

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : :Analyse Mathématiques et Numérique

Par

-Aziz chouder

THÈME

problème d'euler pour un fluide incompressible

Soutenu publiquement le : 04/09/ 2020

Devant le jury composé de :

- 1)Mr. Prof. Univ de M'sila Président
- 2)Mr.Abdelkader Gasmi Prof. Univ de M'sila Encadreur
- 3)Mr. MA/A. Univ de M'sila Examineur

Dirigé par :

Mr. Abdelkader Gasmi

Année: **2019/2020**

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement **Mr.Abdelkader Gasmi**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury **.Mr.,..... et...Mr.,.....** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues, . et .. pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A mes parents et mes frères et ma soeur
A tout famille (chouder)
A tout les amis

Résumé:

Ce mémoire de master en analyse mathématiques et numériques inscrit dans le cadre des problèmes d'Euler pour un fluide incompressible dont on présente quelques propriétés des fluides et on parle sur les deux descriptions qui décrivent les mouvements des fluides. Ainsi on introduit la dynamique pour des fluides incompressible et non visqueux.

Mots clés :

Masse du fluide , Volume du fluide , Masse volumique , Volume , Densité.

Notations

M : masse du fluide (kg).

V : volume du fluide (m^3).

ρ : masse volumique (kg/m^3).

ϖ : Poids volumique (N/m^3).

v : Volume massique(m^3/kg).

d : densité.

μ : La viscosité cinématique.

a : l'accélération par rapport au référentiel galiléen(O:x:y:z).

F : la densité volumique de force.

β : coefficient de compressibilité (m^2/N)

dV : variation de volume (m^3)

Table des matières

Introduction	2
1 Propriétés Des fluides et Description du mouvement	3
1.1 Les Fluides incompressibles	3
1.2 Définition d'un fluide	3
1.3 Système d'unités	4
1.4 Propriétés des fluides	4
1.4.1 compressibilité	4
1.4.2 Masse volumique et densité	4
1.4.3 Poids volumique	5
1.4.4 Volume massique	6
1.4.5 Viscosité	6
1.5 Description du mouvement	7
1.5.1 Description Lagrangienne	7
1.5.2 Description Eulerienne	7
1.6 Lignes Fluides	8
1.6.1 Trajectoires	8
1.6.2 Lignes de courant	8
1.6.3 Lignes d'émission	8
2 Dynamique des fluides incompressibles parfaits	9
2.1 Notion de fluide parfait	9

2.2	Equation de mouvement	9
2.2.1	Equation d'Euler	10
2.2.2	Equation de Bernoulli	11
2.2.3	Ecoulement irrotationnel	13
2.2.4	Ecoulement potentiel	14
2.3	Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible:	14
2.4	Théorie de la variable complexe	16
2.5	Transformation de Schwartz-Christoffel	16
3	Ecoulement contre une plaque verticale	18
3.1	Introduction	18
3.2	Formulation du problème	19
3.3	Résolution du problème	20
	Bibliographie	29

Introduction

La mécanique des fluides est un domaine très vaste , nécessaire pour la nouvelle technologie et l'ingénierie. Il est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

Propriétés des fluides et description du mouvement.étude l'état des fluides.

-la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

Le problème de déterminer la surface libre d'un écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait, devant un obstacle est considéré. Le problème classique de l'écoulement aérodynamique d'un fluide parfait a été étudié par beaucoup d'auteurs.

Des travaux antérieurs dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation la méthode de hodographe peuvent être trouvés dans le travail de Birkhoff et Zarantonello (1957), Gurevich (1965) et Woods (1961).

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude d'un écoulement devant une plaque verticale. Et on suppose que l'écoulement est potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre où les effets de gravité sont négligés. Notre but est de trouver la forme de la surface libre formée de cet écoulement

Ce mémoire comprend trois chapitres:

Le premier aborde les Propriétés Des fluides et Description du mouvement

Le deuxième présente la dynamique des fluides incompressibles parfait: des équations de base (équation de continuité, lignes et fonctions de courant), détermination des écoulements potentiels bidimensionnels d'un fluide incompressible et la transformation de Schwartz-Christoffel.

Le troisième donne la résolution analytique de problème posé en négligeant les effets de tension de surface et on pose que l'écoulement est uniforme à l'infini. Cette technique dite la théorie des lignes de courant libres. Et on se termine se travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Propriétés Des fluides et Description du mouvement

1.1 Les Fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure .Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles(eau. huile .etc)

1.2 Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable.Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires.Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

1.3 Système d'unités

Les unités de mesure utilisées dans ce document sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant:

Tableau : Principales unités dans le système international (SI):

Longueur	Masse	Temps	Pression	force	Energie	Puissance
Mètre	Kilogramme	Seconde	Pascal	Newton	Joule	Watt
(m)	(Kg)	(s)	(Pa)	(N)	(J)	(W)
L	M	T	$ML^{-1}T^2$	MLT^{-2}	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-3}

1.4 Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

1.4.1 compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (dp), le volume de fluide subit une diminution de volume (dV).

L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = \frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV} \quad (pa^{-1}), (m^2/N)$$

1.4.2 Masse volumique et densité

a) Masse volumique : La masse volumique d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en kg/m^3 .

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique.

$$\rho = \frac{Masse}{Volum} = \frac{M}{V}$$

M : masse du fluide (kg)

V : volume du fluide (m^3)

ρ : masse volumique (kg/m^3)

Fluides	mercure	eau de mer	eau pure	huile	essence	butane	air
ρ (kg/m^3)	13600	1030	1000	900	700	2	1.293

b) Densité: Elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}$$

Le corps de référence dépend de l'état physique du corps.

Eau : pour les solides et les liquides.

Air : pour les gaz.

Exemple 1.4.1 $d_{\text{eau}} = \frac{1000}{1000} = 1$

$$d_{\text{essence}} = \frac{700}{1000} = 0.7$$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante:

$$\rho_{\text{liquide}} \gg \rho_{\text{gaz}}$$

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

1.4.3 Poids volumique

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho Vg}{V} \implies \varpi = \rho g \quad (\text{N}/\text{m}^3)$$

1.4.4 Volume massique

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique.

$$v = \frac{V}{M} = \frac{V}{\rho V} = \frac{1}{\rho} \quad (m^3/kg)$$

1.4.5 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, (μ) et on écrit alors:

$$\tau = \mu \frac{d\mu}{dy}$$

La viscosité cinématique, ν , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dans le système *SI*, l'unité de la viscosité dynamique est le (*Pa.s*) ou (*kg/ms*) ou *Pl*:

Pa.s : Pascal seconde

Pl : Poiseuille avec $1Pa.s = 1Pl = 1 (kg/ms)$

Dans le système *CGS* l'unité est le Poise (*Po*) avec $1Po = 10^{-1}Pl$

Dans le système *SI*, l'unité de la viscosité cinématique, ν , est le (m^2/s); dans le système *CGS* l'unité est le stokes où $1stokes = 1(cm^2/s) = 10^{-4}(m^2/s)$.

1.5 Description du mouvement

1.5.1 Description Lagrangienne

Le point de vue de Lagrange consiste à considérer une particule bien définie comme un point matériel et à caractériser le mouvement par ses positions successives. Ceci nécessite donc que l'on identifie la particule qui est considérée. Le déplacement est exprimé en fonction des variables matérielles par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{i} + y(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{j} + z(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{k}$$

(x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées d'un point représentant la position du point matériel à l'instant $t = t_0$. Le vecteur vitesse est défini comme le taux de variation du vecteur déplacement:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\partial x}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \overrightarrow{k}$$

et le vecteur accélération par:

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \overrightarrow{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \overrightarrow{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \overrightarrow{k}$$

1.5.2 Description Eulerienne

Les variables $(x; y; z)$ sont les coordonnées d'un point représentant la position du point matériel à l'instant t . Avec cette description, on peut étudier l'état actuel du milieu sans s'intéresser à une particule matérielle déterminée.

La différence entre les deux descriptions est donc, que du point de vue de Lagrange, on décrit les variations de la vitesse, de l'accélération, de la température, . . . d'un point matériel particulier, alors que selon le point de vue d'Euler, on décrit ces mêmes quantités dans une région spatiale donnée sans individualiser les particules matérielles. C'est cette dernière description qui est la plus utilisée en mécanique des fluides.

1.6 Lignes Fluides

1.6.1 Trajectoires

Définition 1.6.1 1.6.1

On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupée successivement entre deux instants (Figure 1). Les trajectoires s'obtiennent en intégrant le système différentiel suivant au cours du temps:

$$\frac{dx}{\mu(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\omega(x,y,z,t)} = dt$$

Les trajectoires permettent de visualiser le champ de vitesse en mode de Lagrange.

1.6.2 Lignes de courant

Définition 1.6.2 Définition 1.6.3 Définition 1.6.4 1.6.2

Une ligne de courant à l'instant t est une courbe tangente à l'instant t au vecteur vitesse en chacun de ses points (Figure 2). Dans le cas général, les lignes de courant sont différentes des trajectoires. Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel.

$$\frac{dx}{\mu(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\omega(x,y,z,t)}$$

1.6.3 Lignes d'émission

Définition 1.6.5 1.6.3

Une ligne d'émission relative à un point M , est l'ensemble des positions à l'instant t des particules qui sont passées ou qui passeront par le point M (Figure 3).

Chapitre 2

Dynamique des fluides

incompressibles parfaits

2.1 Notion de fluide parfait

Un fluide est dit parfait si les forces de frottement sont nulles (pas de viscosité). De manière plus générale, presque tous les fluides sont visqueux, mais dans certaines configurations d'écoulement, les fluides réels peuvent se comporter comme des fluides parfaits.

Eau, air, hydrocarbures.....

2.2 Equation de mouvement

On a deux types de forces qui agissent sur une particule d'un fluide qui sont :

- Forces intérieures entre moléculaires: elles sont opposées deux à deux donc leurs résultantes sont nulles.

- Forces extérieures: sont des forces de volume ou des forces de surface.

La forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer.

Comme équation, on a:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}$$

D'où

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \frac{1}{\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}.$$

2.2.1 Equation d'Euler

Soit ϑ un domaine délimité par une surface S . Ce volume est soumis à l'effet de la résultante des forces surfaciques

qui est donnée par la formule suivante

$$- \iint_S P \vec{u}_\eta ds.$$

:

Où P désigne la pression.

Par la transformation de l'intégrale de surface en une intégrale de volume on obtient:

$$- \iint_S P \vec{u}_\eta ds = - \iiint_{\vartheta} \vec{\text{grad}} P d\vartheta.$$

Cette formule montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\vec{\text{grad}} P$) exercée par le fluide en contact. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors:

$$\iiint_{\vartheta} \rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) d\vartheta = - \iiint_{\vartheta} \vec{\text{grad}} P d\vartheta,$$

et comme le domaine étant arbitraire, on aura donc:

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P,$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique,..., etc), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force $\vec{F}_{champ}$.

■ Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1-3) de sorte que l'équation (1-3) doit s'écrire sous la forme:

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{F}_{champ}$$

Cette equation est nommée l'équation d'Euler.

2.2.2 Equation de Bernoulli

Si les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{F}_{champ} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ et à partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait, On a:

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

■ En utilisant l'identité vectorielle:

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{V} \times \nabla) \times \vec{V}$$

Ce qui nous donne:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{V} \times \nabla) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Donc:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \varphi\right) + (\vec{V} \times \nabla) \times \vec{V} = 0$$

Comme on le connaît que la forme du vecteur tourbillon est donnée par:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Dans le cas d'un écoulement permanent (un écoulement du fluide est dit stationnaire ou permanent lorsque le vecteur vitesse $\vec{V}$ reste constante dans le temps en importe quel point de l'espace occupé par le fluide). C'est à dire:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

L'équation (1-4) s'écrit:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \varphi\right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

Sur une ligne de courant de vecteur unitaire $\vec{s}$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$$

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \varphi\right) + \vec{s} \cdot (\vec{V} \times \nabla) \times \vec{V} = 0$$

Comme $\vec{s}$. et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Alors:

$$\vec{s} \cdot (\vec{V} \times \nabla) \times \vec{V} = 0$$

Ainsi, on a:

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \varphi \right) = 0.$$

On a alors:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \varphi = K,$$

K est le long d'une ligne de courant.

En générale, la constante K change avec la ligne de courant.

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur.

Dans ce cas, on a:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gy = K,$$

cette equation est nommée equation de bernoulli:

2.2.3 Ecoulement irrotationnel

Dans un écoulement si on considère que le fluide comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition:

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V} = 0$$

$\vec{\Omega}$ représente le vecteur de rotation ou de vorticité.

$\vec{\Omega}$ est, par définition, nul pour un écoulement irrotationnel.

Cette condition apporte des simplifications importantes dans les équations du mouvement.

2.2.4 Ecoulement potentiel

On rappelle qu'un écoulement irrotationnel a été défini à partir de l'équation (1-6).

On rappelle aussi qu'en mathématique une fonction dont le rotationnel est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours:

$$\overrightarrow{rot} \left(\overrightarrow{grad} \varphi \right) = 0.$$

On peut donc réduire:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad} \varphi.$$

φ représente la potentielle de vitesse.

On déduit que, du à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit potentiels.

2.3 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible:

La forme de l'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par:

$$div \left(\overrightarrow{V} \right) = 0$$

En remplaçant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse on trouve:

$$\nabla(\nabla\varphi) = 0.$$

Alors:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Soit:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Δ indique le Laplacien et ∇ l'opérateur gradient.

On dit q'un écoulement est bidimensionnel si le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe. Dans ce cas l'équation du potentiel de vitesse se réduit à:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Et φ étant une fonction potentielle continue à deux variables, alors il existe une fonction ψ dite fonction potentielle conjuguée ou fonction de courant qui vérifie:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

En identifiant ces deux systèmes d'équations, on aboutit aux relations suivantes entre φ et ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ces équations sont connues comme celles de Cauchy-Riemann, qui nous permettent de déduire que φ et ψ sont uniformément différentiables dans le domaine de l'écoulement et

qui permettent aussi de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement.

2.4 Théorie de la variable complexe

Des solutions générales pour des écoulements potentiels bidimensionnels de fluide incompressibles existent à base de résolutions mathématiques de l'équation de Laplace.

Cependant, on notera surtout, que la théorie de variables complexes offre une méthode très puissante pour l'obtention de solution de l'équation de Laplace.

Au lieu de considérer φ et ψ comme étant des fonctions de x et y , on utilise une nouvelle variable z , qui représente la variable complexe $z = x + iy$.

Définissons, maintenant, une fonction f qui a pour argument z

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Cette fonction sera analytique dans le domaine de l'écoulement, de plus:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv$$

sera aussi analytique dans le plan de l'écoulement. Cette propriété très importante, elle nous permet de résoudre notre problème considéré .

2.5 Transformation de Schwartz-Christoffel

Considérons un polygone [Fig.1] ayant pour sommets $a_1, a_2, \dots, a_n$ et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ les points correspondants respectivement à $x_1, x_2, \dots, x_n$ de l'axe du plan des z [Fig .2].

Une transformation qui représente l'intérieur R du polygone considéré sur le demiplan supérieur du plan des z et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par:

$$\frac{dQ}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

Où

$$Q = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dz + B$$

Où A et B sont des constantes complexes arbitraires [16].

Chapitre 3

Ecoulement contre une plaque verticale

Dans ce chapitre on étudie un écoulement dû à un jet contre une plaque verticale à surface libre, où les effets de gravité et de tension de surface sont négligés. On fait une formulation et une résolution de notre problème considéré. On peut dire que la solution trouvée est exacte sous des conditions qu'on va expliquer ultérieurement.

3.1 Introduction

Dans l'étude de notre problème, on introduit la théorie des surfaces libres qui considère que l'écoulement est limité éesente la partiellement par des parois rigides et par des surfaces libres de formes inconnues. Et pour la résolution, on utilise la vitesse introduite par la méthode de Kirchoff. Et on définit une nouvelle variable complexe Γ par:

$$\Gamma = \log \mu \frac{U}{\frac{df}{dz}} = \log \mu \frac{U}{u - iv} = \log \frac{U}{q} + i\theta$$

Où $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$ et q , θ ont été définies par le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale respectivement.

La propriété de cette variable: c'est que sa partie réelle est constante sur chacune des surfaces libres et sa partie imaginaire est constante sur chaque partie droite de la paroi rigide. Alors le domaine de l'écoulement dans le plan physique est transformé en un polygone dans le plan Γ .

Sous ces conditions, la solution du problème est exacte. En utilisant la même procédure, le bord du fluide est représenté par une figure droite d'un autre plan d'une certaine variable complexe f . D'après le théorème de Schwratz-Christoffel, il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi-plan d'un autre plan.

Une autre transformation met en correspondance la région indiquée du plan Γ , ainsi que celle du plan f sur la moitié inférieure du plan d'une certaine variable complexe β .

Finalement, on trouve une relation entre Γ et f , à partir de cette dernière, on trouve une expression de f en fonction de z qui est obtenue par intégration.

3.2 Formulation du problème

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre où les effets de gravité et de tension de surface sont négligés. Et comme axes de coordonnées, on prend la paroi AB sur l'axe $x'ox$ et la paroi BC sur l'axe $y'oy$. On suppose que l'écoulement à l'infini est uniforme de vitesse U et d'amplitude H voir figure 1.

On note par $\xi = u - iv$, où (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction de x et y respectivement et par $f = \varphi + i\psi$ la fonction potentielle où φ et ψ désignent respectivement la vitesse potentielle et la fonction de courant.

On suppose que la pression p et la densité ρ du fluide sont constantes sur la surface libre. Les conditions sont données par l'équation de Bernoulli:

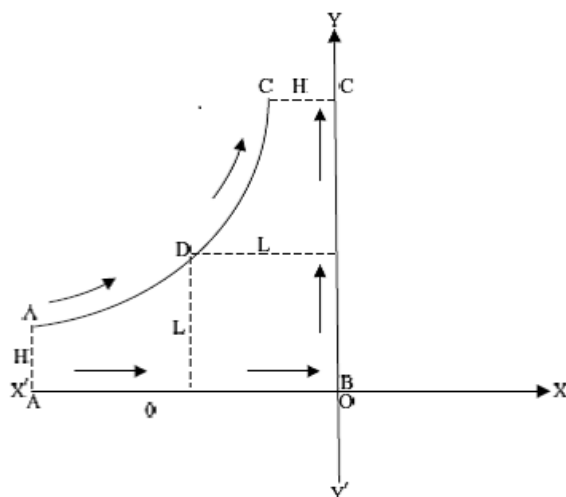


Figure 3.2.1 : Plan Z

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = cts$$

Où q est le module de la vitesse de l'écoulement. L'équation (2-1) implique que la vitesse est

constante sur la surface libre et (2-2) devient:

$$q^2 = cts$$

3.3 Résolution du problème

De la transformation (2-1), on a:

$$\Gamma = \log \frac{U}{q} + i\theta$$

Par cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable z se transforme en une bande semi-infinie dans le plan Γ [Fig.2].

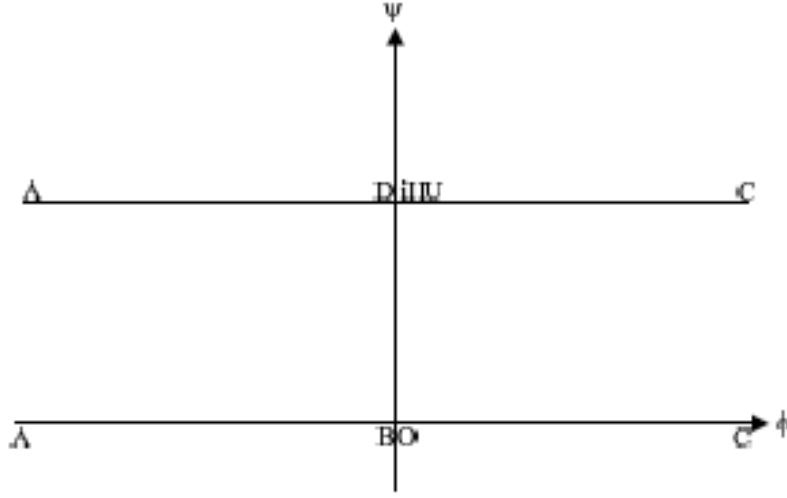


Figure 3.3.1 : Plan f

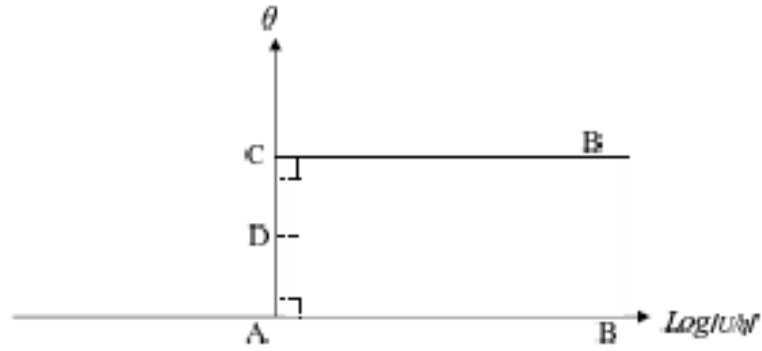


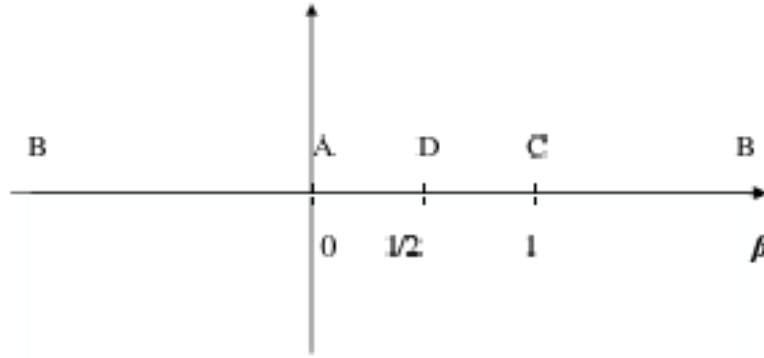
Figure 3.3.2 : Plan Γ

Nous choisissons $\varphi = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$, $\psi = 0$ sur la ligne ABC et $\psi = HU$ sur la ligne de courant AC [Fig.3].

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Γ au demi-plan inférieur d'un autre plan complexe β est donnée par le théorème de Schwartz-Christoffel en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement.

On choisit $A = 0$, $C = 1$ et B à l'infini sur le plan β [Fig .4], on a alors:

$$\frac{d\Gamma}{d} = A\sqrt{\beta(\beta - 1)}$$


 Figure 3.3.3 : Plan β

Par intégration, on trouve:

$$\Gamma = A \int \sqrt{\beta(\beta - 1)} d\beta + B$$

En faisant le changement de variable $\gamma = 2\beta - 1$ dans (2-4) on obtient:

$$\Gamma = A \int \frac{d\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)}} + B$$

D'où

$$\Gamma = A \arg \cosh(2\beta - 1) + B$$

Où A et B sont des constantes à déterminer.

Pour cette détermination, on a:

1. Pour $\beta = 1$, $\Gamma = i\frac{\pi}{2}$, et l'équation (2-5) donne: $B = i\frac{\pi}{2}$

En substituant la valeur de B dans l'équation (2-5), on trouve:

$$\beta = \frac{1}{2} \left[1 + \cosh \left(\frac{\Gamma - i\frac{\pi}{2}}{A} \right) \right]$$

2. Pour $\Gamma = 0$, $\beta = 0$, on obtient $A = -\frac{1}{2}$

En substituant la valeur de A dans l'équation (2-6), on obtient:

$$\beta = \frac{1}{2} [1 + \cosh 2\Gamma] = \sinh^2 \Gamma$$

On cherche maintenant, une relation entre f et β qui transforme l'intérieur de la bande infinie du plan f vers le demi-plan inférieur du plan β .

En faisant la correspondance entre les points A , C et B définis sur les deux plans.

On utilise encore, le théorème de Schwartz-Christoffel, on trouve:

$$\frac{df}{d\beta} = A_1(\beta - 1)^{-1}\beta^{-1}$$

Par intégration, on trouve:

$$f = A_1 \int (\beta - 1)^{-1}\beta^{-1} d\beta + B_1$$

En faisant le changement de variable $\gamma = 2\beta - 1$ dans (2-8), on obtient:

$$f = A_1 \int \frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} + B_1$$

D'où

$$f = \frac{A_1}{2} \log \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right) + B_1$$

On détermine les constantes A_1 et B_1 :

1. Pour $f = 0$, $\beta = \infty$, et de l'équation (2-9), on a:

$$0 = \frac{A_1}{2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right) + B_1$$

alors: $B_1 = 0$.

En substituant la valeur de B_1 dans l'équation (2-9), on aura:

$$f = \frac{A_1}{2} \log \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)$$

2. Pour $f = iHU$, $\beta = \frac{1}{2}$, l'équation (2-10) donne: $A_1 = \frac{2HU}{\pi}$

En substituant la valeur de A_1 dans l'équation (2-10), on obtient:

$$f = \frac{HU}{\pi} \log \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)$$

Alors:

$$\beta = \frac{1}{1 - \exp(\frac{\pi}{HU})}$$

Et on a:

$$\beta = -\sinh^2 \Gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\exp 2\Gamma + \exp -2\Gamma}{2} \right)$$

En substituant (2-3) dans (2-13), on trouve:

$$\beta = -\frac{1}{4} \left(2 - U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 + \frac{1}{U^2} \left(\frac{df}{dz} \right)^2 \right)$$

On pose $y = U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2$

, l'équation (2-14) devient:

$$y^2 - 2(1 - 2\beta)y + 1 = 0.$$

La solution de cette équation est:

$$y = U^2 \mu dz$$

df ¶2

$$y = U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = (1 - 2\beta) \pm i\sqrt{1 - (1 - 2\beta)^2}.$$

31

Lorsque $\beta = \frac{1}{2}$, on a: $U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = i$.

Alors, on prend le signe positif de la racine dans la solution:

$$U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = (1 - 2\beta) + i\sqrt{1 - (1 - 2\beta)^2}.$$

Après la résolution de cette équation, on obtient:

$$U \frac{dz}{df} = \sqrt{1 - \beta} + i\beta \quad U \frac{dz}{df} = -\sqrt{1 - \beta} - i\beta$$

$$U \frac{dz}{df} = \sqrt{1 - \beta} - i\beta \quad U \frac{dz}{df} = -\sqrt{1 - \beta} + i\beta$$

Et comme

$$U \frac{dz}{df} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lorsque} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

On choisit:

$$U \frac{dz}{df} = \sqrt{1 - \beta} + i\beta$$

Au d'autre part, on a:

$$U \frac{dz}{d\beta} = \frac{dz}{df} \frac{df}{d\beta} = \frac{-HU}{\pi} \left(\frac{1}{\beta\sqrt{1 - \beta}} + i \frac{1}{(\beta - 1)\sqrt{\beta}} \right)$$

Pour faciliter l'intégration, on divise le domaine $[0, 1]$ du plan β en deux parties: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, et on intègre l'équation (2-16) seulement sur l'intervale $[0, \frac{1}{2}]$, puis, on généralise la solution sur l'intervale $[0, 1]$.

Alors (2-16) devient:

$$z - z_0 = \frac{-H}{\pi} \left(\int_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\sqrt{1-t}} dt + i \int_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt \right)$$

Après des calculs simples, on trouve:

$$\begin{aligned} z - z_0 = & \frac{-H}{\pi} \left(\log \left(\frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \\ & + i \frac{-H}{\pi} \left(\log \left(\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

Où z_0 est la constante d'intégration:

On choisit z_0 au point où $\beta = \frac{1}{2}$.

Alors $z_0 = -L + iL$.

En substituant la valeur de z_0 dans (2-17).

Alors la forme de la surface libre est donnée par l'équation paramétrique suivante:

$$\begin{cases} x = -L - \frac{H}{\pi} \left(\log \left(\frac{1+\sqrt{1-\beta}}{1-\sqrt{1-\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \\ y = L - \frac{H}{\pi} \left(\log \left(\frac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

L'amplitude du jet à l'infini est donnée par:

$$H = \lim_{\beta \rightarrow 0} y(\beta) = L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})$$

Alors:

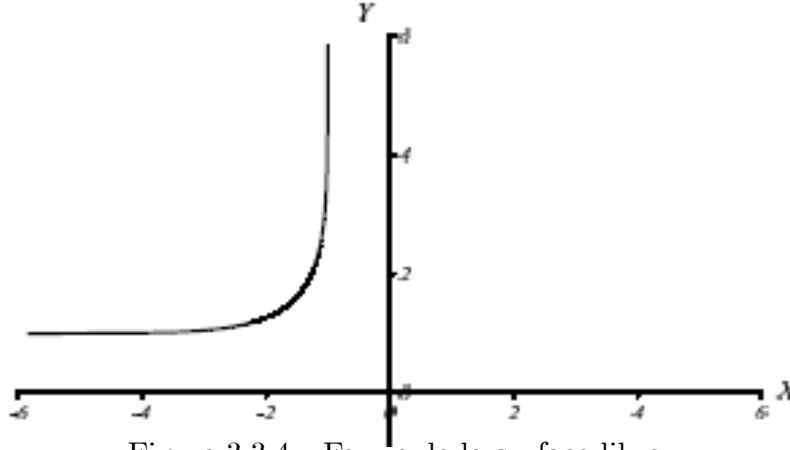


Figure 3.3.4 : Forme de la surface libre

$$\frac{L}{H} = \frac{\pi + \log(1 + \sqrt{2})}{\pi} = 1.56$$

Telle que la valeur:

$$C = \frac{H}{L} = 0.64$$

représente le degré de contraction de l'écoulement.

On pose:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{H} \\ \bar{y} = \frac{y}{H} \end{cases}$$

Et d'après (2-20), l'équation paramétrique de la surface libre (2-18) devient:

$$\begin{cases} \bar{x} = -1 - \frac{C}{\pi} \left(\log \left(\frac{1+\sqrt{1-\beta}}{1-\sqrt{1-\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \\ \bar{y} = 1 - \frac{C}{\pi} \left(\log \left(\frac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}} \right) + 2 \log(1 + \sqrt{2}) \right) \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

Le graphe de (2-22) et (2-23) est représenté par la figure [5].

Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire, est d'étudier un problème d'Euler d'un écoulement devant une plaque verticale à l'horizontale. Dans cette étude, on a trouvé la solution exacte de ce problème si on

néglige l'effet de tension de surface

De plus, pour un futur travail, on peut considérer autre effets qui donne à ce projet une généralisation. Ces qui est complexe et compliqué vu ses problèmes qui ne sont pas tous résolus à ce jour , comme celui de ce mémoire mais en

variant l'angle entre la plaque et l'horizontale.

Bibliographie

- [1] P.Fichou. Mécanique des fluides, Promotion IGE,(2002), 7-8.
- [2] Candel S. Mécanique des fluides, Dunod, 1990.
- [3] Mécanique des fluides I (Cours et Applications)mdf-sarr page 4 dans6.
- [4] G. K. Batchlors. An introduction to fluid dynamics, Cambridge, 1967.
- [5] G. Birkhoff and E. H. Zarantonello. Jets, wakes and cavities, New York, 1957.
- [6] M. Damou. Mécanique des fluides, (O.P.U), Septembre 1993.