

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE  
DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : EDPs et Applications

## Thème

---

Solutions faibles pour le problème elliptique  
linéaire

---

Présentée par :  
*Betka Wahiba*

Devant le jury composé de :

<i>Bougherara</i> Brahim	M.C.A, Université de M'sila	<b>Président.</b>
<i>Dechoucha</i> Noureddine	M.A.A, Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
<i>Hamidi</i> Khaled	M.C.A, Université de M'sila	<b>CO-Encadreur.</b>
<i>Chadi</i> khelifa	M.C.B, Université de M'sila	<b>Examineur.</b>
<i>Touahria</i> Messaoud	M.C.B, Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire : 2024/2025.

# Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout Puissant, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Je tiens à remercier sincèrement **les membres du jury** : "**Bougherara Brahim** ", "**Chadi khelifa** "et"**Touhria Messoud** " pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils lui ont accordé. J'exprime ma profonde reconnaissance à "**Dechoucha Noureddine**" et "**Hamidi Khaled**" mes directeurs de mémoire, pour leur encadrement rigoureux, leur disponibilité et la qualité de leurs conseils tout au long de ce projet. J'exprime toute ma gratitude à **ma mère**, dont les prières, l'amour et le soutien inconditionnel et le soutien constant ont été une source inestimable de force et de motivation. Je remercie tous les professeurs du Département de Mathématiques, ainsi qu'à mes collègues et amis, sans oublier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance, le soutien et l'aide qu'elle m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite. À mon père qui ne cesse de m'orienter et me donner l'espoir et la volonté de faire le maximum pour réussir et qui a toujours été mon modèle idéal.

À ma chère amie CH. Meryem , qui est comme une soeur pour moi, mes chères soeurs et  
mes chère frères .

À toute la famille,

À toute mes amies,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Table des matiers

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappels et Définitions</b>	<b>8</b>
1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles . . . . .	8
1.1.1 Équation aux dérivées partielles . . . . .	8
1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	9
1.2 Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	10
1.2.1 Les espaces $L^p$ . . . . .	10
1.2.2 Les convergences dans $L^p(\Omega)$ . . . . .	12
1.2.3 Espace de Sobolev . . . . .	12
1.2.4 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	15
1.3 Types de solutions pour les EDPs . . . . .	16
1.4 Formulation variationnelle et outils fonctionnels . . . . .	16
1.4.1 Formulation variationnelle . . . . .	16
1.4.2 Formule de Green . . . . .	17
1.4.3 Intégration par parties . . . . .	17
1.4.4 Théorème de Lax-Milgram . . . . .	17
1.5 Inégalités importantes . . . . .	19
<b>2 Notions fondamentales de Laplacien</b>	<b>20</b>
2.1 L'opérateur de Laplace . . . . .	20

2.2	Propriétés importantes du Laplacien . . . . .	21
2.2.1	Linéarité . . . . .	21
2.2.2	Invariance par rotation . . . . .	22
2.2.3	Commutation avec la dérivation . . . . .	22
2.3	L'équation de Poisson :formulations classique et distributionnelle . . . . .	23
2.4	Le Laplacien en coordonnées(Cartésiennes,polaires, sphériques et cylindriques ) . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Problème elliptique : Formulation faible et existence</b>	<b>30</b>
3.1	Position du problème . . . . .	30
3.2	Problème variationnel . . . . .	31
3.3	Existence et unicité de solution . . . . .	34
3.4	Etude d'un exemple . . . . .	38
	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

# Notations

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels.
$\Omega$	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .
$\bar{\Omega}$	L'adhérence de $\Omega$ .
$\partial\Omega$	La frontière de $\Omega$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions dérivables à support compact dans $\Omega$ .
$\mathcal{C}(\Omega)$	Fonctions continues sur $\Omega$ .
$\mathcal{C}^\infty$	Ensemble des fonctions continuellement différentiable .
$   $	Valeur absolue ou module.
$\  \cdot \ _E$	Norme dans $E$ .
$\frac{\partial}{\partial t}$	La dérivée partielle.
$D^\alpha u(x)$	Les drivées au sens de distributions.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crochet de dualité.
$p.p$	Presque partout.

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) occupent une place fondamentale dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, chimiques et biologiques. Elles interviennent dans des contextes aussi variés que la propagation de la chaleur, l'écoulement des fluides, l'électrostatique ou encore l'élasticité des matériaux. Parmi les différentes catégories d'EDP, les équations elliptiques modélisent les états stationnaires, c'est-à-dire les phénomènes qui ne dépendent pas explicitement du temps.

Les équations elliptiques linéaires, comme celles de Laplace ou de Poisson, sont au cœur de cette classe. Leur étude a donné naissance à une riche théorie mathématique, mêlant analyse, géométrie, et méthodes variationnelles. Historiquement, la recherche de solutions à ces équations reposait sur l'hypothèse que les solutions étaient suffisamment régulières autrement dit, des solutions classiques, de classe  $C^2$ . Mais cette hypothèse s'avère souvent trop forte : dans la pratique, les données (termes sources, conditions aux bords) ne sont pas toujours régulières, ce qui remet en question l'existence même de solutions classiques.

Pour pallier ces limitations, les mathématiciens ont développé le concept de solution faible. Cette approche, plus souple, repose sur la reformulation des équations au moyen d'intégrales et de fonctions tests, ce qui permet d'étendre le cadre d'étude aux fonctions moins régulières, mais qui conservent une interprétation physique et mathématique rigoureuse. Les espaces de Sobolev, qui jouent un rôle central dans cette théorie, offrent le cadre fonctionnel adapté à ce type de solutions.

Le présent mémoire s'inscrit dans cette approche. Il a pour objectif l'étude des "solutions faibles pour les problèmes elliptiques linéaires", à travers une démarche rigoureuse

basée sur la formulation variationnelle, les propriétés de l'opérateur de Laplace, et les résultats clés tels que le " théorème de Lax-Milgram ".

Le travail est structuré comme suit :

**Chapitre 1** : Définitions fondamentales autour des EDP, classification (elliptiques, paraboliques, hyperboliques), types de solutions (classiques, faibles), propriétés des espaces  $L^p$  et  $H^1$ , et outils d'analyse fonctionnelle nécessaires.

**Chapitre 2** : Étude de l'opérateur de Laplace : Définition, propriétés analytiques, expressions dans différents systèmes de coordonnées, et application à des cas types (rectangle, disque, sphère...).

**Chapitre 3** : Formulation variationnelle d'un problème elliptique linéaire, démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution faible par le théorème de Lax-Milgram, et étude d'un exemple d'application pour illustrer les résultats.

Ce mémoire vise ainsi à clarifier le rôle des solutions faibles dans la compréhension et la résolution rigoureuse des problèmes elliptiques linéaires, tout en offrant une base solide pour des développements plus avancés.

---

# CHAPITRE 1

## Rappels et Définitions

### 1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

#### 1.1.1 Équation aux dérivées partielles

**Définition 1.1.1.** (*Dérivée partielle*) Une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est la dérivée par rapport à une seule de ses variables, les autres étant gardées constantes.

**Définition 1.1.2.** (*Équation aux dérivées partielles*) Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction  $u$  est une relation entre  $u$  et les variables indépendantes  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.1.1.** L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.

**Définition 1.1.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une solution  $u = u(x)$  sur  $\Omega$  est dite solution classique (ou au sens fort) de l'EDP (1.1), si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre  $n$ .
2.  $F\left(u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

**Définition 1.1.4.** Un problème est dit bien posé pour une EDP, si :

1. Le problème possède une solution,
2. La solution est unique,
3. La solution dépend continûment des données.

**Définition 1.1.5.** L'EDP (1.1) est dite linéaire, si elle s'écrit sous la forme :

$$L(u) = f$$

où  $L$  : désigne l'opérateur aux dérivées partielles et  $f$  : une fonction donnée.

Si  $f = 0$ , on dit que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène.

Autrement dit : Une EDP est linéaire, si sa dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire.

## 1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^n$

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées au sens physique en deux grandes classes :

-Les équations qui modélisent des problèmes d'état d'équilibre ou stationnaire appartiennent à la classe dite des problèmes elliptiques. L'équations de Laplace et celle de Poisson font partie de cette classe.

-La deuxième classe est celle des problèmes d'évolution dite comprend les équations dont les solutions dépendent du temps, c'est-à-dire les équations de type parabolique et de type hyperbolique.

**Notation :**

Soit  $p = (p_1, \dots, p_n)$  un élément de  $\mathbb{N}^n$ , d'ordre  $|p| = p_1 + \dots + p_n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  
on note :

$$D = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad , \quad D^p = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{p_n} \quad , \quad x^p = x^{p_1} \dots x^{p_n}$$

Soit  $P$  un polynôme de  $n$  variables : il existe un entier  $l$  dans  $\mathbb{N}$ , des constantes  $a_p$  de  $\mathbb{C}$  tels que  $P(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N}^n \\ |p| \leq l}} a_p x^p$  on note  $P_0$ , le polynôme  $P_0 = \sum_{|p|=l} a_p x^p$ .

On note  $A$  l'**opérateur différentiel** qui à  $u$ , application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  associe  $A(u)$  :

$$u \mapsto A(u) = P(D(u)) = \sum_{|p| \leq l} a_p D^p u.$$

L'entier  $l$  est appelé **ordre** de l'opérateur différentiel.

**Définition 1.1.6.** (*Ellipticité*) L'opérateur différentiel  $A$  est dit **elliptique** si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad P_0(\xi) \neq 0.$$

## 1.2 Définitions et propriétés élémentaires

### 1.2.1 Les espaces $L^p$

Dans toute la suite  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

**Définition 1.2.1.** (*Fonction mesurable*) Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *mesurable*, si pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $E_a$  défini par :

$$E_a = \{x \in \Omega / f(x) \geq a\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

**Définition 1.2.2. (Fonction intégrable)** On dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Lebesgue, si

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty.$$

**Définition 1.2.3. (L'espace  $L^1(\Omega)$ )** On appelle espace de Lebesgue  $L^1(\Omega)$ , l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , défini par :

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{intégrable}\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

**Définition 1.2.4. (Espace  $L^p$ )** Soit  $1 \leq p < +\infty$ , On appelle espace de Lebesgue, l'ensemble défini par :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable} \mid |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

et on note :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour  $p = +\infty$  on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable et } \exists C \text{ telle que: } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

et on note :

$$\|f\|_\infty = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

### 1.2.2 Les convergences dans $L^p(\Omega)$

**Définition 1.2.5. (Convergence forte)** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p(\Omega)$  et  $U \in L^p(\Omega)$ . On dira que la suite  $(U_n)$  converge fortement vers  $U$  dans  $L^p(\Omega)$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|U_n(x) - U\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

et on note

$$U_n \longrightarrow U \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega)$$

**Définition 1.2.6. (Convergence faible)** Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p(\Omega)$  et  $U \in L^p(\Omega)$ . On dira que la suite  $(U_n)$  converge faiblement vers  $U$  dans  $L^p(\Omega)$  si

$$\langle U_n, \phi \rangle \rightarrow \langle U, \phi \rangle \quad \forall \phi \in (L^p)' \quad \text{avec} \quad (L^p)' \quad \text{dual de} \quad (L^p)$$

On note

$$U_n \rightharpoonup U \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega)$$

### 1.2.3 Espace de Sobolev

**Définition 1.2.7. (Espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ )** Pour  $1 \leq p < +\infty$  L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad / \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^n\},$$

où  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ .

qui munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Pour  $p = +\infty$  on a

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

**Définition 1.2.8.** (*L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$* ) Soit  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $W_0^{1,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  c'est-à-dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

Pour  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , on pose :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Théorème 1.2.1.** (*Injections de Sobolev*) Pour  $1 \leq p < n$ , on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \quad p^* = \frac{np}{n-p}$$

continuellement, et l'injection est compacte pour tout  $1 \leq q < p^*$ .

**Définition 1.2.9.** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $(u, v)$  et qui est complet pour la norme  $(u, u)^{1/2}$ .

**Définition 1.2.10.** (*Espace  $H^1$* ) Parmi les espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  les plus utilisés, l'espace noté par  $H^1(\Omega)$ , est défini pour  $p = 2$ ,

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

et

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, N \right\},$$

où  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est la dérivée au sens des distributions de  $u$ .

Autrement dit, une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dans  $H^1(\Omega)$ , s'il existe  $v_1, \dots, v_n \in L^2(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

avec  $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est équipé du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme correspondante :

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

**Définition 1.2.11.** On définit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  par l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  c'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

**Définition 1.2.12. (Espace  $H^{-1}$ )**  $H^{-1}(\Omega)$  the dual de  $H_0^1(\Omega)$  c'est l'ensemble des formes linéaires continues sur  $H_0^1(\Omega)$  .

**Proposition 1.2.1.** Soit  $u \in H^{-1}(\Omega)$ . La fonction  $u$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . et la norme duale est donnée par :

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

**Définition 1.2.13. (Espaces de fonctions différentiables)** Soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  :

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  : l'ensemble de toutes fonctions définies sur  $\Omega$  qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $k$  sur  $\Omega$ .
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  : l'ensemble de toutes les fonctions définies sur  $\Omega$  qui ont des dérivées d'ordre quelconque sur  $\Omega$ .
- $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  : Pour  $k \in \mathbb{N}$  on note  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  l'ensemble de toutes fonctions  $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  telles que  $D^\alpha u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  pour toutes  $\alpha$  multi-indices,  $|\alpha| \leq k$ .
- On note :

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}).$$

- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions à support compact (contenu dans  $\Omega$ ). On dit que c'est l'espace des fonctions-test.

### 1.2.4 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Définition 1.2.14. (Espace des fonctions tests)** L'espace des fonctions tests est un espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact inclus dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est noté  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un élément de  $\mathbb{N}^n$ . On appelle ordre de  $\alpha$  et on note  $|\alpha|$  l'entier :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Soit  $u$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{N}^n$ . On note  $D^\alpha u$  la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $u$  soit :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

**Définition 1.2.15. (Espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$ )** On appelle **distribution** sur  $\Omega$  toute forme linéaire continue sur l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

On note  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'ensemble des distributions (le dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ).

**Notation :** Pour tout  $\langle T, u \rangle$  de  $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $T(u)$  appartient à  $\mathbb{C}$  et on note

$$T(u) = \langle T, u \rangle.$$

**Théorème 1.2.2. (densité)** L'espace des fonctions de  $C^\infty(\Omega)$  à support compact est dense dans  $L^p(\Omega)$  c'est-à-dire pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $f \in L^p(\Omega)$ , il existe une fonction  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  telle que :

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

## 1.3 Types de solutions pour les EDPs

**Définition 1.3.1.** (*Solutions classiques*) Une solution classique est une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  vérifiant l'équation elliptique et les conditions aux limites.

**Définition 1.3.2.** (*Solutions faibles*) Une fonction  $u$  dite une solution faible ou généralisée de (EDP) si elle vérifie l'équation au sens des distributions. Pour  $f \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  est une solution faible si

$$\int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Définition 1.3.3.** (*Solutions d'entropie*) Pour  $f \in L^1(\Omega)$ , la solution faible classique peut ne pas exister. La notion d'entropie introduit une formulation adaptée. Une fonction  $u \in L^1(\Omega)$  est une solution d'entropie de

$$-\nabla \cdot A(x, u, \nabla u) = f$$

avec  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , si pour tout  $k > 0$  et toute  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \varphi) \, dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) \, dx.$$

## 1.4 Formulation variationnelle et outils fonctionnels

### 1.4.1 Formulation variationnelle

**Définition 1.4.1.** La formulation variationnelle (FV) d'un problème d'EDP, dite aussi formulation faible, est une forme équivalente à ce problème d'EDP sous sa forme classique dite aussi formulation forte. Le principe est de remplacer l'EDP par une formulation équivalente (FV) obtenue en intégrant l'équation après l'avoir multiplié par une fonction test.

### 1.4.2 Formule de Green

**Définition 1.4.2.** Cette formule est un outil fondamental pour la résolution des EDPs. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

**Notation :** Dans cette formule,  $\eta$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  au point  $x$ , dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ .

**Théorème 1.4.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\Gamma$  son bord.  $\forall u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$   
 $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

où  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$  (la dérivée normale de  $u$ )

### 1.4.3 Intégration par parties

**Théorème 1.4.2.** Si  $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ , alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u(x) v(x) \eta_i(x) ds \quad \text{pour tout } (i = 1, \dots, n)$$

### 1.4.4 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Dans toute la suite  $H$  désigne un espace de Hilbert.

**Définition 1.4.3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. On appelle forme bilinéaire sur  $H$  toute application :

$$a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto a(u, v)$$

telle que pour tous  $u_1, u_2$  et  $v \in H$ , pour tout réel  $\lambda$ , nous ayons :

$$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

et pour tous  $u, v_1$  et  $v_2 \in H$  :

$$a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2).$$

**Définition 1.4.4.** On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est :

i) **Continue** : s'il existe une constante  $C$ , telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

ii) **Coercive** : s'il existe une constante  $\alpha > 0$ , telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

iii) **symétrique** : Si

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in H.$$

**Théorème 1.4.3 (Lax-Milgram).** Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in H$  unique telle que :

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors elle est caractérisée par la propriété

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

## 1.5 Inégalités importantes

**Théorème 1.5.1. (Inégalité de Poincaré)** Soit  $\Omega = ]-a, a[ \times \omega \subset \mathbb{R}^n$  (où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ). Alors il existe  $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Remarque 1.5.1.** Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , et  $1 \leq p < +\infty$ , il existe  $C_{p,\Omega}$  ne dépendant que de  $p$  et  $\Omega$  tel que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Théorème 1.5.2. (Inégalité de Hölder)** Soit  $1 \leq p < +\infty$  et  $q$  son exposant conjugué tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , alors :

(i)  $fg \in L^1(\Omega)$ ,

(ii)  $\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ .

**Théorème 1.5.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Soit  $f, g \in L^2(\Omega)$ . Alors :

$$\int_\Omega |fg| \leq \left( \int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |g|^2 \right)^{1/2}.$$

---

# CHAPITRE 2

## Notions fondamentales de Laplacien

### 2.1 L'opérateur de Laplace

**Définition 2.1.1.** On appelle **opérateur de Laplace** ou **Laplacien** en dimension  $n$ , l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

D'un point de vue élémentaire ponctuel, étant donné un point  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et une fonction  $u$  définie au voisinage de  $x$ ,

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

est définie sous la condition de l'existence des dérivées partielles  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$ .  
c'est-à-dire l'hypothèse d'existence du **gradient** de  $u$

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

au voisinage de  $x$ , on a :

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x).$$

où pour un champ  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  défini au voisinage de  $x$ , la divergence de  $\mathbf{p}$  en  $x$  est définie par :

$$\operatorname{div} \mathbf{p}(x) = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial x_n}(x),$$

sous réserve d'existence des dérivées partielles  $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial p_n}{\partial x_n}(x)$ .

Notons tout de suite la propriété fondamentale d'**invariance du Laplacien** par transformation euclidienne. Une transformation euclidienne est une isométrie de la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  :

$$d(x, y) = |x - y| = \left( (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}.$$

c'est-à-dire une application  $T$  d'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in D.$$

## 2.2 Propriétés importantes du Laplacien

### 2.2.1 Linéarité

L'opérateur de Laplace est linéaire. Pour toutes fonctions deux fois dérivables  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right)\end{aligned}$$

$$\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g$$

### 2.2.2 Invariance par rotation

L'opérateur de Laplace est **invariant par rotation** : il conserve sa forme sous un changement orthogonal de coordonnées. Soit une rotation  $R$  et une fonction  $f$ , on définit :

$$f_R(x) = f(Rx)$$

Alors :

$$\Delta f_R(x) = (\Delta f)(Rx)$$

### 2.2.3 Commutation avec la dérivation

Si  $f$  est suffisamment régulière :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta f) = \Delta \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $T$  une transformation euclidienne définie au voisinage de  $x$ ,  $u$  une fonction définie au voisinage de  $x$  et deux fois différentiable en  $x$ .*

*Alors  $Tu \stackrel{\text{def}}{=} u \circ T^{-1}$ , définie au voisinage de  $y = T(x)$ , est deux fois différentiable en  $y$  et :*

$$\Delta(Tu)(T(x)) = \Delta u(x). \tag{2.1}$$

**Définition 2.2.1.** Une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  est harmonique dans  $\Omega$  si elle est solution de l'équation de Laplace, c'est-à-dire

$$\Delta u = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

## 2.3 L'équation de Poisson : formulations classique et distributionnelle

**Définition 2.3.1.**  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout entier  $m = 0, 1, \dots$ ,  $\Delta$  applique  $\mathcal{C}^{m+2}(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , au sens où pour  $u \in \mathcal{C}^{m+2}(\Omega)$ , la fonction :

$$\Delta u : x \in \Omega \rightarrow \Delta u(x)$$

est de classe  $\mathcal{C}^m$ . Ainsi  $\Delta$  applique  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  dans lui-même.

Étant donnée une fonction  $f$  donnée sur  $\Omega$ , on appelle **équation de Poisson**, l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega.$$

D'un point de vue élémentaire, une solution est une fonction  $u$  définie et admettant des dérivées partielles  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$  sur  $\Omega$ , vérifiant :

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

**Définition 2.3.2.** Étant donné une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$ , on appelle solution classique de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega.$$

toute fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  vérifiant :

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

La définition ci-dessus impose, pour l'existence d'une solution la continuité de la donnée  $f$ .

**Corollaire 2.3.1. (Unicité pour Poisson)** Soit  $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega), f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ . Alors il existe au plus une solution  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  pour le problème de poisson suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

**Définition 2.3.3.** Étant donnée  $T$  une transformation euclidienne de  $\Omega$ , si  $u$  est solution classique de  $\Delta u = f$  sur  $\Omega$ , alors  $v = Tu = u \circ T^{-1}$  est solution classique de  $\Delta v = Tf$  sur  $T(\Omega)$ . Ceci s'étend au cadre des solutions distributions en utilisant la notion d'image d'une distribution : considérons un difféomorphisme  $h$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ , on a pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}(h(\Omega))$

$$\langle hf, \zeta \rangle = \int f(h^{-1}(y))\zeta(y)dy = \int f(x)\zeta(h(x))|Deth'(x)|dx$$

Supposant  $h$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\zeta \circ h |Deth'| \in \mathcal{D}(\Omega)$  et donc

$$\langle hf, \zeta \rangle = \langle f, \zeta \circ h |Deth'| \rangle. \tag{2.2}$$

Pour une distribution  $f$  sur  $\Omega$ , cette formule définit une distribution sur  $h(\Omega)$  et sert de définition de la distribution  $hf$  image de  $f$  par  $h$ .

Dans le cas d'une transformation euclidienne  $T$ ,  $|DetT'| = 1$  et

$$\langle Tf, \zeta \rangle = \langle f, \zeta \circ T \rangle.$$

Puisque  $\Delta(\zeta \circ T) = (\Delta\zeta) \circ T$  d'après la Proposition 1

**Définition 2.3.4.** *Étant donné une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$ , on appelle solution classique de l'équation de Poisson, toute fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  vérifiant :*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

*La définition ci-dessus impose, pour l'existence d'une solution la continuité de la donnée  $f$ .*

**Définition 2.3.5.** *Étant donné une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$ , on appelle solution classique de l'équation de Poisson, toute distribution  $u$  sur  $\Omega$  vérifiant :*

$$\langle u, \Delta v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Remarque 2.3.1.** *Rappelons qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  définit la distribution :*

$$T_f : v \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int f(x)v(x)dx. \tag{2.3}$$

*et que l'application  $f \rightarrow T_f$  est injective de telle sorte que l'on peut identifier  $f$  avec la distribution qu'elle définit. Étant donné  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , on a*

$$\langle u, \Delta v \rangle = \int u(x)\Delta v(x)dx = \int \Delta u(x)v(x)dx = \langle \Delta u, v \rangle.$$

*de telle sorte que pour  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ ,  $u$  est solution classique ssi  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  est solution distribution.*

**Définition 2.3.6.** *Étant donnée  $T$  une transformation euclidienne de  $\Omega$ , si  $u$  est solution classique de  $\Delta u = f$  sur  $\Omega$ , alors  $v = Tu = u \circ T^{-1}$  est solution classique de  $\Delta v = Tf$  sur  $T(\Omega)$ . Ceci s'étend au cadre des solutions distributions en utilisant la notion d'image d'une distribution : considérons un difféomorphisme  $h$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ , on a pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}(h(\Omega))$*

$$\langle hf, \zeta \rangle = \int f(h^{-1}(y))\zeta(y)dy = \int f(x)\zeta(h(x))|Deth'(x)|dx$$

Supposant  $h$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\zeta \circ h |Det h'| \in \mathcal{D}(\Omega)$  et donc

$$\langle hf, \zeta \rangle = \langle f, \zeta \circ h |Det h'| \rangle. \quad (2.4)$$

Pour une distribution  $f$  sur  $\Omega$ , cette formule définit une distribution sur  $h(\Omega)$  et sert de définition de la distribution  $hf$  image de  $f$  par  $h$ .

Dans le cas d'une transformation euclidienne  $T$ ,  $|Det T'| = 1$  et

$$\langle Tf, \zeta \rangle = \langle f, \zeta \circ T \rangle.$$

Puisque  $\Delta(\zeta \circ T) = (\Delta\zeta) \circ T$  d'après la Proposition 1.

**Proposition 2.3.1.** Soit  $T$  une transformation euclidienne de  $\Omega$ ,  $f$  une distribution sur  $\Omega$ , et  $u$  une solution distribution de  $\Delta u = f$  sur  $\Omega$ .

Alors  $v = Tu$  est une solution distributionnelle de  $\Delta v = Tf$  sur  $T(\Omega)$ .

## 2.4 Le Laplacien en coordonnées (Cartésiennes, polaires, sphériques et cylindriques )

### Cartésiennes

**Définition 2.4.1.** Soit  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , le Laplacien s'écrit en coordonnées cartésiennes comme :

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Par exemple :

- $n = 2$  :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

- $n = 3$  :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

## Polaires

L'opérateur de Laplace étant invariant par rotation, il est naturel de l'exprimer en coordonnées polaires ou sphériques dans  $\mathbb{R}^n$ . **Dans**  $\mathbb{R}^2$  En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

le Laplacien s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Cette forme est utilisée dans l'étude des problèmes à symétrie circulaire.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Pour une fonction radiale  $u(x) = v(|x|)$  :

$$\Delta u(r) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}.$$

**Dans**  $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u(r, \sigma) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma u.$$

Pour une fonction radiale :

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \frac{du}{dr} \right).$$

### Sphériques (dans $\mathbb{R}^3$ )

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , avec :

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta, \\ y = r \sin \phi \sin \theta, \\ z = r \cos \phi, \end{cases}$$

le Laplacien prend la forme suivante :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

### Cylindriques (dans $\mathbb{R}^3$ )

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , définies par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

on obtient :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

### Cas radial

Si  $u(x) = u(r)$  est une fonction radiale (ne dépend que de  $r = |x|$ ), alors :

$$\Delta u(r) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \frac{du}{dr} \right).$$

Cette formule est essentielle pour les problèmes elliptiques à symétrie sphérique dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple :**

Dans  $\mathbb{R}^n$ , pour une fonction radiale  $u(x) = u(r)$ ,  $r = |x|$ , on a :

$$\Delta u(r) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

Si :

$$\Delta u = 1 \quad \text{dans la boule de rayon } R,$$

alors la solution générale est donnée par :

$$u(r) = -\frac{r^2}{2n} + C.$$

---

# CHAPITRE 3

## Problème elliptique : Formulation faible et existence

Dans ce chapitre, nous présentons le problème

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u)(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Où  $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ , pour  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , avec  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

### 3.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) de frontière  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ . Soient  $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ , pour  $i, j = 1, \dots, n$ . On suppose que les fonctions  $a_{i,j}$  vérifient l'hypothèse d'**ellipticité uniforme**, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0; \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (3.1)$$

On se donne  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et on cherche une solution au problème :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x)) \partial_j u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\partial_i u$  désigne la dérivée partielle de  $u$  par rapport à sa  $i$ -ème variable.

**Exemple 3.1.1 (Le Laplacien).** *Si on prend  $a_{i,j} = \delta_{i,j}$  (c'est-à-dire 1 si  $i = j$ , 0 si  $i \neq j$ )*

*alors le problème devient :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

## 3.2 Problème variationnel

**Définition 3.2.1. (Solution classique)** *On suppose que  $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ . On suppose que  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  et  $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ . On appelle alors solution classique de (3.2) une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  vérifiant (3.2).*

On rappelle que pour tout  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  désigne l'ensemble des restrictions à  $\Omega$  des fonctions appartenant à  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ .

Il n'existe pas forcément de solution classique à (3.2). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas  $g = 0$ , avec  $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  et  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , et supposons qu'il existe une solution classique  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ . Par définition, celle-ci vérifie :

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x)) \partial_j u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , multiplions l'équation précédente par  $\varphi(x)$  et intégrons sur  $\Omega$  :

$$-\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x)) \partial_j u(x) \right) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \partial_i \varphi(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.3)$$

Comme  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ , on a  $\partial_j u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ , et donc  $\partial_j u = D_j u$  p.p.

De plus  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$  et donc  $u \in H^1(\Omega)$ . Enfin, comme  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on a finalement  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  telle que  $\varphi_n \rightarrow v$  dans  $H^1(\Omega)$ , c'est-à-dire  $\varphi_n \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\partial_i \varphi_n \rightarrow D_i v$  dans  $L^2(\Omega)$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Comme  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u$  En écrivant (3.3) avec  $\varphi = \varphi_n$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_j u(x) \partial_i \varphi_n(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx,$$

et en passant à la limite, on obtient que  $u$  satisfait le problème suivant, qu'on appelle **formulation faible** du problème (3.2) (on rappelle que l'on considère ici le cas  $g = 0$ ) :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.4)$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème (3.2) (lorsque  $g = 0$ ) est solution faible**, c'est-à-dire vérifie (3.4).

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.4) découle du théorème de Lax-Milgram.

**Remarque 3.2.1. (Cas symétrique, formulation variationnelle)** Dans le cas où la forme  $a$  est symétrique, c'est-à-dire  $a_{i,j} = a_{j,i}$  p.p. Pour  $i \neq j$ ,  $u$  est solution de (3.4) si et seulement si  $u$  est solution du problème suivant, qu'on appelle **formulation variationnelle** :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

où la fonctionnelle  $J$  est définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} D_j v D_i v \right) dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (3.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré.

**Démonstration :** Par hypothèse sur  $\Omega$ , il existe  $a > 0$  tel que  $\Omega \subset ]-a, a[ \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

soit  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on prolonge  $u$  par 0 en dehors de  $\Omega$ , on a donc :

$$u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega^c$$

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$ , avec  $x_1 \in ]-a, a[$  et  $y = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, y) dt.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors :

$$|u(x_1, y)|^2 \leq \left( \int_{-a}^a |\partial_1 u(t, y)| dt \right)^2 \leq 2a \int_{-a}^a (\partial_1 u(t, y))^2 dt.$$

En intégrant entre  $-a$  et  $a$ , on obtient :

$$\int_{-a}^a |u(x_1, y)|^2 dx_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^a (\partial_1 u(t, y))^2 dt,$$

et donc, en intégrant par rapport à  $y$ ,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 4a^2 \int_{\Omega} (\partial_1 u(x))^2 dx, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{3.5}$$

On procède ensuite par densité ; pour  $u \in H_0^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . On a donc  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\partial_i u_n \rightarrow \partial_i u$  dans  $L^2(\Omega)$ . On

écrit alors (3.5) pour  $u_n$  et en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

### 3.3 Existence et unicité de solution

**Théorème 3.3.1.** (*Existence et unicité de la solution de (3.4)*) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ , et soient  $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$  et  $\alpha > 0$  tels que (3.1) soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de (3.4).

**Démonstration :** Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram on écrit le problème (3.2) sous la forme :

$$u \in H; \quad a(u, v) = T(v) \quad \text{pour tout } v \in H, \quad \text{avec } H = H_0^1(\Omega)$$

(qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{et avec } a \text{ et } T \text{ définies par :}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx \quad \text{et} \quad T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire  $T$  est bien continue. En effet,

$$\begin{aligned} |T(v)| &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quant à la forme  $a$ , elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

avec  $C = \sum_{i,j=1}^n \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Elle est donc continue.

Voyons si  $a$  est coercive : il faut montrer qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Par hypothèse sur  $a$ , on a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \right) dx \geq \alpha \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |D_i u(x)|^2 \right) dx = \alpha \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_{\Omega}^2 + 1) \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_{\Omega}^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc

$$a(u, u) \geq \alpha \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha}{C_{\Omega}^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

ce qui démontre la coercivité de  $a$ .

Par la théorème de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (3.2).

**Théorème 3.3.2. (*Existence et unicité*  $T \in H^{-1}$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$  et  $\alpha > 0$  tels que (3.1) soit vérifiée. Soit  $T \in H^{-1}(\Omega)$ , il existe alors une unique solution  $u$  de :

$$u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx = T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

**Preuve :** On considère le problème Alors il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème :

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.7)$$

où :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u(x) D_i v(x) dx, \quad T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram.

1. **Espace de Hilbert** : L'espace  $H = H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

2. **Continuité de  $T$**  : Pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$|T(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donc  $T$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

3. **Bilinéarité et continuité de  $a$**  : La forme  $a(\cdot, \cdot)$  est bilinéaire.

Pour la continuité, on a :

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_j u\|_{L^2(\Omega)} \|D_i v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où  $C = \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

4. **Coercivité de  $a$**  : D'après l'hypothèse d'ellipticité uniforme, on a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_j u(x) D_i u(x) dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Puisque  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme équivalente à  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ , on en déduit que  $a$  est coercive.

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. Il existe donc une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème variationnel.

**Démonstration :** Supposons qu'il existe deux solutions  $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$  telles que :

$$a(u_1, v) = T(v) \quad \text{et} \quad a(u_2, v) = T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose  $w = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ . En soustrayant les deux équations :

$$a(w, v) = a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier, on choisit  $v = w$  :

$$a(w, w) = 0.$$

Or, d'après l'hypothèse de coercivité :

$$a(w, w) \geq \alpha \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Donc :

$$\alpha \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0 \Rightarrow \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Cela implique que  $w$  est constante. Mais comme  $w \in H_0^1(\Omega)$ , on a  $w = 0$  sur  $\partial\Omega$ , donc  $w = 0$  partout dans  $\Omega$ .

Alors :  $u_1 = u_2$ .

Donc la solution faible est **unique**. Le problème admet donc une solution faible unique  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

### 3.4 Etude d'un exemple

On considère l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1) \quad (3.8)$$

Où,  $f$  est un second membre qui appartient à l'espace  $L^2(\Omega)$ .

La condition aux limites  $u = 0$  imposée sur la frontière de  $\Omega$ , est dite "condition de Dirichlet homogène".

#### Étape 1 : Formulation variationnelle

On multiplie l'équation (1) par une fonction test  $v$  et on intègre par parties, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.9)$$

Comme  $u$  doit satisfaire la condition aux limites de Dirichlet, il est nécessaire de choisir un espace de Hilbert  $V$ , tel que :

$$\forall v \in V, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

. Dans ce cas, l'égalité (3.9) devient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

A partir de cette identité, on peut définir l'espace  $V$ , la forme bilinéaire  $a(u, v)$  et la forme linéaire  $L(v)$ . Par hypothèse,  $f \in L^2(\Omega)$ . Alors, pour que le terme de gauche de (1) ait un sens il suffit que  $\nabla u \cdot \nabla v$  appartienne à  $L^2(\Omega)$  (composante par composante), et pour le

terme à droite de (1) il faut choisir  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ .

On peut choisir alors :

$$V = H_0^1(\Omega)$$

L'étude du problème (3.8) consiste à introduire le problème variationnel suivant :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Étape 2 : Existence et unicité de la solution faible**

Dans cette étape nous montrons que la formulation variationnelle (3.9) admet une unique solution faible, en utilisant le théorème de Lax-Milgram. Pour l'application de ce théorème, on pose :

- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$

**• La continuité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$  :**

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Comme  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  sont équivalentes, alors

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où la continuité de  $a(u, v)$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**• La coercivité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  sur  $H_0^1(\Omega)$  :**

Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $c > 0$ , tel que :

$$a(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

On a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{(1 + C^2)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Donc

$$a(u, u) \geq \frac{1}{(1 + C^2)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

D'où la coercivité de  $a(u, u)$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

- **La continuité de  $L$  sur  $H_0^1(\Omega)$  :** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f v| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de  $L$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Toutes les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont satisfaites, donc on peut conclure qu'il existe une unique solution faible  $u \in H_0^1(\Omega)$  de problème (3.8).

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié en profondeur la notion de solution faible pour les problèmes elliptiques linéaires, un cadre à la fois nécessaire et efficace lorsque les conditions d'existence d'une solution classique ne sont pas remplies. En partant des principes fondamentaux des équations aux dérivées partielles, nous avons montré que l'insuffisance de régularité des données conduit naturellement à l'introduction d'un concept de solution plus souple, défini au sein d'espaces fonctionnels adaptés comme les espaces de Sobolev.

La formulation variationnelle nous a permis de réécrire le problème elliptique sous une forme intégrale, ouvrant la voie à l'application d'outils puissants de l'analyse fonctionnelle, notamment le théorème de Lax-Milgram, garantissant l'existence et l'unicité de la solution dans un espace de Hilbert approprié. Ce cadre théorique a été consolidé par l'étude d'un exemple illustratif.

L'intérêt de ces solutions ne réside pas uniquement dans leur importance théorique, mais aussi dans leur rôle central en analyse numérique, où elles constituent la base de méthodes comme la méthode des éléments finis. Ce travail ouvre ainsi la voie à des généralisations possibles, notamment vers des problèmes non linéaires, ou des situations impliquant des conditions au bord plus complexes ou des données irrégulières.

Approfondir ce type d'analyse représente une introduction précieuse aux outils de l'analyse mathématique moderne, et offre une base solide pour comprendre l'interaction entre la théorie mathématique et ses applications concrètes.

# Bibliographie

- [1] R.Adams.*Sobolev Spaces*. Academic Press.New York,1975.
- [2] A.Bouziad et J.Galbrix.*Théorie de la mesure et de l'intégration* . l'université de Rouen,1995.
- [3] H.Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer new york dordrecht heidelberg london, 2010.
- [4] C.David et P.Gosselet, *Equations aux dérivées partielles*,Dunod,2012.
- [5] F.Demengel et G.Demengal.*Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations* .Springer-Verlang London,2012.
- [6] A.Kufner, O.John, and S. Fucik*Function Spaces* Noordhoff International Publishing, Leyden.1977.
- [7] D.Li.*Cours d'analyse fonctionnelle*,paris.Édition Ellipses,2013.
- [8] J.Neças.*Les Methodes Directes en Theorie des Équations Elliptiques*. Masson,Paris,1967.
- [9] L.Sonnier,M.Thérèse.Distributions,Espaces de Sobolev,Applications.Paris.Édition Ellipses,1998.

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des solutions faibles pour les problèmes elliptiques linéaires, un cadre théorique essentiel lorsqu'il devient difficile d'obtenir des solutions classiques en raison de la régularité insuffisante des données. À travers une introduction progressive aux espaces de Sobolev et à la formulation variationnelle, nous avons reformulé le problème elliptique sous une forme intégrale, adaptée à une analyse fonctionnelle rigoureuse.

L'outil central de cette étude est le théorème de Lax-Milgram, qui permet d'établir, sous des hypothèses raisonnables de continuité et de coercivité, l'existence et l'unicité d'une solution faible dans un espace de Hilbert. L'approche est illustrée par des exemples concrets, notamment l'équation de Laplace, soulignant l'efficacité de cette méthode dans la compréhension des phénomènes stationnaires.

Ce travail constitue une base solide pour aborder des généralisations futures, telles que les problèmes non linéaires ou les méthodes numériques fondées sur la formulation faible, comme la méthode des éléments finis.

### Mots clés :

Équation elliptiques linéaires, solutions faibles, formulation variationnelle, théorème de Lax-Milgram, espaces de Sobolev, existence et unicité .

## ملخص

هذا البحث مخصص لدراسة الحلول الضعيفة للمشكلات الإهليجية الخطية، وهو إطار نظري أساسي، خصوصاً عندما يصعب الحصول على حلول كلاسيكية بسبب نقص انتظام المعطيات. ومن خلال تقديم تدريجي لفضاءات سوبوليف والصيغة التغيرية، قنا بإعادة صياغة المشكلة الإهليجية في شكل تكاملي، يتناسب مع تحليل دالي صارم. الأداة المركزية في هذه الدراسة نظرية لاكس-ميلغرام، التي تتيح – في ظل افتراضات معقولة تتعلق بالاستمرارية والناقضية – إثبات وجود ووحدانية حل ضعيف داخل فضاء هلبرت. وقد تم توضيح هذه المقاربة من خلال أمثلة تطبيقية، وخصوصاً معادلة لابلاس، مما يبرز فعالية هذه الطريقة في فهم الظواهر الفيزيائية الثابتة. ويُعدّ هذا العمل أساساً متيناً للتوسع المستقبلي نحو تعميمات ممكنة، مثل المشاكل غير الخطية، أو الطرق العددية المبنية على الصيغة الضعيفة، كطريقة العناصر المنتهية.

## الكلمات المفتاحية:

المعادلات الإهليجية الخطية، الحلول الضعيفة، الصيغة التغيرية، مبرهنة لاكس-ميلغرام، فضاءات سوبوليف، وجود و وحدانية الحل.

## **Abstract**

This dissertation focuses on the study of weak solutions for linear elliptic problems, a fundamental theoretical framework especially relevant when classical solutions are difficult to obtain due to insufficient regularity of the data. Through a progressive introduction to Sobolev spaces and variational formulations, we reformulated the elliptic problem in an integral form suitable for rigorous functional analysis.

The core tool of this study is the Lax-Milgram theorem, which provides, under suitable continuity and coercivity assumptions, the existence and uniqueness of a weak solution in a Hilbert space. The approach is illustrated with concrete examples, particularly the Laplace equation, highlighting the power of this method in understanding stationary physical phenomena.

This work provides a solid foundation for further extensions, including nonlinear problems and numerical methods based on weak formulations, such as the finite element method.

## **Keywords :**

Linear elliptic equations, weak solution, variational formulations, Lax-Milgram theorem, Sobolev spaces, existence and uniqueness.