Table des matières

0.1 Introduction

La théorie des opérateurs non bornés s'est développée à la fin des années 1920 et au début des années 1930 dans le cadre mathématique rigoureux pour la mécanique quantique. Le développement de la théorie est dû à John von Neumann et Marshall Stone. Von Neumann a introduit des graphiques pour analyser les opérateurs non bornés en 1936.

Les opérateurs non borné sont les opérateurs linéaires fermés elles sont une classe d'opérateurs linéaires sur les espaces de Banach. Ils sont plus généraux que les opérateurs non borné et ne sont donc pas forcément continus, mais ils conservent toujours des propriétés suffisantes pour pouvoir définir le spectre et les calculs fonctionnels (avec certaines hypothèses) pour ces opérateurs. De nombreux opérateurs linéaires importants qui non borné se révèlent fermés, tels que la dérivée et une grande classe d'opérateurs différentiels.

Depuis les années 70. la théorie des perturbations généralisées appliquée à la physique des réacteurs a connu un développement des plus importants. Si les domaines couverts par cette théorie sont très vastes (calculs de coefficients de réactivité. cinétique. analyse de sensibilité et d'incertitudes. ...). la majorité des applications reste confinée à I 'approximation de la diffusion.

Ce mémoire s'articule autour d'une notion de perturbation des opérateurs linéaire et composée de quatre chapitre qui sont les suivant:

Dans le premier chapitre on donne un perçu général sur les opérateur linéaire borné et étudie l'opérateur inverse et l'opérateur compact et leur spectre.

Dans le deuxième chapitre nous fournissons des propriétés générales du les opérateurs non borné et tout ce qui s'en suit, comme propriétés et notion fondamentales, comme je l'ai mentionné invisibilité des opérateurs non bornés et leur l'extension.

Dans le troisième chapitre nous décrirons complètement à l'étude du les propriétés des opérateurs fermé quelques notes sur les opérateurs farmables.

Nous nous intéressons dans le dernier chapitre à l'étude de perturbation des opérateurs bornes et compact quelques propriétés fondamentales sur perturbation des opérateurs fermés.

Chapitre 1

Opérateurs linéaires bornés

En mathématiques, la notion d'opérateur borné est un concept d'analyse fonctionnelle. Il s'agit d'une application linéaire A entre deux espaces vectoriels normés E et F telle que l'image de la boule unité de E est une partie bornée de F. On montre qu'ils s'identifient aux applications linéaires continues de E dans F. L'ensemble des opérateurs bornés est muni d'une norme issue des normes de E et de F, la norme d'opérateur.

1.1 Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.1.1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivant

$$\forall x_n \in G; x_n \to x_0 \Longrightarrow A(x_n) \to A(x_0)$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A(x_0).$$

Remarque 1.1.1

L'opérateur A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

Théorème 1.1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en un point x_0 de G.

Corollaire 1.1.1

Comme l'espace vectoriel contient $\{0\}$ alors A est dit continu partout sur E un espace vectoriel s'il est continu en point $\{0\}$.

Notation 1.1.1

- L'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E, F)$.
- L'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans lui même est noté par $\mathcal{L}(E)$.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F deux espaces vectoriels normés est dit borné s'il existe un réel C strictement positif pour lequel, pour tout x appartenant à E, l'inégalité suivante est réalisée

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

le plus petit des majorants C convenable est appelé norme de l'opérateur A, noté $\|A\|$ et donnée par

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|A(x)\|_F .$$

Théorème 1.2.1

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur K et soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est un opérateur linéaire borné.

2. A est continu sur E.

3. A est continu en un point x_0 de E.

4. A est continu en 0_E.

5. L'image de la boule unité B est bornée, et $\|A\|$ est le rayon de la plus petite boule de F contenant les images des éléments.

6. L'opérateur A est Lipschitzien, et $\|A\|$ est alors sa constante de Lipschitz.

$$\forall (x, y) \in E^2, \|Ax - Ay\|_F = \|A(x - y)\|_F \leq \|A\| \|x - y\|_E .$$

Proposition 1.2.1

1. La norme $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.

2. Un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finies est toujours un opérateur borné.

   Plus généralement, c'est le cas de toutes les opérateurs linéaires pour les quelles l'espace de départ est de dimension finie.

Exemple 1.2.1

1. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach

$$I : E \to E$$

$$x \to I(x) = x$$

   est un opérateur linéaire borné et $\|A(x)\|_E = \|x\|_E \leq 1 \|x\|_E$, $\forall x \in E$ alors $\|A\| = 1$.

2. L'opérateur linéaire $L : P \to xp'(x)$ de $\mathbb{R}[x]$ dans lui même ne saurait, quel que soit le choix de norme, être un opérateur Lipschitzienne puisque pour tout entier n, $L(x^n) = nx^n$.

3. L'ensemble G des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H)$ est ouvert (pour la topologie induite par la norme d'opérateur).

1.3 Inversibilité des opérateurs linéaires

Dans cette section, on regroupe certains résultats sur les opérateurs inversibles. En particulier, on donne une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur.

Définition 1.3.1

On rappelle qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{L}(E)$, i.e. il existe $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, où I désigne l'opérateur identité de E.

Remarque 1.3.1

On note $GL(E)$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.

Théorème 1.3.1 *(de Banach)*

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $A : E \to F$, donc si A est bijectif alors A^{-1} existe et borné.

Proposition 1.3.1

Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

2. *Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $||Ax||_F \geq C||x||_E$.*

3. *$(F, ||\cdot||_F)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{k}$.*

Preuve.

- Montrons que 1. entraîne 2.

  Puisque A^{-1} est continue, on a

$$\forall x \in E,\ ||A^{-1}(Ax)||_E \leq ||A^{-1}||||Ax||_F.$$

  Donc, pour tout $x \in E$, $||Ax||_F \geq ||A^{-1}||^{-1}||x||_E$.

- Montrons que 2. entraîne 3.

  Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans F. L'opérateur A étant bijectif, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que,

  pour tout $n \in N$, $Ax_n = y_n$.

$$||x_p - x_q||_E \leq C^{-1}||A(x_p - x_q)||_F \leq C^{-1}||y_p - y_q||_F.$$

  Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E et, par suite, converge vers un élément x de E. Alors, puisque A est continue, la suite de terme général $y_n = Ax_n$ converge vers $Tx \in F$. On en déduit que X est un espace de Banach.

- Enfin, 3. entraîne 1.

  D'après le Théorème de Banach.

■

Corollaire 1.3.1

Soient $(F, ||\cdot||_F)$ *un espace de Banach sur* K *et* $A \in \mathcal{L}(E, F)$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe* $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *on a* $||Ax||_F \geq C||x||_E$.

2. A *est injectif et* $\mathrm{Im}(A)$ *est fermé dans* F .

Preuve.

Montrons que 1. entraîne 2.

On pose $X := \mathrm{Im}(A)$.

Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $||Ax||_F \geq C||x||_E$.

Alors, A est injectif donc est une bijection de E sur X. D'après la Proposition président, on en déduit que $X := \mathrm{Im}(A)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans F .

Montrons que 2. entraîne 1.

Supposons A injectif et X fermé dans F . Alors, A est une bijection de E sur X et X est un espace de Banach. D'après la Proposition président, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $||Tx||_F \geq C||x||_E$. ■

1.4 Opérateurs compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A\left(G\right)$ dans F.

Autrement dit, la fermeture $A\left(G\right)$ est compacte.

On a plusieurs propriétés et caractérisations intéressantes de la compacité des opérateurs:

Définition 1.4.1 (*Ensembles relativements compacts*)

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{U_n\}$ de G, il existe une sous suite $\left\{U_{n(k)}\right\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.4.1 (*critère de compacité*)

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F.

Lemme 1.4.1

Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\phi \in G$, on a

$$\|\varphi - \phi\| \geq \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

Preuve.

En effet, soit f un élément de E tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\phi \in E} \|f - \phi\| = \beta > 0,$$

choisisson un élément $\psi \in G$ tel que,

$$\beta \leq \|f - \psi\| =\leq \frac{\beta}{\alpha},$$

soit φ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \psi}{\|f - \psi\|}$$

alors le vecteur φ est de norme égale à l'unité ($\|\varphi\| = 1$).

De plus, on a

$$\|\varphi - \phi\| = \frac{1}{\|f - \psi\|} \|f - \{\psi + (\|f - \psi\| \phi)\}\| \geq \frac{\beta}{\|f - \psi\|} \geq \alpha.$$

■

Théorème 1.4.2

L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve.

Soit φ_1 un élément de E, tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = span \{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de E car G_1

est de dimension finie. D'après lemme 1.6, il existe un élément $\varphi_2 \in E$, tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et

$\|\varphi_1 - \varphi_2\| > 1/2$. Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2 = span\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un

élément $\varphi_3 \in E$ avec $\|\varphi_3\| = 1$, $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > 1/2$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > 1/2$ on répète la même procédure jusqu'à

l'obtention d'un suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > 1/2$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarque que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. ∎

Corollaire 1.4.1

La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

Théorème 1.4.3

Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.

Exemple 1.4.1

L'opérateur identique I de E dans E est borné mais n'est pas compact dans un espace de dimension infini.

Remarque 1.4.1

Toute opérateur linéaire est un opérateur compact dans un espace de dimension fini.

1.5 Théorie spectrale des opérateurs linéaires

Etant un opérateur linéraire A défini dans un espace de Hilbert E, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. quel que soit λ on a $D_{A-\lambda I} = D_A$.

L'inverse de $A - \lambda I$, quand il existe, est appelé résolvant de l'opérateur A, on note $R_\lambda(A)$.

L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de $R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans E.

Définition 1.5.1 *(Ensemble résolvant)*

On appelle ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A, et on note $\rho(A)$ tel que

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C},\ \textit{tel que } (A - \lambda I)^{-1} \textit{ existe et borné sur } E\right\}.$$

Définition 1.5.2 *(Spectre d'un opérateur)*

On appelle spectre de A le complémentaire de $\rho(A)$ et on note $\sigma(A)$ i.e

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \textit{tel que } (A - \lambda I) \textit{ n'est pas inversible}\}.$$

Définition 1.5.3

1. *L'ensemble des valeurs de λ pour les quelles $R_\lambda(A)$ n'existe pas est appelé le spectre ponctuel (ou spectre discret) de A. On note $\sigma_p(A)$.*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

2. *L'ensemble des valeurs de λ pour les quelles $R_\lambda(A)$ existe et à domaine dense mais n'est pas borné est appelé le spectre continue. On note $\sigma_c(A)$.*

$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \overline{R_\lambda(A - \lambda I)} = E \textit{ et } (A - \lambda I)^{-1} \textit{ est non borné}\right\}.$$

3. *L'ensemble des valeurs de λ pour les quelles $R_\lambda(A)$ existe mais n'est pas à domaine dense est appelé le spectre résiduel de A. On note $\sigma_r(A)$.*

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \overline{R_\lambda(A - \lambda I)} \neq H\right\}.$$

Remarque 1.5.1

1. *Les éléments du spectre discret sont appelés les valeurs propres de A.*

2. *Soit A un opérateur linéaire, alors $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.*

3. *Le spectre discret n'est pas nécessairement un ensemble dénombrable.*

Exemple 1.5.1

Soit M_φ l'opérateur de multiplication défini de $C([0,1])$ dans lui même par

$$M_\varphi(f) = \varphi f \ , \forall \varphi \in C([0,1]).$$

Le spectre ponctuel (l'ensemble des valeurs propres) de M_φ est exactement l'image de φ i.e $\sigma_p(M_\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi) = \varphi([0,1])$.

En effet

$$(M_\varphi - \lambda I)f(x) = 0$$

$$\Rightarrow M_\varphi f(x) - \lambda I f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x)f(x) - \lambda f(x) = 0$$

$$\Rightarrow [\varphi(x) - \lambda]f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \lambda, \ \forall x \in [0,1].$$

Donc $\sigma_p(M_\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi) = \varphi([0,1])$.

Remarque 1.5.2

- *En dimension finie n.*

  1. *Le spectre est exactement l'ensemble des valeurs propres.*

  2. *Si $A - \lambda I$ est injectif et de rang n alors il est bijectif.*

- *La situation est très différente en dimension infinie.*

Proposition 1.5.1

Soit A un opérateur linéaire, alors

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Définition 1.5.4

Le rayon spectral est défini par

$$r(A) = \sup \{|\lambda|\,,\ \lambda \in \sigma(A)\}\,.$$

Exemple 1.5.2

On défini l'opérateur de translation sur $\mathbb{R}$ par

$$(A_\alpha \varphi)(x) = \varphi(x - \alpha).$$

On a

$$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} \ \textit{et} \ A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- *Si $\alpha = 0$*

  $\sigma(A_\alpha) = \sigma_p(A_\alpha) = \{1\}$.

  En effet,

  si $\alpha = 0$ alors $(A_0\varphi)(x) = \varphi(x-0) = \varphi(x)$ alors A_0 présente l'opérateur de l'identitie.

$$(A_0 - \lambda I)\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow A_0\varphi(x) - \lambda I\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow [1 - \lambda]\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1.$$

- *Si* $\alpha \neq 0$

  On définie la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ *par* $\mathcal{F}\varphi(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\varphi(x)dx$.

  Alors $\sigma(A_\alpha) = \sigma(\mathcal{F}A_\alpha\mathcal{F}^{-1})$ *tels que* $(\mathcal{F}A_\alpha\varphi)(k) = e^{-i\alpha k}$ *Nous avons cela* $(\mathcal{F}A_\alpha\mathcal{F}^{-1}\psi)(k) = e^{-i\alpha k}\psi(k)$ *Ainsi* $\mathcal{F}A_\alpha\mathcal{F}^{-1}$*est un*

  opérateur de multiplication par $e^{-i\alpha k}$. *Donc, si* $\alpha \neq 0$,

$$\sigma(A_\alpha) = \{e^{-ik\alpha},\, k \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C},\, |z| = 1\} \text{ et } \sigma_p(A_\alpha) = \sigma_r(A_\alpha) = \emptyset.$$

1.5.1 Spectre d'un opérateur compact

Théorème 1.5.1

Soit A *un opérateur compact de* E *dans* E, *alors*
$\sigma(A)$ *est aussi compact dans* $\mathbb{C}$.

Théorème 1.5.2

Soit A *un opérateur compact sur* E, *avec* $\dim E = \infty$ *alors on a l'une des situation suivantes:*

1. *Ou bien* $\sigma(A) = \{0\}$.
2. *Ou bien* $\sigma(A)$ *est fini.*
3. *Ou bien* $\sigma(A)$ *est une suite qui tend vers* 0 *i.e* $\sigma(A) = \left\{\lambda_n;\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0,\, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$.

Proposition 1.5.2

Soit A *un opérateur compact, alors*

- $0 \in \sigma(A)$.
- *Si* $\lambda \neq 0$ *on a* $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$.

Preuve.

- Soit $T = A - \lambda I$ tel que A un opérateur compact, si $\lambda = 0$ alors $T = A$ elle n'est pas inversible car elle est compact donc $0 \in \sigma(A)$.
- Soit A un operateur compact.
  1. On pose $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \notin \sigma_p(A)$, alors
  $$\begin{aligned} & A - \lambda I \text{ est injectif.} \\ \Rightarrow\ & A - \lambda I \text{ est surjectif.} \\ \Rightarrow\ & A - \lambda I \text{ est bijectif.} \\ \Rightarrow\ & A - \lambda I \text{ est inversible.} \end{aligned}$$
     contradiction donc $\lambda \in \sigma_p(A)$.
  2. On pose $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$
     car $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

■

Lemme 1.5.1

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, on pose $T = I - A$. Soit $M \subset E$ un sous espace fermé tel que $T_{\setminus M}$ est injectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout x dans M, et donc $T(M)$ est un sous espace fermé.

Théorème 1.5.3

Soit A un opérateur compact et $\lambda \in \sigma_p(A)$.Si $\lambda \neq 0$, alors le noyau de $A - \lambda I$ est de dimension finie.

Preuve.

Supposons par l'absurde que $\ker(A - \lambda I)$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme A est compact on peut extraire une sous suite (e_{n_k}) telle que (Ae_{n_k}) converge. Mais pour $n_k \neq n_j$, on a
$$\|Ae_{n_k} - Ae_{nj}\| = |\lambda| . \|e_{n_k} - e_{nj}\| = \sqrt{2}\,|\lambda| .$$

Ce qui contredit le fait que (Ae_{n_k}) est une suite de cauchy. ■

Théorème 1.5.4

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur compact, alors le noyau de* $I - A$ *est de dimension finie et* $\mathrm{Im}(I - A)$ *est fermé.*

Théorème 1.5.5

Soit A *un opérateur compact, alors*

$$\lambda \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_r(A^{-1}).$$

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

Un opérateur non continu ne peut pas être défini sur E tout entier, on cherche alors à le définir sur un domaine $D(A)$ qui ait des bonnes propriétés,

2.1 Opérateurs linéaires

Définition 2.1.1

Soient E et F deux espaces vectoriel normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $x \to Ax \in F$ définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$,

nommé domaine de A.

$$D(A) = \{x \in E \text{ tel que } A \text{ est défini en } x\}.$$

2.2 Opérateurs non bornés

Définition 2.2.1 *(Opérateur non borné)*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'un opérateur linéaire A défini sur $D(A) \subset E$

dans F est un opérateur non borné si

$$A \text{ n'est pas définis en chaque élément de } E \text{ (i.e : } D(A) \neq E).$$

Exemple 2.2.1

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$ *et* $D(A) = \{u \in E : xu \in E\}$.

On définit A *par*

$$(Au)(x) = xu(x) \text{ pour } u \in D(A).$$

Alors

A *est un opérateur linéaire non borné car* $D(A) \neq E$ *puisque* $\exists u \in L^2(\mathbb{R})$; $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ *mais* $(Au)(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ *donc* $u \notin D(A)$.

Définition 2.2.2 *(opérateur borné)*

Soit A *un opérateur fermé à domaine* $D(A)$.

Alors

$$A \text{ est borné si et seulement si } D(A) = E.$$

La plupart des opérations dans les opérateurs non borné sa marche pas et on générale le problème est le domaine de définition de cette opérateur

par exemple :

$$\begin{aligned} A(B+C) &\neq AB + AC \text{ car } D(A(B+C)) \neq D(AB+AC) \\ &\text{et} \\ (A+B)-B &\neq A \text{ car } D((A+B)-B) = D(A) \cap D(B) \neq D(A). \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1

Dans la pratique pour montrer que un opérateur A *est non borné il suffit de trouver une suite* $x_n \in D(A)$ *telle que* $\|x_n\| \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\|Ax_n\| \to \infty$.

Par conséquent on peut montrer qu'un opérateur A *est non borné par trouver une suite* $x_n \in D(A)$ *converge vers* 0 *telle que la suite* (Ax_n) *ne converge pas vers* 0.

Exemple 2.2.2

Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A) = C^1\ ([0,1])$ un sous espace vectoriel de $L^2([0,1])$ défini par

$$A\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x).$$

On va vérifie l'opérateur A borné ou non.

En effet, on choisi $\varphi_n(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_2^2 &= \int_0^1 |\varphi_n(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \|A\varphi_n\|_2^2 &= \int_0^1 |A\varphi_n(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 \left|nx^{n-1}\right|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left|n^2 x^{2n-2}\right| dx \\ &= \frac{n^2}{2n-1} \end{aligned}$$

alors $\varphi_n \to 0$ pour $n \to \infty$ mais $A\varphi_n \to \infty$ pour $n \to \infty$.

Donc $(A, D(A))$ est un opérateur non borné.

Remarque 2.2.2

On parle sur les opérateurs non borné seulement dans l'espace de dimension infini car dans dimension fini tous les opérateurs linéaires sont bornés.

2.3 Noyau, image et graphe d'un opérateur non borné

Définition 2.3.1 *(Noyau, image et graphe d'un opérateur)*

On appelle respectivement noyau, image et graphe de A les ensembles:

- $\ker(A) = \{u \in D(A) \ ; \ Au = 0\}$.
- $\mathrm{Im}(A) = \{Au \ ; \ u \in D(A)\}$.
- $G(A) = \{(x; Ax) \ ; \ x \in D(A)\}$.

Proposition 2.3.1

Un sous espace $G \subset E \times F$ est un graphe d'un opérateur linéaire si est seulement si

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0.$$

Exemple 2.3.1

Si $D(A) = \left\{(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left|x_n\right|^2 < \infty\right\}$,

$A : D\left(A\right) \to \ell^2(\mathbb{N})$ *avec* $(Ax_n)_n = (nx_n)_n$ *alors* $(A, D\left(A\right))$ *est un opérateur linéaire.*

2.4 Norme du graphe d'un opérateur non borné

Définition 2.4.1

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A : D(A) \subset E \to F$.

$$\langle x, y\rangle_A = \langle x, y\rangle_E + \langle Ax, Ay\rangle_F, \forall x, y \in D(A).$$

Définie un produit scalaire dans le domaine $D(A)$. La norme correspondant

$$\|x\|_A = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|Ax\|_F^2} \ \forall x \in D(A),$$

est appelée la norme du graphe de l'opérateur A. Elle est équivalu à la norme

$$\|x\|_A^{'} = \|x\|_E + \|Ax\|_F \ \ \forall x \in D(A).$$

Remarque 2.4.1

La norme de graphe d'un opérateur n'est pas équivalente à la norme de l'espace E.

Corollaire 2.4.1

Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose en autre u bijective de E sur F, alors

$$u^{-1} \in \mathcal{L}(E, F).$$

Théorème 2.4.1

Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$.

On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|x\|_2 \leq c \|x\|_1 ; \ \forall x \in E$$

alors les deux normes $\|.\|_1$et $\|.\|_2$ sont équivalentes (i.e il existe $c^{'} > 0$ avec $\|x\|_1 \leq c' \|x\|_2 ; \forall x \in E$).

2.5 Somme de deux opérateurs linéaires

Définition 2.5.1

Soient A et B deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $A + B$ par :

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

de domaine

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B).$$

Remarque 2.5.1

L'opérateur $A - \lambda I$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, de même domaine que A.

2.6 Opérateur produit

Définition 2.6.1 *(La multiple complexe)*

1. *La multiple complexe αA pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ est un opérateur linéaire défini de E dans F par:*

   $$(\alpha A)(x) = \alpha A(x), \forall x \in D(\alpha A), \alpha \neq 0$$

   de domaine

   $$D(\alpha A) = D(A).$$

2. *La multiple αA pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0$ par l'opérateur nul est défini de E dans F par:*

   $$(0)(x) = 0 \ , \forall x \in D(0).$$

   de domaine

   $$D(0) = E$$

Définition 2.6.2 *(La multiple de deux opérateur)*

Soient E, F et H des espaces vectoriel, et soient $A : E \to F$ et $B : F \to H$ deux opérateurs linéaires de *domaines* $D(A) \subseteq E$ *et* $D(B) \subseteq F$ *respectivement.*

On définit l'opérateur composition BA *(dit aussi opérateur produit) de* A *et* B *par :*

$$(BA)(x) = B(Ax)\ ,\ \forall x \in D(BA)$$

de domaine

$$D(BA) = \{\forall x \in D(A) : Ax \in D(B)\}\,.$$

- *Si* C *est un opérateur de* H *dans un quatrième espace vectoriel normé* G*, alors*

$$(CB)A = C(BA).$$

- *Si* C *est un opérateur de* F *dans* H*, alors*

$$(B + C)A = BA + CA$$

de domaine

$$D((B + C)A) = D(BA + CA)$$

2.7 Opérateur inverse

Définition 2.7.1

Soient E *et* F *deux espaces vectoriel normés. Un opérateur* $A : E \to F$ *est dit inversible s'il existe un opérateur borné* $B : F \to E$ *tel que*

$$AB = I_F \text{ et } BA = I_{D(A)}.$$

Et on note l'opérateur inverse B *par* A^{-1} *tel que*

$$A^{-1} : D(A^{-1}) := A(D(A)) \to F : Ax \to x.$$

2.8 Etude la densité

Définition 2.8.1

Soient E et F deux espace normés. Un opérateur $A : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $D(A)$ est dense dans E c'est-à-dire $\overline{D(A)} = E$.

2.9 Inégalité des opérateurs non bornés

Définition 2.9.1

Soient E un espace vectoriel et $A : D(A) \subset E \to E$, $B : D(B) \subset E \to E$ deux opérateurs linéaires. Les deux opérateurs A et B sont égaux si

1. *Ils ont le même domaine $D(A) = D(B)$.*
2. *$\forall \varphi \in D(A) = D(B)$; $A\varphi = B\varphi$.*

2.10 Extension des opérateurs non bornés

Définition 2.10.1

On dit que $(S, D(S))$ est un extension de $(A, D(A))$ si

1. *$D(A) \subset D(S)$,*
2. *$A(x) = S(x)\ \forall x \in D(A)$.*

On note $A \subset S$.

Proposition 2.10.1

Soient A, B deux opérateurs linéaires et $G(A)$, $G(B)$ leurs graphes respectivement. Alors

$$B \subset A \text{ si et seulement si } G(B) \subset G(A).$$

Chapitre 3

Opérateurs fermés

Les opérateurs engendrant des problèmes importants de la physique mathématique sont, en général des opérateurs différentiels partiellement définis sur un espace de Hilbert de type L^2 et non continus sur leurs domaines de définitions pour la topologie induite, ils sont dits non bornés.

3.1 Opérateurs fermés

Définition 3.1.1 *(Opérateur fermé)*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur non borné $A : D(A) \to F$ (où $D(A)$ est un sous espace de E) est dit fermé si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Proposition 3.1.1

Soit A un opérateur non borné, de domaine inclus dans E et à valeurs dans F.

A est fermé si seulement si pour toute suite (x_n) dans $D(A)$ admettant dans E une limite x et dont l'image

par A converge, on a $x \in D(A)$ et $A(x_n) \to A(x)$.

i.e

$$\begin{cases} \forall (x_n)_n \subset D(A) \\ x_n \to x \text{ dans } E \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}.$$

Remarque 3.1.1

On note par $C(E)$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans E.

Proposition 3.1.2

L'opérateur $(D(A), A)$ est fermé sur E si et seulement si $(D(A), \langle , \rangle_A)$ est espace de Hilbert.

Preuve.

Si A est fermé, soit $(x_n)_n$ une suite de cauchy dans $(D(A), <, > A)$ alors $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de Cauchy dans E, elle convergent donc respectivement vers x et y dans E, de plus $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

$$\|x_n - x\|_A = \|x_n - x\|_A + \|Ax_n - Ax\|_A \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

D'où $D(A)$ est complet pour $<, >_A$.

Réciporoquement, si $(D(A), <, >_A)$ est complet, $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergente vers x et $(Ax_n)_n$ convergente vers y dans E, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(D(A), <, >_A)$ ainsi il existe z dans $D(A)$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - z\|_A = 0$$

Or

$$\|x_n - z\|_A = \|x_n - z\|_A + \|Ax_n - Az\|_A$$

D'où, $(x_n)_n$ converge vers z et $(Ax_n)_n$ converge vers Az dans E, comme E est séparé alors $x = z$ et $Ax = Az = y$. ■

Proposition 3.1.3

Si A est fermé, alors

1. *αA est fermé sur $D(A)$.*

2. $\ker A$ *est fermé dans* E*.*

Preuve.

1. Soit $f_n \in D(A)$ qui converge vers f. Or,$A\ f_n \to y$, alors

   $\alpha f_n \in D(A) \to \alpha f$. Or,$A\ (\alpha f_n) \to \alpha y$ donc comme A est fermé on a $f \in D(A)$ et $Af = y$, alors

   $\alpha f \in D(A)$ et $A(\alpha f) = \alpha y$ donc αA est fermé sur $D(A)$.

2. Soit $f_n \in \ker A$ qui converge vers f. Or, $f_n \to f$ et $Af_n = 0$ donc comme A est fermé on a $f \in D(A)$ et $Af = 0$ donc $f \in \ker A$.

■

Proposition 3.1.4

Soit A *un opérateur non borné à domaine dense dans* E *alors:*
Si $\mathrm{Im}(A)$ *est fermé dans* E *et il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\|Ax\| \geq c\,\|x\|\,, \forall x \in D(A).$$

Alors A *est fermé dans* E*.*

Théorème 3.1.1

L'inverse d'un opérateur fermé est fermé.

Preuve.

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé, alors

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi) : \varphi \in D(A)\}\,.$$

est fermé. Et

$$G(A^{-1}) = \{(A\varphi, \varphi) : \varphi \in D(A)\}\,.$$

est fermé alors d'après théorème de graphe fermé A^{-1} est fermé. ■

3.1.1 La relation entre les opérateurs bornés et fermés

Proposition 3.1.5

A un opérateur linéaire borné à domaine $D(A) \subset E$ dans $F \Rightarrow (A, D(A))$ est un opérateur fermé.

Preuve.

On pose $(\varphi_n) \in D(A)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans E avec $A\varphi_n \to y$ dans F. Comme A est borné alors $D(A) = E$ et on applique le définition de la continuité on conclure $\varphi \in D(A)$ et $A\varphi = y$. ■

Remarque 3.1.2

Un opérateur fermé n'est pas nécessairement borné.

Exemple 3.1.1

1. *Soit $E = F = C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle réel $[a,b]$, muni de la norme convergence uniforme. L'opérateur ∂ de dérivation, défini sur le sous espace des fonctions de classe C^1,est fermé mais non borné.*

2. *Sur $C([0,1])$ muni de la norme: $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |x(t)|$, on définit l'opérateur A par*

$$Ax(t) = \frac{d}{dt}x(t),\ \forall x \in C^1\left([0,1]\right).$$

A est un opérateur de dérivé alors elle est fermé, par contre A n'est pas borné car pour $\{x_n(t)\} = \{t^n\}$, on a

$$\sup_{t\in[0;1]} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \sup_{t\in[0;1]} \frac{\|nt^{n-1}\|}{\|t^n\|} = n \to +\infty.$$

Proposition 3.1.6

$$\left\{\begin{array}{l} D(A) \text{ un sous espace fermé de } E \\ A \text{ un opérateur fermé} \end{array}\right. \Rightarrow (D(A), A) \text{ est un opérateur borné.}$$

Proposition 3.1.7

Si $D(A) = E$ alors en vertu du théorème du graphe fermé tout opérateur fermé est borné.

3.2 Opérateurs fermables

Définition 3.2.1 *(Opérateur fermable)*

Un opérateur A est dit fermable s'il possède un prolongement fermé, autrement dit si l'adhérence de son graphe est le graphe d'un opérateur $\overline{A}$, qu'on appelle alors fermeture de A.

Définition 3.2.2

$(A$ *est fermable*$) \Leftrightarrow ((0, y) \in \overline{G(A)} \Rightarrow y = 0)$.

Proposition 3.2.1

Soit A un opérateur non borné à domaine dense $D(A)$.

On dit que A est fermable si et seulement si le sous espace $G(A)$ est le graphe d'un opérateur linéaire

sur E.

Proposition 3.2.2

Un opérateur linéaire est fermable si et seulement s'il admet une extension fermée.

Proposition 3.2.3

La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de A et notée $\overline{A}$.

Preuve.

$\overline{A}$ est une extension fermée de A. Soit B extension fermée de A

$A \subset B$, $G(A) \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B)$ d'ou $\overline{A} \subset B$. ■

Il existe, néanmoins, des opérateurs qui n'admettent aucune extension fermée et par suite ils sont non fermables. Si A est fermable, on note par

$D(\overline{A}) = \{x \in E$; il existe une suite $(x_n)_n \in D(A)$telle que (x_n) converge vers x dans E et $(Ax_n)_n$ ait une

et

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n \text{ pour } x \in D(A).$$

Proposition 3.2.4

Tout opérateur $(D(A), A)$ borné est fermable, $\overline{D(A)} = D(\overline{A})$ et A est borné sur $D(\overline{A})$.

Preuve.

Soit $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergente vers 0 et $(Ax_n)_n$ convergente vers y dans E. Alors

$$\|Ax_n\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E)} \|x_n\| \to 0.$$

D'où, $y = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$. Ainsi A est fermable.

Par définition, on a toujours

$$D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}.$$

Inversement, si $x \in \overline{D(A)}$ alors $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $(x_n)_n \in D(A)$. Comme A est borné sur $D(A)$, $(Ax_n)_n$ devient de Cauchy donc convergente dans E, alors $x \in D(\overline{A})$.et $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A}x_n = \overline{A}x$ est bien borné sur $D(\overline{A})$. ■

Proposition 3.2.5

$$A \textit{ est un opérateur fermable } \Rightarrow G(\overline{A}) = \overline{G(A)}.$$

Proposition 3.2.6

Soit A un opérateur non borné, de domaine inclus dans E et à valeurs dans F.

A est fermable si seulement si pour toute suite (x_n) dans $D(A)$ converge vers 0 et dont l'image par A

converge, on a $A(x_n) \to 0$.

Corollaire 3.2.1

Si A est injectif et fermable.Alors,

1. *$Im\overline{A} = \overline{ImA}$.*

2. *A^{-1} est borné.*

3. *A^{-1} est fermable si et seulement si $\overline{A}$ est injectif et on a $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$.*

Chapitre 4

Perturbation des opérateurs linéaires

On se propose dans cette chapitre de voir, pour différents caractères des opérateurs A et B, la nature de l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A) \cap D(B)$ supposé dès maintenant non nul. Un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur $A + B$ lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B.

4.1 Perturbation des opérateurs bornés

Théorème 4.1.1

Soient A et B deux opérateurs borné alors,

$$A + B \text{ est un opérateur borné.}$$

4.2 Perturbation des opérateurs compacts

Proposition 4.2.1

Soient A un opérateur compact et B un opérateur borné, alors

$$A + B \text{ est un opérateur borné.}$$

Remarque 4.2.1

Soient A un opérateur compact et B un opérateur borné alors,

$$A + B \text{ n'est pas un opérateur compact.}$$

Exemple 4.2.1 *(perturbation de l'idendité)*

Soit $(D(A), A)$ un opérateur compact.

$T = A \pm I$ on a $(D(T), T)$ n'est pas un opérateur compact mais borné.

Théorème 4.2.1

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Preuve.

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite borné de E et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de F alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x), \text{ avec } \varphi_n \in E,\ n \in \mathbb{N}.$$

A_1 et A_2 étant compacts,

on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de $\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites converges qui donne par leur somme une

sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, A

donc est compact. ■

Théorème 4.2.2

Le produit AB de deux opérateurs borné A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve.

Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB

est compact.

D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergent $B\varphi_{n(k)}(x)$,

et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB

est compact. ■

4.3 Perturbation des opérateurs fermés

Remarque 4.3.1

Perturbation de deux opérateurs fermés n'est pas nécessarement fermé.

Exemple 4.3.1

Soit $(D(A), A)$ un opérateur fermé.

$A - A = 0$ *et zéro est un opérateur non fermé.*

Alors le perturbation $(A - A)$ est un opérateur non fermé.

Théorème 4.3.1

Soit A un opérateur fermé alors:

- *Pour tout opérateur borné B, l'opérateur $A + B$ est fermé.*
- *Pour tout opérateur compact B, l'opérateur $A + B$ est fermé.*

Preuve.

1. On pose $(f_n) \in D(A + B)$ telle que $f_n \to f$ et $(A + B)\, f_n \to g$ dans E.

   Comme B est borné donc $Af_n \to g - Bf$ dans E.

Comme A est fermé donc $f \in D(A)$ et $Af \to g - Bf$ alors $(A+B)\,f = g$.

D'ou $A+B$ est fermé.

2. Soit B un opérateur compact alors elle est borné et soit A un opérateur fermé.

   Donc $A+B$ est fermé.

■

Exemple 4.3.2 *1. Si A est fermé alors $A - \lambda I$ est fermé où λ est un scalaire et I est l'opérateur d'identité car I est borné.*

2. Soit $(A, C([a,b]))$ un opérateur d'intégrale de noyou k continu défini par:

$$A\varphi(x) = \int_b^a k(x,y)\varphi(y)dy.$$

Alors A est compact.

Soit $(B, C^1([a,b]))$ un opérateur de dérivé défini par

$$B\varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x).$$

Alors B est fermé.

Donc opérateur intégro-différentielle $A+B$ est fermé i.e toute opérateur s'écrit sous la forme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$ est un opérateur fermé.

Théorème 4.3.2

Soient $(D(A), A)$ et $(D(B), B)$ deux opérateurs fermés et $D(A) \subset D(B)$,
alors
$A+B$ est un opérateur fermé sur $D(A)$.

Exemple 4.3.3

On a $(\partial, C^1([a,b]))$ *et* $(\partial^2, C^2([a,b]))$ *sont des opérateurs de dérivé alors elles sont fermés*

.

L'opérateur $(\partial + \partial^2)$ *est fermé car* $C^2([a,b]) \subset C^1([a,b])$.

Théorème 4.3.3

Soient $(D(A), A)$ *et* $(D(B), B)$ *deux opérateurs non borné tel que* $AB = BA$.

$$\begin{cases} A \text{ est inversible} \\ B \text{ est fermé} \\ D(BA^{-1}) \subset D(A) \end{cases} \Rightarrow A + B \text{ est fermé sur } D(B).$$

Preuve.

Notons $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$. Par $AB = BA \Rightarrow A^{-1}B \subset BA^{-1} \Rightarrow D(B) = D(A^{-1}B) \subset D(BA^{-1}) \subset D(A)$

car

A inversible

$\Rightarrow A^{-1}A \subset AA^{-1} = I$

$\Rightarrow A^{-1}AB \subset B$

$\Rightarrow A^{-1}BA \subset B$(car $AB = BA$) donc $A^{-1}B \subset BA^{-1}$

$D(A^{-1}B) = \{x \in D(B) : Bx \in E\} = D(B)$

alors $D(A+B) = D(B)$

alors A automatiquement fermé. puis on obtient :

$$\begin{aligned} A + B &= A + BAA^{-1} \\ &= A + ABA^{-1} \\ &= A(I + BA^{-1}) \text{ car } D(BA^{-1}) \subset D(A) \end{aligned}$$

puisque A^{-1} est borné et B est fermé alors

BA^{-1} est fermé alors $I + BA^{-1}$ est fermé donc $A(I + BA^{-1})$ est fermé.

Donc $A + B$ est fermé sur $D(B)$.

■

Théorème 4.3.4

Soient A et B deux opérateurs positifs sur E à images fermées $R(A)$ et $R(B)$ dans E. Alors $A + B$ a une image fermée si et seulement si $R(A) + R(B)$ est fermé dans E.

Théorème 4.3.5

Le produit AB est fermé si A est fermé et B est borné.

Par contre, si A est borné et B est fermé et l'un des opérateurs A ou B est inversible alors le produit AB est fermé.

Bibliographie

[1] **A.AZZOUZ**. *Sur la somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur un Espace de Hilbert (Thèse de doctorat),*Université d'Oran, 2011.

[2] **D.E.EDMUNDS**. *Spectral Theory and Differential Operators*, University of Sussex,1987.

[3] **E.KAMEL**. *Les opérateurs fermés*, université de M'sila, 2016.

[4] **F.RIESZ, B.NAGY.** *Leçons Analyse Fonctionnel*, PARIS, 1968.

[5] **G.AUBRUN**. Théorie des Opérateurs, Université de la Réunion.

[6] **G.TESCHL**. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics Wich Applications to Schrödinger Operators*, American, 2000.

[7] **H.ALKANJO.** *Spectre étendu des opérateurs et applications* (Thèse de doctorat), Université Claude Bernard Lyon 1, 2004.

[8] **H.BREZIS**. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Paris, 1987.

[9] **I KODEL.** Application of Perturbation Theory Methods to Nuclear Data Uncertainty Propagation using the Collision Probability Method *(Thèse de doctorat),* Université de Grenoble, 2013.

[10] **J.MUSCAT**. *Functional Analysis*, university of Malta, 2004.

[11] **M.NADIR.** *Cours d'analyse fonctionnelle*, université de M'sila, 2004.

[12] **M.OULD ALI**. *Stabilité de l'Image Fermée d'un Opérateur non-Borné sur un Espace de Hilbert et Applications (Thèse de doctorat), Université d'Oran, 2010.*

[13] **M. THAMBAN NAIR**. *LINEAR Operator Equations*, India, 2009.

[14] **R.HENRY**. *Spectre et pseudo spectre d'opérateurs non-auto adjoints (Thèse de doctorat),* Université Paris-Sud, 2013.

[15] **S.ALINHAC**. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Paris, 1991.

[16] **S.GAVAGE.** *Spectre des op ´erateurs différentiels, 2010.*

[17] **S.GOLDBERG.** *Theory and applications*,New york,1966.

[18] **S.SALSA**. *Partial Differential Equations in Action*, Milano, 2008.

[19] **T.COMETX**. *Introduction à la Théorie Spectrale, 2014.*

[20] **T.KATO**. *Perturbation Theory for linear Operators*,USK,1980.