Remerciements

En premier lieu je remercie DIEU pour m'avoir guidé et donner la force pour la finalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier mes professeurs: prof. L. Zedam et Mr S. Milles pour les conseils prodigués, pour ses soutiens et avec qui j'ai beaucoup appris.

Je remercie aussi les membres de jury de mémoire pour avoir voulu participer à ce jury

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de cet humble travail.

Je tiens aussi à remercier tout mes amis pour leur soutien et encouragement.

Enfin mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents à mon frère Hichem, à qui je dédie ce travail.

Merci

Table des matières

Introduction

La notion de norme triangulaire a été introduite par MENGER [15], et les axiomes caractérisant cet opérateur proviennent des travaux de SCHWEIZER et SKLAR [19].

Ces deux opérateurs, t-norme et t-conorme, peuvent également être utilisés comme des généralisations des connecteurs de la logique booléenne pour la logique multivalente.

En 1996 YAGER et RYBALOV [20] proposent un nouvel opérateur d'agrégation, appelé **uninorme** U. Cet opérateur est une généralisation de t-norme et t-conorme, dans la mesure où l'élément neutre e est choisi dans l'intervalle $[0, 1]$ d'une manière libre.

Uninorme présente une sorte spéciale d'opérations aggregatives associatives. Elle devient particulièrement intéressante du point de vue théorique à cause de sa structure, qui est une combinaison spéciale d'une t-norme et d'une t-conorme.

C'est bien connu qu' une **uninorme** U peut être conjonctive ou disjonctive quand, respectivement, $U(1, 0) = 0$ ou $U(1, 0) = 1$.

Ce fait permet de les utiliser aussi comme des connecteurs logiques. Dans ce sens, des fonctions d'implications (floues) ont été définies à partir d'**uninormes** par les deux manières suivantes:

1. Strong implication (ou S-implication) définie par $I(x, y) = U(N(x), y)$ pour chaque uninorme disjonctive U et n'importe quelle négation N.

2. Implication résiduelle (ou R-implication) définie par:

$$I(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leq y\}$$

   pour n'importe quelle uninorme U tel que $U(x, 0) = 0$ pour tout $x < 1$.

Ce mémoire est divisé en trois chapiters:

Dans le premier chapitre nous allons présenter les notions relatives aux t-normes et t-conormes, ainsi que les propriétés fondamentales et quelque exemples d'explications.

Dans le deuxiéme chapitre nous allons voir deux applications assoiciatives monotonnes et commutatives qui généralisent t-norme et t-conorme, ces deux applications sont **uninorme** et nullnorme, la structure de chaucune d'elle se caractérise par une combinaison d'une t-norme et d'une t-conorme.

Les deux implications(R-implication et S-implication) d'**uninorme** feront l'objet de notre étude au dernier chapitre.

Chapitre 1

Normes et conormes triangulaires

Le terme de norme triangulaire a été introduit par Menger [15].

Ces deux opérations, t-norme et t-conorme, peuvent également être utilisées comme une généralisation des connecteurs de la logique booléenne pour la logique multivalente, dans ce chapitre on intéresse plus beaucoup sur les t-normes, mais il faut faire attention que les t-normes sont des duales de les t-normes.

1.1 Notions de base et exemples

Nous présentons tout d'abord les définitions est quelques propriétés des t-normes et t-conormes que nous utiliserons dans la suite. Ainsi nous donnons quelques exemples intéressants.

1.1.1 Définitions générales

Définition 1.1.1

Une négation forte est une application $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(N_1) $N(0) = 1$

(N_2) $N(N(x)) = x \qquad \forall x \in [0,1]$

(N_3) $N(x) < N(y)$ *si* $y < x$ *et* $x, y \in [0,1]$

(N_4) N *est continue*

Exemple 1.1.1

$\forall\ x \in [0,1]\ \ N(x) = 1 - x$ *est une négation forte*

Remarque 1.1.1

De (N_1) et (N_2) on a $N(1) = 0$

Définition 1.1.2

Une norme triangulaire, t-norme, est une opération binaire sur l'intervalle $[0,1]$ *c'est-à-dire:une application* $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, *telle que pour tout* x, y *et* z *dans l'intervalle* $[0,1]$ *les quatre axiomes suivants sont satisfaits :*

(P_1) $T(x,y) = T(y,x)$, *Commutativité;*

(P_2) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$, *Associativité;*

(P_3) $T(x,y) \leq T(x,z)$ *si* $y \leq z$, *Monotonie à droite;*

(P_4) $T(x,1) = x$, *Elément neutre*

Proposition 1.1.1

La monotonie d'une t-norme T *dans sa seconde composante décrite par (P_3), avec la commutativité, équivalente à la monotonie dans les deux composantes, c'est-à-dire :*

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \text{ si } x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2$$

Preuve.

En effet, si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$ alors on a :

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leq T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2)$$

D'où le résultat ■

Remarque 1.1.2

Pour toute t-norme T on a les conditions de limite suivantes :

$T(x, 0) = T(0, x) = 0, \qquad \forall x \in [0, 1];$

$T(1, x) = T(x, 1) = x, \qquad \forall\ x \in [0, 1]$

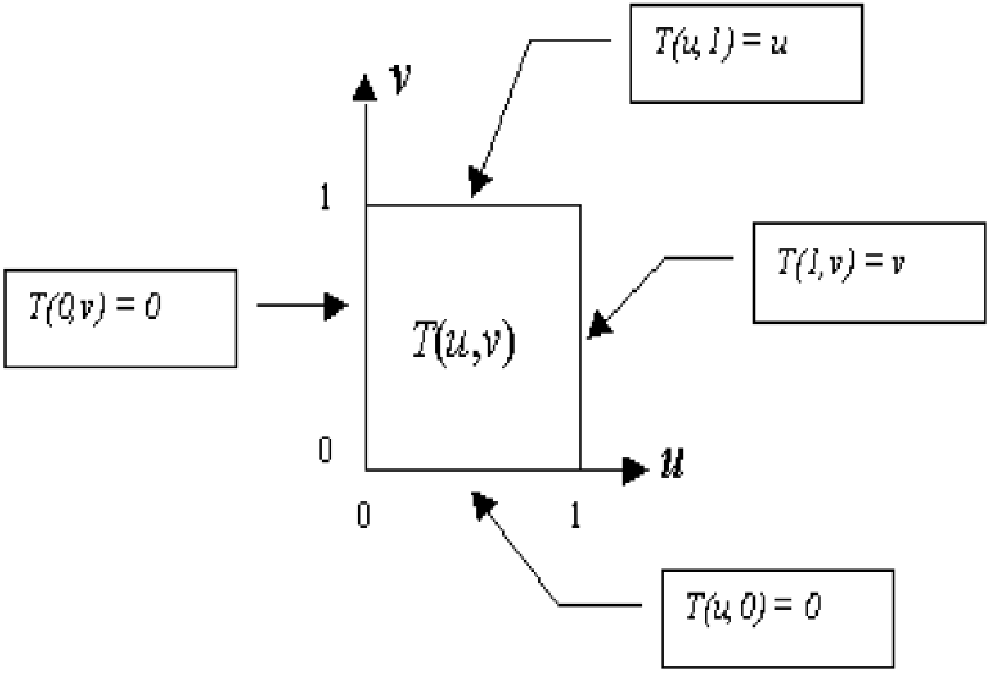

Figure 1.1.1 : ***Définition d'une t-norme sur les bornes de carré d'unité***

Définition 1.1.3

Une t-conorme, est une opération binaire sur l'intervalle d'unité c'est-à-dire:

Une application $S : [0;1]^2 \longrightarrow [0;1]$*, telle que pour tout* x, y *et* z *dans*

l'intervalle $[0,1]$ S *est commutative associative est monotone et posséde* 0 *comme un élément neutre* $(S(x,0) = 0 \ \forall x \in [0,1])$

Remarque 1.1.3

1- *Toute t-conorme* S *satisfait les deux conditions aux limites :*

i. $\forall\ x \in [0,1]$ $\ S(x,0) = S(0,x) = x$*, grâce à la commutativité et la propriété* (S_4)

ii. $\forall\ x \in [0,1]$ $\ S(1,x) = S(x,1) = 1$

2- T *est une opération binaire interne associative et commutative et* 1 *un élément neutre alors* $([0,1], T(x,y), 1)$ *Est un monoïde commutatif*

De même pour une t-conorme S *on a :* $([0,1], S, 0)$ *est un monoïde commutatif*

Définition 1.1.4

Une t-norme T *est archimédienne si :*

(P_5 *)* T *est continue*

(P_6 *)* $T(x,x) < x$, $\forall\ x \in [0,1]$

De plus une t-norme archimédienne T *est stricte si :*

(P_7 *)* $T(x,y) < T(z,t)$ *si* $x < z$ *et* $y < t \ \forall\ x, y, z, t \in [0,1]$

Définition 1.1.5

Une t-conorme S *est archimédienne si :*

(S_5 *)* S *est continue*

(S_6 *)* $S(x,x) > x, \forall\ x \in [0,1]$

De plus une t-conorme archimédienne S *est stricte si :*

(S_7 *)* $S(x,y) < S(z,t)$ *si* $x < z$ *et* $y < t \ \forall\ x, y, z, t \in [0,1]$

1.1.2 t-normes et t-conormes de base

Il existe énormément de normes trianguilaires(en réalité une infinité), mais nous présentons dans cette sous section les quatre t-normes , et leurs duales, dites de base à partir desquelles d'autre peuvent être construite

La dualité entre une t-norme et t-conorme

La dualité est un outil de construire une t-norme à partir d'une t-conorme donnée, ou bien construire une t-conorme à partir d'une t-norme donnée

Proposition 1.1.2

Une fonction $S : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *est une t-conorme si et seulement si elle existe une t-norme* T *telle que pour tout* $(x,y) \in [0,1]^2$:

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$$

Preuve.

Tout d'abord on va vérfier que $S(x,y)$ est bien définie on a:

Si $(x,y) \in [0,1]^2$alors $(-x,-y) \in [-1,0]^2$donc $(1-x,1-y) \in [0,1]^2$ d'autre part:

$$\begin{aligned} T(1-x,1-y) &\in [0,1] \\ &\Longrightarrow -T(1-x,1-y) \in [-1,0] \\ &\Longrightarrow 1-T(1-x,1-y) = S(x,y) \in [0,1] \end{aligned}$$

Et on verifie que l'image est unique:

Soient $x_1, y_1 \in [0,1]$ et supposons que $S(x_1,y_1) = \alpha_1$ et $S(x_1,y_1) = \alpha_2$ alors

$1-T(1-x_1,1-y_1) = \alpha_1$et $1-T(1-x_1,1-y_1) = \alpha_2$ comme l'image de $T(1-x_1,1-y_1)$ est unique alors $\alpha_1 = \alpha_2$ d'où l'unicité

Maintenant on va vérifier les quatre axiomes d'une t-conorme:

On a : $S(y,x) = 1-T(1-y,1-x) = 1-T(1-x,1-y) = S(x,y)$ d'ou on a la commutativité

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } S(x,S(y,z)) &= S(x, 1-T(1-y,1-z)) \\ &= 1-T(1-x, T(1-y,1-z)) = 1-T(T(1-x,1-y), 1-z) \\ &= S(1-T(1-x,1-y), z) = S(S(x,y),z) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Si $y \leq z$ alors $1 - z \leq 1 - y$ donc:

$$\begin{aligned} T(1-x, 1-z) &\leq T(1-x, 1-y) \\ &\Longrightarrow -T(1-x, 1-y) \leq -T(1-x, 1-z) \\ &\Longrightarrow S(x, y) \leq S(x, z) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $S(x, 0) = 1 - T(1 - x, 1) = x$ ∎

Remarque 1.1.4

Une généralisation de la proposition(1.1.2) dit que:
Si T est une t-norme et N est une négation forte, alors $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ est une t-conorme, et réciproquement $T(x, y) = N(S(N(x), S(y)))$, c'est-à-dire:
S et T sont N-duales l'une de l'autre

Exemple 1.1.2

Il existe plusieurs exemples sur les t-normes mais les quatre t-normes les plus utilisées sont : T_M (Zadah t-norme ou minimum), T_D(produit drastique) et T_P (produit ou probabiliste) et T_L(t-norme de Lukasiewie), à partir de ces qautre t-normes on donne qautre t-conormes de base qui sont:S_M(t-conormeZadah ou maximum) et S_D(produit drastique), S_P(probabiliste), S_L(t-conorme Lukasiewie)

Les t-normes de base et leurs duales sont classées dans le tableau suivant:

Nom	*T-norme*	*Notation*	$\underset{\longleftrightarrow}{N}$	*Duale de T (t-conorme)*	*Notation*
Zadah	$\min(x,y)$	T_M	$1-x$	$\max(x,y)$	S_M
Probabiliste	$x.y$	T_P	$1-x$	$x+y-x.y$	S_P
Lukasiewie	$\max(x+y-1,0)$	T_L	$1-x$	$\min(x+y,1)$	S_L
Weber	$\begin{cases} 0 \;\; si \;\; (x,y) \in [0,1[^2 \\ \min(x,y) \qquad sinon \end{cases}$	T_D	$1-x$	$\begin{cases} 1 \;\; si \;\; (x,y) \in [0,1[^2 \\ \max(x,y) \qquad sinon \end{cases}$	S_D

1.2 Propriétés des t-normes et t-conormes

Dans cette section on va voir quelques propriétés des t-normes et des t-conormes

1.2.1 Propriétés des normes triangulaires de base

Les propriétés de normes triangulaires de base sont trés importantes car à partir desquelles on peut construire des autres normes trinagulaires

Proposition 1.2.1

Pour toute t-norme T on a :

$$T_D \leq T \leq T_M$$

(T_D est la plus petite t-norme et T_M est la plus grande t-norme)

Preuve.

Soit T une t-norme alors :

$$\begin{aligned} T(x,y) &\leq T(x,1) = x \text{ et} \\ T(x,y) &= T(y,x) \leq T(y,1) = y \\ \text{Alors } T(x,y) &\leq \min(x,y) = T_M \end{aligned}$$

Il reste de montrer que pour toute t-norme T

$$T_D(x,y) \leq T(x,y)$$

Soit T une norme trianguilaire alors

$$\begin{aligned}
\text{Si } x, y &\in [0,1[\text{ alors } T_D(x,y) = 0 \text{ d'où} \\
T_D(x,y) &= 0 \leq T(x,y) \\
\text{Sinon,par exemple } x &= 1, T_D(x,y) = \min(x,y) = y = T(x,y)
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a : $T_D(x,y) \leq T(x,y)$

Finalement $T_D \leq T \leq T_M$ ■

Proposition 1.2.2

$$\forall\ x, y \in [0,1]\ T_L(x,y) \leq T_P(x,y)$$

Preuve.

1. *Si* $T_L(x,y) = 0 \Longrightarrow T_L(x,y) \leq T_P(x,y)$

2. *Si* $T_L(x,y) \neq 0 \Longrightarrow T_L(x,y) = x + y - 1 \quad (x + y - 1 > 0)$

   $T_P(x,y) - T_L(x,y) = (x-1).(y-1) \geq 0$

D'où pour tout x, y *de* $[0,1]$ *on a* $T_P(x,y) \geq T_L(x,y)$ ■

Remarque 1.2.1

1. *Pour toute t-conorme* S *on a* $S_M \leq S \leq S_D$ *car:*

$$\begin{aligned}
S_M &= 1 - T_M(1-x, 1-y) \ \ et \\
S_D &= 1 - T_D(1-x, 1-y)
\end{aligned}$$

2. *Pour tout x,y* $\in [0,1]$ *on a:*

$$T_D(x,y) \leq T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y) \leq S_M(x,y) \leq S_P(x,y) \leq S_L(x,y) \leq S_D(x,y)$$

Lemme 1.2.1

$T(x,x)$ *est dite le diagonal d'une t-norme* T*, il a les propriétés suivantes:*

1. $T(x,x)$ *est croissant,*

2. $\forall\ x \in [0,1] \qquad T(x,x) \leq x$

Preuve.

1. Soit $(x, y) \in [0,1]^2$ supposons que $x \leq y$ de la proposition (1.1.1) on trouve que $T(x,x) \leq T(y,y)$ d'où la croissance
2. Soit $x \in [0,1]$ alors $T(x,x) \leq T(1,x) = x$.

D'où la preuve et compléte ■

Proposition 1.2.3

T_M est la seule t-norme idempotente c'est-à-dire la seule t-norme qui vérifiée:

$$T(x,x) = x \qquad\qquad \forall\, x \in [0,1]$$

Preuve.

Il est claire que T_M est une t-norme idempotente il reste de démontrer l'unicité.
On suppose qu'il existe une t-norme T idempotente soit $(x,y) \in [0,1]^2$
(supposons que $y \leq x$) alors :

$$y = T(y,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y) = y$$

D'où $T(x,y) = T_M(x,y)$ ■

Remarque 1.2.2

S_M est la seule t-conorme idempotente(car $S_M = 1 - T_M(1-x, 1-y)$)

1.2.2 Générateurs additifs et multiplicatifs

Théorème 1.2.1 *[13]*

Toute t-norme archimédienne peut s'écrire:

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$$

Où $f : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$ *est une fonction continue et strictement décroissante et* $f^{(-1)}(x)$ *est le pseudo-inverse de* f *définie par:*

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, f(1)] \\ f^{-1}(x) & si\ x \in [f(1), f(0)] \\ 0 & si\ x \in [f(0), +\infty[\end{cases}$$

La fonction f *est appelée un générateur additif de* T

Analogue, toute t-conorme archimédienne S *peut s'écrire :*

$$S(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$$

Où $g : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$ *est une fonction continue et strictement croissante et* $g^{(-1)}(x)$ *est le pseudo-inverse de* g *définie par:*

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, g(0)] \\ g^{-1}(x) & si\ x \in [g(0), g(1)] \\ 1 & si\ x \in [g(1), +\infty[\end{cases}$$

La fonction g *est appelée un générateur additif de* S

Exemple 1.2.1

1. *Si* $f(x) = 1 - x$ *on obtient la t-norme* T_L
2. *Si* $f(x) = -\log(x)$ *on obtient la t-norme* T_P
3. *Si* $g(x) = x$ *on obtient la t-conorme* S_L
4. *Si* $g(x) = -\log(1 - x)$ *on obtient la t-conorme* S_P

Remarque 1.2.3

1. *La t-norme T_M n'a pas de générateur additif car T_M n'est pas archimédienne*

2. *La t-conorme S_M n'a pas de générateur additif car S_M n'est pas archimédienne*

Proposition 1.2.4
Soit T une t-norme archimédienne, S la t-conorme duale de T
si $f : [0,1] \to [0,+\infty[$ est un générateur additif de T alors la fonction
$g(x) = f(1-x)$ est un générateur de S

Preuve.
Soit T une t-norme archimédienne et f son générateur additif alors:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f^{(-1)}(f(x)+f(y)) \text{ d'autre part} \\ S(x,y) &= 1-T(1-x,1-y) \text{ alors} \\ S(x,y) &= 1-f^{(-1)}(f(1-x)+f(1-y)) \\ &= g^{(-1)}(g(x)+g(y)) \end{aligned}$$

De plus il est claire que:

1. $f : [0,1] \to [0,+\infty[\Longrightarrow g(x) = f(1-t) : [0,1] \to [0,+\infty[$

2. $f(x)$ est continue $\Longrightarrow g(x) = f(1-t)$ est continue

3. $f(x)$ est décroissante$\Longrightarrow g(x) = f(1-t)$ et croissante

Finalement $g(x) = f(1-t)$ est un générateur additif de S ■

Définition 1.2.1

Soit T une t-norme archimédienne, alors T peut s'écrire:

$$T(x,y) = \theta^{(-1)}(\theta(x).\theta(y))$$

tel que: $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\theta(1) = 1$ et θ est une fonction continue strictement croissante, θ est appelé un générateur multiplicatif de T

Soit S une t-conorme archimédienne et continue, alors S peut s'écrire:

$$S(x,y) = \varphi^{(-1)}(\varphi(x).\varphi(y))$$

telle que:$\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\varphi(0) = 1$ et φ est une fonction continue strictement décroissante, φ est appelé un générateur multiplicatif de S

Proposition 1.2.5

Pour tout générateur additif f d'une t-nomre T on peut défnir son correspandant générateur multiplicatif θ tels que:

$$\theta(x) = \exp^{-f(x)}$$

Preuve.

Soit f est un générateur additif de T on a:

$\theta(x) = \exp^{-f(x)} \Longrightarrow \theta^{(-1)}(x) = f^{(-1)}(-\ln(x))$ alors:

$$\begin{aligned}
\theta^{(-1)}(\theta(x).\theta(y)) &= f^{(-1)}\left(-\ln\left(\exp^{-f(x)}\exp^{-f(y)}\right)\right) \\
&= f^{(-1)}\left(-\ln\left(\exp^{-(f(x)+f(y))}\right)\right) \\
&= f^{(-1)}(f(x)+f(y)) \\
&= T(x,y)
\end{aligned}$$

D'autre part:

$f : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty[\Longrightarrow \theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

f et exp sont continus $\Longrightarrow \theta$ est continu

Soient x et y deux éléments de $[0,1]$ alors

$$\begin{aligned} \text{si } x &\leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x) \\ &\Longrightarrow -f(x) \leq -f(y) \\ &\Longrightarrow \exp^{-f(x)} = \theta(x) \leq \exp^{-f(y)} = \theta(y) \end{aligned}$$

D'où θ est croissant, de plus

$\theta(1) = \exp^{-f(1)} = \exp(0) = 1$

Finalement θ est un générateur multiplicatif de T ■

Remarque 1.2.4

Si g est un générateur additif d'une t-conomre S alors $\varphi(x) = \exp^{-g(x)}$ est un générateur multiplicatif de S

1.3 Normes triangulaires paramétrées

Nous présentons dans cette section quelques familles de normes triangulaires et des informations liées a ces familles, cette section sera décomposée en deux sous-sections l'une sera sur les familles des t-normes et l'autre sera sur leurs duales

1.3.1 t-normes paramétrées

Une t-norme paramétrée est une famille de t-normes, dans laquelle un paramétre λ et au moins un t-norme de base jouent un role trés important dans la construction de cette t-norme, c'est-à-dire chaque valeur de λ est associée à une t-norme de cette famille.

1. t-norme d'Aczél-Alsina

   La t-norme d'Aczél-Alsina, notée par $T_{A\,A_\lambda}(x,y)$, est définie par:

$$T_{A\,A_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_{D(x,y)} & \text{si } \lambda = 0 \\ T_M(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \exp\left(-\left((-\log x)^\lambda + (-\log y)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) & \text{si } \lambda \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Les fonctions génératrices de $T_{AA_\lambda}(x,y)$ sont définies par:

$f(x) = (-\log x)^\lambda$ si additive

$\theta(x) = \exp\left(-(-\log x)^\lambda\right)$ si multiplicative

2. t-norme de Dombi

La t-norme de Dombi, notée par $T_{D_\lambda}(x,y)$ est définie par:

$$T_{D_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_{D(x,y)} & \text{si } \lambda = 0 \\ T_M(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ 1 + \left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda + \left(\frac{1-y}{y}\right)^\lambda\right) & \text{si } \lambda \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

Les fonctions génératrices de $T_{D_\lambda}(x,y)$ sont définies par:

$f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda$ si additive

$\theta(x) = \exp\left(-\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda\right)$ si multiplicative

3. t-norme de Dubois-Prade

La t-norme de Dubois-Prade, notée par T_{DP_λ}est définie par:

$$T_{DP_\lambda}(x,y) = \frac{x.y}{\max(x,y,\lambda)}, \lambda \in [0,1]$$

Cette famille a ceci de particulier qu'elle n'a pas de fonction génératrice additive ou multiplicative

4. t-norme de Frank

La t-norme de Frank , notée par T_{F_λ}est définie par:

$$T_{F_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 1 \\ T_{L(x,y)} & \text{si } \lambda = \infty \\ \log_\lambda\left(1 + \dfrac{(\lambda^x - 1).(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1}\right) & \text{si } \lambda \in \left]0,1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

Les fonctions génératrices de $T_{D_\lambda}(x,y)$ sont définies par:

$$f(x)=\begin{cases} -\log x & \text{si } \lambda=1 \\ 1-x & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\log\frac{\lambda-1}{\lambda^x-1} & \text{si } \lambda\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{cases} \quad \text{si additive}$$

$$\theta(x)=\begin{cases} x & \text{si } \lambda=1 \\ \exp(x-1) & \text{si } \lambda=\infty \\ \frac{\lambda^x-1}{\lambda-1} & \text{si } \lambda\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{cases} \quad \text{si multiplicative}$$

5. ## t-norme de Hamacher

La t-norme de Hamacher, notée par T_{H_λ}, est définie par:

$$T_{H_\lambda}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 0 & \text{si } \lambda=x=y=0 \\ \frac{x.y}{\lambda+(1-\lambda).(x+y-xy)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda\in\left[0,+\infty\right[$

On voit immédiatement que pour $\lambda=1$, On obtient T_P

Les fonctions génératrices de T_{H_λ} sont définies par:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{si } \lambda=0 \\ \log\left(\frac{\lambda+(1-\lambda)x}{x}\right) & \text{si } \lambda\in\left]0,+\infty\right[\end{cases} \quad \text{si additive}$$

$$\theta(x)=\begin{cases} \exp\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } \lambda=0 \\ \frac{x}{\lambda+(1-\lambda)x} & \text{si } \lambda\in\left]0,+\infty\right[\end{cases} \quad \text{si multiplicative}$$

6. ## t-norme de Mayor-Torrens

La t-norme de Mayor-Torrens, notée par T_{MT_λ}, est définie par:

$$T_{MT_\lambda}=\begin{cases} \max(x+y-\lambda,0) & \text{si } \lambda\in\left]0,1\right] \text{ et } (x,y)\in[0,\lambda]^2 \\ T_M(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda\in[0,1]$

7. t-norme de Schweizer-Sklar

La t-norme de Schweizer-Sklar, notée par T_{SS_λ}, est définie par:

$$T_{SS_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{si } \lambda = -\infty \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_D(x,y) & \text{si } \lambda = +\infty \\ \max\left(x^\lambda + y^\lambda - 1, 0\right) & \text{si } \lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

Où $\lambda \in \left]-\infty, +\infty\right[$

Les fonctions génératrices de T_{H_λ} sont définies par:

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1-x^\lambda}{\lambda} & \text{si } \lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\end{cases} \qquad \text{si additive}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{si } \lambda = 0 \\ \exp \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\end{cases} \qquad \text{si multiplicative}$$

8. t-norme de Weber-Sugeno

La t-norme de Weber-Sugeno, notée par T_{WS_λ}, est définie par:

$$T_{WS_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda = -1 \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = +\infty \\ \max\left(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}, 0\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda \in \left]-1, +\infty\right[$

Les fonctions génératrices de $T_{W\,S_\lambda}(x,y)$ sont définies par:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } \lambda=0 \\ -\log x & \text{si } \lambda=+\infty \\ 1-\frac{\log 1+\lambda x}{\log \lambda+1} & \text{si } \lambda\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\end{cases} \qquad \text{si additive}$$

$$\theta(x)=\begin{cases} \exp(1-x) & \text{si } \lambda=0 \\ x & \text{si } \lambda=+\infty \\ \exp\left(\frac{\log 1+\lambda x}{\log \lambda+1}-1\right) & \text{si } \lambda\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\end{cases} \qquad \text{si multiplicative}$$

9. t-norme de Yager

La t-norme de Yager, notée par T_{Y_λ}, est définie par:

$$T_{Y_\lambda}(x,y)=\begin{cases} T_{D(x,y)} & \text{si } \lambda=0 \\ T_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ \max\left(1-\left((1-x)^\lambda+(1-y)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}},0\right) & \text{si } \lambda\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Où $\lambda\in[0,+\infty]$

Les fonctions génératrices de $T_{A\,A_\lambda}(x,y)$ sont définies par:

$f(x)=(1-x)^\lambda$ si additive

$\theta(x)=\exp\left(-(1-x)^\lambda\right)$ si multiplicative

1.3.2 t-conormes paramétrées

Dans la sous-section précédente on a présenté les t-normes paramétrées, dualement on va présenter dans cette sous-section les t-conormes paramétrées avec le principe de dualité

1. t-conorme d'Aczél-Alsina

La t-norme d'Aczél-Alsina, notée par $S_{A\,A_\lambda}$, est définie par:

$$S_{A\,A_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_{D(x,y)} & \text{si } \lambda=0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\exp\left(-\left(-\left(\log(1-x)\right)\right)^\lambda+\left(-\log(1-y)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) & \text{si } \lambda\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

2. t-conorme de Dombi

La t-conorme de dombi, noté par $S_{D_\lambda}(x,y)$ est définie par:

$$S_{D_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_{D(x,y)} & \text{si } \lambda=0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1+\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda+\left(\frac{y}{1-y}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda\in\,]0,+\infty[\end{cases}$$

3. t-conorme de Dubois-Prade

La t-conorme de Dubois-Prade, notée par S_{DP_λ}est définie par:

$$S_{DP_\lambda}(x,y)=1-\frac{(1-x).(1-y)}{\max((1-x),(1-y),\lambda)},\lambda\in[0,1]$$

4. t-conorme de Frank

La t-conorme de Frank , notée par S_{F_λ}est définie par:

$$S_{F_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_M(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_P(x,y) & \text{si } \lambda=1 \\ S_{L(x,y)} & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\log_\lambda\left(1+\frac{\left(\lambda^{1-x}-1\right).\left(\lambda^{1-y}-1\right)}{\lambda-1}\right) & \text{si } \lambda\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\end{cases}$$

5. t-conorme de Hamacher

La t-conorme de Hamacher, notée par S_{H_λ}, est définie par:

$$S_{H_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1 & \text{si } \lambda=0 \text{ et } x=y=1 \\ \frac{x+y-xy-(1-\lambda)\,xy}{1-(1-\lambda)\,xy} & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda\in[0,+\infty[$

On voit immédiatement que pour $\lambda=1$, On obtient S_P

6. t-connorme de Mayor-Torrens

La t-connorme de Mayor-Torrens, notée par S_{MT_λ}, est définie par:

$$S_{MT_\lambda} = \begin{cases} \min\left(x+y+\lambda-1,1\right) & \text{si} \quad \lambda \in \left]0,1\right] \text{ et } (x,y) \in [1-\lambda,1]^2 \\ S_M(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda \in [-1,+\infty]$

7. t-conorme de Schweizer-Sklar

La t-conorme de Schweizer-Sklar, notée par S_{SS_λ}, est définie par:

$$S_{SS_\lambda}(x,y) = \begin{cases} S_M(x,y) & \text{si} \ \ \lambda = -\infty \\ S_P(x,y) & \text{si} \ \ \lambda = 0 \\ S_D(x,y) & \text{si} \ \ \lambda = +\infty \\ 1 - \left(\max\left((1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda - 1, 0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Où $\lambda \in \left]-\infty,+\infty\right[$

8. t-conorme de Weber-Sugeno

La t-conorme de Weber-Sugeno, notée par S_{WS_λ}, est définie par:

$$S_{WS_\lambda}(x,y) = \begin{cases} S_P(x,y) & \text{si } \lambda = -1 \\ S_D(x,y) & \text{si } \lambda = +\infty \\ \min\left(x+y+\lambda xy, 1\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\lambda \in \left]-1,+\infty\right[$

9. t-conorme de Yager

La t-conorme de Yager, notée par S_{Y_λ}, est définie par:

$$S_{Y_\lambda}(x,y) = \begin{cases} S_{D(x,y)} & \text{si} \ \ \lambda = 0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \min\left(\left(x^\lambda + (y)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right) & \text{si } \lambda \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

Chapitre 2

Uninormes et nullnormes

La notion d'uninorme est proposée par Yager et Rybalov[20] comme un nouvel opérateur d'agrégation qui généralise t-norme et t-conorme, puis cette théorie à été dévloppée par de nombreux auteurs, nullnorme est une autre application qui généralise t-norme et t-conorme cette application a une structure spéciale qui est une combinaison d'une t-norme et t-conorme

2.1 Uninormes

Une uninorme est une opération binaire qui posséde des propriétés intéressantes, le point intéressant de l'uninorme que nous allons voir dans cette section sera la structure d'uninormes et les classes des uninormes ainsi que des propriétés de cette opération binaire.

2.1.1 La structure d'une uninorme

On va voir dans cette section queleques définitions et proprietés sur les uninormes et la structure de cette opération

Définition 2.1.1

Une uninorme est une opération binaire $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *commutative monontone et associative avec un elément neutre* e *dans l'intervalle* $[0,1]$

Remarque 2.1.1

Une uninorme est une généralisation d'une t-norme et t-conorme, une uninorme est une t-norme si $e = 1$ *et elle est une t-conorme si* $e = 0$.

Définition 2.1.2

On dit que une uninorme U *est conjonctive si* $U(0,1) = U(1,0) = 0$, *et disjonctive, si* $U(0,1) = U(1,0) = 1$

Exemple 2.1.1

Soit e *un élément de* $]0,1[$ *les deux premiéres uninormes données par* YAGER *et* RYBALOV [19] *sont:*

$$U_c = \begin{cases} \max(x,y) & si\ (x,y) \in [e,1], \\ \min(x,y) & sinon, \end{cases}$$

et

$$U_d = \begin{cases} \min(x,y) & si\ (x,y) \in [0,e], \\ \max(x,y) & sinon, \end{cases}$$

U_c *est une uninorme conjonctive et* U_d *est une uninorme disjonctive*

Proposition 2.1.1

Pour tout uninorme U *avec un élément neutre* $e \in [0,1[$,

l'opération binaire T_U *définie par:*

$$T_U(x,y) = \frac{U(ex,ey)}{e}$$

est une t-norme

Preuve.

Soit $(x, y) \in [0, 1]$

Alors:

$$T_U(x, y) = \frac{U(ex, ey)}{e} = \frac{U(ey, ex)}{e} = T_U(y, x)$$

D'où la commutativité

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} T_U(x, T_U(y, z)) &= \frac{U(ex, eT_U(y, z))}{e} = \frac{U(ex, U(ey, ez))}{e} \\ &= \frac{U\left(\frac{eU(ex, ey)}{e}, ez\right)}{e} = \frac{U(eT_U(x, y), ez)}{e} = T_U(T_U(x, y), z) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soit $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ avec $y \leq z$ on a:

$$T_U(x, y) = \frac{U(ex, ey)}{e} \leq \frac{U(ex, ez)}{e} = T_U(x, z)$$

D'où la monotonie

$$\forall x \in [0, 1] \;\; T_U(x, 1) = \frac{U(ex, e)}{e} = \frac{ex}{e} = x$$

D'où l'élément neutre ■

Proposition 2.1.2

Pour toute uninorme U avec un élément neutre $e \in]0, 1[$, l'opération binaire S_U définie par:

$$S_U(x, y) = \frac{U(e + (1 - e)x, e + (1 - e)y) - e}{1 - e}$$

est une t-conorme

Preuve.

Soit $(x, y) \in [0, 1]$

Alors:

$$\begin{aligned} S_U(x, y) &= \frac{U(e + (1 - e)x, e + (1 - e)y) - e}{1 - e} \\ &= \frac{U(e + (1 - e)y, e + (1 - e)x) - e}{1 - e} = S_U(y, x) \end{aligned}$$

D'où la commutativité

D'autre part:

$$\begin{aligned} S_U(x, S_U(y,z)) &= S_U\left(x, \frac{U(e+(1-e)y, e+(1-e)z)-e}{1-e}\right) \\ &= \frac{U(e+(1-e)x, U(e+(1-e)y, e+(1-e)z))-e}{1-e} \\ &= \frac{U(U(e+(1-e)x, e+(1-e)y), e+(1-e)z)-e}{1-e} \\ &= S_U\left(\frac{U(e+(1-e)x, e+(1-e)y)-e}{1-e}, z\right) \\ &= S_U(S_U(x,y), z) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soit $(x,y,z) \in [0,1]^3$ avec $y \leq z$ on a:

$$\begin{aligned} y &\leq z \text{ alors } (1-e)\,y \leq (1-e)\,z \text{ donc} \\ e+(1-e)\,y &\leq e+(1-e)\,z \\ \text{alors } U(e+(1-e)x, e+(1-e)y) &\leq U(e+(1-e)x, e+(1-e)z) \text{ donc} \\ S_U(x,y) &\leq S_U(x,z) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

Pour tout $x \in [0,1]$

$$S_U(x,0) = \frac{U(e+(1-e)x, e)-e}{1-e} = \frac{e+(1-e)x-e}{1-e} = x$$

D'où l'élément neutre ■

Proposition 2.1.3 *[8]*

La structure d'une uninorme dans $[0,e]^2$ *et* $[e,1]^2$ *est liée, respectivement, à une t-norme et à une t-conorme, d'où nous avons:*

$$U(x,y)=\begin{cases} e.T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & si\ \ (x,y)\in[0,e]^2 \\ e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & si\ \ (x,y)\in[e,1]^2 \end{cases}$$

Lemme 2.1.1

Soit U *une uninorme d'un élément neutre* e

Si on a $x\leq e\leq y$ *ou* $y\leq e\leq x$ *alors:*

$$\min(x,y)\leq U(x,y)\leq\max(x,y)$$

Preuve.

Supposons que $x\leq e\leq y$ alors:

Par monotonie on a:

$$\begin{aligned} U(x,y) &\leq U(e,y)=y=\max(x,y) \\ \text{et } U(x,y) &\geq U(x,e)=x=\min(x,y) \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Lemme 2.1.2

Soit U *une uninorme, alors pour tout* x *de* $[0,1]$ *on a:*

$$U(0,1)=U(U(0,x),1)$$

Preuve.

Considérons d'abord $x\geq e$ alors $U(x,1)=1$ (voir la proposition (2.1.3)) d'où

$$U(0,1)=U(0,U(x,1))=U(U(0,x),1)$$

D'autre part, si $e\geq x$ alors $U(0,x)=0$ (voir la proposition (2.1.3)) donc

$$U(0,1)=U(U(0,x),1)=U(U(0,1),x)$$

D'où le résultat ■

Corollaire 2.1.1

Soit U une uninorme d'un élément neutre e, alors $U(0,1) \in \{0,1\}$ (U soit conjonctive ou soit disjonctiv

Preuve.

On a $U(0,1) \neq e$

car si $U(0,1) = e$ implique

$e = U(U(0,1), x) = U(e,x) = x$ pour tout x de $[0,1]$

ce qui nous donne une contraduction $(x = e)$

Posons $U(0,1) = X$, si $X > e$ alors de lemme (2.1.2) et la propostion (2.1.3) on trouve:

$X = U(X,1) = 1$ d'où $U(0,1) = 1$

Si $X < e$ alors de lemme (2.1.2) et la propostion (2.1.3) on trouve:

$$X = U(X,0) = 0$$

d'où $U(0,1) = 0$ d'où le résultat ■

Proposition 2.1.4

Soit U une uninorme et e l'élément neutre de cette uninorme alors:

1. *si U est conjonctive alors $U(x,1) = x$ pour tout x de $[0,e[$*
2. *si U est disjonctive alors $U(x,0) = x$ pour tout x de $]e,1]$*

Preuve.

1. U est conjonctive alors $U(0,1) = 0$ et $U(e,1) = 1$ donc

   pour tout x de $]0,e[$ il exist un z de $]0,1[$ tel que:

   $x = U(z,1)$ ceci implique que $U(x,1) = U(U(z,1),1) = U(z,U(1,1)) = U(z,1) = x$

2. En utilisant un argument simulaire, pour tout x de $]e,1[$ il exist un z de $]0,1[$ telque:

   $x = U(z,0)$ ceci implique que $U(x,0) = U(U(z,0),0) = U(z,U(0,0)) = U(z,0) = 0$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.1.1 [20]

Supposons que U est une uninorme avec un élément neutre e, alors:

$\overline{U}(x, y) = 1 - U(1-x, 1-y)$ *est une uninorme avec* $1-e$ *comme un élément neutre .*

Preuve.

Soit $(x, y, z) \in [0,1]^3$ on a:

$$\begin{aligned} U(1-x, l-y) &= U(1-y, 1-x) \\ \text{donc } 1 - U(1-x, l-y) &= 1 - U(1-y, 1-x) \\ \text{alors } \overline{U}(x, y) &= \overline{U}(y, x) \end{aligned}$$

D'où la commutativité

D'autre part:

Soient x_1, x_2, y_1 et $y_2 \in [0,1]$ avec $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$

On a:

$$\begin{aligned} 1 - x_2 &\leq 1 - x_1 \text{ et } 1 - y_2 \leq 1 - y_1 \text{ alors} \\ U(1-x_2, 1-y_2) &\leq U(1-x_1, 1-y_1) \text{ donc} \\ 1 - U(1-x_2, 1-y_2) &\leq 1 - U(1-x_1, 1-y_1) \\ \text{alors } \overline{U}(x_1, y_1) &\leq \overline{U}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

Pour tout $x \in [0,1]$ est e l'élément neutre de l'uninorme U on a:

$$\overline{U}(x, 1-e) = 1 - U(1-x, e) = x$$

Alors $1-e$ est l'élément neutre de $\overline{U}(x, y)$ ■

Proposition 2.1.5

Soient N une négation forte et U une uninorme, l'application définie par:

$$U'(x, y) = N(U(N(x), N(y)))$$

est une uninorme dite le duale de l'uninorme U

Preuve.

Soit $(x,y)\in[0,1]^2$ on a:

$$\begin{aligned} U'(x,y) &= N(U(N(x),N(y))) = N(U(N(y),N(x))) \\ &= U'(y,x) \end{aligned}$$

D'où la commutativité

Maintenant donnons la démonstration de l'associativité:

Soit $(x,y,z)\in[0,1]^3$alors:

$$U'\left(x,U'(y,z)\right) = N\left(U\left(N(x),N\left(U'(y,z)\right)\right)\right)$$

$$= N(U(N_x,N(N(U(N_y,N_z)))))$$

$$= N(U(N_x,(U(N_y,N_z))))$$

$$\begin{aligned} &= N(U(U(N_x,N_y),(N_z))) \\ &= U'(N(U(N_x,N_y)),z) \\ &= U'\left(U'(x,y),z\right) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soient x_1,x_2,y_1 et $y_2\in[0,1]$ avec $x_1\le x_2$ et $y_1\le y_2$

On a:

$$\begin{aligned} U'(x_1,y_1) &= N(U(N(x_1),N(y_1))) \\ \text{et} \qquad U(N(x_1),N(y_1)) &\ge U(N(x_2),N(y_2)) \\ \text{alors} \qquad N(U(N(x_1),N(y_1))) &\le N(U(N(x_2),N(y_2))) \\ \text{donc} \qquad U'(x_1,y_1) &\le U'(x_2,y_2) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

Soit $e\in]0,1[$ l'élément neutre de U alors:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [0,1] \quad & U'(x,N(e)) = N(U(N(x),N(N(e)))) \\ &= N(U(N(x),e)) = NN(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Alors $N(e)$ est l'élément neutre de U' ■

Proposition 2.1.6

U' possède les propriétés suivantes:

1. *Si U est une uninorme conjonctive (respectivement disjonctive) , alors U' est une uninorme disjonctive (resp. conjonctive)*

2. *elle n'existe pas une uninorme auto-duale$\left(U = U'\right)$*

Preuve.

1. Soit U une uninorme

   Si U est conjonctive alors:

$$\begin{aligned} U'(0,1) &= N(U(N(0), N(1))) \\ &= N(U(1,0)) = N(1) = 0 \\ \text{et } U'(1,0) &= N(U(N(1), N(0))) \\ &= N(U(0,1)) = N(1) = 0 \end{aligned}$$

   D'où U'est une uninorme disjonctive

   Si U est disjonctive alors:

$$\begin{aligned} U'(0,1) &= N(U(N(0), N(1))) \\ &= N(U(1,0)) = N(0) = 1 \\ \text{et } U'(1,0) &= N(U(N(1), N(0))) \\ &= N(U(0,1)) = N(0) = 1 \end{aligned}$$

   D'où U'est une uninorme disjonctive

2. Soit U une uninorme, supposant que U est une uninorme auto-dual alors

   $\forall\ (x, y) \in [0,1]^2$ on a $U(x, y) = U'(x, y)$

   D'autre part posant $U(0,1) = z$ $(z = 0$ ou $z = 1)$donc

$$U'(1,0) = N(U(N(1), N(0))) = N(U(0,1)) = N(z)$$

D'où $U(0,1) \neq U'(1,0)$ ceci contredit le fait que $\forall\ (x,y) \in [0,1]^2\ U(x,y) = U'(x,y)$ $\blacksquare$

Remarque 2.1.2

1. *Uninormes ne sont jamais continues sur tout le carré de l'unité. Néanmoins, il est possible de trouver des uninormes qui sont continues sur* $]0,1[^2$.

2. *On a vu dans le premier chapitre que la seule t-norme idempotente est* T_M *(minimum) et la seule t-conorme idempotente est*

   S_M *(maximum), mais dans le cas de uninormes,il existe différents types de fonctions idempotentes*

2.1.2 Les principales classes d'uninormes

Il existe plusieures classes d' uninormes qui ont été identifiées et caractérisées. Les deux les plus importantes et utiles sont décrites dans cette sous section sont la famille $\mathcal{U}_{\min}$ et la famille $\mathcal{U}_{\max}$

Les familles $\mathcal{U}_{\min}$ et $\mathcal{U}_{\max}$

Proposition 2.1.7

Soient T une t-norme arbitraire et S une t-conorme arbitraire
et e un élément de $]0,1[$ *alors:*
la fonction $U_{\min(T,S,e)}$ définie par:

$$U_{\min(T,S,e)}(x,y) = \begin{cases} e.T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & si\ \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & si\ \ (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases}$$

est une uninorme conjonctive avec e comme un élément neutre

Preuve.

On sait de la défintion de T et S que T et S sont tous les deux commutatives et associatives et monotones alors

$e.T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right)$ et $e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right)$ sont toutes les deux commutatives et associatives et monotones, de méme on a $\min(x,y)$ est commutative et associative et monotone

Maintenant on démontre que e est l'élément neutre de $U_{\min(T,S,e)}$ on a:

Si $x \in [0,e]$ donc

$$\begin{aligned} U_{\min(T,S,e)}(x,e) &= e.T\left(\frac{x}{e},\frac{e}{e}\right) \\ &= e.T\left(\frac{x}{e},1\right) = x \\ \text{et } U_{\min(T,S,e)}(e,x) &= e.T\left(\frac{e}{e},\frac{x}{e}\right) \\ &= e.T\left(1,\frac{x}{e}\right) = x \end{aligned}$$

Si $x \in [e,1]$ donc

$$\begin{aligned} U_{\min(T,S,e)}(x,e) &= e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{e-e}{1-e}\right) \\ &= e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},0\right) = x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_{\min(T,S,e)}(e,x) &= e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{e-e}{1-e}\right) \\ &= e+(1-e).S\left(0,\frac{x-e}{1-e}\right) = x \end{aligned}$$

Dans tous les cas e est l'élément neutre de $U_{\min(T,S,e)}(x,y)$

Il reste de montrer que $U_{\min(T,S,e)}$ est une uninorme conjonctive:

$U_{\min(T,S,e)}(0,1) = \min(0,1) = 0$ d'où $U_{\min(T,S,e)}$ est une uninorme conjonctive ■

Proposition 2.1.8

Soient T une t-norme arbitraire et S une t-conorme arbitraire

et e un élément de $]0,1[$ alors la fonction $U_{\max(T,S,e)}$ définie par:

$$U_{\max(T,S,e)}(x,y) = \begin{cases} e.T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & si\ \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ e+(1-e).S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & si\ \ (x,y) \in [e,1]^2 \\ \max(x,y) & sinon \end{cases}$$

est une uninorme disjonctive avec e comme un élément neutre

Preuve.

Il est évident que $U_{\max(T,S,e)}(x,y)$ est une application commutative et associativs et monotone et e est l'élément neutre de $U_{\max(T,S,e)}$

De plus $U_{\max(T,S,e)}(0,1) = \max(0,1) = 1$ ■

Définition 2.1.3

La famille $\mathcal{U}_{\min}$ *est l'ensemble de toutes les uninormes de la forme* $U_{\min(T,S,e)}$ *et la famille* $\mathcal{U}_{\max}$ *est l'ensemble de toutes les uninormes de la forme* $U_{\max(T,S,e)}$

Remarque 2.1.3

Observer que les uninormes des deux familles mentionées, satisfaient les propriétés suivantes:

1. *Si* $U \in \mathcal{U}_{\min}$ *alors la fonction donnée par* $t \longmapsto U(1,t)$ *est continue dans* $[0,e[$

2. *Si* $U \in \mathcal{U}_{\max}$ *alors la fonction donnée par* $t \longmapsto U(0,t)$ *est continue dans* $]e,1]$

Exemple 2.1.2

Soit $e \in]0,1[$

1. *La plus petite uninorme avec* e *comme un élément neutre est l'uninorme conjonctive appartenant à* $\mathcal{U}_{\min}$ *construire par la plus petite t-norme* (T_D) *et la plus grande t-conorme* (S_M)*:*

$$U_{\min(T_D,S_M,e)}(x,y) = \begin{cases} 0, & si\ (x,y) \in [0,e]^2 \\ \max(x,y) & si\ (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases}$$

2. *La plus grande uninorme avec* e *comme un élément neutre est l'uninorme disjonctive appartenant à* $\mathcal{U}_{\max}$*construire par la plus grande t-norme* (T_M) *et la plus grande t-conorme* (S_D)*:*

$$U_{\max(T_M,S_D,e)}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & si\ (x,y) \in [0,e]^2 \\ 1 & si\ (x,y) \in [e,1]^2 \\ \max(x,y) & sinon \end{cases}$$

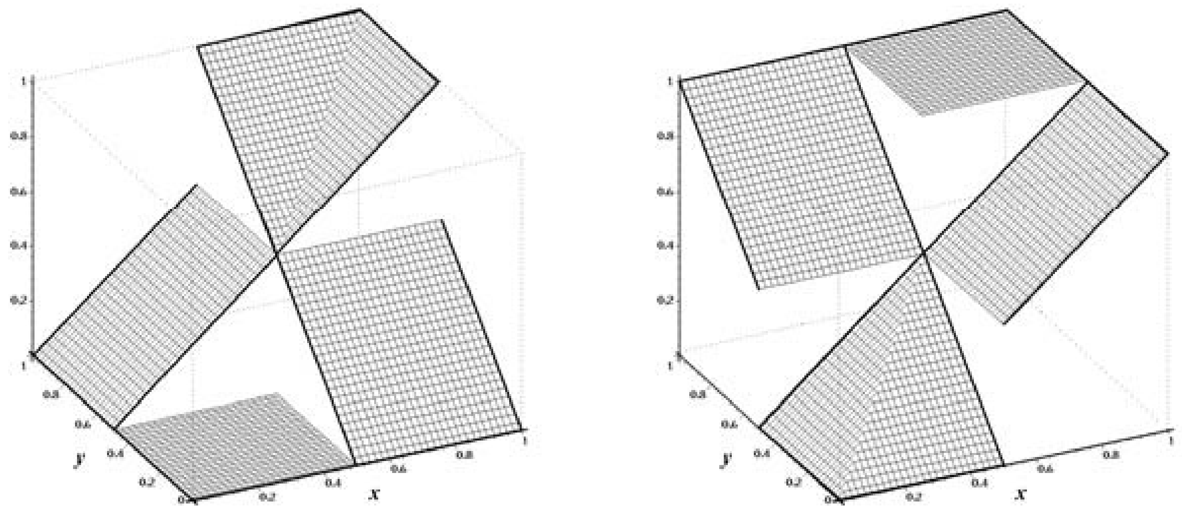

Figure 2.1.1 : La plus petite(à gauche) et la plus grande(à droite) uninormes privées avec l'élément neutre $e = 0.5$

deux uninormes idempotentes sont obtenues à partire des deux familles $\mathcal{U}_{\min}$ *et* $\mathcal{U}_{\max}$ *en choisissant* $T = T_M$ *et* $S = S_M$

3.

$$U_{\min(T_M,S_M,e)}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & si \quad (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases}$$

4.

$$U_{\max(T_M,S_M,e)}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & si \quad (x,y) \in [0,e]^2 \\ \max(x,y) & sinon \end{cases}$$

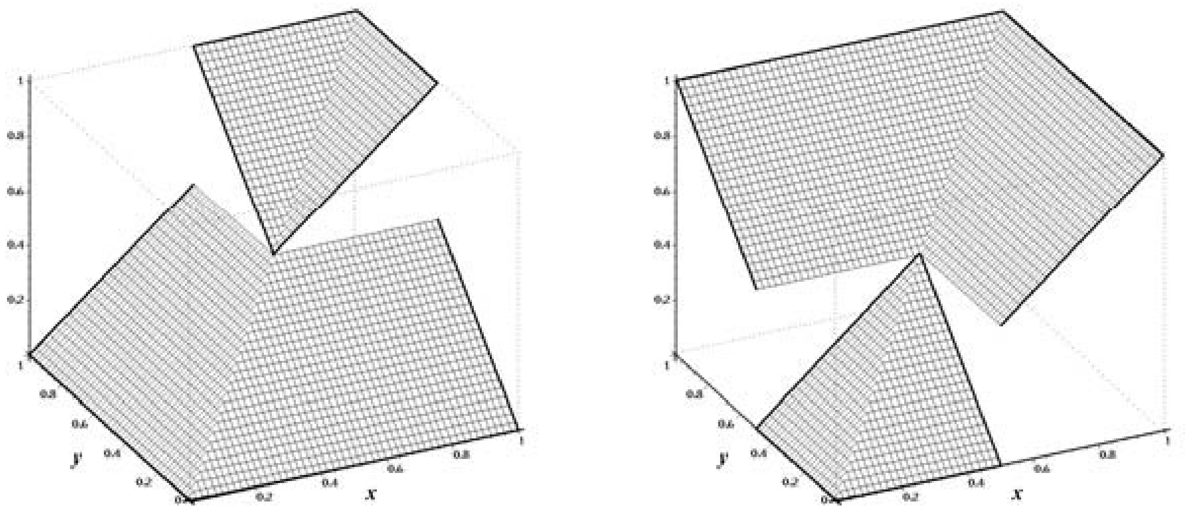

Figure 2.1.2 : ***Uninormes idempotentes dans les familles** $U_{\min}$ **et** $U_{\max}$ **avec l'élément neutre** $e = 0.5$*

Les classes de De Morgan

Définition 2.1.4

Soient U_1 et U_2 deux uninormes et N une négation

On dit que le triplet (U_1, U_2, N) est un triplet de De Morgan si on a:

$$N(U_1(x, y)) = U_2(N(x), N(y)) \ \ \forall x \in [0, 1]$$

Proposition 2.1.9

Soientt U_1 et U_2 deux uninormes avec $e_1 \in]0, 1[$ et $e_2 \in]0, 1[$ est(respectivement)l'élément neutre de U_1 et U_2,

et N une négation. Si (U_1, U_2, N) est un triplet de De Morgan alors:

1. *$e_2 = N(e_1)$ et $U_2(0, 1) = N(U_1(0, 1))$*
2. *Il existe deux négations strictes N_1 et N_2 telle que:*

   (T_1, S_2, N_1) et (T_2, S_1, N_2) sont aussi des triplets de De Morgan, de plus on a:

$$\forall \ x \in [0, 1] \quad N_2(x) = \frac{1 - e_1}{1 - e_2}.N_1\left(\frac{e_1}{e_2}x\right) + \frac{e_1 - e_2}{1 - e_1}$$

Cette égalite est par supposé que $e_1 \leq e_2$

(sinon on aura une égalité similaire avec des indices inversés)

Preuve.

1. Posons $x = e_1$ et $y = N(e_2)$ remplaçons les valeurs de x et y

   dans $N(U_1(x,y)) = U_2(N(x), N(y))$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} N(U_1(e_1, N(e_2))) &= U_2(N(e_1), N(N(e_2))) \text{ alors} \\ e_2 &= U_2(N(e_1), e_2) = N(e_1) \end{aligned}$$

   Si $x = 0$ et $y = 1$ alors immédiatement $U_2(0,1) = N(U_1(0,1))$

2. Si $x, y \in [0, e_1]$ alors $N(x), N(y) \in [e_2, 1]$, ceci implique:

$$\begin{aligned} N(U_1(x,y)) &= N\left(e_1 T_{U_1}\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right)\right) = U_2(N(x), N(y)) \\ &= e_2 + (1-e_2) S_{U_2}\left(\frac{N(x)-e_2}{1-e_2}, \frac{N(y)-e_2}{1-e_2}\right) \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} N(U_2(x,y)) &= N\left(e_2 T_{U_2}\left(\frac{x}{e_2}, \frac{y}{e_2}\right)\right) \\ &= U_1(N(x), N(y)) == e_1 + (1-e_1) S_{U_1}\left(\frac{N(x)-e_1}{1-e_1}, \frac{N(y)-e_1}{1-e_1}\right) \end{aligned}$$

On définit deux fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$, de $[0,1]$ vers $[0,1]$, comme suit:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{N(e_2 x) - e_1}{1 - e_1} \\ N_2(x) &= \frac{N(e_1 x) - e_2}{1 - e_2} \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont des négations strictes

(l'idempotence n'est pas toujours vérifiée)

Les équations impliquent que (T_1, S_2, N_1) et (T_2, S_1, N_2) sont des triplets de De Morgan

Finalement, supposons que $e_1 \leq e_2$ alors les définitions de N_1 et N_2 impliquent:

$$e_2 + (1 - e_2) N_2\left(\frac{x}{e_1}\right) = e_1 + (1 - e_1) N_1\left(\frac{x}{e_2}\right)$$

D'où la preuve est compléte ■

Lemme 2.1.3

Supposons que N_1 et N_2 sont deux négations strictes qui vérifient:

$$\forall x \in [0,1] \quad N_2(x) = \frac{1 - e_1}{1 - e_2}.N_1\left(\frac{e_1}{e_2}x\right) + \frac{e_1 - e_2}{1 - e_1}$$

Avec $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq 1$ alors la fonction définit par

$$N(x) = \begin{cases} e_2 + (1 - e_2) N_2\left(\frac{x}{e_1}\right) & si\ x \leq e_1 \\ e_1 + e_2 - x & si\ e_1 \leq x \leq e_2 \\ e_2 N_1^{(-1)}\left(\frac{x - e_1}{1 - e_1}\right) & si\ x \geq e_2 \end{cases}$$

Est une négation forte avec $e_2 = N(e_1)$

Preuve.

Il est claire que N est décroissante, continue et $N(0) = 1$ et $N(1) = 0$

Il reste de montrer que N est une involution, c'est-à-dire $N(N(x)) = x$, en effet:

1. Si $x \leq e_1$, par l'utilisation de $N_2(x) = \frac{1-e_1}{1-e_2}.N_1\left(\frac{e_1}{e_2}x\right) + \frac{e_1-e_2}{1-e_1}$ on a

$$\begin{aligned}
N(N(x)) &= N\left(e_2 + (1-e_2)\,N_2\left(\frac{x}{e_1}\right)\right) \\
&= e_2 N_1^{(-1)}\left(\frac{e_2 + (1-e_2)\,N_2\left(\frac{x}{e_1}\right) - e_1}{1-e_1}\right) \\
&= e_2 N_1^{(-1)}\left(\frac{\left(e_1 + (1-e_1)\,N_1\left(\frac{x}{e_2}\right) - e_1\right)}{1-e_1}\right) \\
&= e_2 N_1^{(-1)}\left(N_1\left(\frac{x}{e_2}\right)\right) = x
\end{aligned}$$

2. Si $e_1 \leq x \leq e_2$, alors on a

$$\begin{aligned}
N(N(x)) &= N(e_1 + e_2 - x) \\
&= e_1 + e_2 - (e_1 + e_2 - x) = x
\end{aligned}$$

3. $x \geq e_2$, alors $e_2 N_1^{(-1)}\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}\right) \leq e_2 N_1^{(-1)}\left(\frac{e_2-e_1}{1-e_1}\right) = e_1$

   Alors

$$\begin{aligned}
N(N(x)) &= N\left(N_1^{(-1)}\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}\right)\right) \\
&= e_2 + (1-e_2)\,N_2\left(\frac{e_2}{e_1}N_1^{(-1)}\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}\right)\right) \\
&= e_2 + (1-e_2)\left[\frac{1-e_1}{1-e_2}N_1\left[\frac{e_1}{e_2}\frac{e_2}{e_1}N_1^{(-1)}\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}\right)\right] + \frac{e_1-e_2}{1-e_1}\right] \\
&= e_2 + (1-e_2)\,\frac{x-e_1}{1-e_1} + e_1 - e_2 = x
\end{aligned}$$

D'où la preuve est complète ■

2.2 Nullnormes

D'une manière similaire que l' uninorme, l' opération nullnorme peut considirer comme une généralisation de t-normes et t-conormes, en modifiant simplement l'axiome concernant l'élément neutre

2.2.1 Préliminaires sur les nullnormes

On va voir dans cette sous section quelques définitions et propréietés sur l'opération nullnorme

Définition 2.2.1

Une nullnorme est une opération binaire $V : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *qui est commutative monotone et associative de plus il existe un élément absorbant* $a \in [0,1]$ *qui satisfait :*

$$\begin{aligned} \textit{pour tout } x &\leq a \textit{ on a } V(x,0) = x \textit{ et} \\ \textit{pour tout } x &\geq a \textit{ on a } V(x,1) = x \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1

De (V_4) *on remarque que:*

1. *Si l'élément absorbant* $a = 1$ *alors* V *est une t-conorme*

2. *Si l'élément absorbant* $a = 0$ *alors* V *est une t-norme*

3. $V\,(a,0) = V\,(a,1) = a$

Proposition 2.2.1

Pour tout x de $[0,1]$ on a:

$$V(x,a) = a$$

Preuve.

On sait que $V(a,0) = V(a,1) = a$ alors de la monotonie de V on a:

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \text{ de } [0,1] \text{ on a } V(a,0) &= a \leq V(a,x) \leq V(a,1) = a \text{ d'où} \\ V(a,x) &= a \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Proposition 2.2.2

Soit V une nullnorme avec un élément absorbant $a \in]0,1[$ alors:

$$a = V(1,0)$$

Preuve.

On sait que $V(0,a) = V(1,a) = a$ alors

$$\begin{aligned} V(0,a) &= a \leq V(0,1) \text{ et} \\ a &= V(1,a) \geq V(1,0) = V(0,1) \text{ d'où} \\ a &= V(0,1) \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Lemme 2.2.1

Soit V une nullnorme d'un élément absorbant a, on a:

1. *Pour tout $x, y \in [0,a]$ $V(x,y) \geq \max(x,y)$*

2. *Pour tout $x, y \in [a,1]$ $V(x,y) \geq \min(x,y)$*

Preuve.

1. Soient $x, y \in [0, a]$ alors:

$$\begin{aligned} V(x,0) &= x \leq V(x,y) \text{ et} \\ V(0,y) &= y \leq V(x,y) \text{ donc} \\ V(x,y) &\geq \max(x,y) \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in [a, 1]$ alors:

$$\begin{aligned} V(x,y) &\leq V(x,1) = x \text{ et} \\ V(x,y) &\leq V(1,y) = y \leq V(x,y) \text{ donc} \\ V(x,y) &\leq \min(x,y) \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Proposition 2.2.3

Soit N une négation et V une nullnorme, l'application définie par:

$$V_d(x,y) = N(V_d(N(x), N(y)))$$

est une nullnorme dite le duale de la nullnorme V

Preuve. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ on a:

$$\begin{aligned} V_d(x,y) &= N(V(N(x), N(y))) = N(V(N(y), N(x))) \\ &= V_d(y,x) \end{aligned}$$

D'où la commutativité

Maintenant donnons la démonstration de l'associativité:

Soit $(x,y,z) \in [0,1]^3$

$$V_d(x, V_d(y,z)) = N\left(V\left(N(x), N\left(U'(y,z)\right)\right)\right)$$

$$= N\left(V\left(N_x, N\left(N\left(V\left(N_y, N_z\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= N\left(V\left(N_x, \left(V\left(N_y, N_z\right)\right)\right)\right)$$

$$= N\left(V\left(V\left(N_x, N_y\right), \left(N_z\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned} &= V_d\left(N\left(V\left(N_x, N_y\right)\right), z\right) \\ &= V_d\left(V_d\left(x, y\right), z\right) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soient x_1, x_2, y_1 et $y_2 \in [0,1]$ avec $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$

On a:

$$\begin{aligned} V_d\left(x_1, y_1\right) &= N\left(V\left(N\left(x_1\right), N\left(y_1\right)\right)\right) \\ \text{et} \quad V\left(N\left(x_1\right), N\left(y_1\right)\right) &\geq V\left(N\left(x_2\right), N\left(y_2\right)\right) \\ \text{alors} \quad N\left(V\left(N\left(x_1\right), N\left(y_1\right)\right)\right) &\leq N\left(V\left(N\left(x_2\right), N\left(y_2\right)\right)\right) \\ \text{donc} \quad V_d\left(x_1, y_1\right) &\leq V_d\left(x_2, y_2\right) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

Soit $a \in]0,1[$ l'élément obsorbant de V_d alors:

$$\begin{aligned} \forall x &\in [0, N(a)] \quad V_d(x,0) = N\left(V\left(N(x), N(0)\right)\right) \\ &= N\left(V\left(N(x), 1\right)\right) \text{ et on a } N(x) \in [a,1] \text{ donc} \\ N\left(V\left(N(x), 1\right)\right) &= NN(x) = x \text{ d'autre part} \\ \forall x &\in [N(a), 1] \quad V_d(x,1) = N\left(V\left(N(x), N(1)\right)\right) \\ &= N\left(V\left(N(x), 0\right)\right) \text{ et on a } N(x) \in [0,a] \text{ donc} \\ N\left(V\left(N(x), 0\right)\right) &= NN(x) = x \end{aligned}$$

Alors $N(a)$ est l'élément absorbant de V_d . ■

2.2.2 La structure d'une nullnorme

On a vu dans la section précédente que toute uninorme ayant une strucuture spécifiée, les nullnormes sont aussi de strucuture spécifiée et ce que nous allons voir.

Proposition 2.2.4

Pour tout uninorme V avec un élément absorbant $a \in [0,1]$,

l'opération binaire S_V définie par:

$$S_V(x,y) = \frac{V(ax,ax)}{a}$$

est une t-conorme

Preuve.

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$

Alors:

$$S_V(x,y) = \frac{V(ax,ay)}{a} = \frac{V(ax,ay)}{a} = S_V(y,x)$$

D'où la commutativité

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} S_V(x,S_V(y,z)) &= \frac{V(ax,aS_V(y,z))}{a} = \frac{V(ax,V(ay,az))}{a} \\ &= \frac{V\left(\frac{aV(ax,ay)}{a},az\right)}{a} = \frac{V(eS_V(x,y),ez)}{a} \\ &= S_V(S_V(x,y),z) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soit $(x,y,z) \in [0,1]^3$ avec $y \leq z$ on a:

$$S_V(x,y) = \frac{V(ax,ay)}{a} \leq \frac{V(ax,az)}{a} = S_V(x,z)$$

d'où la monotonie

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } x &\in [0,1] \;\; S_V(x,0) = \frac{V(ax,0)}{a} \\
\text{et on a } ax &\in [0,a] \;\; \text{donc de } V_4 \\
S_V(x,0) &= \frac{ax}{a} = x
\end{aligned}$$

D'où l'élément absorbant ■

Proposition 2.2.5

Pour tout nullnorme V avec un élément absorbant $a \in [0,1]$, l'opération binaire T_V définie par:

$$T_V(x,y) = \frac{V(a+(1-a)x, a+(1-a)y) - a}{1-a}$$

est une t-norme

Preuve.

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$

Alors:

$$\begin{aligned}
T_V(x,y) &= \frac{V(a+(1-a)x, a+(1-a)y) - a}{1-e} \\
&= \frac{V(a+(1-a)y, a+(1-a)x) - a}{1-a} \\
&= T_V(y,x)
\end{aligned}$$

D'où la commutativité

D'autre part:

$$\begin{aligned}
T_V(x, T_V(y,z)) &= T_V\left(x, \frac{V(a+(1-a)y, a+(1-a)z) - a}{1-a}\right) \\
&= \frac{V(a+(1-a)x, V(a+(1-a)y, a+(1-a)z)) - a}{1-a} \\
&= \frac{V(V((1-a)x, a+(1-a)y), a+(1-a)y) - a}{1-a} \\
&= T_V\left(\frac{V(a+(1-a)x, a+(1-a)y) - a}{1-a}, z\right) \\
&= T_V(T_V(x,y), z)
\end{aligned}$$

D'où l'associativité

Soit $(x,y,z) \in [0,1]^3$ avec $y \leq z$ on a:

$$\begin{aligned} y &\leq z \text{ alors } (1-a)\,y \leq (1-a)\,z \text{ donc} \\ a+(1-a)\,y &\leq a+(1-a)\,z \\ \text{alors } V\left(a+(1-a)\,x, a+(1-a)\,y\right) &\leq T\left(a+(1-a)\,x, a+(1-a)\,z\right) \text{ d'où} \\ T_V(x,y) &\leq T_V(x,z) \end{aligned}$$

d'où la monotonie

Pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} T_V(x,1) &= \frac{V\left(a+(1-a)\,x, 1\right)-a}{1-a} \\ \text{et on a } \left(a+(1-a)\,x\right) &\in [a,1] \text{ alors de } V_4 \\ T_V(x,1) &= \frac{a+(1-a)\,x-a}{1-a} \\ &= x \end{aligned}$$

D'où l'élément absorbant ■

Proposition 2.2.6 [9]

Soit $a \in [0,1]$, une opération binaire V est une nullnorme avec a comme un élément absorbant si et seulement si il existe une t-norme T et une t-conorme S telle que :

$$V(x,y) = \begin{cases} S^*(x,y) & si\ (x,y) \in [0,a]^2 \\ T^*(x,y) & si\ (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & sinon \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} S^*(x,y) = \varphi^{-1}\left(S\left(\varphi(x), \varphi(y)\right)\ \right),\ \varphi(x) = \frac{x}{a} & x,y \in [0,a] \\ T^*(x,y) = \psi^{-1}\left(S\left(\psi(x), \psi(y)\right)\ \right),\ \psi(x) = \frac{x-a}{1-a} & x,y \in [a,1] \end{cases}$$

C'est-à-dire:

La structure d'une nullnorme dans $[0,a]^2$ et $[a,1]^2$ est liée à une t-norme et une t-conorme

$$V(x,y) = \begin{cases} a.S\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & si\ (x,y) \in [0,a]^2 \\ a+(1-a)\,.T\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & si\ (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & sinon \end{cases}$$

Exemple 2.2.1

Soient $x, y \in [0,1]$ *et* $a \in \,]0,1[$ *on a les quatre nullnormes prototypiques suivantes:*

1.
$$V_{S_M,T_M,a}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & si \ (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min(x,y) & si \ (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & sinon \end{cases}$$

2.
$$V_{S_M,T_D,a}(x_1,x_2) = \begin{cases} \max(x_1,x_2) & si \ (x_1,x_2) \in [0,a]^2 \\ x_i & si \ x_i \geq a \ et \ \ x_j = 1 \ \forall x_i \neq x_j \\ a & sinon \end{cases}$$

3.
$$V_{S_D,T_M,a}(x,y) = \begin{cases} x_i & si \ x_i \leq a \ et \ \ x_j = 0 \ \forall x_i \neq x_j \\ \min(x_1,x_2) & si \ (x_1,x_2) \in [0,a]^2 \\ a & sinon \end{cases}$$

4.
$$V_{S_L,T_L,a}(x,y) = \begin{cases} x+y-1 & si \ x+y \geq 1+a \\ x+y & si \ x+y \leq a \\ a & sinon \end{cases}$$

Remarque 2.2.2

1. *Les seules nullnormes idempotentes sont celles liées avec la seule t-norme idempotente* T_M *et la seule t-conorme idempotente* S_M

   De plus, si on fixe a *dans* $]0,1[$ *on aura la seule nullnorme idempotente d'élément absorbant* a *est* $V_{S_M,T_M,a}$

2. $V_{S_M,T_D,a}$ *est la plus petite nullnorme et* $V_{S_D,T_M,a}$ *est la plus grande nullnorme*

Chapitre 3

Implications du uninormes

Il y a plusieurs propriétés valables dans la logique classique qui ne sont pas généralement vraies quand elles sont traduites à la logique floue, utilisant des t-normes, t-conorms et des négations pour exécuter, respectivement, des conjonctions, des disjonctions et des négations. deux implication du uninorme (R-implication et S-implication) peuent étre généralisé l'implication usuelle($\Longrightarrow$) dans la logique classique.

.Par exemple pour une S-implication I :

$$(p \wedge q) \implies r \equiv (p \implies r) \vee (q \implies r) \qquad (1)$$

Dans notre context l'équation (1) devient:

$$I(U_1(x,y),z) = U_2(I(x,z), I(y,z)) \ x,y,z \in [0,1]$$

Où I est une implication definit par $I(x,y) = U(N(x),y)$, dont quelle N est une négation et U est uninorme disjonctive, et U_1,U_2 sont, respectivment une uninorme conjonctive et une uninorme disjonctive, ($U_1 \equiv \wedge, U_2 \equiv \vee,\ I \equiv \Longrightarrow$)

3.1 R-implication et S-implication

On a vu dans le chapitre précédent qu'une uninorme soit disjonctive ou soit conjonctive, dans ce chapitre on associe une implication pour chaque uninorme, R-implication pour une uninorme conjonctive et S-implication pour une uninorme disjonctive, de plus nous allons voir des proprietées de ces implications

3.1.1 R-implication

Nous présentons dans cette sous section des définitions et des propriétées sur l'implication résiduelle

Définition 3.1.1

Une opération binaire $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *est dite une implication si elle satisfait:*

1. $I(x,z) \geq I(y,z)$ *si* $x \leq y$, $\forall\ z \in [0,1]$.

2. $I(x,y) \leq I(x,z)$*si* $y \leq z$, $\forall\ x \in [0,1]$.

3. $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *et* $I(1,0) = 0$

Remarque 3.1.1

On remarque de la défintion que:

$$I(0,x) = I(x,1) = 1 \quad \forall\ x \in [0,1]$$

Définition 3.1.2

Une fonction I *satisfait la propriété d'ordre si et seulement si:*

$$x \leq y \iff I(x,y) = 1, \text{ pour } x,y \in [0,1] \qquad (OP)$$

I *satisfait le principe de l'échange si et seulement si:*

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)), \text{pour } x,y,z \in [0,1] \qquad (EP)$$

Exemple 3.1.1

1. *Soient* $x,y \in [0,1]$ *la fonction définit par:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leq y \\ 0 & si\ \ x > y \end{cases}$$

satisfait la propriété d'ordre (OP)

2. *Soient* $x, y \in [0,1]$ *la fonction définit par:*

$$I(x,y) = \max(1-x, y)$$

satisfait le principe de l'échange (EP)

Remarque 3.1.2

Le principe d'échange $I(p, I(q,r)) = I(q, I(p,r))$ *dans la logique classique devient* $p \implies (q \implies r) = q \implies (p \implies r)$

Définition 3.1.3

Soit U *une uninorme, l'opération résiduelle* I_U *(tirée de* U *)*
est l'opération binaire donnée par:

$$I_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \le y\} \;\; x, y, z \in [0,1]$$

Définition 3.1.4

Soient U *une uninorme conjective avec* e *l'élément neutre de* U
et I_U *l'opération résiduelle du* U
La propriété du modus ponens est définie par:

$$U(x, I_U(x,y)) \le y \qquad\qquad (MP)$$

La propriété d'ordre est définie par:

$$x \le y \iff I_U(x,y) \ge e \qquad (OP_U)$$

Proposition 3.1.1

Soient U *une uninorme et* I_U *l'opération residuelle de* U *alors*
I_U *est une implication si et seulement si:*

$$U(x,0) = 0 \text{ pour tout } x \le 1$$

Preuve.

1. Supposons que I_U est une implication alors:

$$I\,(1,0) = 0 \Longrightarrow \sup\{z \in [0,1] \mid U(1,z) = 0\} = 0 \Longrightarrow U(1,0) = 0$$

   D'autre part:

$$\begin{aligned} \forall\, x &\in [0,1]\ \ U(x,0) \le U(1,0) = 0 \text{ d'où} \\ U(x,0) &= 0 \text{ pour tout } x \le 1 \end{aligned}$$

2. Maintenant on suppose que $U(x,0) = 0$ pour tout $x \le 1$ alors:

   i- Soient $x \le y$ et $z \in [0,1]$ on a:

$$\begin{aligned} I\,(x,z) &= \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \text{ et} \\ I\,(y,z) &= \sup\{t \in [0,1] \mid U(y,t) \le z\} \text{et on a} \\ U(x,t) &\le U(y,t) \Longrightarrow \{t \in [0,1] \mid U(y,t) \le z\} \subseteq \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow \sup\{t \in [0,1] \mid U(y,t) \le z\} \in \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow \sup\{t \in [0,1] \mid U(y,t) \le z\} \le \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow I(x,z) \ge I(y,z) \end{aligned}$$

   ii- Soient $y \le z$ et $x \in [0,1]$ on a:

$$\begin{aligned} I\,(x,y) &= \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le y\} \text{ et} \\ I\,(x,z) &= \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \text{ et on a} \\ y &\le z \Longrightarrow \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le y\} \subseteq \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le y\} \in \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le y\} \le \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \le z\} \\ &\Longrightarrow I\,(x,y) \le I\,(x,z) \end{aligned}$$

   iii- $I\,(0,0) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(0,t) = 0\} = \sup\{t \in [0,1] \mid 0 = 0\} = \sup[0,1] = 1$

$I\,(1,1) = \sup\,\{t \in [0,1] \mid U(1,t) \leq 1\} = \sup\,[0,1] = 1$

$I\,(1,0) = \sup\,\{t \in [0,1] \mid U(1,t) = 0\} = \sup\,\{0\} = 0$

La preuve est compléte ■

Définition 3.1.5

Soient U une uninorme telle que $U(x,0) = 0$ pour tout x de $[0,1]$ et I_U l'opératition residuelle de U alors:

I_U est dite une implication residuelle notée R-implication

Proposition 3.1.2

1. *Soit I_U une R-implication de uninorme U, $U(x,0) = 0$ pour tout x de $[0,1]$, et e comme un élément neutre alors:*

$$I_U(e,y) = y \qquad \text{pour tout } y \in [0,1]$$

2. *Pour tout $x, y \in [0,1]$ on a:*

$$y \leq I_U\,(x, U\,(x,y))$$

3. *Soient $x, y \in [0,1]$ avec $x \leq y$ alors:*

$$I_U(x,y) \geq e$$

Preuve.

1. On a:

$$\begin{aligned} I_U(e,y) &= \sup\,\{t \in [0,1] \mid U(e,t) \leq y\} \\ &= \sup\,\{t \in [0,1] \mid t \leq y\} \\ &= \sup\,[0,y] = y \end{aligned}$$

2. Pour tout $x, y \in [0,1]$ on a:

   $U\,(x,y) \leq U\,(x,y)$ donc $y \in \{t \in [0,1] \mid U\,(x,t) \leq U\,(x,y)\}$ alors

   $y \leq \sup\,\{t \in [0,1] \mid U\,(x,t) \leq U\,(x,y)\} = I_U\,(x, U\,(x,y))$

   D'où $y \leq I_U\,(x, U\,(x,y))$

3. Soient $x, y \in [0,1]$ avec $x \leq y$ alors:

$$\begin{aligned} I_U(x,y) &= \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq y\} \text{ et on a} \\ U(x,e) &= x \leq y \text{ d'où } e \in \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq y\} \\ e &\leq \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq y\} = I_U(x,y) \end{aligned}$$

D'où la preuve est compléte ■

Proposition 3.1.3

Soit $I : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ est une fonction qui satisfait les propriétés (OP_U)et (EP) alors:

1. *$I(x,x) \geq e$ pour tout $x \in [0,1]$.*

2. *I satisfait $I(x,z) \geq I(y,z)$ si $x \leq y,\ z \in [0,1]$*

3. *I satisfait $I(e,x) = x$,particulièrement $I(e,e) = e$.*

4. *$I(0,y) = 1$ pour tout $y \in [0,1]$.*

5. *si $I(1,e) = 0$ alors $N(x) = I(x,e)$ est une négation avec $N(e) = e$.*

Preuve.

1. Remplaçons y par x dans (OP_U) on obtient $I(x,x) \geq e$

2. Considérons $x, y, z \in [0,1]$ avec $x \leq y$. Alors on a:

$$\begin{aligned} I(y, I(I(y,z),z)) &= I(I(y,z), I(y,z)) \geq e \\ I(y, I(I(y,z),z)) &\geq e \iff y \leq I(I(y,z),z) \end{aligned}$$

(utilisons 1 et conditions (EP) puis (OP_U))

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} x &\leq y \leq I(I(y,z),z) \Longrightarrow e \leq I(x, I(I(y,z),z)) = I(I(y,z), I(x,z)) \\ e &\leq I(I(y,z), I(x,z)) \iff I(y,z) \leq I(x,z) \end{aligned}$$

3. Tout d'abord on a:

$$\begin{aligned} I(x, I(e,x)) &= I(e, I(x,x)) \text{ et} \\ e &\leq I(x,x) \iff I(e, I(x,x)) \geq e \\ &\iff I(x, I(e,x)) \geq e \\ &\iff x \leq I(e,x) \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} I(e, I(I(e,x),x)) &= I(I(e,x), I(e,x)) \geq e \\ I(e, I(I(e,x),x)) &\geq e \iff e \leq I(I(e,x),x) \\ &\iff I(e,x) \leq x \end{aligned}$$

Finalement $I(e,x) = x$ pour tout x de $[0,1]$

4. On a pour tout $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(1,y) \Rightarrow I(0, I(1,y)) \geq e \\ &\Longrightarrow I(1, I(0,y)) \geq e \\ &\Longrightarrow 1 \leq I(0,y) \\ &\Longrightarrow I(0,y) = 1 \end{aligned}$$

5. De (2) on trouve que (N) est décroissante et (4) implique que

   $N(0) = I(0,e) = 1$ et $N(1) = I(1,e) = 0$

Alors N est une négation. Finallement de (3) on trouve $N(e) = e$. ■

Proposition 3.1.4

Soit U une uninorme conjonctive, U est continue à gauche, e l'élément neutre de U est I_U l'implication résiduelle de U alors on a les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $x, y, z \in [0,1]$*

$$U(x,y) \leq z \iff I_U(x,z) \geq y$$

2. Pour tout $x, y \in [0,1]$

$$x \leq y \iff I_U(x,y) \geq e$$

3. Pour tout $x, y \in [0,1]$

$$U(x, I_U(x,y)) \leq y$$

Preuve.

1. Soient $x, y, z \in [0,1]$ et supposons que $U(x,y) \leq z$ alors:

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad &: \quad y \in \{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq z\} \\ &\Longrightarrow \quad y \leq \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq z\} = I_U(x,z) \text{ d'où} \\ y \quad &\leq \quad I_U(x,z) \end{aligned}$$

   Supposons maintenant que $y \leq I_U(x,z)$ alors:

   $I_U(x,z) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leq z\}$

   Posons $I_U(x,z) = \alpha$ alors $U(x,\alpha) \leq z$

   D'autre part on a $y \leq \alpha$ ceci implique $U(x,y) \leq U(x,\alpha) \leq z$ d'où $U(x,y) \leq z$

2. Remplaçons dans (1) y par e et z par y on obtient:

$$\begin{aligned} U(x,e) \quad &\leq \quad z \iff I_U(x,z) \geq e \text{ alors} \\ x \quad &\leq \quad y \iff I_U(x,y) \geq e \end{aligned}$$

3. Posons $I_U(x,z) = \alpha$ alors $U(x,\alpha) \leq y$ d'où :

$$U(x, I_U(x,y)) \leq y$$

La preuve est compléte ■

Théorème 3.1.1 *[18]*

Soit $I_U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *est une R-implication d'une uninorme conjonctive* U *d'élément neutre* e*,* I_U *satisfait,* (OP_U)*,* (EP) *, pour tout* $x \in [0,1]$*.alors la fonction définie par:*

$$U'(x,y) = \inf\{z \in [0,1] \mid I_U(x,z) \geq y\}$$

est une uninorme conjonctive d'élément neutre e

Preuve.

$U(x, y) = \inf\{z \in [0, 1] \mid I_U(x, z) \geq y\}$

Grace à (OP_U) on a :

$$\begin{aligned} U^{'}(x, e) &= \inf\{z \in [0, 1] \mid I_U(x, z) \geq e\} \\ &= \inf\{z \in [0, 1] \mid z \geq x\} \\ &= x \end{aligned}$$

D'où e est l'élément neutre de $U^{'}$

Observer que (grace à (OP_U) et (EP)):

$$\begin{aligned} I_U(y, z) \quad \geq \quad x &\iff I_U(x, I(y, z)) \geq e \\ &\iff I_U(y, I(x, z)) \geq e \\ &\iff I_U(x, z) \geq y \end{aligned}$$

D'autre part on :

$$\begin{aligned} U^{'}(y, x) &= \inf\{z \in [0, 1] \mid I_U(y, z) \geq x\} \\ &= \inf\{z \in [0, 1] \mid I(x, z) \geq y\} \\ &= U^{'}(x, y) \end{aligned}$$

D'où la commuataivité

Soient $x_1, x_2, y \in [0, 1]$ avec $x_1 \leq x_2 \Rightarrow U(x_1, y) \leq U(x_2, y)$:

Maintenant on a $x_1 \leq x_2$ alors :

$$\begin{aligned} I_U(x_1, z) &\geq I_U(x_2, z) \geq y \text{ alors} \\ U^{'}(x_1, y) &\leq U^{'}(x_2, y) \end{aligned}$$

D'où la monotonie

On sait que $U^{'}(U^{'}(x, y), z) = U^{'}(z, U^{'}(x, y))$ par commutativité,

donc $U(U(x, y), z) = \inf\{t \in [0, 1] \mid I_U(z, t) \geq U(x, y)\}$.

D'autre part

$U^{'}(x, U^{'}(y, z)) = \inf\{t \in [0, 1] \mid I_U(x, t) \geq U^{'}(y, z)\}$, et par conséquent il suffit de prouver que pour tout $x, y \in [0,1]$,

$$I_U(z,t) \geq U^{'}(x,y) \iff I_U(x,t) \geq U^{'}(y,z)$$

On a de l'expression de

$U^{'}(x,y)$ que$I(x, U(x,y)) \geq y$. alors

$I_U(z,t) \geq U^{'}(x,y) \Longrightarrow I_U(x, I(z,t)) \geq I_U(x, U^{'}(x,y)) \geq y$.

La croissance par rapport au deuxième composant nous donne:

$$\begin{aligned} U^{'}(y,z) &= U^{'}(z,y) \leq U'(z, I_U(x, I_U(z,t))) \\ &= U^{'}(z, I_U(z, I_U(x,t))) \\ &\leq I_U(x,t) \end{aligned}$$

D'où l'associativité

$$U^{'}(1,0) = \inf\{z \in [0,1] \mid I_U(1,z) \geq 0\} = 0$$

D'où $U^{'}$est une uninorme conjonctive avec e comme élément neutre ■

3.1.2 S-implication

On a vu dans la sous section précedente qu'une implication résiduelle(R-implication) est une implication reliée avec une uninorme conjonctive par contre une strong implication (S-implication) est reliée avec une uninorme disjonctive, et une S-implicaton peut être considérer comme une généralisation de l'implication classique($\Longrightarrow$ dans la logique classique)

Définition 3.1.6

Soit U une uninorme disjonctive, N une négation forte, une strong implication I, notée par S-implication, est définie par:

$$I(x,y) = U(N(x), y) \forall\ x, y \in [0,1]$$

Remarque 3.1.3

Soit I une strong implication alors :

$I(0,0) = 1 \Longrightarrow U(N(0), 0) = 1 \Longrightarrow U(1,0) = 1$

pour cela U soit disjonctive

Exemple 3.1.2

Si on choisit $N(x) = 1 - x$ *et* $U_d = \begin{cases} \min(x,y) & si\ (x,y) \in [0,e], \\ \max(x,y) & sinon, \end{cases}$

alors $$I(x,y) = \begin{cases} \min(1-x,y) & si\ (x,y) \in [0,e], \\ \max(1-x,y) & sinon, \end{cases}$$

Proposition 3.1.5

Soient N *une négation forte et* U *une uninorme disjonctive d'élément neutre* $e \in]0,1[$, I *une strong implication alors:*

1. $I(x,e) = N(x)\ \forall\ x \in [0,1]$
2. $I(x,y) = I(N(y),N(x))\ \forall\ x,y \in [0,1]$.
3. $I(N(x),y) = U(x,y)\ \forall x,y \in [0,1]$

Preuve.

1. Immédiatement de la définition on a:

   $I(x,e) = U(N(x),e) = N(x)$

2. De la définition d'une strong implication on a:

$$\begin{aligned} I(N(y),N(x)) &= U(N(N(y)),N(x)) = U(y,N(x)) \\ U \text{ est commutative alors } U(y,N(x)) &= U(N(x),y) = I(x,y) \end{aligned}$$

   Alors $I(x,y) = I(N(y),N(x))\ \forall\ x,y \in [0,1]$

   $I(N(y),N(x))$ est la contraposée de $I(x,y)$

3. Immédiatement de la définition on a:

$$I(N(x),y) = U(NN(x),y) = U(x,y). \blacksquare$$

Remarque 3.1.4

$$I(p,q) = U(N(p),q)$$

Cette équation devient dans la logique classique

$$p \implies q \equiv \neg p \vee q$$

Et

$$I(p,q) = I(N(p),N(q))$$

similaire que la contraposition dans la logique classique

$$p \implies q \equiv \neg p \implies \neg q$$

Proposition 3.1.6

Soient $U(e,T,S)$ *une uninorme disjonctive,* N *une négation,* I *la* $S-$*implication définie par:*

$I(x,y) = U(N(x),y) \forall x,y \in [0,1]$ *et* $U_1 = (e_1,T_1,S_1)$ *et* $U_2 = (e_2,T_2,S_2)$ *deux uninormes alors si* U_1 *et* U_2 *sont toutes les deux conjonctives ou bien toutes les deux disjonctives alors l'équation:*

$$I(U_1(x,y),z) = U_2(I(x,z),I(y,z)) \qquad (1)$$

n'a pas une solution

Preuve.

Supposons que U_1 *et* U_2 *sont disjonctives et l'équation* (1) *ayant une solution*

Prenons $x = 1$ *et* $y = z = 0$ *dans* (1) *on obtient:*

$$\begin{aligned} I(U_1(1,0),0) &= U_2(I(1,0),I(0,0)) \\ &\implies I(1,0) = U_2(0,1) \\ &\implies 0 = 1 \end{aligned}$$

Ceci une contradiction

Supposons que U_1 et U_2 sont conjonctives et l'équation (1) ayant une solution

Prenons $x = 1$ et $y = z = 0$ dans (1) on obtient:

$$\begin{aligned} I(U_1(1,0),0) &= U_2(I(1,0),I(0,0)) \\ &\Longrightarrow I(0,0) = U_2(0,1) \\ &\Longrightarrow 1 = 0 \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction ■

Théorème 3.1.2 *[17]*

Soient $U(e,T,S)$ une uninorme disjonctive, N une négation, I la $S-$implication définit par:

$I(x,y) = U(N(x),y)\,\forall x,y \in [0,1]$ *et* $U_c = (e_c,T_c,S_c)$ *une uninorme conjonctive et* $U_d = (e_d,T_d,S_d)$ *une uninorme disjonctive* I*, et on a l'equation suivante*

$$(U_c(x,y),z) = U_d(I(x,z),I(y,z)) \qquad (2)$$

I, U_c *et* U_d *vérifiez l'équation (2) si et seulement si:*

U_c *et* U_d *sont* N*-duales et* U *est distributive sur* U_d

Preuve.

Supposons que I, U_c et U_d vérifiant l'équation (2) alors si on prend $z = e$ on obtient:

$$\begin{aligned} I(U_c(x,y),e) &= U_d(I(x,e),I(y,e)) \\ &\Longrightarrow N(U_c(x,y)) = U_d(N(x),N(y)) \end{aligned}$$

D'où U_c et U_d sont N-duales

De plus, de cette dualité on a:

$$\begin{aligned} I(U_c(x,y),z) &= U\left(N\left(U_c(x,y),z\right)\right) \\ &= U\left(U_d(N(x),N(y)),z\right) \text{ donc} \\ I(U_c(N(x),N(y)),z) &= U\left(U_d(x,y),z\right) \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
U_d(I(N(x),z),I(N(y),z)) &= U_d(U(NN(x),z),U(NN(y),z)) \\
&= U_d(U(x,z),U(y,z)) \text{ d'où} \\
U(U_d(x,y),z)) &= U_d(U(x,z),U(y,z))
\end{aligned}$$

D'où U est distributive sur U_d

Inversement, U_c et U_d sont N-duales et U est distributive sur U_d alors:

$$\begin{aligned}
U(U_d(x,y),z)) \quad &= \quad U_d(U(x,z),U(y,z)) \\
&\Longrightarrow \quad U(U_d(N(x),N(y)),z)) = U_d(U(N(x),z),U(N(y),z)) \\
&\Longrightarrow \quad U(N(U_c(x,y)),z)) = U_d(I(x,z),I(y,z)) \\
&\Longrightarrow \quad I(U_c(x,y)),z) = U_d(I(x,z),I(y,z))
\end{aligned}$$

D'où I, U_c et U_d vérifient l'équation (2) ■

Conclusion

Nous avons désiré, au terme de ce travail à comprendre la manière dont fonctionne l'opération binaire commuatative associative monotone U où l'élément neutre e doit être libre dans l'interval $[0, 1]$, et nous avons essayé de mettre en pratique cette opération qui s'appelle **"uninorme"**, L'uninorme U a deux natures soit disjonctive ou conjonctive, la première généralise la disjonction classique ($\vee$ dans la logique classique) et la deuxième permet d'étendre la conjonction classique ($\wedge$ dans la logique classique).

Nous avons mis en lumiére deux implications d'uninorme avec la présentation des définitions et les propréités fondamentales, ainsi que plusieurs exemples d'explication. Ce travail a rencontré quelques contraintes qui ont entravé en quelque sorte nos travaux, nous citons à titre d'exemples : la carence des ouvrages bibliographiques relatifs à notre sujet au niveau local et national, le sujet est nouvellement traité et selon le professeur P. Drygas (rencontré lors de la $3^{\text{éme}}$ conférence internationale ICAA tenue le 28 Avril 2015 à M'sila) qui travaille sur ce sujet qu'il n'y a pas une grande théorie mathématique sur cette opération binaire car elle est en cours de développement.

Bibliographie

[1] **C. Alsina, M. J. Frank, B. Schweizer,** Associative Functions: Triangular Norms and Copulas, World Scientific Publishing, Danvers 2006.

[2] **G. Beliakov, A.Pradera, T.Calvo,** Aggregation Functions A Guide for Practitioners, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 207.

[3] **B. De Baets**, Uninorms the known classes, In Proc, Third International FLINS Workshop on Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry,World Scientific, Antwerp 1998.

[4] **B. De Baets**, Idempotent uninorms, European J.Oper.Res 118 (1999) 631–642.

[5] **M. Detyniecki, R. R .Yager, B. Bouchon Meunier**, Specifying t-norme Based on the value of $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, Mathewave & Soft Computing 7 (2000) 77-87.

[6] **P. Drygas**, Discussion of the structure of uninorms, Kybernetika 41 (2005) 213–226.

[7] **P. Drygas**, Remarks about idempotent uninorms, J.Electrical Eng.57 (2006) 92–94.

[8] **P. Drygas**,On the structure of continuous uninorms, Kybernetika 43 (2007) 183–196.

[9] **P. Drygas,** A characterization of idempotent nullnorms, SCDP'02 Conference, 24-25 June 2002

[10] **P. Drygas,** Algebric aspects of construction of uninorms, The 3rd ICAA, M'sila 28-30 april 2015.

[11] **J. Fodor,** On Rational Uninorms, the Bilateral Scientific and Technological Cooperation Flanders–Hungary BIL00/51 (B-08/2000).

[12] **J. Fodor, R. Yager**, **A . Rybalov**, Structure of uninorms. Internat. J. Uncertain, Fuzziness Knowledge–Based Systems 5 (1997), 411–427.

[13] **I. Iancu,** Sur la construction d'une classe d'une t-norme, Université de Craviova, Faculté de Mathématique Roumanie.

[14] **H. Le Capitaine,** Opérateurs d'agrégation pour la mesure de similarité.Application a l'ambigute en reconnaissance de formes, thése de doctorat université de La Rochelle, Novombre 2009.

[15] **K. Menger**, Statistical metrics, Proc. National Academy of Science USA, 28(12) 535–537, 1942.

[16] **E. P Klemet, R. Mesiar,E.Pap,**Triangular norms, Kluwer Academic Puplishers - Dordrecht Boston London 2000.

[17] **D. Ruiz and J. Torrens**, Distributive idempotent uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems 11 (2003), 413-428.

[18] **D. Ruiz and J. Torrens**, Residual implications and co-implications from idempotent uninorms, In Proc, Summer School on Aggregation Operators 2003 (AGOP'2003), Alcala de Henares, Spain 2003, pp. 149-154.

[19] **Schweizer and A. Sklar**. Probabilistic Metric Spaces. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[20] **R. Yager and A. Rybalov**, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems, 80(1) 111–120, 1996.