Remerciements

Mes premières remerciements vont à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

J'exprime ma profonde gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leurs soutiens et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur le Prof. ***MEZRAG Lahcene*** *pour avoir d'abord proposé ce sujet, poursuivi continuellement tout le long du parcours et qui n'a pas cessé de me donner des conseils et des encouragements.*

Je remercie les membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Les mêmes expressions de reconnaissance vont également à tous les enseignants du département mathématiques.

Je tiens à remercier vivement toutes les personnes qui m'ont aidé à élaborer et à réaliser ce mémoire. Ainsi, qu'à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin à accomplir ce travail.

Enfin Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes amies et mes collègues pour le soutien moral et matériel.

Abstract

Frechet spaces (F-spaces for short) and quasi-Banach spaces are significant spaces studied in the field of functional analysis, wich are spaces complete.

In this memory of master we interest on the study of the lipchitz structure of Frechet spaces and quasi-Banach spaces, such as we concentrated on $\mathbf{L}_p$ and $\mathbf{l}_p$ spaces in the case $0 < p < 1$.

Key words: F-spaces, quasi-Banach spaces, the lipchitz structure.

Résumé

Les espaces de Frechet et quasi-Banach est consédéré des importants espaces etudié dans le domaine de l'analyse fonctionelle, qui sont des espaces complet.

Dans ce mémoire de master nous intéressons a l'etude du structure lipchitzienne dans les espaces de Fréchet et quasi-Banach, tel que on a concentré au les espaces $\mathbf{L}_p$ et $\mathbf{l}_p$ dans le cas où $0 < p < 1$.

Mots clets: L'$F-$espaces, l'espaces quasi-Banach, la structure lipchitzienne.

Notations

$d(,)$	la distance sur un espace métrique
$\|\|.\|\|_F$	la F-norme sur un espace vectoriel
F-espace	l'espace de Fréchet
$\|\|.\|\|$	la quasi-norme ou norme sur un espace vectoriel
$\mathrm{Lip}(X)$	l'espace des fonctions Lipchitziennes f
$\mathrm{Lip}_0(X)$	l'espace des fonction Lipchitziennes f avec $f(e) = 0$ muni de la norme $\mathrm{Lip}(f)$
Æ(X)	l'espace de Arens-Eells
l_p	l'espace des suites p-sommables
L_p	l'espace de Lebesgue
X^*	le dual topologique de X
M_0	l'ensemble des espaces métriques complet et pointé

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **2**

1.1 Rappels sur les espaces métriques 2

1.2 Les applications lipchitziennes 5

1.3 Espace vectoriel normé 6

1.4 Espace quasi-normé et espace de Fréchet 8

2 Résultats classiques **12**

2.1 Introduction 12

2.2 Applications entre les espaces quasi-Banach 12

2.3 Espace de Arens-Eells (prédual de $\mathrm{Lip}_0(X)$) 18

2.3.1 Construction 18

2.3.2 Propriétés 19

3 Structure lipschitzienne des espaces quasi-Banach **22**

3.1 Introduction 22

3.2 Structure lipschitzienne des espaces quasi-Banach l_p et L_p pour $0 < p < 1$ . . 22

3.3 Structure lipschitzienne de l'espace (l_p, d_p) pour $0 < p < 1$ 24

3.4 Non-équivalence uniforme de L_0 et L_p $(0 < p \leq \infty)$ 26

Conclusion **29**

Bibliographie **31**

Introduction

Dans ce travail on va étudier les espaces de Fréchet et quasi-Banach qui jouent un rôle considérable dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, tel que on va voir la structure lipschitzienne dans ces espaces.

Le but de ce travail est d'étudier l'espace $L^P(\Omega, \mu)$ dans le cas ou $0 < p < 1$ et voir est ce qu'ils existent des applications lipchitzienne de $L^P(\Omega, \mu)$ vers $\mathbb{R}$.

Le mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on va voir quelques définitions et exemples de certains espaces (espace métrique, espace normé, quasi-normé...). Ainsi que on va aborder le Théorème de Aoki Rolewicz qui est très important dans l'espace quasi-normé.

Dans le deuxième chapitre on va voir le plongement isométrique de certains espaces (p-Banach). Ensuite on veut étudier le dual de l'espace L_p dans le cas où $0 < p < 1$. Finalement on va définir l'espace de Arens-Eells (construction, propriétés).

Dans le troisième chapitre nous allons voir la structure lipchitzienne dans les espaces quasi-Banach. En particulier on va voir le plongement lipchitzienne de certains espaces p-Banach ainsi qu'on va définir la structure uniforme de l'espace L_0.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on va voir quelques définitions et exemples de certains espaces (espace métrique, espace normé, quasi-normé...). Ainsi que on va aborder le théorème de Aoki Rolewicz qui est très important dans l'espace quasi-normé.

1.1 Rappels sur les espaces métriques

Un espace métrique est la donnée d´un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d´une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés.

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble non vide, et $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une application. On dit que d est une distance sur X si pour tout $x, y, z \in X$ l' application d vérifie les propriétés suivantes.*

$$\begin{array}{lll} d(x,y) = 0 \quad ssi \quad x = y & & (séparation), \\ d(x,y) & = \quad d(y,x) & (symétrique), \\ d(x,y) & \leq \quad d(x,z) + d(z,y) & (inégalité\ triangulaire). \end{array}$$

L'espace (X, d) est appelée espace métrique.

Exemple 1.1.1

L'espace $(\mathbb{R}^2, d)$ *muni de*

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \qquad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$$

est un espace métrique. En effet pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
1 - d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} = 0\\
&\Leftrightarrow\ |x_1-x_2| = 0 \ \textit{et}\ |y_1-y_2| = 0\\
&\Leftrightarrow\ x_1 = x_2 \ \textit{et}\ y_1 = y_2\\
&\Leftrightarrow\ (x_1,y_1) = (x_2,y_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 - d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}\\
&= \max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}\\
&= d((x_2,y_2);(x_1,y_1)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 - d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}\\
&= \max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|,|y_1-y_3+y_3-y_2|\}\\
&\leq \max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|,|y_1-y_3|+|y_3-y_2|\}\\
&\leq \max\{|x_1-x_3|,|y_1-y_3|\} + \max\{|x_3-x_2|,|y_3-y_2|\}\\
&\leq d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2)).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 (*espace métrique pointé*). *Soit* (X,d) *un espace métrique, et* $e \in X$ *un élément distingué. L'espace* (X,d) *avec l'élément* e *est appelé espace métrique pointé que l'on note par* (X,d,e).

Remarque 1.1.1

1. *L'élément* e *est fixé dans* X *qu'on prendra en général l'élément* 0.

2. *On note par* $M_0 = \{$*espaces métriques complets et pointés* $\}$.

Proposition 1.1.1 *Soient* (X,d_X) *et* (Y,d_Y) *deux espaces métriques. Alors on peut munir l´espace produit* $X \times Y$ *d´une métrique en posant*

$$\forall (x,y),(x',y') \in X \times Y, d((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_F(y,y').$$

Démonstration. On va vérifié que d est une métrique. Pour tout $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in X \times Y$ on a

$$\begin{aligned}
d((x,y),(x',y')) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d_X(x,x') + d_Y(y,y') = 0,\\
&\Leftrightarrow \quad d_X(x,x') = 0 \text{ et } d_Y(y,y') = 0,\\
&\Leftrightarrow \quad x = x' \text{ et } y = y',\\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (x',y').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d((x,y),(x',y')) &= d_X(x,x') + d_Y(y,y'),\\
&= d_X(x',x) + d_Y(y',y),\\
&= d((x',y'),(x,y)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d((x,y),(x',y')) &= d_X(x,x') + d_Y(y,y'),\\
&\leq d_X(x,x'') + d_X(x'',x') + d_Y(y,y'') + d_Y(y'',y'),\\
&\leq d_X(x,x'') + d_Y(y,y'') + d_X(x'',x') + d_Y(y'',y'),\\
&\leq d((x,y),(x'',y'')) + d((x'',y''),(x',y')).
\end{aligned}$$

D'ou d est une distance. ■

Soient $(X_i)_{i=1}^n$ des espaces métriques. Alors l'espace $(\prod_{i=1}^{n} X_i, d)$ est un espace métrique avec

$$d((x_1,\ldots,x_n),(x_1^{'},\ldots,x_n^{'})) = \sum_{i=1}^{n} d_{X_i}((x_i,x_i^{'})) \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n),(x_1^{'},\ldots,x_n^{'}) \in X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Définition 1.1.3 (*espace métrique séparable*). *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est séparable, si X possède une partie dense au plus dénombrable.*

Exemple 1.1.2 *l'espace $(\mathbb{R},d)$ est séparable. Car, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.4 (*espace quasi-métrique*). *Soit X un ensemble non vide. Une quasi-métrique d sur X est une application*

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty) .$$

qui vérifié pour tuot $x, y, z \in X$

$1 - d(x, y) = 0,$ *si et seulement si* $x = y,$ *pour tuot* $x, y, z \in X$

$2 - d(x, y) = d(y, x),$ *pour tuot* $x, y, z \in X$

$3 -$ *il existe un* $k \geq 1$ *tel que pour tuot* $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \leq k(d(x, z) + d(z, y)).$$

Alors l'espace (X, d) est appelé espace quasi-métrique.

1.2 Les applications lipchitziennes

Définition 1.2.1 (*fonction lipschitzienne*). *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une fonction $f : X \to Y$ est dite Lipchitzienne s'il existe une constante $k < \infty$ telle que pour tout x, y dans X, on a*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y).$$

Remarque 1.2.1

1. *Dans ce cas on dira que f est k-lipschitzienne.*

2. *La plus petite constante k est appelée la constante de Lipchitz qui est définie par*

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{Lip}} = \text{Lip}(f) &= \sup \left\{ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} : x, y \in X, \qquad x \neq y \right\} \\ &= \inf \{ c : c \text{ vérifiant l'inégalité précédente} \} . \end{aligned}$$

3. *Si on prend X et Y comme des espaces quasi-métriques on obtient une application lipschitzienne entre deux espaces quasi-métriques.*

Proposition 1.2.1 *Soient* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *et* (Z, d_Z) *trois espaces métriques. et*

$$f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y) \quad , \quad g : (Y, d_Y) \longrightarrow (Z, d_Z)$$

deux applications lipschitziennes alors

$$g \circ f : (X, d_X) \longrightarrow (Z, d_Z)$$

est lipchitzienne et $\operatorname{Lip}(g \circ f) \leq \operatorname{Lip}(g) \cdot \operatorname{Lip}(f)$.

Preuve. On a: $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned} d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\leq \operatorname{Lip}(g) d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq \operatorname{Lip}(g) \cdot \operatorname{Lip}(f) d_X(x, y) \end{aligned}$$

d'où $g \circ f$ est lipchitzienne et $\operatorname{Lip}(g \circ f) \leq \operatorname{Lip}(g) \cdot \operatorname{Lip}(f)$. ■

Définition 1.2.2 (*application bi-lipschitzienne*). *Une application* $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *est dite bi-lipschitzienne, si* f *est bijective et* f, f^{-1} *sont lipschitziennes.*

1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.3.1 *Soit* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$. *Une application*

$$N : X \to \mathbb{R}^+$$

est dite norme sur X *si pour tout* $x, y, z \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, *l' application* N *vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $N(x) = 0 \quad$ *ssi* $\quad x = 0_E$

(ii) $N(\lambda x) \quad = \quad |\lambda| \, N(x)$

(iii) $N(x + y) \quad \leq \quad N(x) + N(y)$.

Remarque 1.3.1

L'application N *est noté en général par* $\|.\|$ *c.-à-d.*

$$\begin{array}{llll} \|.\|: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

Définition 1.3.2 *Toute application* $\|.\|$ *de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *vérifiant seulement les propriétés (ii) et (iii) et* $\|0_X\| = 0_{\mathbb{R}}$ *est dite semi-norme sur* X.

Remarque 1.3.2

Tout semi-norme sur X *vérifie*

$\forall x \in E : \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$ *mais, si* $\|x\| = 0 \nRightarrow x = 0_E$.

Définition 1.3.3 (*espace normé*). *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *muni d'une norme* $\|.\|$ *est dit espace vectoriel normé ou espace normé .*

Exemple 1.3.1

Soit $X = C([a, b], \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continus sur* $[a, b]$ *à valeurs réelles, sur* X *on définit la norme suivante.*

$$N(f) = \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \qquad \forall f \in X.$$

Soit $f, g \in X$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (1)\ \|f\|_\infty = 0_{\mathbb{R}} & \Leftrightarrow & \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow & |f(x)| = 0_{\mathbb{R}}, \qquad \forall x \in [a, b] \\ & \Leftrightarrow & f(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b] \\ & \Leftrightarrow & f = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (2)\ \|\lambda f\|_\infty & = & \max_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| \\ & = & |\lambda| \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \\ & = & |\lambda| \, \|f\|_\infty . \end{array}$$

$$\begin{aligned}(3)\ \|f+g\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} |f+g(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]}(|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .\end{aligned}$$

Remarque 1.3.3 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. On définit sur $X \times X$ l'application*

$$\begin{array}{rccl} d: & X\times X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=\|x-y\| \end{array}$$

alors d est une métrique invariante par translation c.-à-d.

$$d((x+z),(y+z)) = d(x,y).$$

Définition 1.3.4 (*espace de Banach*). *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

1.4 Espace quasi-normé et espace de Fréchet

Définition 1.4.1 (*espace métrique linéaire*). *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X un métrique espace linéaire si la métrique d est invariante par translation. Et si les opérations algébriques sur X sont continues.*

Définition 1.4.2 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $\|.\|_F : X \to [0,\infty)$ est dite F-norme sur X, si elle vérifie les propriétés suivantes.*

(1)	$\|x\|_F > 0$	*si* $x \neq 0$
(2)	$\|\alpha x\|_F \leq \|\alpha\| \|x\|_F$	*pour tout* $x \in X$ *et* $\|\alpha\| \leq 1$
(3)	$\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha x\|_F = 0$	*pour tout* $x \in X$
(4)	$\|x+y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F$	*pour tout* $x, y \in X$.

Remarque 1.4.1

(1)- Les propretés (2) *et* (4)) *impliquent que* $\|\alpha x_n\|_F \to 0$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *si* $\|x_n\|_F \to 0$

.

(2)- Soit $\|.\|_F$ *une* F*-norme sur* X *alors.*

$$d_F(x,y) = \|x-y\|_F$$

est une métrique invariante par translation. En effet,

$$\begin{aligned} d_F(x,y) &= \|x-y\|_F \\ &= \|x-z+z-y\|_F \\ &\leq \|x-z\|_F + \|z-y\|_F \\ &\leq d_F(x,z) + d_F(z,y) \end{aligned}$$

ce qui donne que d *est une métrique.*

$$\begin{aligned} d_F(x+z, y+z) &= \|x+z-z+y\|_F \\ &= \|x-y\|_F \\ &= d_F(x,y). \end{aligned}$$

ce qui montre que d *est invariante par translation.*

Définition 1.4.3 (*espace de Fréchet*). *Un* F*-espace est un espace métrique linéaire complet tel que son structure uniforme est donné par une* F*-norme.*

Définition 1.4.4 (*espace quasi-normé*). *Soit* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*. Une application* $\|.\| : X \to [0,\infty)$ *est dite quasi-norme sur* X*, si elle vérifie les propriétés suivantes.*

(*i*) $\|x\| = 0$ *ssi* $x = 0_E$

(*ii*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *pour tout* $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

(*iii*) *il existe une constante* $k \geq 1$ *tel que Pour tout* $x, y \in X$

$$\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|).$$

L'espace $(X, \|.\|)$ *dit espace quasi-normé.*

Remarque 1.4.2

- *Si on prend $k = 1$ on obtient d'une norme.*
- *La plus petite constante k est dite le module de la concavité du quasi-norme $\|.\|$.*

Définition 1.4.5 (*espace p-normé*). *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une application $\|.\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ est dite p-norme sur X, si elle vérifie les propriétés suivantes.*

(*i*) $\|x\| = 0$ *ssi* $x = 0_X$

(*ii*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *pour tout* $x \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

(*iii*) *Il existe un* $0 < p < 1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *on a*

$$\|x + y\| \leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $(X, \|.\|)$ dit espace p-normé.

Définition 1.4.6 (*espace quasi-Banach*). *Soit $(X, \|.\|)$ un espace quasi-normé. On dit que X est un espace quasi-Banach, si X est complet pour la distance définie comme suit.*

$$d(x, y) = \|x - y\|^p .$$

Remarque 1.4.3 *Un espace p-normé complet est appelé p-Banach.*

Il est facile de prouver que toute p-norme est une quasi-norme, avec une constante $c = 2^{\frac{1}{p}}$. En effet on a pour tous les éléments x, y dans X.

$$\begin{aligned} & \|x + y\|^p && \leq \|x\|^p + \|y\|^p \\ \Longrightarrow \; & \|x + y\| && \leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ & && \leq ((\|x\| + \|y\|)^p + (\|x\| + \|y\|)^p)^{\frac{1}{p}} \\ & && \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|x\| + \|y\|) . \end{aligned}$$

Théorème 1.4.1 *[Aok42, 17](Théorème de Aoki-Rolewicz) Soit X un espace quasi-normé et $0 < p \leq 1$. Supposons qu'il existe une constante $C \geq 1$ tel que pour tout $\{x_k\}_{k=1}^n$ dans X et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors X est p-normé.

Chapitre 2

Résultats classiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va voir le plongement lipschitzienne isométrique de certains espaces (p-Banach). Ensuite on veut étudier le dual de l'espace L_p dans le cas ou $0 < p < 1$. On termine par la construction de l'espace de Arens-Eells.

2.2 Applications entre les espaces quasi-Banach

Définition 2.2.1 *Soient (M, d), (N, δ) deux espaces métriques. On appelle plongement métrique ou lipchitzien de M dans N une application f de M dans N telle qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et pour tous x, y dans M*

$$C_2 d(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq C_1 d(x, y).$$

Remarque 2.2.1

(1) La plus petite constante C_1 est appelée expansion ou constante de Lipchitz, et la plus petite constante C_2 contraction.

(2) La distorsion du plongement est le produit de la contraction par l'expansion. Si $C_1 = C_2 = 1$ le plongement est isométrique.

Si la topologie sur X est induite par une quasi-norme, on dit que X est un espace ocalement borné.

Définition 2.2.2 *Soit X un quasi-Banach. Si la quasi-norme est p-sous additive* $(0 < p < 1)$, *X est dit p-convexe quasi-Banach* (*espace p-Banach*).

Théorème 2.2.1 *[Rol85, Théorème 2] Soient X, Y deux espaces de Fréchet localement bornés et F-normés. Si $U : X \longrightarrow Y$ est une isométrie lipschitzienne surjective avec $U(0) = 0$ telle que, pour tout $x, y \in X$ et tout $t > 0$ on a*

$$\|tU(x) - tU(y)\|_Y = \|tx - ty\|_X . \tag{2.2.1}$$

Alors U est un operateur linéaire.

Corollaire 2.2.1 *Supposons que X est un p-Banach et Y est un q-Banach avec $0 < p \leq q \leq 1$. Si $U : X \longrightarrow Y$ est une isométrie lipschitzienne bijective avec $U(0) = 0$. Alors U est linéaire.*

Preuve. Puisque $p \leq q$ on a la quasi-norme sur Y est aussi p-sous additive. Si pour tout $x, y \in X$.

$$\|U(x) - U(y)\|_Y = \|x - y\|_X .$$

alors U est aussi est une isométrie lipschitzienne entre l'espaces $(X, \|.\|_X^p)$ et $(Y, \|.\|_Y^p)$ qui satisfait (2.2.1). Et d'après le théorème précédent, on conclut que U est linéaire. ■

Corollaire 2.2.2 *Soit X un quasi-Banach. Si X est lipschitziennement isométrique à l_p (resp. L_p) pour un $0 < p < 1$, alors X est p-convexe et linéairement isométrique à l_p (resp. L_p).*

Définition 2.2.3 *Soit $\|.\|_X$ une F-norme sur X. On dit que $\|.\|_X$ est concave si la fonction $\|tx\|_X$ est concave pour tout x dans X et pour tout $t > 0$, i.e.,*

$$\frac{1}{2}(\|t_1x\|_F + \|t_2x\|_F) \leq \left\|\frac{t_1+t_2}{2}x\right\|_X, \qquad t_1, t_2 \geq 0.$$

Exemple 2.2.1 *La norme dans l'espace L_p est concave pour tout $0 < p < 1$.*

Théorème 2.2.2 *[Rol85, Théorème 1] Soit X et Y deux F-espaces localement bornés. Supposons que les F-normes sont concaves. Alors toute isométrie $U : X \longrightarrow Y$ tel que $U(0) = 0$ est linéaire.*

Comme conséquence direct le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.3 *Soit $0 < p \leq q \leq 1$. Alors:*

(i) (L_p, d_p) et (L_q, d_q) ne sont pas isométriques.

(ii) (l_p, d_p) et (l_q, d_q) ne sont pas isométriques.

Théorème 2.2.3 *[Rol85, p. 397] Si $U : X \longrightarrow Y$ est une isométrie lipschitzienne bijective entre les espaces quasi-Banach X et Y avec $U(0) = 0$ alors U est linéaire.*

Théorème 2.2.4 *Supposons que $0 < p < 1$. Ils existent un p-Banach X séparable et un p-Banach Y tels que*

(i) X se plonge isométriquement dans Y.

(ii) Si $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu, alors $T = 0$.

Pour la démonstration on va utiliser la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 *[AK09, proposition 3.3] Considérons $0 < p < 1$. Soit (M, d) un espace p-métrique pointé. Soit le p-Banach $Y = l_\infty(M, L_p(0, \infty))$ des applications linéaires continues de M dans l'espace réel $L_p(0, \infty)$, muni de la p-norme $\|f\|_Y = \sup\{\|f(x)\| : x \in M\}$. Alors M se plonge isométriquement dans Y.*

Preuve. On va définir l'application $T : M \longrightarrow Y$ avec $T(0) = 0$ qui est un plongement isométrique. pour tout $x \in M$ on pose

$$T(x)(y) = \chi_{(0,d(x,y)^p)} - \chi_{(0,d(0,y)^p)}, \qquad y \in M.$$

De $f(0) = 0$, on a pour tout $x_1, x_2 \in M$ et $y \in Y$

$$\begin{aligned} \|T(x_1)(y) - T(x_2)(y)\|_p &= |d(x_1, y)^p - d(x_2, y)^p|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Si on prend $y = x_2$ on obtient de

$$\begin{aligned} \|T(x_1)(x_2) - T(x_2)(x_2)\|_p &= |d(x_1, x_2)^p - d(x_2, x_2)^p|^{\frac{1}{p}} \\ &= d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{y\in M} \|T(x_1)(y) - T(x_2)(y)\|_p = \sup_{y\in M} d(x_1, x_2).$$

Et par conséquent

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_y = d(x_1, x_2).$$

■

Remarque 2.2.2 *La proposition précédente affirme que chaque espace métrique peut être plongé isométriquement dans un p-Banach X avec la métrique $\|x - y\|^p$.*

Preuve. (du théorème précédent). Considérons l'espace complexe $L_p(\mathbb{T}; \mathbb{C})$, et soit $H_p(\mathbb{T})$ le sous espace de Hardy usuel. Soit X l'espace quotient $L_p(\mathbb{T})/H_p(\mathbb{T})$ considéré comme un quasi-Banach. Posons $M = X$ et utilisant la proposition précédente, on peut le plonger isométriquement dans l'espace $Y = l_\infty(M, L_p(0, \infty))$, alors on obtient (i).

Pour (ii), s'il existe un opérateur linéaire borné $T : X \longrightarrow Y$ non nul, alors il existe un opérateur linéaire borné $S : X \longrightarrow L_p(0,\infty)$ non nul, tel que

$$Sx = T_x(x), \qquad \text{pour certains } x \in X.$$

Alors on peut induire une application complexe-linéaire borné $\hat{S} : X \to L_p((0,\infty);\mathbb{C})$ par

$$\hat{S}(x) = Sx - iS(ix).$$

Alors $\hat{S} = S = 0$. (le fait qu'il n'existe pas d application complexe-linéaire borné $S : X \to L_p/H_p \to L_p$ comme conséquence du théorème de F.et M. Reisz théoréme, [DJ95]). ■

On considère $\mathrm{Lip}_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, lipschitzienne tel que $f(0) = 0\}$, muni de la norme lipschitzienne

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

Cet espace est appelé le dual de Lipschitz de X.

Remarque 2.2.3 *L'espace* $(\mathrm{Lip}_0(X), \|f\|_{\mathrm{Lip}})$ *est un espace de Banach.*

Définition 2.2.4 *Soit (M,d) un espace métrique. On dit que (M,d) est métriquement convexe si pour tout $x, y \in M$ il existe $z \in M$ avec.*

$$d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y).$$

On dit que z est un point médiane entre x et y dans M.

On aura besoin de ce lemme pour démontrer le proposition suivante.

Lemme 2.2.1 *[Alb08, Proposition 2.8] Soit (X,d) Un espace métriquement convexe et soit (Y,ρ) un espace métrique arbitraire. Soit $f : X \to Y$ telle que ils existent deux constantes $c > 0$ et $\alpha > 1$ et satisfait*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq cd^{\alpha}(x_1, x_2), \qquad x, y \in X. \tag{2.2.2}$$

Alors f est une constante.

Preuve. Soit c la plus petite constante vérifiant (2.3.1). Soit $x \neq y$ dans X, et z un point médiane entre x et y. Alors on a par hypothèse

$$\rho(f(x), f(z)) \leq cd^{\alpha}(x, z)$$

et

$$\rho(f(y), f(z)) \leq cd^{\alpha}(y, z).$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f(z)) + \rho(f(z), f(y)) \\ &\leq \tfrac{2c}{2^{\alpha}} d^{\alpha}(x, y). \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1$ alors $\dfrac{2c}{2^{\alpha}} < c$. Ce qui contredit le choix de c. D'ou $c = 0$ ce qui prouve que f est une constante. ■

Proposition 2.2.2 *[Alb08, Proposition 2.8] Si* $0 < p < 1$, *alors* $\mathrm{Lip}_0(L_p) = \{0\}$.

Preuve. Supposons que $f \in \mathrm{Lip}_0(L_p)$. On a $f(0) = 0$ et

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \|x - y\|_p \qquad x, y \in L_p.$$

Soit $d_p(x, y)$ la distance sur L_p induite par la p-norme $d_p(x, y) = \|x - y\|_p^p$. Donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{Lip} d_p^{\frac{1}{p}}(x, y) \qquad x, y \in L_p.$$

On sait que (L_p, d_p) est un espace métriquement convexe, soient x, y dans L_p, la continuité de la fonction

$$\begin{aligned} [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \textstyle\int_0^t |x(s) - y(s)|^p \, ds \end{aligned}$$

entraine $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^{t_0} |x - y|^p \, ds = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - y|^p .$$

donc $z = y\chi_{[0,t_0]} + x\chi_{[t_O,1]}$ est un point médiane entre x et y dans (L_p, d_p). D'après le lemme précédent on en déduit que f est une constante et comme $f(0) = 0$ alors $f = 0$. ■

2.3 Espace de Arens-Eells (prédual de $\mathrm{Lip}_0(X)$)

2.3.1 Construction

Définition 2.3.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une molécule sur* X *est une fonction* $m : X \to \mathbb{R}$ *à support fini (i.e.,* $\mathrm{supp}(m) = \{x \in X : m(x) \neq 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$*) qui satisfait* $\sum_{x\in\delta(m)} m(x) = 0$.

Remarque 2.3.1

- *On note par* $M(X)$ *l'espace vectoriel de toutes les molécules sur* X.
- *On peut écrire*

$$\begin{aligned} m &= \textstyle\sum_{x\in\delta(m)} m(x)\chi_{\{x\}} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} m(x_i)\chi_{\{x_i\}} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\chi_{\{x_i\}} - \chi_{\{x_i'\}}) \end{aligned}$$

Où $\chi_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x\}$.

Définition 2.3.2 *Soit* (X, d_X) *un espace métrique pointé. Munissons l'espace des molécules* $M(X)$ *de la norme suivante*

$$\|m\|_{M(X)} = \inf\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, d_X(x_i, x_i^{'}) : m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\chi_{\{x_i\}} - \chi_{\{x_i'\}})\}$$

Notons Æ(X) *le complété de l'espace normé* $(M(X), \|.\|_{M(X)})$.

Remarque 2.3.2

- *L'espace de Æ(X) s'appelle l'espace d 'Arens Eells ou l'espace libre de Lipschitz de X.*
- *L'espace de Æ(X) est un espace de Banach.*

Cet espace a été introduit par Arens-Eells en 1956 sur une idée de Kantorovitch en 1942. La terminologie Arens-Eells est due a Weaver (1999). Godefroy et Kalton lui ont donné une autre notation $\mathcal{F}(E, d_E)$, (l'espace libre).

2.3.2 Propriétés

Théorème 2.3.1 *Soit X un espace métrique pointé (i.e., $X \in M_0$). alors*

$$\text{Æ}(X)^* = \mathrm{Lip}_0(X).$$

Proposition 2.3.1 *Soit X un espace métrique pointé.*

1. *Pour toute molécule m, nous avons*

$$\|m\|_{\text{Æ}(X)} = \sup_{f \in B_{X^\#}} |\langle m, f \rangle| .$$

2. *$\|.\|_{\text{Æ}}$ est une norme sur l'espace des molécules qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\right\|_{\text{Æ}} = d_X(x, y).$$

3. *$\|.\|_{\text{Æ}}$ est la plus grande semi-norme sur l'espace des molécules qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\right\|_{\text{Æ}} \leq d_X(x, y).$$

Remarque 2.3.3 *Soit X un espace métrique pointé . L'application $i_E : X \to$Æ(X) définie par*

$$i_E(x) = (\chi_{\{x\}} - \chi_{\{e\}})$$

est un plongement isométrique de X dans Æ(X).

Théorème 2.3.2 (***Weaver***) *Soient X un espace métrique pointé, Y un espace de Banach et $f : X \to Y$ une fonction lipschitzienne qui préserve le point de base (i.e., $f(e) = 0$). Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $u : Æ(X) \to Y$ tel que $f = u \circ i_x$ et* $\|u\| = \mathrm{Lip}(f)$.

$$\begin{array}{ccc} Æ(X) & & \\ i_x \uparrow & & \searrow u \\ X & & \longrightarrow Y \end{array}$$

Preuve. Toute molécule m s'écrit sous la forme unique

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\chi_{\{x_i\}} - \chi_{\{e\}})$$

où les x_i sont tous distincts et non égales à e.
On définit u par

$$u(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

qui est linéaire et

$$u \circ i_x(X) = u(\chi_{\{x\}} - \chi_{\{e\}}) = f(x).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(f) &= \mathrm{Lip}(u \circ i_x) \\ &\leq \mathrm{Lip}(u) \cdot Lip(i_x) \\ &\leq \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot 1 \\ &\leq \|u\| . \end{aligned}$$

D'où

$$Lip(f) \leq \|u\| . \tag{2.3.1}$$

On définit $\|.\|_0$ sur $M(X)$ par

$$\|m\|_0 = \frac{\|u(m)\|}{Lip(f)} \qquad \text{(semi norme)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\right\| &= \tfrac{\|f(x)-f(y)\|}{Lip(f)} \\ &\leq d(x,y).\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|.\|_0 \leq \|.\|_{Æ}$ car $\|m\|_{Æ} = \sup\{|\langle m, f\rangle| : f \in B_{Lip_0(X)}\}$ et le sup est atteint.

Donc $\|u(m)\| \leq Lip(f)\, \|m\|_{Æ}$ ce qui implique $\sup_{\|m\|=1} \|u(m)\| \leq Lip(f) \sup_{\|m\|=1} \|m\|$ alors

$$\|u\| \leq Lip(f). \tag{2.3.2}$$

Les inégalités (2.4.1) et (2.4.2) impliquent

$$\|u\| = Lip(f).$$

D'où la preuve. ■

Chapitre 3

Structure lipschitzienne des espaces quasi-Banach

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier la structure lipschitzienne dans les espaces quasi-Banach. En particulier on va voir le plongement lipschitzienne de certains espaces p-Banach ainsi on va définir la structure uniforme de l'espace L_0.

3.2 Structure lipschitzienne des espaces quasi-Banach l_p et L_p pour $0 < p < 1$

Définition 3.2.1 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application lipschitzienne. On dit que X, et Y sont Lipschitziennemnt isomorphiques, si l'application f est bijective et f^{-1} est lipschitzienne.*

Proposition 3.2.1 *[Alb08] Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces quasi-normés. Si X se plonge lipschitziennement dans Y, et Y est un espace q-normable pour un $0 < q \leq 1$, alors X est aussi q-normable.*

Preuve. Supposons que $f : X \longrightarrow Y$ est un plongement lipschitzien tel que $f(0) = 0$. Soit K le maximum des constantes de Lipschitz de f et f^{-1}. Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ dans X, $z_k = x_1 + \cdots + x_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et posons $z_0 = 0$. Alors.

$$\begin{aligned}
\|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\|_X^q &= \|z_n - z_0\|_X^q \\
&\leq K^q \|f(z_n) - f(z_0)\|_Y^q \\
&= K^q \|\textstyle\sum_{i=1}^n (f(z_k) - f(z_{k-1}))\|_Y^q \\
&\leq K^q \textstyle\sum_{i=1}^n \|f(z_k) - f(z_{k-1})\|_Y^q \\
&\leq K^{2q} \textstyle\sum_{i=1}^n \|z_k - z_{k-1}\|_X^q \\
&= K^{2q} \textstyle\sum_{i=1}^n \|x_k\|_X^q \,.
\end{aligned}$$

Donc d'après le Théorème de Aoki-Rolewicz X est un espace q-normable. ■

Proposition 3.2.2 *[Alb08]*

$(i)-$Si $0 < p < q \leq 1$, l'espace quasi-Banach l_p (resp. L_p) ne se plonge pas lipschitziennement dans l'espace quasi-Banach l_q (resp. L_q) .

$(ii)-$Supposons que $0 < p < q \leq 1$. Alors toute fonction lipschitzienne de $(L_p, \|.\|_p)$ vers $(L_q, \|.\|_q)$ est une constante.

$(iii)-$Supposons que $0 < p < 1$ et $0 < q \leq 1$. Alors toute fonction lipschitzienne de $(L_p, \|.\|_p)$ dans $(L_q, \|.\|_q)$ est une constante. En particulier L_p ne se plonge pas lipschitziennement dans l_q.

$(iv)-$L'espace quasi-Banach nonnormable ne se plonge pas lipschitziennement dans un espace de Banach.

Preuve. (i) Si l'espace l_p se plonge lipchitziennement dans l_q, alors l_p est un espace q-normable, ce qu'est impossible (voir [KPR85, Lemme 2.7]). La même chose pour l'espace L_p (voir [KPR85, Theoreme 2.2]).

(ii) Supposons qu'il existe $f : L_p \longrightarrow L_q$ tel que pour tout $x, y \in L_p$

$$\|f(x) - f(y)\|_q \leq C \|x - y\|_q \,,$$

ce qui implique pour un certain $C > 0$.

$$\|f(x) - f(y)\|_q^q \leq C^q \|x - y\|_q^q = C^q (\|x - y\|_p^p)^{\frac{q}{p}}; \qquad \forall x, y \in L_p.$$

Puisque $q/p > 1$ et l'espace métrique (L_p, d_p) est métriquement convexe, d'après le Lemme **2.3.1** f est une constante.

(iii) Soit $f : L_p \longrightarrow l_q$ une fonction lipschitzienne, supposons maintenant que $f(0) = 0$, alors pour tout $x^* \in l_q^*$ on a $x^* \circ f \in \mathrm{Lip}_0(L_p)$. La Proposition 2.1.2 implique que $x^* \circ f(x) = 0$ pour tout $x \in L_p$, mais l_q^* sèpare les points de l_q, alors forcément que $f(x) = 0$ pour tout $x \in L_p$. ■

Remarque 3.2.1

1- Si $0 < r < p \leq 2$ *l'espace* L_p *se plonge isométriquement dans l'espace quasi-Banach* L_r *(résultat obtenu par Aharoni, Maurey, et Mityagin voir [AMM85]).*

2- D'après la Proposition 3.2.1 *nous savons que* L_q *n'est pas plongeable lipschitziennement dans* L_p *si* $0 < q < p \leq 1$.

3.3 Structure lipschitzienne de l'espace (l_p, d_p) pour $0 < p < 1$

Proposition 3.3.1 *[Alb08] Soient* $0 < p < q \leq 1$. *Alors*

$(i)-$ *Toute fonction lipschitzienne de* (l_q, d_q) *vers* (l_p, d_p) *est une constante. En particulier, l'espace métrique* (l_q, d_q) *ne se plonge pas lipschitziennement dans* (l_p, d_p).

$(ii)-$ *L'espace* (l_p, d_p) *se plonge Lipschitziennement dans l'espace* (l_q, d_q).

Preuve. On va montrer (i). Supposons qu'il existe $\varphi : l_q \longrightarrow l_p$ vérifiant pour tous $x, y \in l_p$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_p^p \leq K \|x - y\|_q^q$$

pour un certain $K > 0$. Alors, pour tout $x^* \in l_q^*$ avec $\|x^*\| = 1$ on a pour tous $x, y \in l_q$

$$\begin{aligned} |x^* \circ \varphi(x) - x^* \circ \varphi(y)| &\leq \|x^*\| \, \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_p \\ &\leq K^{\frac{1}{p}} \|x - y\|_q^{\frac{q}{p}} . \end{aligned}$$

On fixe $x \in l_q$ avec $\|x\|_q = 1$, et on considére l'espace métrique suivant $\mathbb{R}_x = \{rx : r \in \mathbb{R}\}$ avec la distance ρ entre les points sx et tx dans $\mathbb{R}_x$ qui est définie pour tous $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\rho(sx, tx) &= \|sx - tx\|_q \\ &= |s - t| .\end{aligned}$$

Si on fait la restriction de l'application $x^* \circ \varphi$ à $\mathbb{R}_x$, on obtient pour tous $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|x^* \circ \varphi(tx) - x^* \circ \varphi(sx)| &\leq K^{\frac{1}{p}} \|x - y\|_q^{\frac{q}{p}} \\ &\leq K^{\frac{1}{p}} |s - t|^{\frac{p}{q}} .\end{aligned}$$

Notant que $(\mathbb{R}_x, \rho)$ est un espace métriquement convexe et que $q/p > 1$, donc d'aprés le Lemme 2.1.1; $x^* \circ \varphi$ est une constante sur $\mathbb{R}_x$. Maintenant on prend deux éléments x et y dans l_q (x et y non nuls). Les deux points 0 et x appartiennent à $\mathbb{R}_{\frac{x}{\|x\|}}$ la même chose pour que 0 et y appartiennent à $\mathbb{R}_{\frac{x}{\|y\|}}$, donc

$$\begin{aligned}|x^* \circ \varphi(x) - x^* \circ \varphi(y)| &\leq |x^* \circ \varphi(x) - x^* \circ \varphi(0) + x^* \circ \varphi(0) - x^* \circ \varphi(y)| \\ &\leq |x^* \circ \varphi(x) - x^* \circ \varphi(0)| + |x^* \circ \varphi(0) - x^* \circ \varphi(y)| = 0\end{aligned}$$

ce qui implique que $x^* \circ \varphi(x) = x^* \circ \varphi(y)$, mais l_p^* sépare les points de l_p, donc $\varphi(x) = \varphi(y)$, i.e., φ est une constante.

Pour (ii) voir [Alb08, Proposition 4.1]. ■

Corollaire 3.3.1 *Les espaces (l_p, d_p) et (l_q, d_q) ne sont pas Lipschitziennement isomorphique si $0 < p \neq q \leq 1$.*

Remarque 3.3.1 *Notons que si $0 < q$, alors (L_q, d_q) ne se plonge pas lipschitziennement dans (l_p, d_p) quand $0 < p \leq 1$. En effet, supposons que $\varphi : L_q \longrightarrow l_p$ est lipschitzienne i.e., pour tout $x, y \in L_q$*

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_p^p \leq K \|x - y\|_q^q$$

pour un certain $K > 0$ et composons φ avec $x^* \in l_p^*$ muni de la norme $\|x^*\| \leq 1$ on obtient pour tous $x, y \in L_q$

$$\begin{aligned} |x^* \circ \varphi(x) - x^* \circ \varphi(y)| &\leq \|x^*\| \, \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_p \\ &\leq K^{\frac{1}{p}} (\|x-y\|_q^q)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque (L_q, d_q) est un espace métriquement convexe et l_p^* sèpare les points de l_p et d'après le Lemme 2.3.1, φ doit être une constante, ce qui donne que si (M,d) est un espace métriquement convexe. Alors toute fonctin lipschitzienne de (M,d) dans (l_p, d_p) doit être une constante.

3.4 Non-équivalence uniforme de L_0 et L_p $(0 < p \leq \infty)$

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On prend l'application arbitraire $f : X \longrightarrow Y$, et on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} W_f : & [0,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty] \\ & t & \longmapsto & w_f(t) \end{array}$$

qui est donnée par

$$w_f(t) = \sup \{d(f(x), f(y)); d(x,y) \leq t\}.$$

On peut voir que f est lipschitzienne si $w_f(t) \leq ct$ pour tout constante c.

Définition 3.4.1 *Soit l'application $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$. On dit que f est continue uniformément, si pour tout $t > 0$ on a $\lim_{t \longrightarrow 0} w_f(t) = 0$.*

Définition 3.4.2 *Soit $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ application. On dit que f est un homéomorphisme uniforme, si f est bijective et f et f^{-1} sont continues uniformément.*

Soit L_0 l'espace de fonctions Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$ avec la convention habituelle d'identifier des fonctions égales presque par tout, muni de la F-norme

$$\|f\|_0 = \int \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} dt.$$

Lemme 3.4.1 *[Alb08] Soit $\delta > 0$. Il existe un entier $N = N(\delta)$ tel que pour tout f et g dans L_0 ils existent des fonctions*

$$f = f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}, f_N = g$$

dans L_0 telles que $\|f_j - f_{j-1}\|_0 < \delta$, pour $j = 1, \ldots, N$.

Preuve. Nous prenons $f = 0$. Soit $\delta > 0$ posons que

$$N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$$

avec les fonctions $f_0 = 0$ et $f_j = g\chi_{[0, \frac{j}{N}]}$ pour tout $1 \leq j \leq N$. Alors

$$\|f_j - f_{j-1}\|_0 = \int_{\frac{j-1}{N}}^{\frac{j}{N}} \frac{|g(t)|}{1 + |g(t)|} dt \leq \frac{1}{N} < \delta.$$

■

Proposition 3.4.1 *[Alb08] Soit X un espace topologique localement borné. Si $\varphi : L_0 \longrightarrow X$ est une fonction uniformèment continue. Alors le rang de φ est un ensemble borné dans X.*

Preuve. On a la topologie métrique sur X qui est définie par une quasi-norme $\|.\|$ et d'après le théorème de Aoki-Rolewicz la quasi-norme est p-sous additive pour un certain $0 < p \leq 1$. L'uniforme continuité de φ nous donne que $\delta > 0$. Alors pour tout $f_1, f_2 \in L_0$ avec $\|f_1 - f_2\|_0 < \delta$ nous aurons

$$\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\|^P < 1.$$

Pour tout $f \in L_0$, d'après le lemme précédent nous prenons $0 = f_1, f_2, \ldots, f_N = f \in L_0$ (où N dépend seulement de δ) avec $\|f_j - f_{j-1}\|_0 < \delta$, pour $j = 1, \ldots, N$. Alors

$$\|\varphi(f)\|^p = \left\|\sum_{j=1}^{N} \varphi(f_{j-1}) - \varphi(f_j)\right\|^p \leq \sum_{j=1}^{N} \|\varphi(f_{j-1}) - \varphi(f_j)\|^p < N.$$

Ce qui termine le démonstration. ■

Corollaire 3.4.1 *L_0 n'est pas homéomorphe uniformément à aucun espace topologique localment borné. En particulier L_0 n'est pas homéomorphisme uniformément à L_P pour tout $0 < p \leq \infty$.*

Conclusion

On a étudié dans ce mémoire la structure lipschitzienne dans les espaces de Fréchet, et les espaces quasi Banach L_p et l_p dans le cas où $0 < p < 1$. Dans ce cas on a trouvé que le dual de Lipschitz de l'espace L_p est égale à 0. Ce qui permet de conclure qu'il n'existe pas des applications lipschiziennes de l'espace L_p vers $\mathbb{R}$ pour certains $0 < p < 1$.

Bibliographie

[AMM85] I. Aharoni, B. Maurey, B.S. Mityagin, Uniform embeddings of metric spaces and of Banach spaces into Hilbert spaces, Israel J. Math. **52** (3)(1985) 251–265.

[Alb08] F. Albiac, Nonlinear structure of some classical quasi-Banach spaces and F-spaces, Journal

of Mathematical Analysis and Applications **340** (2008), 1312–1325.

[AK06] F. Albiac, N.J. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Grad. Texts in Math., vol. **233**, Springer, New York, 2006.

[AK09] F. Albiac, N.J. Kalton, Lipschitz structure of quasi-Banach spaces, Israel J. Math.,**170** (2009), 317–335.

[Aok42] T. Aoki, Locally bounded linear topological spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942) 588–594.

[BL00] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis, vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. **48**, Amer. Math. Soc.,Providence, RI, 2000.

[DJ95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge,1995.

[KPR85] N.J. Kalton, N.T. Peck, J.W. Rogers, An F-Space Sampler, London Math. Lecture Notes, vol. **89**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[Nao98] A. Naor, Geometric problems in nonlinear functional analysis, Master's thesis, Hebrew University, 1998.

[Rib76] M. Ribe, On uniformly homeomorphic normed spaces, Ark. Mat. **14** (1976) 237–244..

[Rol85] S. Rolewicz, Metric Linear Spaces, second ed., Math. Appl. (East European Series), vol. **20**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985.

[Sch72] M. Schreiber, Quelques remarques sur les caractérisations des espaces Lp, 0 p <1, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) 8 (1972) 83–92(with English summary)..