h \in H$

Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à

(c) Les parties réelles et imaginaires de A commutent.

Démonstation

Si $h \in H$, alors $\|Ah\|^2 - \|A^* h\|^2 = \langle Ah, Ah \rangle - \langle A^* h, A^* h \rangle$

$$= \langle A^* A h, h \rangle - \langle A A^* h, h \rangle$$
$$= \langle (A^* A - A A^*) h, h \rangle$$

Puisque $A^* A - A A^*$ est hermitien l'équivalence de (a) et (b) découle du corollaire

Si B et C sont parties réelle et imaginaire de A , alors on calcule

$$A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 - iCB + iBC + C^2$$
$$AA^* = (B + iC)(B - iC) = B^2 + iCB - iBC + C^2$$

et donc $A^*A = AA^*$ si et seulement si $BC = CB$

Proposition 10

Supposons que S est un opérateur normal, T est un opérateur (sur V).

Si S et T commutent, alors S^* et T commutent ainsi.

Théorème 29

1) Si S et T sont normaux et commutent entre eux, alors

1.1) $S.T$ est normal, et

1.2) $S + T$ est normal.

2) Si $a \in \mathbb{C}$ et T est normal, alors $a.T$ est aussi normal.

Démonstation

1.1) Nous avons besoin de montrer que $(ST).(ST)^* = (ST)^*.(ST)$.Nous avons

$$(ST).(ST)^* = (ST).(T^*S^*) = STT^*S^*$$

et

$$(ST)^*.(ST) = (T^*S^*).(ST) = T^*S^*ST$$

Mais, puisque chacun de S, S^*, T, T^* commute avec tous les autres, en conséquence de la proposition précédente, les deux produits sont égaux.

1.2) Nous avons

$$(S + T).(S + T)^* = (S + T).(S^* + T^*) = S.S^* + S.T^* + T.S^* + T.T^*,$$

et de même,

$$(S+T)^*.(S+T) = (S^*+T^*).(S+T) = S^*S + S^*T + T^*S + T^*T.$$

Pour la même raison que dans 1.1),ces valeurs sont les mêmes.

2) Nous avons:

$$(aT).(aT)^* = (aT).\overline{a}(T^*) = a.\overline{a}.T.T^*$$

et

$$(aT)^*.(aT) = \overline{a}(T^*).(aT) = \overline{a}.a.T^*.T$$

Puisque T est normal, ils sont égaux.

3.2.1 Inverse d'un opérateur normal

Proposition 11

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E;F)$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'application T est injective à image fermée ;

(ii) il existe un nombre $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|T(x)\| \geq c\,\|x\|$;

Proposition 12

Si un opérateur borné T de E dans F est inversible, il possède les deux propriétés suivantes :

***A**. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

***B**. On a $\overline{T(E)} = F$.*

La deuxième propriété est une forme faible de surjectivité : l'image de T est dense dans F ; c'est évidemment vrai quand T est inversible, puisqu'alors T est surjectif. De plus, lorsque T est inversible, la propriété A est vraie avec $c = \|T^{-1}\|^{-1} > 0$: en effet, on a pour tout $x \in E$, lorsque T^{-1} existe dans $\mathcal{L}(F, E)$

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T(x)\|.$$

Lemme 6

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur $T \in \mathcal{L}(E;F)$ est inversible si et seulement si, il vérifie ***A*** *et* ***B****.*

Démonstration

On a déjà vu une des directions : si T est inversible, il vérifie les deux conditions. Inversement, supposons que **A** et **B** soient vraies ; on sait alors que $T(E)$ est fermé par la proposition précédente, et dense d'après **B**, donc $T(E) = F$. Si $T(x) = T(x\prime)$ on aura $x = x\prime$ puisque $0 = \|T(x - x\prime)\| \geq c\,\|x - x\prime\|$ d'après **A**. Cela permet de définir une application (linéaire) S de $F = T(E)$ sur E en posant $S(y) = x \in E$ si et seulement si $y \in F$ et $T(x) = y$. En traduisant **A**, on obtient $\|S(y)\| \leq c^{-1}\,\|y\|$ pour tout $y \in F$, ce qui montre que S est continue. Pour finir il est clair que S est l'inverse de T.

Lemme 7

Si un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ est injectif, il est à image dense. Si l'opérateur normal T vérifie ***A****, il est inversible.*

Démonstration

Si T est normal et injectif, on a $\overline{T(H)} = H$ d'après la proposition 8, c'est 'a dire que l'image est dense. Si T vérifie la propriété A, il est injectif, donc on a **A** et **B**, par conséquent T est inversible.

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ opérateur normal et inversible d'inverse A^{-1} alors A^{-1} est aussi normal.

Démonstation

On effet:

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{*} = A^{-1}\left(A^{*}\right)^{-1} \qquad \left(car \ \left(A^{*}\right)^{-1} = (A^{-1})^{*}\right)$$

$$= (A^{*}A)^{-1} \qquad \left(car \quad (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}\right)$$

$$= (AA^{*})^{-1} \qquad (car\ A\ est\ un\ opérateur\ normal)$$

$$= \left(A^{*}\right)^{-1}A^{-1}$$

$$= \left(A^{-1}\right)^{*}A^{-1}$$

danc A^{-1} est un opérateur normal .

3.2.2 Racine carrée d'un opérateur normal

Théorème 30

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ telle que $T \geq 0$, alors il existe un opérateur A avec $T = A^2$,de plus

$$T\ normal \iff \sqrt{T} = A\ normal$$

preuve

Si T opérateur normal alors

$$\begin{aligned} T^{*}T = TT^{*} &\iff (A^2)^{*}A^2 = A^2(A^2)^{*} \\ &\iff (A^{*})^2A^2 = A^2(A^{*})^2 \\ &\iff (A^{*}A)^2 = (AA^{*})^2 \\ &\iff A^{*}A = AA^{*} \end{aligned}$$

danc $A = \sqrt{T}$ est *normal*

Proposition 14

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $A \in \mathcal{L}(H)$,on a les assertions suivantes

(1) *A opérateur normal*

(2) *A^n opérateur normal* $(\forall n \in \mathbb{N})$

Alors $(1) \Longrightarrow (2)$ *mais* $(2) \not\Rightarrow (1)$

Démonstation

On a A opérateur normal $\Longrightarrow A^*A = AA^*$

$$\Longrightarrow (A^*A)^n = (AA^*)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow (A^*)^n A^n = A^n (A^*)^n$$

$$\Longrightarrow (A^n)^* A^n = A^n (A^n)^*$$

$$\Longrightarrow A^n \text{ opérateur normal } (\forall n \in \mathbb{N})$$

supposons que A^n est normal $(\forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (A^n)^* A^n = A^n (A^n)^*$

$$\Longrightarrow (A^*)^n A^n = A^n (A^*)^n$$

$$\Longrightarrow (A^*A)^n = (AA^*)^n$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A^*A = AA^* & \text{si } n \text{ impair} \\ A^*A = -AA^* \text{ où } A^*A = AA^* & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Théorème 31

Si l'opérateur normal A est la limite d'une suite convergente (A_n) d'opérateurs normaux alors on a:

$$A_n^* \longrightarrow A^*$$

Démonstation

En effet, $A_n \longrightarrow A$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $:\|A_n - A\| < \varepsilon$

$$\langle A_n^* x, A_n^* y\rangle - \langle A^* x, A^* y\rangle = \langle A_n x, A_n y\rangle - \langle Ax, Ay\rangle \quad \text{(car } A_n \text{ et } A \text{ sont normaux)}$$

$$= \langle A_n x, A_n y\rangle - \langle Ax, Ay\rangle + \langle Ax, A_n y\rangle - \langle Ax, A_n y\rangle$$

$$= \langle A_n x - Ax, A_n y\rangle + \langle Ax, A_n y - Ay\rangle$$

$$= \langle (A_n - A)\, x, A_n y\rangle + \langle Ax, (A_n - A)\, y\rangle$$

$$\leq \|A_n - A\| \|x\| \|A_n y\| + \|Ax\| \|A_n - A\| \|y\|$$
$$\leq \|A_n - A\| (\|x\| \|A_n y\| + \|Ax\| \|y\|)$$
$$\leq \varepsilon.C = \varepsilon'$$

Donc

$\langle A_n^* x, A_n^* y\rangle - \langle A^* x, A^* y\rangle = \langle A_n A_n^* x, y\rangle - \langle AA^* x, y\rangle = \langle (A_n A_n^* - AA^*) x, y\rangle \leq \varepsilon'$

D'où

$(A_n A_n^* - AA^* \longrightarrow 0 \ si \ n \longrightarrow +\infty) \Longrightarrow (A_n A_n^* \longrightarrow AA^* si \ n \longrightarrow +\infty)$

D'autre part on a

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (A_n A_n^*) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n^* = AA^* \ et \ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n = A \Longrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} A_n^* = A^*$

Donc

$$A_n^* \longrightarrow A^*$$

3.3 Spectre d'un opérateur normal

Lemme 8

Le rayon spectrale d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ *vérifie* $r(T) = \|T\|$

Preuve

On suppose d'abord que T *est hermitien . On a* $\|T^2\| = \|T\|^2$ *et par récurrence sur* n *l'on obtient pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *la relation* $\|T\|^{2^n} = \left\|T^{2^n}\right\|$, *il vient*

$$r(T) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\| .$$

On revient au cas normal $TT^* = T^*T$. *L'élément* TT^**est hermitien et il s'ensuit que l'on a :*

$$\begin{aligned} r(T) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{r(TT^*)} = \sqrt{TT^*} = \|T\| \end{aligned}$$

Proposition 15

Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Démonstration

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal ; pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_\lambda = T - \lambda Id_H$ est normal ; si λ est dans le spectre, ou bien T_λ n'est pas injectif et $\lambda \in Sp_p(T)$, ou bien T_λ est injectif, donc à image dense (d'après le lemme 7) et $\lambda \in Sp_c(T)$.

Définition 11 (***valeur propre approché***)

λ *est un valeur propre approché de* T *s' il existe une suite des fonctions* $\psi_n \in H$, *telles que* $\|\psi_n\| = 1$ *pour tout* n, *et*

$$\|T\psi_n - \lambda\psi_n\| \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \;\; n \longrightarrow +\infty$$

Proposition 16

Le spectre d'un opérateur normal est l'ensemble de ses valeurs propres approchées.

Théorème 32

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal alors

1) *Si v est vecteur propre de T associé à la valeur propre λ,alors v est vecteur propre de T^*associé à la valeur propre de $\overline{\lambda}$.*

2) *Deux espaces propres de T associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.*

3) *Si T est hermitien, alors toute valeurs propres de T sont réelles. (i.e : $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$)*

Démonstation

1) Si T est normal alors $\ker T = \ker T^*$ donc $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$

2) Si $v \in \ker(T - \lambda I\ )$et $w \in \ker(T - \mu I)$, alors

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle = \langle v, \overline{\mu} w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

Alors $\lambda \langle v, w \rangle - \mu \langle v, w \rangle = (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$ d'où les vecteurs v et w sont orthogonaux

3) Si $v \in \ker(T - \lambda I)$, alors $\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \underbrace{\langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle}_{\text{car T est hermitien}} = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$

d'où $\lambda \langle v, v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \Longleftrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} \lambda = 0$ i.e $\lambda \in R$.

CHAPITRE 4

Relations entre opérateurs compacts et opérateurs normaux

4.1 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux

Proposition 17

Si T est auto-adjoint, alors

$$\|T\| = \sup\{|\langle Th, h\rangle| : \|h\| = 1\}$$

Lemme 9

Si T est un opérateur compact auto-adjoint, alors l'un des deux nombres $\pm\|T\|$est une valeur propre de T

preuve

Si $T = 0$,c'est évident .Sinon, la proposition 16 fournit une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $|\langle Th_n, h_n\rangle| \longrightarrow \|T\|$ .Quitte à remplacer (h_n) par une de ses sous-suites, on peut supposer que $|\langle Th_n, h_n\rangle| \longrightarrow \lambda$, avec $\lambda = \pm\|T\|$ .On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(T-\lambda I)\,h_n\|^2 &= \langle Th_n - \lambda h_n, Th_n - \lambda h_n \rangle \\ &= \|Th_n\|^2 + \lambda^2 \|h_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Th_n, \lambda h_n \rangle \\ &= \|Th_n\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle Th_n, h_n \rangle \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc $\lim \|(T-\lambda I)\,h_n\|^2 = 0$, cela implique que $\lambda \in \sigma_p(T)$

Théorème 33

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint .Alors il existe une suite (λ_n) de réels tendant vers 0, et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur $Vect\ e_n$

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

preuve

Par le lemme 9, $\sigma_p(T)$ contient un nombre réel, λ_1,égale à $\pm\|T\|$ .Soit $E_1 = \ker(T-\lambda_1 I)$ et π_1 la projection sur E_1.Soit $H_2 = E_1^{\perp}$, E_1 et H_2 sont des sous-espaces invariants de T. On appelleT_2 la restriction de T à H_2; on vérifie que $T_2 \in L(H)$ est un opérateur compact auto-adjoint.

On applique le lemme précédent à T_2, Alors $\sigma_p(T_2)$ contient un nombre réel ,λ_2,égale à $\pm\|T_2\|$. On pose $E_2 = \ker(T_2 - \lambda_2 I) \subset \ker(T - \lambda_2 I)$. De plus on a nécessairement $\lambda_2 \neq \lambda_1$ puisque $E_1 \perp E_2$. On note P_2 la projection sur E_2 et $H_3 = (E_1 \oplus E_2)^{\perp}$. Notons aussi que $\|T_2\| \leq \|T\|$et $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

On construit ainsi par récurrence une suite (λ_n) d'éléments distincts de $\sigma_p(T)$ telle que

1- $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq$ ....

2- Si $E_n = \ker(T_2 - \lambda_n I)$, alors $|\lambda_{n+1}| = \left\| T_{|(E_1 \oplus .... \oplus E_n)^{\perp}} \right\|$

La première propriété implique que la suite $(|\lambda_n|)$ converge vers $\alpha \geq 0$,Montrons . Sinon, on pourrait choisir un vecteur e_n dans E_n avec $\|e_n\| = 1$.On a $Te_n = \lambda_n e_n$ et donc $\|Te_n - Te_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\alpha^2$.Aucune sous-suite de (Te_n) n'est donc de Cauchy.

Mais comme T est compact, on peut extraire de (Te_n) une sous-suite convergente, ce qui est absurde.

Notons $\pi_{\mathbf{n}}$ la projection sur E_n ; on vérifie que

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi_j \right\| = \left\| T_{|(E_1 \oplus \ldots\ldots \oplus E_n)^{\perp}} \right\| = |\lambda_{n+1}|$$

ce qui montre que la série $\sum \lambda_n \pi_n$ converge normalement vers T. Pour obtenir la forme voulue par le théorème, on choisit une base orthonormale dans chaque espace propre En. Cela induit une écriture de π_n comme la somme d'un nombre fini de projecteurs de rang 1. On rassemble ensuite les bases orthonormales
de En en une famille orthonormale de H.

Théorème 34

Soit (P_n) une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux, et λ_n une suite bornée de scalaires non nuls deux à deux distincts. Soit A l'opérateur diagonal $\sum \lambda_n P_n$. Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, les expressions suivantes sont équivalentes

1) $AB = BA$

2) *Pour tout n, le sous-espace* $\operatorname{Im} P_n$ *est invariant par* B *et* B^*

preuve

$1 \Longrightarrow 2.$ Supposons que $AB = BA$ et soit $h \in \operatorname{Im}(P_n)$ .Comme les (λ_n) sont deux à deux distincts, $\operatorname{Im}(P_n) = \ker(A - \lambda_n Id)$. et donc $Ah = \lambda_n A$. Alors
$\lambda_n Bh = B(\lambda_n h) = BAh = ABh$, et comme $\lambda_n \neq 0$ cela implique $Bh \in \operatorname{Im} P_n$ et donc $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B.On peut appliquer le même raisonnement à $A^* = \sum \overline{\lambda_n} P_n$ et B^* (*qui commut avec* A^*) ,donc B*laisse aussi invariant $\operatorname{Im} P_n$.

$2 \Longrightarrow 1.$ On a $B(\operatorname{Im} P_n) \subset \operatorname{Im} P_n$, ce qui implique que $P_n B P_n = BP_n$. La même raisonnement appliqué à B^*donne $P_n B^* P_n = B^* P_n$, et donc en prenant l'adjoint $P_n B P_n = P_n B$. On a donc $P_n B = BP_n$. On déduit que $AB = BA$

Théorème 35

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$un ***opérateur compact normal****. Alors il existe une suite (λ_n) de nombres complexes tendant vers 0,et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur $Vect\ e_n$,*

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

Démonstration

On définit les parties réelle et imaginaire de T par $A = (T + T^*)/2$ et $B = (T - T^*)/2i$. On vérifie que A et B sont deux opérateurs autoadjoints compacts qui commutent. On applique le théorème 34 à A, en découpant selon les espaces propres on obtient une écriture $A = \sum \alpha_n P_n$ où les (α_n) sont des réels non nuls tous distincts et (P_n) des projecteurs de rang fini puisque $AB = BA$, le théorème 35 implique que pour tout n, $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B. On vérifie que la restriction de $B_{|\operatorname{Im} p_n} \in L(\operatorname{Im} p_n)$ est un opérateur auto-adjoint. On applique le théorème1 à $B_{|\operatorname{Im} p_n}$ ce qui permet de décomposer $B_{|\operatorname{Im} p_n} = \sum_k \beta_k^{(n)} Q_k^{(n)}$, où $\left(Q_k^{(n)}\right)$sont des projecteurs de rang 1. De même, $\ker A$ est invariant par B. On applique aussi le théorème 34 à $B_{|\ker A}$. On réunit les bases orthonormales obtenues pour chaque application du théorème 34, ce qui donne une suite (P_n) de projecteurs de rang 1 deux à deux orthogonaux et deux suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ tendant vers 0, telles que

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n$$
$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n P_n$$

Donc

$$\begin{aligned} T = A + iB &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n P_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n) P_n \end{aligned}$$

En posant $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ on a bien l'écriture voulue pour T .

Définition 12

On note $l^{\infty}(\mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions bornées de* $\mathbb{C}$. *Si* T *est un opérateur compact normal écrit sous la forme* $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$ *(comme la théorème) et* $\varphi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$, *on pose*

$$\varphi(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\lambda_n) P_n + \varphi_0 P_0$$

où P_0 *est la projection orthogonale sur* $\ker T$

Théorème 36 *(Calcul fonctionnel borné pour les opérateurs compact normaux)*

Soit T *un opérateur* ***compact normal*** *sur un espace de Hilbert complexe* H. *L'application*

$$\varphi : l^{\infty}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$T \mapsto \varphi(T)$$

a les propriétés suivantes

1− *L'application* φ *est linéaire et multiplicative,où* $(\varphi\psi)(T) = \varphi(T)\psi(T)$

2− *Si* $\varphi \equiv 0$, *alors* $\varphi(T) = Id$.*Si* $\varphi(z) = z$ *pour tout* $z \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$

3− $\|\varphi(T)\| = \sup\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$

4 − $\varphi(T)^* = \overline{\varphi}(T)$

5− *Si* $A \in L(H)$ *vérifie* $AT = TA$,*alors* $A\varphi(T) = \varphi(T)A$ *pour tout* $\varphi \in l^{\infty}(\mathbb{C})$

4.2 Notes sur les opérateurs compacts normaux

Dans ces notes, nous présentons trois conditions nécessaires et suffisantes pour un opérateur linéaire compact sur un espace de Hilbert H deviendra normal.

Soit A un opérateur linéaire compact sur H, et $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), ...$ les valeurs propres de A.Nous supposons que les valeurs propres sont ordonnées de telle sorte que

$$|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq |\lambda_3(A)| \geq ..., \qquad (1)$$

où toute valeur propre est répétée autant de fois que son degré de multiplicité. Soit $\lambda_1(A^*A), \lambda_2(A^*A), ...$ la suite des valeurs propres de A^*A telle que

$$\lambda_1(A^*A) \geq \lambda_2(A^*A) \geq \lambda_3(A^*A) \geq ..., \qquad (2)$$

où toute valeur propre est répétée autant de fois que sa multiplicité. Par défnition, pour $j = 1, 2, ...$la j^{eme} valeur singulière de A est le nombre

$$s_j(A) \stackrel{def}{=} (\lambda_j(A^*A))^{1/2}.$$

Sans perte de généralité, supposons qu'il existe une suite $\{m_i\}_{i=1}^{v} \subseteq \mathbb{N}$ avec $m_l < m_k$, pour $l < k$ tel que $\lambda_{ml}(A) \neq \lambda_{mk}(A)$, pour $l \neq k$ et $\lambda_j(A) = \lambda_{m_i}(A)$ pour $j \in \{m_{i-1}+1; m_{i-1}+2, ...m_i\}$, où $i = 1, 2, ..., v$ et $m_0 = 0$. Il est clair que v peut être un nombre fini ou $\aleph_0$. Avec ces symboles, nous avons

Lemme 10

Supposons que A est un opérateur compact sur H.Si $\lambda_j(A) \neq 0$ *et* $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$ *,pour tout* $j \in \mathbb{N}$*, alors, pour tout* $s \in \{1, ...v\}$ *avec* $s < +\infty$*, il existe un ensemble orthonormé* $\{x_1, x_2, ..., x_{m_s}\}$ *de H tel que*

$$A = \sum_{j=1}^{m_s} \lambda_j(A)(x_j \otimes x_j) \oplus A_s$$

et $\{\lambda_{m_1}(A), ..., \lambda_{m_s}(A)\} \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma(A_s)$,*où* A_s *est un opérateur compact sur* $\cap_{i=1}^{s} N(A-\lambda_{m_i}(A)I)^{\perp}$.

Démonstration

Tout d'abord, nous allons prouver que $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$ est un sous-espace réduit de A. Pour cela, il suffit de montrer que $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$ est invariante pour A^*. Notez que $\lambda_1(A) = ... = \lambda_{m_1}(A)$. Pour $j=1$, nous avons

$$|\lambda_1(A)| = s_1(A) = \max_{0\neq x\in H} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Ensuite, pour chaque $x \in N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$ avec $\|x\|=1$, nous avons

$$\|A\| = |\lambda_1(A)| = |\langle Ax, x\rangle| = |\langle x, A^*x\rangle| \leq \|A^*x\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Danc $|\langle x, A^*x\rangle| = \|A^*x\|$ .Par l'inégalité de Schwarz, il existe $h \in \mathbb{C}$ tel que $A^*x = hx$.De plus, nous pouvons obtenir $h = \overline{\lambda_{m_1}(A)}$. ainsi $A^*x \in N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$. Cela montre que $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$ est un sous-espace réduit de A. Par conséquent, la restriction de A à $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$ est $\lambda_{m_1}(A)I_1$, où I_1 est l'opérateur identité sur $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$.D'où

$$A = \lambda_{m_1}(A)P_1 \oplus A_1, \text{et } \lambda_{m_1}(A) \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A_1),$$

où P_1 est la projection orthogonale sur $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$.En outre, nous supposons que $\{x_1, x_2, ..., x_{m_1}\}$ est une base orthonormée de $N(A-\lambda_{m_1}(A)I)$, alors

$$\lambda_{m_1}(A)P_1 = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_{m_1}(A)(xj \otimes xj),$$

qui est,

$$A = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j(A)(xj \otimes xj) \oplus A_1.$$

Répétez le processus ci-dessus, nous pouvons obtenir

$$A = \sum_{j=1}^{m_s} \lambda_j(A)(xj \otimes xj) \oplus A_s.$$

Ce qui suit est le résultat principal

Théorème 37

Soit A un opérateur compact sur H, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est normal

(b) Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$s_j(A^{m+n}) = \sqrt{s_j(A^{2n})s_j(A^{2m})}, \forall m, n = 0, 1, 2, ... \qquad (3)$$

(c) $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$, pour j = 1, 2,... .

(d) Pour tout $x \in H$,

$$\|A^{m+n}x\| \leq \sqrt{\|A^{2n}x\| \, \|A^{2m}x\|}, \forall n, m = 0, 1, 2, ... \qquad (4)$$

Démonstration

Si H est de dimension finie, alors A peut être considéré comme une matrice, la preuve peut être trouvée dans [13].

Ensuite, nous ne considérons que le cas H est de dimension infinie.

(**a**) $\Rightarrow$ (**b**): Supposons que A est normal, alors $A = \sum_{i=1}^{v} \lambda_{m_i}(A) P_i$, où P_i est la projection orthogonale sur $N(A - \lambda_{m_1}(A) I)$.

D'où

$$A^*A = \sum_{i=1}^{v} |\lambda_{m_i}(A)|^2 P_i \text{ et } (A^n)^*A^n = (A^*A)^n = \sum_{i=1}^{v} |\lambda_{m_i}(A)|^{2n} P_i.$$

Ainsi

$$\{s_{m_i}(A) : i = 1, 2, ..., v\} = \{|\lambda_{m_i}(A)| : i = 1, 2, ..., v\}.$$

clairement

$$\begin{aligned} dim(N((A^*A)^n - (s_{m_i}(A))^{2n})) &= dim(N(A^*A - (s_{m_i}(A))^2)) \\ &= \sum_{k\in D} dim(N(A - \lambda_k(A))), \end{aligned}$$

où $D = \{k : |\lambda_k(A)| = s_{m_i}(A)\}$.puisque $(|\lambda_j(A)|)_{j=1}^{\infty}$ et $(|s_j(A)|)_{j=1}^{\infty}$ sont ordonnées en tant que (1) et (2), respectivement, nous avons

$$s_j(A^n) = (s_j(A))^n = |\lambda_j(A)|^n.$$

donc

$$s_j(A^{m+n}) = \sqrt{s_j(A^{2n})s_j(A^{2m})}, \forall j \in N, \forall n, m = 0, 1, 2, ...$$

(**b**) $\Rightarrow$ (**c**) :Sous la condition (3), nous avons

$$s_j(A) = (s_j(A^2))^{1/2} = (s_j(A^4))^{1/4} = ... = (s_j(A^{2^k}))^{1/2^k} = ...\forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $j = 1$, alors $s_1(A^m) = \underset{0 \neq x}{max} \|A^m x\| / \|x\| = \|A^m\|$, d'où

$$s_1(A) = \lim_{k\to\infty} (s_1(A^{2^k}))^{1/2^k} = \lim_{k\to\infty} \left\|A^{2^k}\right\|^{1/2^k} = r(A) = |\lambda_1(A)|.$$

d'où

$$s_1(A) = ... = s_{m_1}(A) = |\lambda_1(A)| = ... = |\lambda_{m_1}(A)|.$$

De la preuve du lemme 10, nous obtenons

$$A = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j(A)(xj \otimes xj) \oplus A_1 \text{ et}$$
$$s_{m_1+1}(A) = s_1(A_1), \lambda_{m_1+1}(A) = \lambda_1(A_1).\text{D'où},$$
$$s_1(A_1) = (s_1(A_1^2))^{1/2} = ... = (s_1(A_1^{2^k}))^{1/2^k} = ...\forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$s_1(A_1) = \lim_{k\to\infty} (s_1(A_1^{2^k}))^{1/2^k} = \lim_{k\to\infty} \left\|A_1^{2^k}\right\|^{1/2^k} = |\lambda_1(A_1)|.$$

ainsi $s_{m_1+1}(A) = ... = s_{m_2}(A) = |\lambda_{m_1+1}(A)| = ... = |\lambda_{m_2}(A)|$. Pour tout $j > 1$, par induction et simple discussion, nous pouvons obtenir $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$.

(c) $\Rightarrow$ **(a)**: Par le Lemme 10, pour chaque $s \in \{1, ..., v\}$ avec $s < +\infty$, nous avons

$$A = \sum_{j=1}^{m_s} \lambda_j(A)(x_j \otimes x_j) \oplus A_s.$$

Soit $B_s = \sum_{j=1}^{m_s} \lambda_j (A) (x_j \otimes x_j)$, alors $A = B_s \oplus A_s$.Si v est un nombre fini, il est clair que $A = B_v \oplus 0$ est normal. Dans le cas $v = \aleph_0$, soit $(\alpha_{sk})_{k=1}^{\infty}$ une suite de valeurs propres distinctes de $A_s^* A_s$, avec $\alpha_{sk} \geq \alpha_{si}$, $k > i$ and P_{sk} la projection orthogonale de $\cap_{i=1}^{s} N(A - \lambda_{m_i}(A)I)^{\perp}$ sur $N(A_s^* A_s - \alpha_{sk} I_s)$ et $P_{sk}P_{st} = P_{st}P_{sk} = 0$ pour $k \neq t$, où I_s est l'opérateur identité de $\cap_{i=1}^{s} N(A - \lambda_{m_i}(A)I)^{\perp}$.

clairement $(\alpha_{sk})_{k=1}^{\infty}$ est une sous suite de $((s_j(A))^2)_{j=1}^{\infty}$. Then $A_s^* A_s = \sum_{k=1}^{m_s} \alpha_{sk} P_{sk}$, depuis $A_s^* A_s$ est compact est normal. Pour tout $x \in \cap_{i=1}^{s} N(A - \lambda_{m_i}(A)I)^{\perp}$, nous avons

$$\|(A_s^* A_s)x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{sk}^2 \|P_{sk}x\|^2 \leq \sup\{\alpha_{sk}^2 : \ k \geq 1\} \cdot \|x\|^2 .$$

d'où $\|A_s^* A_s\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_s^* A_s)x\| \leq \sup\{\alpha_{sk}^2 : \ k \geq 1\}$ .Puisque $(s_j(A)) \to 0$ si $j \to \infty$, nous avons $\sup\{\alpha_{sk}^2 : \ k \geq 1\} \to 0$ si $j \to \infty$. Alors $\|A_s^* A_s\| \to 0$ si $s \to \infty$. Cela implique $\|A_s\| \to 0$. D'où

$$\|B_s \oplus 0 - A\| = \|0 \oplus A_s\| = \|A_s\| \to 0.$$

Donc A est normal, étant donné que chaque $B_s \oplus 0$ est normal.

(a) $\Rightarrow$ **(d)** : Si A est normal, alors pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|A^{m+n}x\|^2 &= \langle A^{m+n}x, A^{m+n}x\rangle \\ &= \langle (A^*A)^n x, (A^*A)^m x\rangle \\ &\leq \|(A^*A)^n x\| \cdot \|(A^*A)^m x\| \\ &= \|A^{2n}x\| \cdot \|A^{2m}x\| , \end{aligned}$$

depuis $\|(A^*A)^n x\|^2 = \langle (A^*A)^n x, (A^*A)^n x\rangle = \|A^{2n}x\|^2$ .Par conséquent, (d) détient.

(d) $\Rightarrow$ **(c):** condition (4) implique que

$$s_1(A^{m+n}) = \max_{0 \neq x \in H} \frac{\|A^{m+n}x\|}{\|x\|} \leq \sqrt{s_1(A^{2n}) s_1(A^{2m})}$$

et en particulier, nous avons

$$|\lambda_1(A^n)| \leq s_1(A^n) \leq (s_1(A^{2n}))^{1/2} \leq (s_1(A^{4n}))^{1/4} \leq ... \leq |\lambda_1(A^n)|.$$

La dernière inégalité est titulaire, depuis $lim_{m\to\infty}(s_1(A^{nm}))^{1/m} = |\lambda_1(A^n)|$.En particulier, pour $n = 1$, nous obtenons que

$$s_1(A) = ... = s_{m_1}(A) = |\lambda_1(A)| = ... = |\lambda_{m_1}(A)|.$$

De la preuve du lemme 10, nous avons $A = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j(A)(x_j \otimes x_j) \oplus A_1$, et A_1 est un opérateur compact sur $N(A - \lambda_{m_1}(A)I)^{\perp}$.

Pour tout $x \in N(A - \lambda_{m_1}(A)I)^{\perp}$, nous avons $A^{m+n}x = A_1^{m+n}x$,d'où

$$\left\|A_1^{m+n}x\right\| \le \sqrt{\|A_1^{2m}x\| \, \|A_1^{2n}x\|}, \forall n, m = 0, 1, 2, ...$$

De même, nous obtenons $|\lambda_1(A_1)| = s_1(A_1)$.

De la preuve du lemme 10 encore, nous obtenons

$$s_{m_1+1}(A) = ... = s_{m_2}(A) = s_1(A_1) = |\lambda_1(A_1)| = |\lambda_{m_1+1}(A)| = ... = |\lambda_{m_2}(A)|.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, par induction et simple discussion, nous obtenons $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$ .Ainsi (c) détient.

Conclusion

Dans notre travail, Nous avons trouvé qu'un opérateur compact A
sur un Hilbert complexe H est normal, si et seulement si,
H admet une base hilbertienne propre pour A.
Et nous présentons trois conditions nécessaires et suffisantes
pour un opérateur linéaire compact sur
un espace de Hilbert H deviendra normale.
La question posée est :
Y at-il d'autres relations entre les deux opérateurs?

الملخص

نعلم أن المؤثرات الخطية المتراصة المعرفة على فضاء هلبرتي واحدة من أهم المؤثرات الخطية المستمرة و التي تمتاز بالكثير من الخواص المهمة. وبالتالي من المهم جدا النظر في بعض الشروط التي يمكن بموجبها لمؤثر خطي متراص أن يكون مؤثرا ناظميا و كذلك دراسة الطيف لكل منهما .

ABSTRACT

It is known that linear compact operators on Hilbert space form one of the most important class of bounded linear operators and have many more excellent properties, see corses in functional analysis. Thus it is very important to consider some conditions under which a linear compact operator is normal and study their spectrum.

RÉSUMÉ

Il est clair que les opérateurs linéaires compacts sur un espace de Hilbert forme l'une des classe la plus importante des opérateurs linéaires bornés et ont plusieurs propriétés plus nécessaires, voir les cours d'analyse fonctionnelle. Ainsi, il est très important de tenir compte des conditions dans lesquelles un opérateur linéaire compact est normal et étudier leur spectre.

Bibliographie

[1] N. Boccara. Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens, Edition MARKETING, Paris, 1984.

[2] H. Brizis. Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON, Paris, 1992.

[3] J. Bass. Cours d'analyse fonctionnelle.

[4] B.Maurey, Analyse fonctionnelle et théorie spectrale, Université Paris 6, 2001.

[5] Raphaël Danchin et Pierre Raphaël. Analyse non linéaire, 18 octobre 2011

[6] Houcine chebli. Analyse Hilbertienne, 2001.

[7] Mostefa nadir . Cours de poste graduation. 2005- 2006

[8] L. Schwartz. Analyse hilbertinne. Hermann. 1979

[9] Walter Hengatner, Marcel lambert, Corina Reicher, Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les Presses de l'université du Québec, 1981.

[10] jian Yang, Hong-Ke, A note on compact normal operators,2003

[11] BEN DJABRI Amar, Sur Les Opérateurs Inverses Généralisés (mémoire magister 2006/2007 ,Université Mohamed Boudiaf de M'Sila)

[12] KHELOUFI Yasmina, Sur la théorie de l'alternative de fredholm (mémoire magister, Université Mohamed Boudiaf de M'Sila)

[13] M. Sdkane, A note on normal matrices, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 185–187.