

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

N° :



DOMAINE : ELECTROTECHNIQUE

FILIERE : ELECTROTECHNIQUE

OPTION :

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de
Master en électrotechnique**

Option : comonde machines tournantes

Par :

BRIKI Mohamed

Intitulé

**Conception des contrôleurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre
fractionnaire pour des systèmes d'ordre entier et
d'ordre fractionnaire**

Soutenu devant le jury composé de :

Dr. Abderrahim ZEMMIT	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Président
Dr. IDIR Abdelhakim	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Rapporteur
Dr. Khatir Khettab	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examineur

Année universitaire : 2021 /2022

Remerciement

Avant tout, mes remerciements vont à **Allah** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au sein de l'université de Mohamed Boudiaf - MSILA, sous la direction de **Dr. IDIR** Abdelhakim que je tiens à remercier très vivement pour son enthousiasme envers notre travail, sa disponibilité et son soutien scientifique et humain.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du jury qui ont acceptés de juger ce modeste travail.

J'adresse un grand merci à mon frère **RIGHI** Abderraouf et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études. Je ne peux conclure sans un mot de remerciement à tous mes enseignants tout le long de ma formation.

Enfin, un grand merci à mes parents, et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien surtout durant les deux dernières années.

Dédicace

A mes parents,
A ma petite famille,
A mes frères et sœurs,
A tous mes amis,

ملخص

المراقب الكلاسيكي هو التقنية الأكثر استخدامًا في التحكم في العمليات الصناعية منذ عقود. في الآونة الأخيرة ، تم اقتراح المراقب الجزئي ذو الترتيب الكسري وهو تعميم للمراقب الكلاسيكي. يتم تبرير الاهتمام بهذا النوع من وحدات التحكم من خلال مرونة أفضل في تصميم عنصر التحكم نظرًا لأنه يحتوي على معلمتين إضافيتين ، الأوامر الكسرية لإجراءات التكامل والاشتقاق. يمكن استخدام هذه المعلمات لتلبية الأداء الإضافي في تصميم أنظمة المؤازرة . يقدم العمل الذي تم تنفيذه في هذه الرسالة توليفة من وحدة تحكم PID كسرية لأنظمة ترتيب صحيح وكسر. أظهرت مقارنة هذه النتائج مع أنظمة التحكم في ترتيب الأعداد الصحيحة الكلاسيكية تحسنًا واضحًا في أداء التردد والوقت.

الكلمات المفتاحية : المراقب الكلاسيكي، المراقب الجزئي، مصححات الترتيب الكسري، الأنظمة ذات الدرجة الكسرية، الأنظمة ذات الدرجة غير الكسرية

Résumé

Le correcteur PID est le contrôleur le plus utilisé dans l'asservissement des processus industriels pour des décennies. Récemment, un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur PID classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Le travail réalisé dans ce mémoire de fin d'études présente une synthèse d'un contrôleur PID fractionnaire à des systèmes d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. La comparaison de ces résultats avec les schémas de commande d'ordre entier classique ont montré une nette amélioration des performances fréquentielles et temporelles.

Mots Clés : Le correcteur PID classique, correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, système d'ordre fractionnaire, système d'ordre entier

Abstract

The PID controller has been the most widely used controller in industrial process control for decades. Recently, a fractional-order PID controller ($PI^\lambda D^\mu$), which is a generalization of the classical PID corrector, has been proposed. The interest in this type of controller is justified by its better flexibility in the control's design since it has two additional parameters, the fractional orders of the actions of integration and derivation. These parameters can be used to satisfy additional performance requirements in the design of servo systems. This dissertation contains a synthesis of a fractional PID controller for integer and fractional order systems. The comparison of these results with the classical integer order control schemes showed a clear improvement in frequency and timing performance.

Key words

Classical PID corrector, fractional order $PI^\lambda D^\mu$ controller, fractional order systems, integer order systems.

Table des matières

Remerciement	I
.....
I	
Dédicace	III
Dédicace	Error! Bookmark not defined.
Table des matières	V
Listes des figurées	VIII
Introduction générale	1

Chapitre I

Approximation des Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaires

I.1 Introduction	3
I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire	3
I.2.1 Définition mathématique	3
I.2.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov	3
I.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville	4
I.2.1.3 Définition de Caputo	4
I.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	4
I.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	5
I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	5
I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	6
I.5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.5.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire	7
I.5.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire	10
I.6 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	12
I.6.1 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire	13
I.6.2 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire	13
I.6.3 Fonction de transfert	13
I.6.4 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	13
I.6.4.1 Définition	13
I.7 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert	14
I.7.1 Propriétés des systèmes d'ordre fractionnaire	14
I.7.2 Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier	14

I.7.3 Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire.....	15
I.8 Observabilité et contrôlabilité d'un système d'ordre fractionnaire.....	16
I.8.1 Observabilité	16
I.8.2 Définition	16
I.8.3 Critère d'Observabilité	16
I.8.4 Contrôlabilité	17
I.8.5 Définition.....	17
I.8.6 Critère de contrôlabilité.....	17
I.9 Conclusion :	17

Chapitre II

Correcteurs d'Ordre Fractionnaire

II.1 Introduction	19
II.2 Commande d'ordre fractionnaire : un aperçu.....	19
II.3 Correcteur $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire	21
II.3.1 Structure du correcteur $PI\lambda D\mu$	21
II.4 Réglage des correcteurs $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire.....	24
II.4.1 Ajustement des paramètres du correcteurs $PI\lambda D\mu$:	27
II.4.1.1 Ajustement des paramètres kp, TI et TD	27
II.4.1.2 Ajustement des paramètres λ et μ	27
II.4.1.2.1 Système sans intégrateur	28
II.4.1.2.2 Système avec intégrateur	28
II.5 Conclusion.....	29

Chapitre III

Applications et simulation

III.1 Les Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires	31
III.2 Critères de performances	31
III.2.1 Critères temporelles	31
III.2.2 Critères fréquentiels :.....	31
III.3 Ajustement des paramètres de correcteur fractionnaire.....	32
III.4 Mesures de performance	33
III.5 Conception de PIDclassique.....	33
III.6 Méthodologie de conception	35

Conclusion générale.....	41
Référence et bibliographie	43

Listes des figurées

Figure I. 1 : Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	8
Figure I. 2 : Tracé de Bode de $11 + spTm$ et son approximation.....	9
Figure I. 3 : Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	10
Figure I. 4 : Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	12
Figure I. 5 : Zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre commensurable en fonction d'ordre de dérivation α	16
Figure II. 1 : Asservissement par un régulateur PID	19
Figure II. 2: Système de commande à retour unitaire classique	21
Figure II. 3: Structure du correcteur $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire	23
Figure II. 4: Un exemple du module asymptotique du correcteur $PI\lambda D\mu$ D'ordre fractionnaire.....	23
Figure II. 5: Tracés d'amplitude et de phase : (PID et ... : $PI\lambda D\mu$ pour $\lambda=0.8$ et $\mu =0.7$).....	24
Figure II. 6: Correcteur $PI\lambda D\mu$ avec les ordres fractionnaires	24
Figure II. 7: Changement de KP , KI et KD du correcteur PID classique Error! Bookmark not defined.	Error! Bookmark not defined.
Figure II. 8: Changement de λ et μ du correcteur $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire.....	Error! Bookmark not defined.
Figure III. 1: Réponses indicielles en boucle fermée sous le régulateur PID.	36
Figure III. 2: indicielles en boucle fermée sous le régulateur PID.....	36
Figure III. 3 : Comparaisons des diagrammes de Bode.....	37
Figure III. 4 Comparaisons de différents régulateurs PID classique et fractionnaire.	38
Figure III. 5: Comparaisons de différents régulateurs PID.....	Error! Bookmark not defined.

Introduction Générale

Introduction générale

Depuis les premiers travaux des dérivées d'ordre fractionnaire il y'a quelques siècles, la théorie du calcul fractionnaire a été développée dans la plupart du temps par des mathématiciens. Dans les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1,2]. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque. C'est seulement dans les dernières années que l'on peut trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation dans la théorie des systèmes et la théorie de la commande. Donc, un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

L'idée d'employer le calcul fractionnaire dans les boucles de contrôle des systèmes datait du début des années 60. Oustaloupa développé la Commande Robuste d'Ordre non Entier (CRONE) et a appliqué cette technique dans de divers domaines des systèmes de commande. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Depuis cette initiative, la commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny a proposé le régulateur $PI^\lambda D^\mu$, une généralisation du correcteur PID classique, comprenant une intégration fractionnaire d'ordre λ et une dérivation fractionnaire d'ordre μ .

Dans ce mémoire de fin d'études, nous nous sommes intéressés à l'amélioration des performances des systèmes d'ordre entier et d'ordre fractionnaire en utilisant un correcteur d'ordre fractionnaire.

Chapitre I

Approximation des Opérateurs et Systèmes d'Ordre Fractionnaires

I.1 Introduction

Le Calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui traite des dérivés et intégrales des ordres non entiers, en d'autres termes il s'agit d'une généralisation du calcul traditionnel qui conduit à des concepts et des outils similaires mais avec une application beaucoup plus large. Dans les deux dernières décennies le calcul fractionnaire a été redécouvert par les scientifiques et les ingénieurs et a été appliqué dans un nombre croissant de domaines notamment dans le domaine de la théorie de la commande. Le succès des contrôleurs d'ordre fractionnaire est incontestable avec beaucoup de succès en raison d'émergence de méthodes efficaces dans la différenciation et l'intégration des équations d'ordre non entier.

I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

I.2.1 Définition mathématique

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différenciation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier α où a et t sont des limites de l'opération. L'opérateur intègro-différentiel continu est défini comme

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha > 0 \end{cases} \quad (I.1)$$

Les définitions utilisées pour la diffère intégral d'ordre fractionnaire général sont la définition de Grunwald-Letnikov (GL), la ϵ ast l'ordre de l'opération, généralement définition de Riemann Liouville (RL) et la définition de Caputo.

I.2.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Grunwald-Letnikov[2] , donnée par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (I.2)$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur n d'une fonction continue $f(t)$, soit :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad n; N \in N \quad (I.3)$$

Sous la condition que les dérivées $f^{(k)}(t) (k = 1, 2, \dots, m+1)$ sont continues dans $[t_0, t]$ avec $m \leq \Re(\alpha) \leq m+1$, a définition de Grunwald-Letnikov peut être aussi donnée par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (I.4)$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (I.5)$$

I.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville

Une autre définition très utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Riemann-Liouville. Inspirée de la formule de Cauchy donnée par l'équation :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x) dx \quad (I.6)$$

La définition complète de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire α de $f(t)$ est donnée par[2] :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \\ f(t) & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ D^N [{}_a D_t^{\alpha-N} f(x)] , n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \Re(\alpha)\} & \text{si } \Re(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (I.7)$$

Où $\alpha \in \mathbb{C}$ un entier positif et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty]$.

I.2.1.3 Définition de Caputo

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation fractionnaire. [3] L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (I.8)$$

Avec r est un entier positif vérifiant l'inégalité $(r-1) < \alpha < r$.

$f^{(r)}(\tau)$, étant la dérivée d'ordre entier r , par rapport à τ , de la fonction $f(\tau)$. ${}_a D_t^{\alpha} f(t)$, désigne la dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction $f(t)$ entre a et t selon la définition de Caputo.

I.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes:

- Deux paramètres, « α » et « a » sont nécessaires pour définir un opérateur d'ordre fractionnaire.
- La définition de la dérivation d'ordre fractionnaire Étant basée sur celle d'une intégration d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre Fractionnaire d'une fonction f nécessite la connaissance de $f(t)$ sur l'intervalle $[a, t]$, alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de f autour de t est nécessaire. Cette

propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.

- la définition de Grünwald-Letnikov[2] :
- Décrit l'unification des deux notions, l'intégral et la dérivée d'ordre fractionnaire
- la dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction temporelle $f(t)$ donne

$${}_a D_t^\alpha \circ {}_a I_t^\alpha f(t) \text{ avec } \Re(\alpha) > 0$$

Cette relation n'étant pas toujours vraie pour $\Re(\alpha) > 0$

- les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe, soit[1] :

$${}_a I_t^{n1} \circ {}_a I_t^{n2} f(t) = {}_a I_t^{n1+n2} f(t) \text{ avec } \begin{cases} \Re(n2) > 0 \\ \Re(n1) > 0 \end{cases}$$

- Contrairement aux opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions [2] soit :

$${}_0 D_t^{n1} ({}_0 D_t^{n2} f(t)) = {}_0 D_t^{n1+n2} f(t)$$

et

$${}_a D_t^r ({}_a D_t^n f(t)) = {}_a D_t^{r+n} f(t) \text{ si } \begin{cases} r \text{ entier positif} \\ n \text{ arbitraire} \end{cases}$$

- L'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe) est linéaire[6]

Ainsi, si y et g sont deux fonctions continues et (λ, μ) réelles, on aura :

$$D^{(a)}(\lambda \cdot y + \mu \cdot g) = \lambda \cdot D^{(a)}(y) + \mu \cdot D^{(a)}(g)$$

Pour $\alpha = 0, D^{(a)}y(t)$ est l'opérateur identité ($D^{(0)}y(t) = y(t)$)

I.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ définie par l'équation(I.5), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions $g(t) = t^{\alpha-1} \text{ et } f(t)$ [5] :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.9)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (I.10)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$L\{f(t) * d(t); s\} = F(s)G(s) \quad (\text{I.13})$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville, de Gröndwald- Leitnikovet de Caputo :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = S^{-\alpha} F(s) \quad (\text{I.14})$$

I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

Dérivée de Riemann-Liouville :

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum S^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.15})$$

Avec $(n-1) < \alpha < n$ Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue [4]. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t=0$.

Dérivée de Gröndwald-Leitnikov

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^{-\alpha} F(s) \quad (\text{I.16})$$

Dérivée de Caputo

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.17})$$

I.5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Approximation et réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire. Il existe plusieurs techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Les approximations disponibles dans le domaine s sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la référence, on peut trouver un très bon résumé de ces méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes suivantes :

La méthode de l'expansion par fractions continues EFC (Expansion Fractionnaire Continue).

La méthode de Carlson.

La méthode de Charef.

La méthode de Matsuda.

La méthode d'Oustaloup.

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées dans la littérature. La méthode de Charef dite méthode de la fonction de singularité est plus utile et plus pratique

pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire voir, c'est pourquoi on va l'utiliser pour l'implémentation de nos schémas de commande.

Méthode de Charef :

fonction de singularité Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [7], [8] qui est présentée dans cette section. Cette approche repose sur une méthode graphique; elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

I.5.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire :

La fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_1(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.18})$$

Où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cong \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (\text{I.19})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut alors écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.20})$$

Avec $k_I = \left(\frac{1}{\omega_c^m}\right)$ et ω_c est la fréquence de coupure du PPF, obtenue à partir de la

basse fréquence ω_b , $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$ ou ε est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.18) et le PPF de l'équation (I.19) dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$. Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.19) et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20 m dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente -20 dB/dec et 0 dB/dec

correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 \dots < z_{n-1} < p_n$ D'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{(1+\frac{s}{\omega_c})^m} \cong K_i \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \tag{I.21}$$

Les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant une méthode graphique simple [7], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de ω_{max} . Le choix des singularités p_i et z_i pour l'approximation en maintenant un écart constant entre la ligne à -20dB/dec et les lignes droites en zig-zag est présenté sur la figure-(I.1).

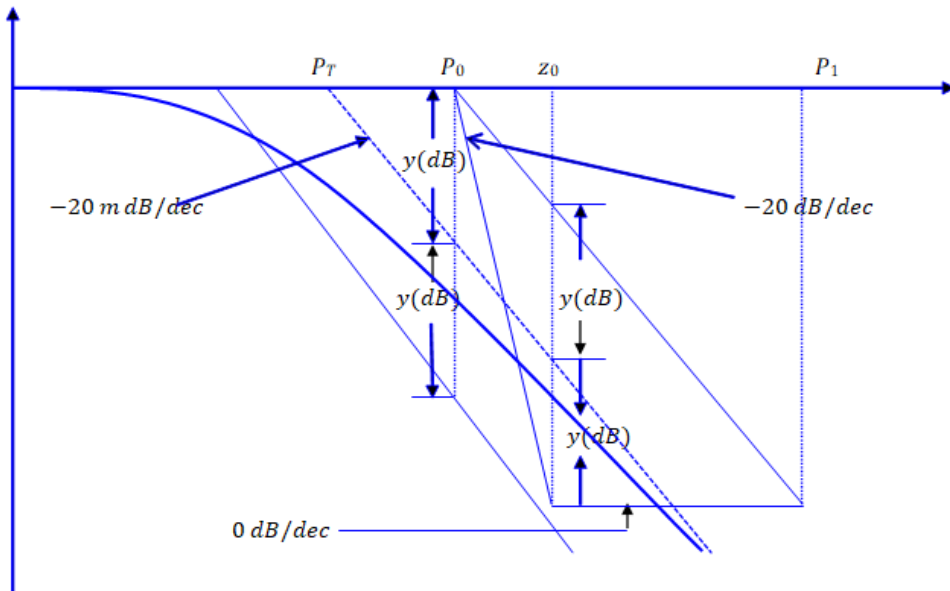


Figure I.1 : Choix des singularités pour l'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour déterminer le nombre N, la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit " ω_{max} " cette bande, telle que ω_{max} est pris 100 fois égal à ω_h son expression est donnée par [7]:

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i a p_i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont donnée par

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$$

et le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont donnés par [7] :

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

La figure (I.2) présente le diagramme de Bode de $\frac{1}{\left(1+\frac{s}{p_T}\right)^m} - 20\text{dB/dec}$

et son approximation par des lignes en zig-zag avec des pentes individuelles de -20dB/dec et 0 dB/dec .

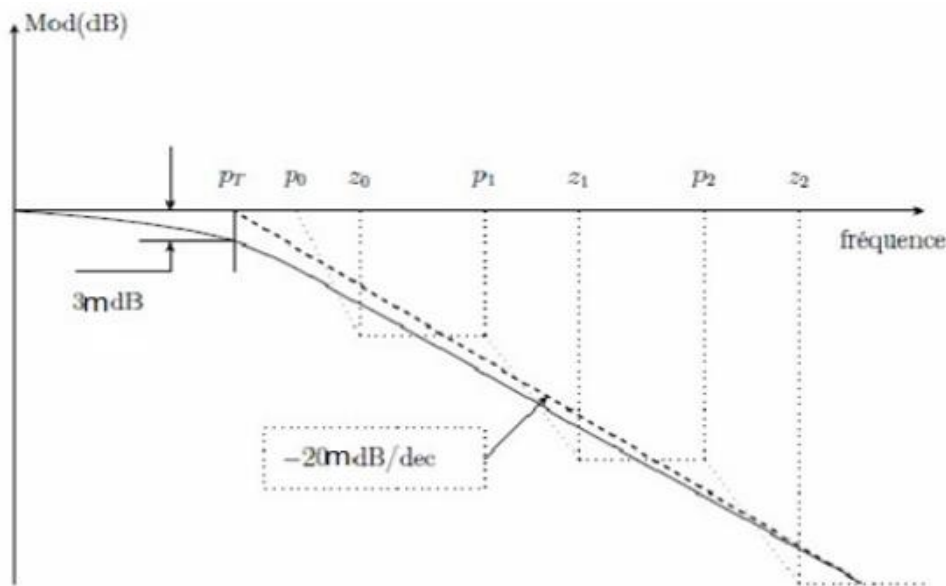


Figure I.2 : Tracé de Bode de $\frac{1}{\left(1+\frac{s}{p_T}\right)^m}$ et son approximation

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_i \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)} \quad (I.22)$$

où les coefficients h_i sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_1 \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_1 \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j}\right)}, \quad i=0, 1, \dots, N \quad (I.23)$$

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster de la 1^{ère} forme de dont le schéma est représenté dans la Figure (I.1) [8]

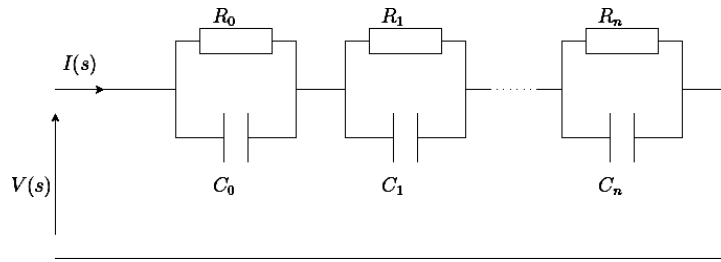


Figure I.3 : Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Cette impédance $Z(s)$ du circuit de la Figure I.1 est donnée comme

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1+sR_iC_i} \right) \tag{I.24}$$

Des équations (I.23) pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$, on peut écrire:

$$R_i = h_i \text{ et } C_i = \frac{1}{h_i(ab)^i p_0} \tag{I.25}$$

I.5.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \tag{I.26}$$

où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire ZPF comme suit [8]:

$$G_D(S) = k_D \left(1 + \frac{S}{\omega_c} \right)^m \tag{I.27}$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G_D(S) = k_D \left(\frac{S}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} (S^m) = S^m \tag{I.28}$$

avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la

basse fréquence ω_b , $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (I.22) et le ZPF de l'équation (I.23) une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$. Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.23), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction de transfert rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20 dB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ [8] D'où l'approximation suivante :

$$G_D(S) = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.29)$$

En utilisant la méthode graphique simple de [7], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquences ω_{max} . Pour déterminer le nombre 'N', la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit

" ω_{max} " cette bande, tel que ω_{max} est pris 100 fois égal à ω_h son expression est donnée par [8]

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{max}}{z_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i az_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

Avec $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$, $p_0 = az_0$ Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(S) = S^m = k_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} \quad (I.30)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G_D(S)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(S)}{s} = \frac{1}{s} \cdot K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} \quad (I.31)$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_S(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.32)$$

Avec $G_0 = K_D$ et,

$$g_i = K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 - a(ab)^{(i-j)})}{(-az_0(ab)^i) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (I.33)$$

Cette L'équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster de la 2^{ème} forme dont le schéma est représenté sur la Figure-(I.2) [8].

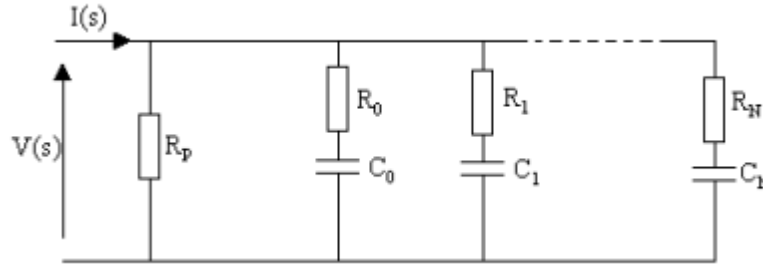


Figure I.4 : Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance $Y(s)$ du circuit de la Figure-I.2 est donnée par :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left(\frac{sC_i}{1+sR_iC_i} \right) \quad (\text{I.34})$$

Des équations(I.32) et (I.33) pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$, on peut écrire:

$$R_p = \frac{1}{g_0}, C_i = g_i, \text{ et } R_i = \frac{1}{g_i p_i} \quad (\text{I.35})$$

I.6 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire :

L'identification a pour but la détermination, généralement à partir de mesures physiques, des paramètres numériques d'un modèle mathématique, de telle sorte que dans le domaine de fonctionnement pour lequel il a été établi, ce modèle présente un comportement aussi proche que possible de celui du système réel [9]. Dans les dernières décennies, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire a gagné beaucoup d'intérêts de la communauté scientifique. Malgré que ce type de modèle pose un problème d'identification plus difficile exigeant non seulement l'estimation des coefficients du modèle mais également la détermination de ses ordres fractionnaires, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire est devenue un thème de recherche très actif. En plus, l'évaluation numérique de la dérivation d'ordre fractionnaire est la manipulation des matrices de données de dimension élevée conduit aux problèmes des singularités matricielles et par conséquent au biais d'estimation dû aux erreurs de calcul [10]. Deux classes d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire ont été développées ; la première exige la connaissance a priori des ordres fractionnaires et estime seulement les paramètres du modèle mais la seconde estime les paramètres ainsi que les ordres fractionnaires des dérivés du modèle à identifier en même temps [10]. Dans la première classe des méthodes inspirées de quelques méthodes classiques fréquentielles d'identification des systèmes d'ordre entier a été proposé. Récemment, de nouvelles méthodes temporelles et fréquentielles qui forment la deuxième classe ont été développées. On peut citer entre autre les méthodes basé sur les variables instrumentales, l'algorithme des moindres carrés récursives, les méthodes d'optimisation méta heuristiques comme l'algorithme génétique, l'algorithme des essais particuliers.

I.6.1 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

I.6.2 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (I.36)$$

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [11]:

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} Y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} Y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} Y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned}$$

$D^\nu \equiv {}_0 D_t^\nu$ désigne la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville ou de Caputo[12].

Où $u(t)$ et $y(t)$ sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système fractionnaire, les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels tel que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ et $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$ et $\alpha_n \geq \beta_m$ les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) et b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres réels. Quand les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont multiples du même nombre réel α ($0 < \alpha < 1$), tel que $\alpha_i = i \cdot \alpha$ ($0 \leq i \leq n$) et $\beta_j = j \cdot \alpha$ ($0 \leq j \leq m$) et $m \leq n$, le système fractionnaire est dit système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation devient :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i \cdot \alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j \cdot \alpha} u(t) \quad (I.37)$$

I.6.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.36) est donnée par la fonction suivante [11]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (I.38)$$

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.36) devient :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (I.39)$$

I.6.4 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

I.6.4.1 Définition

Un système linéaire d'ordre fractionnaire mono variable, peut être représenté par une équation d'état d'ordre fractionnaire de la forme [11]:

$$\begin{cases} d^{[\alpha]} x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (I.40)$$

$$d^{[\alpha]} x(t) = [d^{\alpha_1} x_1(t) \ d^{\alpha_2} x_2(t) \ \dots \ d^{\alpha_n} x_n(t)]^T$$

les α_i ($1 \leq i \leq n$) sont les ordres de dérivation tel que $0 < \alpha_i < 1$

- u est l'entrée du système

x est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension ($n \times 1$)

y est la sortie du système

- les matrices A , B , C et D sont des matrices réelles constantes de dimension appropriée.

La notation précédente met en évidence que la dérivation d'ordre fractionnaire $d^{[\alpha]}$ est appliquée seulement à l'élément x_i de l'état x dans (I.40) est définie comme une équation d'état d'ordre fractionnaire (I.40) est une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Remarque :

Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques, en d'autres termes plusieurs représentations d'états correspondent à la même fonction de transfert d'ordre fractionnaire. Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, la représentation d'état de l'équation (I.40) devienne:

$$\begin{cases} d^{[\alpha]}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Où $d^{[\alpha]}x = [d^{[\alpha]}x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$

I.7 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert

La fonction de transfert $G(s)$ de la représentation d'état de l'équation (I.40) est obtenue en utilisant la transformée de Laplace avec les conditions initiales nulles. $G(s)$ est donnée comme suit [2] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[S^{[\alpha]}I_n - A]^{-1}B + D \quad (\text{I.42})$$

Où $S^{[\alpha]}I_n = \text{diag}[S^{\alpha_1} S^{\alpha_2} \dots S^{\alpha_n}]$

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, l'équation (I.39) devienne:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[S^{[\alpha]}I_n - A]^{-1}B + D \quad (\text{I.43})$$

I.7.1 Propriétés des systèmes d'ordre fractionnaire

I.7.2 Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier

Soient les deux systèmes suivants pour $0 < \mu < 1$ et le terme $x(0)$ pris comme condition initiale [14]:

$$x'(t) = \mu t^{\mu-1} \Rightarrow x(t) = t^\mu + x(0) \quad (I.45)$$

$$D^\alpha x(t) = \mu t^{\mu-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \Rightarrow x(t) = \frac{\mu \Gamma(\alpha) t^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\mu + \alpha)} + x(0) \quad (I.46)$$

On remarque en effet, que le système d'ordre entier (I.41) est instable quel que soit $\mu \in \mathbb{R}$, système d'ordre fractionnaire (I.43) est stable quel que soit $0 < \mu < (1 - \alpha)$. Ceci montre que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier [14].

I.7.3 Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps, un système est stable si les racines de son polynôme caractéristique ont partie réelle strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, la définition de la stabilité diffère de celle des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables. D'autre part, il a été montré, par plusieurs auteurs et en utilisant différentes méthodes, que pour le cas des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, une méthode d'analyse complexe basée sur le principe d'argument des racines de l'équation caractéristique peut être utilisée pour étudier la stabilité dans le sens entrée bornée-sortie bornée (BIBO) [15-16]. L'état de la stabilité peut alors être énoncé comme suit :

Théorème 1:

Un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation différentielle de l'équation (I.35) dont la fonction de transfert est donnée par (I.38) est stable si (I.37) et (I.38) seulement si $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ (pour $1 \leq i \leq N$) [43]. Les λ_i ($1 \leq i \leq N$) sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert $P(s^\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i$ qui est un polynôme en s^α .

Théorème 2:

Un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (I.40) est stable si la condition $|\arg(\text{eig}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ est satisfaite pour $0 < \alpha < 2$ où le terme $[\text{eig}(A)]$ représente les valeurs propres de la matrice A [11].

Figure-(I.5), illustre les zones de stabilité des systèmes linéaire d'ordre fractionnaire commensurable en fonction de l'ordre de dérivation α .

I.8 Observabilité et contrôlabilité d'un système d'ordre fractionnaire

I.8.1 Observabilité

Dans le cas entier, la notion d'observabilité est liée à la reconstitution de l'état initial tout en connaissant la représentation d'état ainsi que les vecteurs d'entrée et de sortie pendant un intervalle de temps donné consécutif à l'instant initial [18]. Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation d'état (I.43):

$$\begin{cases} D^\alpha(x(t)) = \dot{A}x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, 0 < \alpha < 1 \tag{I.47}$$

I.8.2 Définition

L'état $x_0 = x(t_0)$ est observable si, pour $u(t)$ donné, il existe un instant $t_f \geq t_0$ tel que la connaissance de $y(t)$ sur l'intervalle $]-\infty, t_f[$ et de $x(t)$ sur l'intervalle $]-\infty, t_0[$ soit suffisante pour déterminer x_0 [19].

I.8.3 Critère d'Observabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme son similaire dans le cas d'ordre entier [19,20]. Théorème : Le système d'ordre fractionnaire (I.47) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $M_{ob}(n \times n)$:

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

est une matrice de rang n .

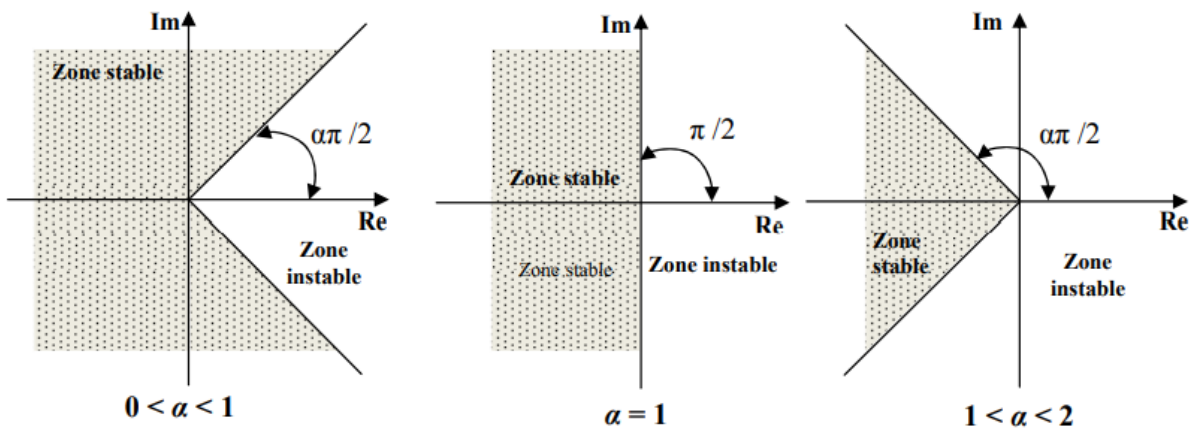


Figure I.5 : Zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre commensurable en fonction d'ordre de dérivation α .

I.8.4 Contrôlabilité

Dans le cas entier, la notion de contrôlabilité est liée à la transition d'un système d'un état à un autre, spécifiée à l'avance, dans un intervalle de temps fini [18]. Considérons le système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation d'état de l'équation(I.47).

I.8.5 Définition

Si l'on peut amener le système de l'état $x_0 = x(t_0)$, où il se trouve à l'instant t_0 , à l'état $x_f = x(t_f)$ à l'instant $t_f \geq t_0$ en agissant uniquement sur l'entrée $u(t)$ (ou commande) supposée sans contrainte $x(t)$ étant connu sur l'intervalle $]-\infty, t_0[$ l'état x_0 est dit contrôlable à l'instant t_0 [19].

I.8.6 Critère de contrôlabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [20,21].

Théorème

Le système d'ordre fractionnaire (I.47) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$M_{cont} = [B \ AB \ \dots \ A^{N-1}B]$$

$M_{cont}(n \times n)$ est une matrice de rang n .

I.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ainsi que leurs représentations et propriétés. La stabilité de ces systèmes a été discutée en montrant la différence de cette notion par rapport au système d'ordre entier. Nous avons aussi présenté deux types de système d'ordre fractionnaire fondamental et leur approximation par des fonctions rationnelles, leur réponses temporelles et fréquentielles ont été dérivées à partir de ces approximations, ainsi que leur implémentation par des circuits analogiques

Chapitre II

Correcteurs d'Ordre Fractionnaire

II.1 Introduction

Le régulateur PID, appelé aussi correcteur PID (proportionnel, intégrateur, dérivateur) est un système de contrôle, il est constitué d'un comparateur pour observer l'écart (erreur) entre la mesure et la consigne, et d'un correcteur dont l'algorithme permet d'obtenir une loi d'évolution de la mesure du procédé conforme au cahier des charges. Il permettant d'effectuer un asservissement en boucle fermée d'un système industriel ou « procédé ».

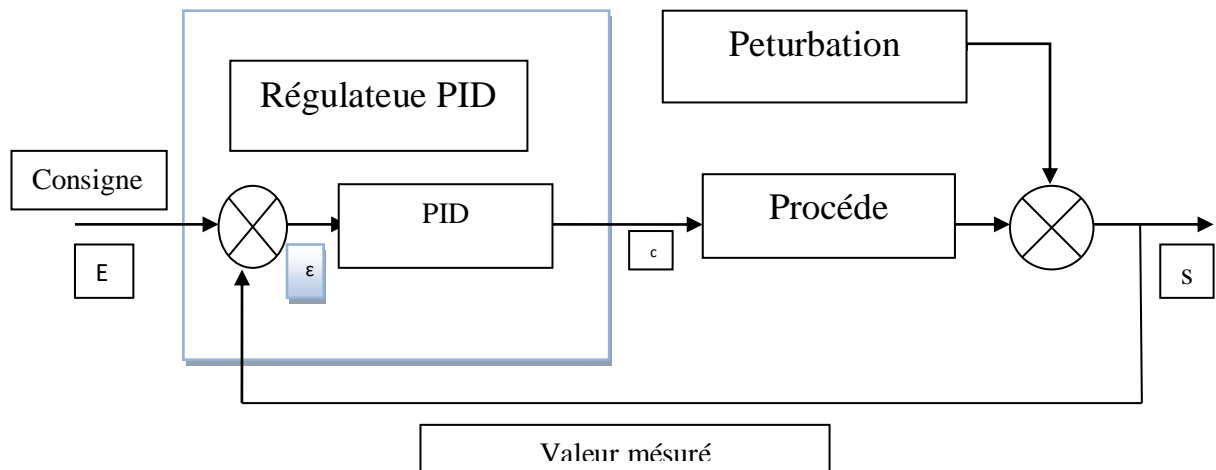


Figure II. 1 : Asservissement par un régulateur PID

S signal de mesure, E consigne (valeur entrée ou signal), et ε signal d'écart (ou d'erreur $e(t)$) sont exprimés dans la même unité. Le signal C élaboré par le régulateur est le signal de commande.

II.2 Commande d'ordre fractionnaire : un aperçu

La décennie précédente a connu des efforts de recherche très remarquable reliés au calcul

d'ordre fractionnaire et son application dans la théorie de commande des systèmes.

ment, pour une boucle fermée de commande des systèmes, il existe quatre situations : (1) système d'ordre entier avec correcteur d'ordre entier, (2) système d'ordre entier avec correcteur d'ordre fractionnaire, (3) système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre entier, et (4) système d'ordre fractionnaire avec correcteur d'ordre fractionnaire. Dans la pratique de commande des systèmes, on considère uniquement le correcteur d'ordre fractionnaire. Ceci est en raison que le modèle du système peut être déjà obtenu comme un modèle d'ordre entier dans le sens classique. Du point de vue ingénierie, la signification de commande d'ordre fractionnaire est que c'est une généralisation de la théorie de commande d'ordre entier classique qui pourrait mener à une modélisation plus adéquate et des

performances de commande plus robuste. En effet, l'intérêt majeur de la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration ou l'optimisation des performances en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les premières tentatives d'appliquer le calcul d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes peuvent être trouvées dans [22, 23]. Du point de vue historique, ils existent dans la littérature, quatre structures principales de commande d'ordre fractionnaire [24]:

La première structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [26], était proposé par Alain Oustaloup au début des années 1990, et il a démontré la supériorité des performances du correcteur proposée en comparaison avec le correcteur PID classique. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1ère, 2ème et 3ème générations) et des applications aussi bien en laboratoire qu'en industrie ont été développées, à titre d'exemple la commande de la suspension de voiture [25].

La deuxième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire [27], proposé par Igor Podlubny en 1999, ce correcteur est une généralisation du correcteur PID, comprenant une action d'intégration d'ordre fractionnaire λ et une action de différentiation d'ordre fractionnaire μ . Il a aussi démontré la meilleure réponse de ce type de correcteurs, en comparaison avec le correcteur PID classique, pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

La troisième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur TID [14], ce correcteur a une structure semblable à un correcteur PID classique, mais la composante proportionnelle est remplacée d'un composant ayant une fonction de transfert $\frac{T}{s^{1/n}}$, où T est une constante du correcteur et n est un nombre réel non nul, de préférence entre 2 et 3. La fonction de transfert du correcteur TID rapproche plus étroitement la fonction de transfert optimale de la boucle définie par Bode, réalisant de ce fait l'amélioration des performances de commande en rétroaction. De plus, par rapport aux correcteurs PID, le correcteur TID assure un meilleur rejet de perturbation, et de plus légers effets des variations de paramètres du système sur la réponse en boucle fermée. L'objectif du correcteur TID est de fournir un correcteur amélioré de la boucle de rétroaction ayant les avantages du correcteur PID, mais fournissant une réponse qui est plus proche de la réponse optimale théorique [14]

La quatrième structure de commande d'ordre fractionnaire est le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire, étudié dans [15] et [33], ce correcteur est une généralisation du correcteur avance-retard de phase classique, une technique d'auto-réglage est donnée dans [33]. Le correcteur avance-retard de phase classique est une méthode de conception populaire des boucles de commande, le correcteur avance-retard de phase d'ordre fractionnaire devrait avoir son valeur égale comparée aux correcteurs CRONE et $PI^\lambda D^\mu$. Cependant, des méthodes systématiques de conception plus intuitives sont nécessaires.

II.3 Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

II.3.1 Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure Fig.3.1. Où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur, $G_p(s)$ est la fonction de transfert de système.

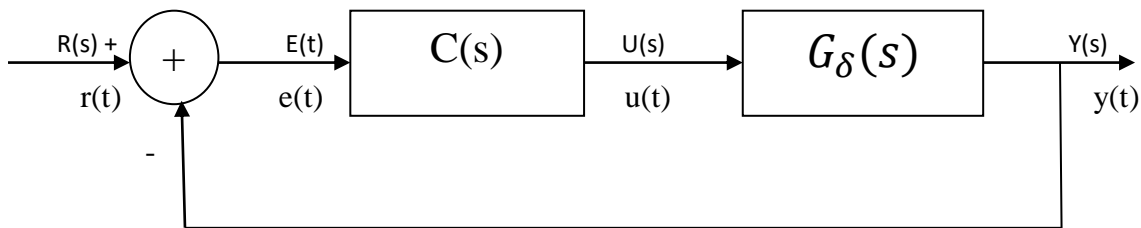


Figure II. 2: Système de commande à retour unitaire classique

Le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est basée sur le présent (P)le passé (I) et le future (D) de l'erreur de commande $e(t)$, son comportement peut être décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{(Error! No text of specified style in document..1)}$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration T_i et la constante de dérivation T_D . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire. La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain K_p . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de

commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [34].

Afin d'améliorer le comportement du correcteur PID, on propose la version du correcteur d'ordre fractionnaire. La forme la plus commune d'un correcteur d'ordre fractionnaire est le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire [27], impliquant un intégrateur d'ordre λ et un différentiateur d'ordre μ , où λ et μ sont n'importe quels nombres réels. L'équation de la sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme:

$$u(t) = k_p \left((e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t) + T_D D^\mu(e(t)))) \right) \quad \text{(Error! No text of specified style in document..2)}$$

λ est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que $0 < \lambda < 1$ et μ est l'ordre fractionnaire de

L'action de différentiation tel que $0 < \mu < 1$

L'algorithme du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation (Error! No text of specified style in document..2) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad \text{(Error! No text of specified style in document..3)}$$

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$C(s) = K_p + \frac{K_1}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad \text{(Error! No text of specified style in document..4)}$$

Les gains d'intégration K_I et de dérivation K_D sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{k_p}{T_I} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..5})$$

$$K_D = K_p T_D \quad (\text{Error! No text of specified style in document..6})$$

La figure II.3, présente la structure interne du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, elle consiste on la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.

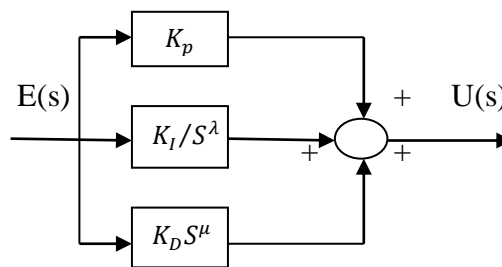


Figure II. 3:Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

En tenant compte de la discussion précédente, le tracé asymptotique de Bode du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire de l'équation (Error! No text of specified style in document..4) peut être obtenu dans la figure II.4, On peut observer les pentes de $-20\lambda \text{ dB/dec}$ et $20\mu \text{ dB/dec}$ des parties intégrale et dérivée, respectivement, du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

Les tracés exacts du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire (amplitude et phase) sont représentés dans la figure II.5, Par comparaison avec celles du correcteur PID, on peut observer l'effet des ordres fractionnaires sur les pentes des parties intégrales et dérivée, du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

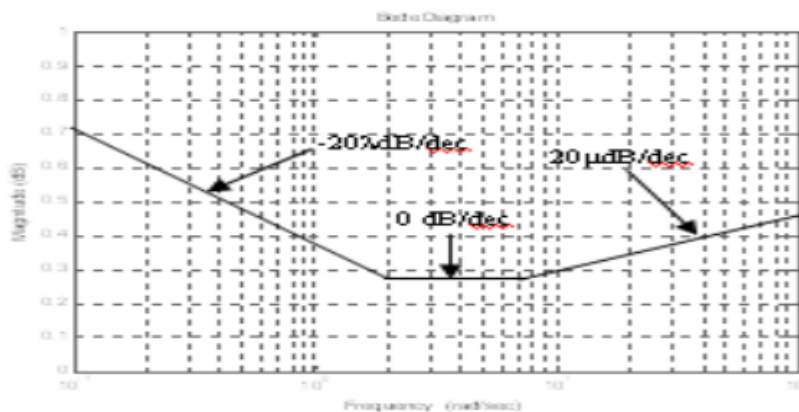


Figure II. 4: Un exemple du module asymptotique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

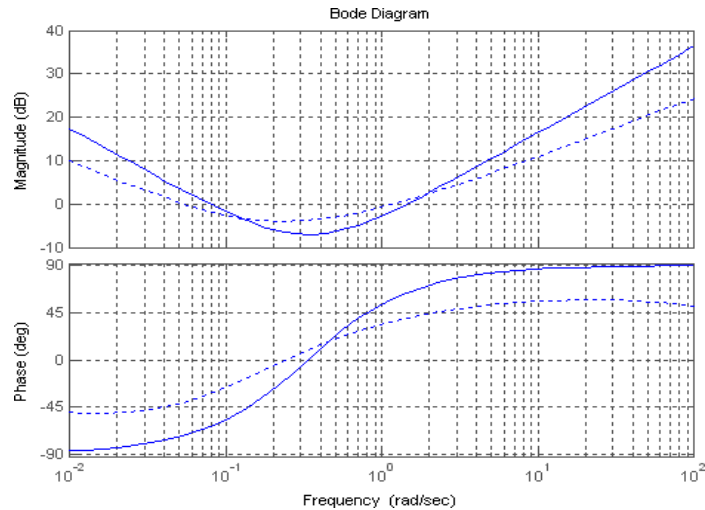


Figure II. 5:Tracés d'amplitude et de phase : (PID et ... : $PI^\lambda D^\mu$ pour $\lambda=0.8$ et $\mu=0.7$)

Comme indiqué dans la figure II.6, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire généralise le correcteur PID classique et l'étend du point à un plan. Cette expansion pourrait fournir beaucoup plus de flexibilité dans la conception de commande PID. Clairement, choisissant $\lambda=1$ et $\mu=1$, un correcteur PID classique peut être récupéré. Utilisant $\lambda=1$ et $\mu=0$, et $\lambda=0$ et $\mu=1$, respectivement, correspond à des correcteurs PI et PD classiques. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont les cas spéciaux du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire donné par l'équation (Error! No text of specified style in document..4).

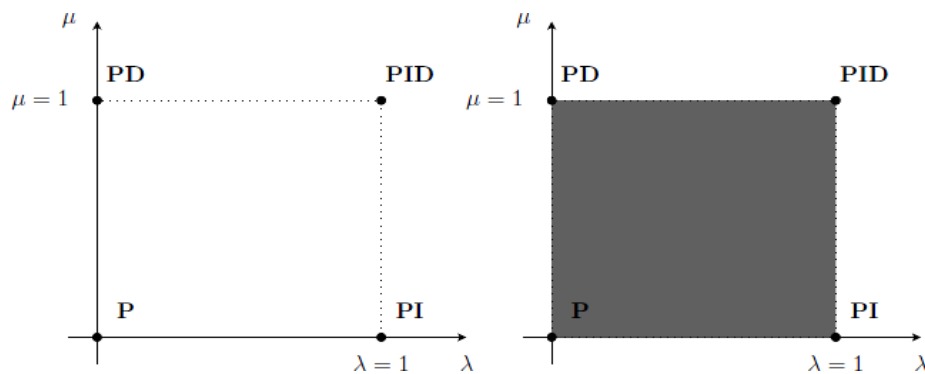


Figure II. 6:Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ avec les ordres fractionnaires

II.4 Réglage des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier des charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Si l'on souhaite améliorer les

caractéristiques de précision, stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire un correcteur dans la boucle de commande. Ces correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié. Les correcteurs PID étaient les plus populaires du siècle passé. Ils resteront dominants à cause de leur remarquable efficacité, simplicité de mise en œuvre et la large applicabilité. Bien qu'ils soient devenus commercialement disponibles dans les années 1930, l'intérêt à leur conception reste très haut même aujourd'hui. Les méthodes d'ajustement fondées sur les mesures trouvent leur origine au début des années 1940 avec la méthode de Ziegler-Nichols [35]. Ils ont proposé deux approches expérimentales destinées à ajuster rapidement les paramètres des correcteurs P, PI et PID. La première, dite la méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte, nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à commander seul, alors que la deuxième, dite méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée, demande d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité. Cette méthode nécessite de boucler le système sur un simple correcteur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité du système. Le choix des paramètres du correcteur est alors donné par des formules d'essence empirique. Ces règles, très appréciées pour leur simplicité, sont aussi connues pour leurs résultats souvent modestes en termes de robustesse et de performances en poursuite de trajectoire. En [33], la méthode dite de Kappa-Tau, de nature empirique, propose de simples lois d'ajustement qui attribuent à un système inconnu approximativement une valeur donnée pour la norme infinie de la fonction de sensibilité. La méthode de Cohen-Coon [30], est basée sur un modèle de premier ordre avec temps de retard du procédé est son critère principal est le rejet de perturbation. Elle pourrait être considérée aussi dans la classe des méthodes de placement des pôles. Les correcteurs PI et PID prennent en compte la minimisation de l'intégrale de l'erreur. Les paramètres du correcteur PID ont été déduits par des règles de nature empirique. Cette méthode donne pourtant un coefficient d'amortissement trop faible, ce qui signifie une boucle fermée mal amortie et une haute sensibilité. Les méthodes empiriques de réglage sont largement référencées parce qu'elles sont basées sur la caractérisation de la dynamique de processus par quelques paramètres et des équations simples pour les paramètres du correcteur et ils donnent un bon réglage seulement dans des situations limitées. Un effort énorme et continu a été dépensé dans la conception des correcteurs PID pour l'amélioration de qualité de commande des systèmes et l'amélioration des performances. Une des possibilités d'améliorer les correcteurs PID est d'utiliser les correcteurs d'ordre fractionnaire. Le premier qui a vraiment présenté le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, une généralisation du correcteur

PID classique, impliquant une action d'intégration d'ordre λ et une action de différentiation d'ordre μ était Igor Podlubny [27, 31]. Beaucoup de chercheurs ont été intéressés par l'utilisation et la conception de ce type de correcteur. L'intérêt de ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité, puisqu'il a encore deux paramètres à régler, qui sont l'ordre fractionnaire λ de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire μ de l'action de différentiation. Ces deux paramètres peuvent être employés pour accomplir des spécifications complémentaires pour la conception ou d'autres exigences intéressantes pour le système à commander. Différemment au correcteur PID classique, il n'y a aucune méthode de réglage systématique existant pour le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Donc, la motivation de base dans notre méthode de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire est le développement de règles empiriques de réglage qui sont presque aussi simples que les règles de Ziegler-Nichols pour améliorer la qualité de commande des systèmes comparée au correcteur PID classique. Autrement dit, exprimer les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire en fonction des caractéristiques du système à commander.

Dans ce travail nous proposons une nouvelle méthode de conception du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire d'un système de commande à retour unitaire classique, montré dans la figure Fig.3.1, la méthode de réglage de Ziegler-Nichols sera utilisé pour l'ajustement des trois paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour $\lambda = \mu = 1$. Pour cela, la fonction de transfert $G_p(s)$ du système à commander est un système de premier ordre avec ou sans temps de retard :

$$K_p(s) = \frac{k_0}{(1+\tau s)} e^{-ls} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..7})$$

Ou un système premier ordre avec un intégrateur avec ou sans temps retard:

$$K_p(s) = \frac{k_0}{s(1+\tau s)} e^{-ls} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..8})$$

Avec k_0 est le gain statique, τ est la constante de temps et L est le temps de retard qui peut être zéro. La fonction de transfert $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$c(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (\text{Error! No text of specified style in document..9})$$

Avec k_p est la constante proportionnel, T_I est la constante d'intégration, T_D est la constante de différentiation, λ est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que $0 < \lambda < 1$ et μ est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que $0 < \mu < 1$.

II.4.1 Ajustement des paramètres des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$:

La méthode proposée pour l'ajustement des paramètres du correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ est composée de deux étapes, la première sert à ajuster les paramètres k_p, T_I et T_D d'un correcteur PID classique pour $\lambda = \mu = 1$, la deuxième sert à ajuster les paramètres λ et μ .

II.4.1.1 Ajustement des paramètres k_p, T_I et T_D

Dans la première étape de notre méthode de conception nous avons utilisés les règles de la méthode de Ziegler-Nichols pour l'ajustement des paramètres k_p, T_I et T_D du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire donné par l'équation (**Error! No text of specified style in document..9**), avec $\lambda = \mu = 1$, ce qui signifie l'ajustement des paramètres d'un simple correcteur PID classique. Notre méthode de conception peut être généralisée par l'utilisation des paramètres k_p, T_I et T_D ajustés par d'autres méthodes de conception qui existent dans la littérature.

II.4.1.2 Ajustement des paramètres λ et μ

Par l'utilisation des paramètres k_p, T_I et T_D obtenus dans la première étape de conception, la deuxième étape sert à ajuster les deux paramètres λ et μ minimisant un critère de performance. Dans notre travail, l'intégrale du carrée de l'erreur (ISE) est utilisé comme critère de performance, la méthode de Hall-Sartorius [32], est utilisée pour calculer la valeur de ce critère pour un système de commande à retour d'unité classique présenté par la figure (II.2), pour une entrée échelon unité. L'intégrale du carrée de l'erreur (ISE) est donné par:

$$J = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt \quad (\text{Error! No text of specified style in document..10})$$

Où $e(t) = [r(t) - y(t)]$ est le signal d'erreur.

De l'équation (**Error! No text of specified style in document..10**), l'intégral complexe $J(\lambda, \mu)$ est défini par:

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s) ds \quad (\text{Error! No text of specified style in document..11})$$

De la figure (II.2), le signal de l'erreur $E(s)$ est obtenu comme:

$$E(s) = \left(\frac{1}{1+c(s)G_P(s)} \right) R(s) = \left(\frac{1}{1+c(s)G_P(s)} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \quad (\text{Error! No text of specified style in document..12})$$

Le signal de l'erreur $E(s)$ doit être une fonction rationnelle. Mais la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire $C(s)$ donné par l'équation (**Error! No text of specified style in document..9**) est une fonction irrationnelle et la fonction de transfert du système $G_P(s)$ est aussi une fonction irrationnelle, si elle est avec temps de retard $.e^{-Ls}$

Pour régler ce problème, le temps de retard e^{-LS} de la fonction de transfert du système $G_P(s)$ est remplacé par une fonction rationnelle, obtenue par la méthode d'approximation de Padé du premier

Ordre définie par :

$$e^{-LS} = \frac{\left(1 - \frac{L}{2}S\right)}{\left(1 + \frac{L}{2}S\right)} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..13})$$

Ainsi, la fonction de transfert du système $G_P(s)$ devient une fonction rationnelle et elle sera définie dans le contexte suivant par :

$$G_P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..14})$$

La fonction de transfert irrationnelle du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire de l'équation (Error! No text of specified style in document..9) est approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode de Charef

La fonction de transfert du système $G_P(s)$ peut être avec ou sans intégrateur pour cela, nous considérerons deux manières pour l'approximation de la fonction de transfert $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire:

II.4.1.2.1 Système sans intégrateur

Quand la fonction de transfert du système $G_P(s)$ est sans intégrateur, l'intégrateur d'ordre fractionnaire $\frac{1}{s^\lambda}$ doit être implémenté comme $\frac{1}{s^\lambda} = \frac{1}{s} s^{1-\lambda}$ pour assurer la convergence de l'algorithme de Hall-Sartorius employé pour calculer la valeur du critère ISE. Par conséquent, la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire $C(s)$ sera :

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D S^\mu\right) = K_p \left(1 + \frac{s^{1-\lambda}}{T_I s} + T_D S^\mu\right) \quad (\text{Error! No text of specified style in document..15})$$

La fonction $C(s)$ a maintenant deux différentiateurs d'ordre fractionnaire $s^{1-\lambda}$ et s^μ , donc par l'utilisation de la fonction rationnelle du différentiateur d'ordre fractionnaire donnée dans la méthode de Charef, nous pouvons approximer la fonction irrationnelle $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire de l'équation (Error! No text of specified style in document..9) par la fonction rationnelle suivante:

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{s^{1-\lambda}}{T_I s} + T_D S^\mu\right) = K_p \left(1 + \frac{\bar{K}_D}{T_I s} \frac{\prod_{i=0}^{\bar{N}_D} \left(1 + \frac{s}{z_{D_i}}\right)}{\prod_{i=0}^{\bar{N}_D} \left(1 + \frac{s}{p_{D_i}}\right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{D_i}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{D_i}}\right)}\right) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (\text{Error! No text of specified style in document..16})$$

II.4.1.2.2 Système avec intégrateur

Dans le cas d'une fonction de transfert du système $G_p(s)$ avec intégrateur, la convergence de l'algorithme de Hall-Sartorius employé pour calculer la valeur du critère ISE est assurée. Par conséquent, nous pouvons approximer la fonction de transfert irrationnelle $C(s)$ de l'équation (Error! No text of specified style in document..9) du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{s^{1-\lambda}}{T_I s} + T_D s^\mu \right) = K_p \left(1 + \frac{k_1 \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{T_I s \prod_{i=0}^{N_I-1} \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} + T_D K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{z_{Di}} \right)}{\prod_{i=0}^{N_D} \left(1 + \frac{s}{p_{Di}} \right)} \right) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)} \quad \text{(Error! No text of specified style in document..17)}$$

Pour les deux manières d'approximation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle, l'approximation est faite dans une bande de fréquence d'intérêt pratique $[\omega_L, \omega_H]$ choisie autour de la fréquence de coupure du gain unité ω_u de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G_p(s)$, avec $C(s)$ est le correcteur PID classique, pour $\lambda=\mu=1$, et la bande $[\omega_L, \omega_H] = [\omega_L=0.1\omega_u, \omega_H=10\omega_u]$.

Alors, pour les deux manières d'approximation de la fonction de transfert $C(s)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle, le signal d'erreur $E(s)$ devient une fonction rationnelle donné par :

$$E(s) = \left(\frac{1}{1 + \frac{N_C(s)N_P(s)}{D_C(s)D_P(s)}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{D_C(s)D_P(s)}{D_C(s)D_P(s) + N_C(s)N_P(s)} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} \quad \text{(Error! No text of specified style in document..18)}$$

Par conséquent, l'intégrale complexe $J(\lambda, \mu)$ peut être calculée comme montré dans [32]:

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{N_S(s)N_E(-s)}{D_E(s)D_E(-s)} ds$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)} \det(\Delta_n^N)}{2 \det(\Delta_n^D)} \quad \text{(Error! No text of specified style in document. . 19)}$$

L'objectif de l'ajustement de l'ordre fractionnaire λ de l'action d'intégration et l'ordre fractionnaire μ de l'action de différentiation consiste à trouver le couple (λ, μ) qui réduisent au minimum l'index $J(\lambda, \mu)$ de l'équation (II.19). Pour la tâche de minimisation, nous avons changé les valeurs des paramètres λ et μ de 0 à 1 avec un pas de 0,05 et pour chaque valeur des couples (λ, μ) nous calculons l'index correspondant $J(\lambda, \mu)$ de l'intégrale du carré de l'erreur (ISE).

Avec une comparaison simple de tout les index $J(\lambda, \mu)$ calculés, nous pouvons obtenir l'index minimum $J(\lambda, \mu)$ et l'ajustement des deux paramètres λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelle que notions sur le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Ensuite nous avons étudiés l'ajustement des paramètres de correcteurs PID fractionnaires. Les idées de base sont basées sur les règles de la méthode de Ziegler-Nichols et la minimisation du critère ISE.

Chapitre III

Applications et simulation

Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter deux exemples de simulation, en utilisant les correcteurs PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Nous montrons aussi que le correcteur d'ordre fractionnaire donne des résultats appréciables pour la commande d'un système d'ordre entier ou d'autre fractionnaire.

III.1 Les Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires

Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier des charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision, stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire un correcteur dans la boucle de commande.

Ces correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié. Le correcteur classique **PID** possède trois paramètres de réglage k_p, T_i , et T_d . Par contre le correcteur PID fractionnaire possède deux paramètres (λ et μ) de plus (en total il y en a 5 paramètres de réglage). Les paramètres qui doivent ajuster pour un correcteur fractionnaire sont k_p, T_i et T_d, λ et μ . Ces paramètres sont déterminés en fonction des exigences de cahier de charge.

III.2 Critères de performances

III.2.1 Critères temporelles

Nous pouvons citer par exemple coefficient d'amortissement, erreur statique, temps de réponse et temps de montée.

III.2.2 Critères fréquentiels :

On cite ci-dessous les spécifications fréquentielles qui peuvent être utilisées pour déterminer les paramètres des correcteurs fractionnaires :

1. La marge de phase φ_m et la fréquence de la coupure w_{cg} :

$$|C(w_{cg})G(w_{cg})|_{db} = 0db \quad (III.01)$$

$$-\pi + \varphi_m = \arg |C(w_{cg})G(w_{cg})| \quad (III.02)$$

2. Marge du gain :

$$M_g = \frac{1}{|C(jw-\pi)G(jw-\pi)|} \quad (III.03)$$

$$\arg(C(j\omega_{-\pi})G(j\omega_{-\pi})) = -\pi \quad (\text{III.04})$$

3. Garantir un rejet du bruit en haute fréquence, la fonction du transfert en boucle fermée doit avoir une petite amplitude en haute fréquence :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} < A_{dB} \quad (\text{III.05})$$

$$|F(j\omega_t)|_{dB} = A_{dB} \quad \omega \geq \omega_t \text{ rad/s}$$

Où A_{dB} est l'atténuation désirée de bruit pour des fréquences en rad/s.

4. Pour assurer un bon rejet de bruit de mesure de sortie on doit atteindre la contrainte

$$\left| \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq N_{dB} |S(j\omega_t)|_{dB} \quad (\text{III.06})$$

$$\omega \geq \omega_s \text{ rad/s} \Rightarrow |S(j\omega_s)|_{dB} = N_{dB}$$

Avec N la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences $\omega \geq \omega_s \text{ rad/s}$

5. Garantir la robustesse vis-à-vis aux variations du gain du système, la phase de la fonction du transfert en boucle ouverte doit être constante autour de la fréquence de coupure

$$\frac{d}{d\omega} \arg|C(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 0 \quad (\text{III.07})$$

La vérification de l'équation (III.07) signifie que le système est plus robuste aux variations du gain ; ce qui donne un dépassement presque constant dans cette intervalle.

6. Rejet de bruit de sortie : [6]

La contrainte suivante doit être atteinte :

$$\left| s(j\omega) = \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq B_{dB} \quad (\text{III.08})$$

$$\Rightarrow |s(j\omega_s)|_{dB} = B_{dB}, \omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$$

Avec B la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences $\omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$ (intervalle de fréquence désirée).

III.3 Ajustement des paramètres de correcteur fractionnaire

Dans la littérature, il existe plusieurs règles d'ajustement des correcteurs d'ordre fractionnaire. Les règles d'ajustement sélectionnées pour ce mémoire de fin d'étude ont été développées par **Ziegler-Nichols**. Ces règles sont basées sur le modèle de premier ordre avec retard (FOPDT) du système représenté dans l'équation (III.09) où « L » est le retard du système, « T » est la constante de temps et K est le gain du processus.

$$G_{\text{appro}}(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+Ts} \quad (\text{III.09})$$

Où :

G_{appro} : Désigne la fonction d'approximation

Le contrôleur $FO - PID$ est conçu à l'aide de l'équation (III. 09):

$$G_{FPID}(s) = k_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + k_D s^u \quad (\text{III. 10})$$

Les K_p, K_i, K_d, λ et μ correspondant pour le contrôleur $FO - PID$ sont déterminés en utilisant les règles d'ajustement de Ziegler qui est basée aussi sur le modèle $FOPDT$ du système représenté dans l'équation(III. 10)

Où :

K_p : Gain proportionnel.

K_i :Gain intégral.

k_D :Gain dérivé

u : Ordre dérivé fractionnaire.

λ : Ordre intégral fractionnaire.

III.4 Mesures de performance

Les mesures de performance utilisées pour comparer différents contrôleurs sont l'Erreur quadratique intégrale (ISE), l'erreur absolue intégrale (IAE) et l'erreur absolue avec intégration temporelle ($ITAE$). Ces paramètres de performance sont décrits par les expressions écrites dans l'équation (III.11). Les critères d'erreurs IAE, ISE et $ITAE$ fournissent une mesure quantitative de la capacité d'un contrôleur à forcer l'erreur à zéro. Une valeur inférieure de ces paramètres montre que le contrôleur est capable d'atteindre la référence requise plus rapidement et avec moins d'effort. [36] :

$$\begin{aligned} IAE &= \int_0^t |e(\tau)| d\tau \\ ISE &= \int_0^t (e(\tau))^2 d\tau \quad (\text{III. 11}) \\ ITAE &= \int_0^t t |e(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

III.5 Conception de correcteur PID classique

La conception du contrôleur PID d'ordre fractionnaire dépend de la constante de temps T , du retard L et du gain de processus K du système représenté en l'équation (III.12)

$$G_{appro}(s) = \frac{K e^{-Ls}}{1+Ts} \quad (\text{III.12})$$

Où :

G_{approx} : Désigne la fonction d'approximation

Sur la base d'un tel modèle typique, de nombreux algorithmes de réglage du contrôleur PID peuvent être utilisés pour concevoir des contrôleurs PID d'ordre entier, de bonnes références peuvent être trouvées dans [37]. Par exemple, la formule de réglage classique de Ziegler-Nichols et l'algorithme de Wang-Juang-Chan [38] peuvent être utilisés pour concevoir des régulateurs PID optimaux sous le critère ITAE.

$$\begin{cases} k_p = \frac{(0.7303 + \frac{0.5307T}{L})(T+0.5L)}{k(T+L)} \\ Ti = T + 0.5L \\ Td = \frac{0.5TL}{T} + 0.5L \end{cases} \quad \text{III.13}$$

Application 1- Systèmes fractionnaire

Pour le modèle du système d'ordre fractionnaire donné par :

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.6} + 3.3s^{1.5} + 2.9s^{1.3} + 3.32s^{0.9} + 1} \quad \text{III.14}$$

Le modèle approximé d'ordre élevé en utilisant la méthode d'approximation d'Oustaloup [39], avec les paramètres suivant : $N = 11$; $w_b = 10^{-3}$; $w_h = 10^3$; sera :

$$\begin{aligned} & G_{d'ordre_{\text{élevé}}}(s) \\ &= \frac{0.01585s^{43} + 68.52s^{42} + 1.271e^{05}s^{41} + 1.332e^{08}s^{40} + 8.762e^{10}s^{39} + 3.821e^{13}s^{38} + \\ & \quad 1.14e^{16}s^{37} + 2.377e^{18}s^{36} + 3.508e^{20}s^{35} + 3.698e^{22}s^{34} + 2.802e^{24}s^{33} + \\ & \quad 1.543e^{26}s^{32} + 6.082e^{27}s^{31} + 1.751e^{29}s^{30} + 3.667e^{30}s^{29} + 5.591e^{31}s^{28} + 6.214e^{32}s^{27} + \\ & \quad 5.036e^{33}s^{26} + 2.977e^{34}s^{25} + 1.285e^{35}s^{24} + 4.046e^{35}s^{23} + \\ & \quad 9.302e^{35}s^{22} + 1.561e^{36}s^{21} + 1.913e^{36}s^{20} + 1.711e^{36}s^{19} + 1.285e^{36}s^{18} + 5.322e^{35}s^{17} \\ & \quad + 1.849e^{35}s^{16} + 4.684e^{34}s^{15} + 8.643e^{33}s^{14} + 1.161e^{33}s^{13} \\ & \quad + 1.133e^{32}s^{12} + 8.017e^{30}s^{11} + 4.104e^{29}s^{10} + 1.514e^{28}s^9 \\ & \quad + 4.004e^{26}s^8 + 7.535e^{24}s^7 + 9.98e^{22}s^6 + 9.162e^{20}s^5 \\ & \quad + 5.699e^{18}s^4 + 2.316e^{16}s^3 + 5.792e^{13}s^2 + 7.988e^{10}s + 4.609e^7}{s^{45} + 3749s^{44} + 5.96e06s^{43} + 5.301e09s^{42} + 2.94e12s^{41} + 1.077e15s^{40} \\ & \quad + 2.694e17s^{39} \\ & \quad + 4.704e19s^{38} + 5.817e21s^{37} + 5.149e23s^{36} + 3.289e25s^{35} + 1.527e27s^{34} \\ & \quad + 5.178e28s^{33} + 1.292e30s^{32} + 2.384e31s^{31} + 3.278e32s^{30} + 3.383e33s^{29} \\ & \quad + 2.637e34s^{28} + 1.561e35s^{27} + 7.04e35s^{26} + 2.419e36s^{25} + 6.318e36s^{24} + \\ & \quad 1.251e37s^{23} + 1.868e37s^{22} + 2.101e37s^{21} + 1.775e37s^{20} \\ & \quad + 1.126e37s^{19} + 5.375e36s^{18} + 1.931e36s^{17} \\ & \quad + 5.231e35s^{16} + 1.069e35s^{15} \\ & \quad + 1.646e34s^{14} + 1.906e33s^{13} + 1.651e32s^{12} + 1.065e31s^{11} + 5.071e29s^{10} \\ & \quad + 1.771e28s^9 + 4.493e26s^8 + 8.197e24s^7 + 1.061e23s^6 \\ & \quad + 9.575e20s^5 + 5.881e18s^4 + 2.368e16s^3 + 5.881e13s^2 + 8.07e10s + 4.64e07} \end{aligned} \quad \text{(III.15)}$$

III.6 Méthodologie de conception

Les règles d'ajustements des paramètres de régulateur PI révèlent une très bonne dépendance des paramètres du contrôleur par rapport au temps de retard relatif (T) du système. Ainsi, pour une fonction de transfert donnée, les règles d'ajustements peuvent être résumées comme suit:

1. Trouvez le modèle FOPDT du système et définissez les valeurs k, L, T .
2. Trouvez le temps de retard relatif T du système.
4. Trouvez les gains du contrôleur à partir de (III.13).

Conception du correcteur PID

La conception du contrôleur PID d'ordre entier et des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire dépend de la constante de temps T , du retard L et du gain de processus K du système représenté en eq. III. 12.

Les paramètres K, L & T trouvés de la fonction $FOPDT$ approximée de la fonction de transfert du système (Moteur) sont: $K = 0.9930 \text{ rad/s}$, $L = 0.847 \text{ set}$ $T = 5.3677 \text{ s}$ respectivement (voir Eq.III.16).

$$G_{approx} = \frac{0.9930}{0.5093s + 1} e^{-0.847s} \quad \text{III. 16}$$

La réponse réelle de la figure II.13 correspond à la réponse du modèle $FOPDT$ qui montre que le modèle approximatif de modèle d'ordre élevé est en fait précis.

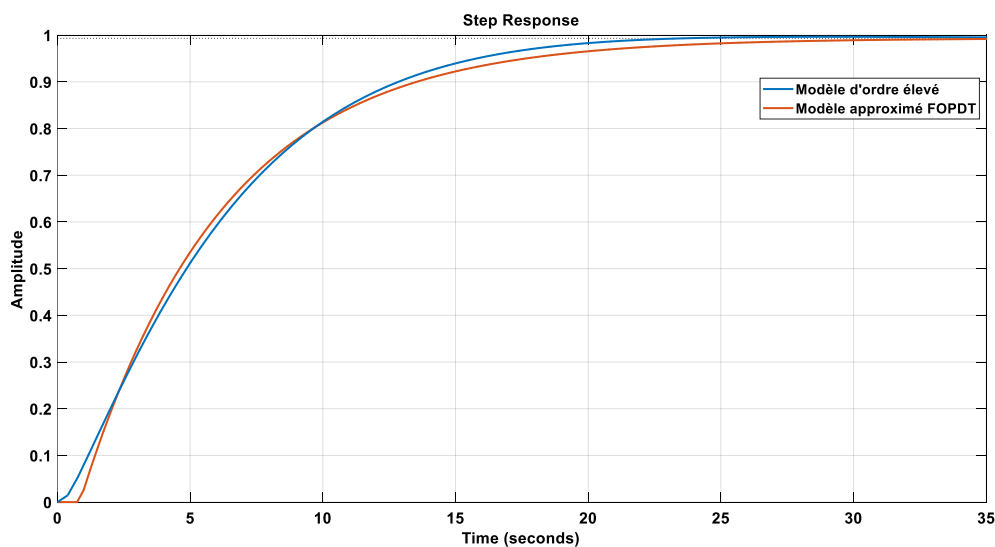


Figure III.1 Réponse indicielle du système

A partir de modèle approximé du premier ordre FOPDT et ces paramètres k, L et T correspondant, nous allons appliquer la méthode d'ajustement de Wang-Juang-Chan(WJC) pour trouver les paramètres de correcteur PID classique.

Après application de la méthode WJC nous avons trouvés :

$$G_c(s) = 3.9474 \left(1 + \frac{1}{5.8232s} + 0.3843s \right)$$

La réponse indicielle en boucle fermée du système peut être obtenue comme illustré à la Figure III.2. On constate que les deux systèmes sont assez proches.

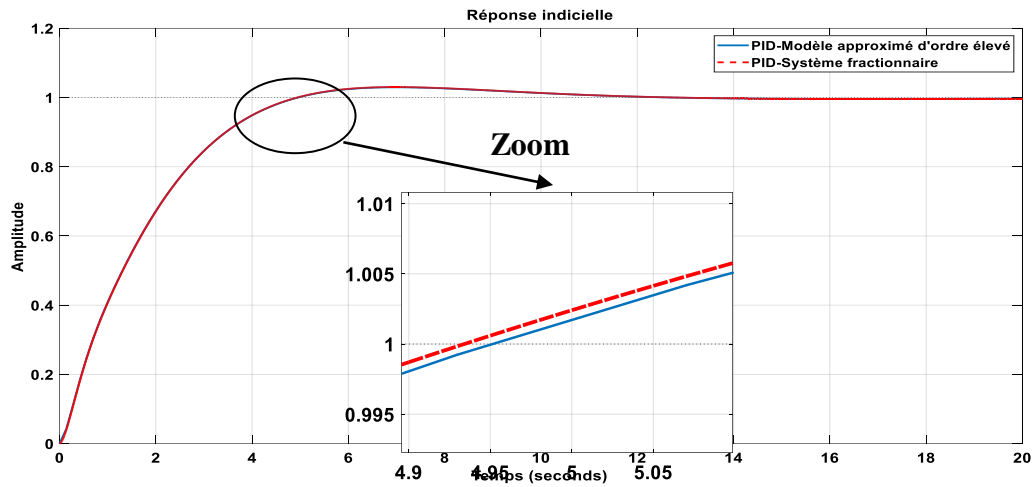


Figure III. 2: Réponses indicielles en boucle fermée sous le régulateur PID.

Les diagrammes de Bode en boucle ouverte peuvent être obtenus comme le montre la figure III.3.

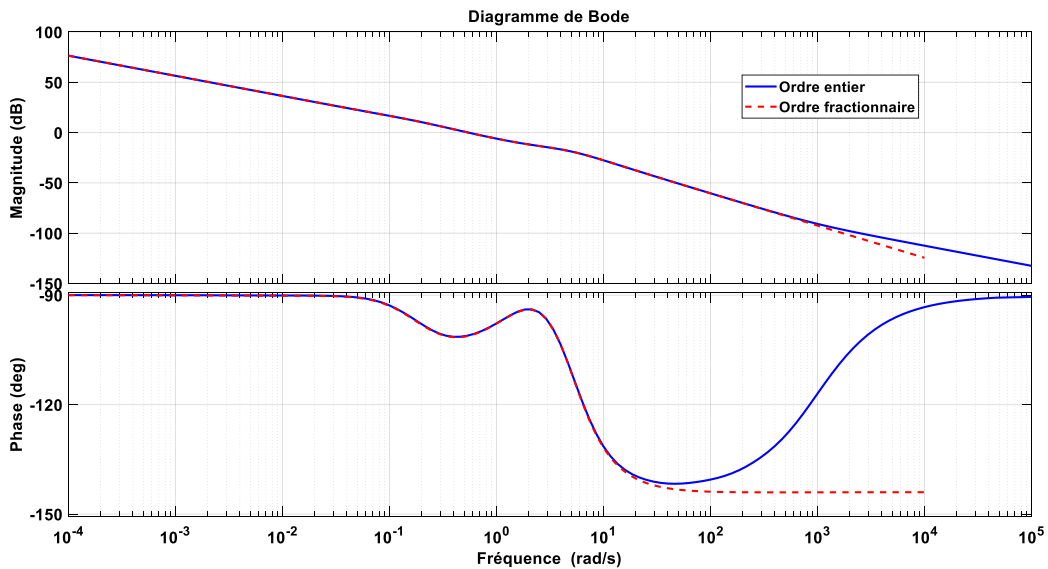


Figure III. 3: Comparaisons des diagrammes de Bode.

Conception optimale du contrôleur PID fractionnaire

Le contrôleur PID d'ordre fractionnaire optimal peut être obtenu directement avec la fonction MATLAB suivante **fpidune**.

La fonction de transfert de correcteur PID fractionnaire est donnée par :

$$G_{FPID}(s) = \frac{3.6297s^{(2.0638)} + 29.9998s^{(1.1563)} + 2.8022}{s^{(1.1563)}}$$

Et la fonction de transfert de correcteur PID classique est donnée par :

$$G_{PID}(s) = \frac{20.1961s^2 + 30s + 3.9415}{s}$$

Les réponses indicielles en boucle fermée sous les deux contrôleurs sont illustrées à la Figure ci-dessous.

On peut voir que la réponse en boucle fermée sous le contrôleur PID fractionnaire est bien meilleure que le contrôleur PID conventionnel pour le modèle d'ordre fractionnaire donné dans l'équation (III.14)

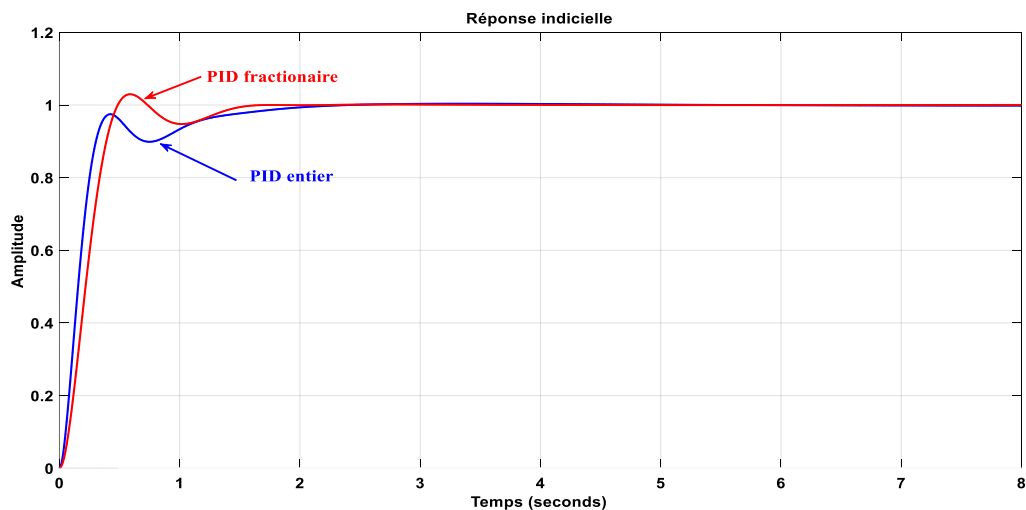


Figure III. 4 : Comparaisons de différents régulateurs PID classique et fractionnaire.

Application 2 : Système d'ordre entier

Soit le système d'ordre élevé suivant :

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^4}$$

Les régulateurs PID optimaux avec filtre selon les critères ISE, ITAE et IAE sont données par les fonctions suivantes.

$$G_{ISE-PID}(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d \frac{s}{T_f s + 1}$$

avec $k_p = 2.23$, $k_i = 1.45$, $k_d = 6.97$, $T_f = 0.001$

$$G_{ITAE-PID}(s) = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d * \frac{s}{T_f * s + 1}$$

avec $k_p = 1.72$, $k_i = 0.57$, $k_d = 1.93$, $T_f = 0.001$

$$G_{IAE-PID} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d \frac{s}{T_f s + 1}$$

avec $k_p = 2.27$, $k_i = 0.781$, $k_d = 3.53$, $T_f = 0.001$

et les réponses indicielles en boucle fermée sous les trois contrôleurs sont obtenues comme le montre la figure 9.5.

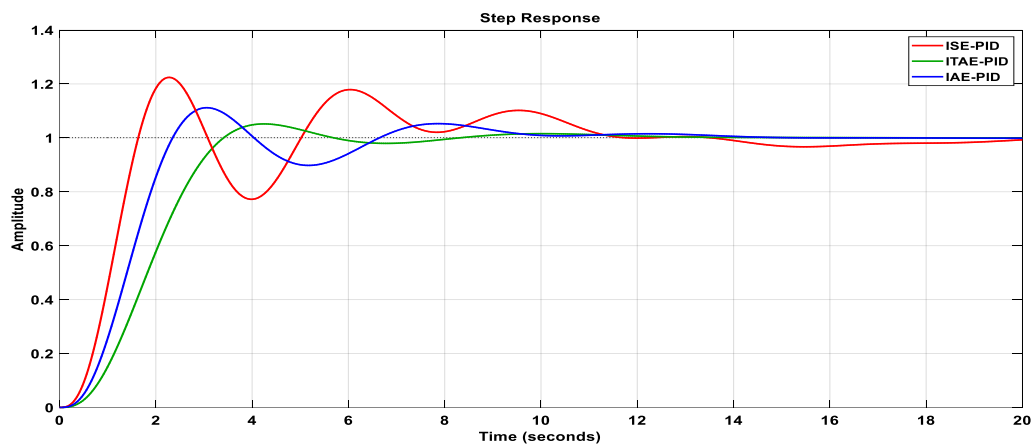


Figure III. 5 : Comparaisons de différents régulateurs PID.

Pour la synthèse de correcteur PID fractionnaire, nous utilisons la méthode de Ziegler-Nichols. Dans ce projet de fin d'études, deux méthodes analytiques (parmi d'autres publiés dans la littérature) pour régler les paramètres des PID fractionnaires ont été passés en revue. La méthode d'optimisation a ensuite été utilisée pour développer deux ensembles de règles de réglage similaires à celles du premier ensemble de règles de Ziegler-Nichols. Ces nouvelles règles d'ajustement utilisent deux paramètres (L et T) de la réponse indicielle du système, qui devrait être en forme de S : sinon, ils ne peuvent pas être appliqués.

A base de modèle de FOPDT ainsi les deux tableaux 3.1 et 3.2 nous synthétisons les correcteurs PID fractionnaires.

Table 3.1 Paramètres d'ajustement de premier ordre

	P	I	λ	D	μ
Paramètres à utiliser lorsque $0.1 \leq T \leq 5$					
1	-0.0048	0.3254	1.5766	0.0662	0.8736
L	0.2664	0.2478	-0.2098	-0.2528	0.2746
T	0.4982	0.1429	-0.1313	0.1081	0.1489
L²	0.0232	-0.1330	0.0713	0.0702	-0.1557
T²	-0.0720	0.0258	0.0016	0.0328	-0.0250
LT	-0.0348	-0.0171	0.0114	0.2202	-0.0323
Paramètres à utiliser lorsque $0.1 \leq T \leq 5$					
1	2.1187	-0.5201	1.0645	1.1421	1.2902
L	-3.5207	2.6643	-0.3268	-1.3707	-0.5371
T	-0.1563	0.3453	-0.0229	0.0357	-0.0381
L²	1.5827	-1.0944	0.2018	0.5552	0.2208
T²	0.0025	0.0002	0.0003	-0.0002	0.0007
LT	0.1824	-0.1054	0.0028	0.2630	-0.0014

Table 3.2 Paramètres d'ajustement de second ordre

1	-1.0574	0.6014	1.1851	0.8793	0.2778
L	24.5420	0.4025	-0.3464	-15.0846	-2.1522
T	0.3544	0.7921	-0.0492	-0.0771	0.0675
L²	-46.7325	-0.4508	1.7317	28.0388	2.4387
T²	-0.0021	0.0018	0.0006	-0.0000	-0.0013
LT	-0.3106	-1.2050	0.0380	1.6711	0.0021

Premier ensemble de règles:

Un premier ensemble de règles est donné dans le tableau 3.1 lire comme

$$P = -0.0048 + 0.2664L + 0.4982T + 0.0232L^2 - 0.0720T^2 - 0.0348TL$$

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commandé de types de systèmes (système d'ordre élevé et un système fractionnaire) avec des correcteurs PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire pour faire une étude comparative. Le but des règles d'ajustement est de minimiser l'erreur absolue intégrale pour le suivi du point de consigne. En comparant les résultats avec ceux obtenus pour les contrôleurs PID classique , On conclu que la commande d'ordre fractionnaire est mieux que le *PID* d'ordre entier.

Conclusion générale

Conclusion générale

Aujourd'hui, plusieurs chercheurs s'intéressent au développement de méthodes et de techniques de réglage des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire. L'intérêt de ce type de correcteur se justifie par une plus grande flexibilité dans la conception du contrôleur, puisqu'il dispose de deux paramètres supplémentaires, à savoir les ordres fractionnaires de l'intégration et les actions dérivées. Ces paramètres peuvent remplir des fonctionnalités supplémentaires dans la conception du domaine.

Dans ce mémoire de fin d'études, nous nous sommes intéressés à l'amélioration des performances des systèmes d'ordre entier et d'ordre fractionnaire en utilisant un correcteur d'ordre fractionnaire.

D'après les résultats obtenus dans notre simulation, on a constaté que la commande PID fractionnaire présente des meilleures performances par rapport à la commande **PID** d'ordre entier.

Référence et bibliographie

1. Idir, A.; Kidouche, M.; Bensafia, Y.; Khettab, K.; Tadjer, S.A. Speed control of DC motor using PID and FOPID controllers based on differential evolution and PSO. *Int. J. Intell. Eng. Syst.* **2018**, 20, 21.
2. Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev, O.I., 'Fractional integrals and derivatives: Theory and applications', Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993
3. K.S. Miller, B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley and Sons. New York, USA, 1993.
4. Caputo, M., 'Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent', *Geophysical J. of the Royal Astronomical Society*, Vol. 13, No. 5, pp 529-539,
5. Podlubny, I., 'Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications', Academic Press, San Diego, 1999
6. Filipe, A., 'Pseudo-invariance sous groupe de transformations : un nouveau concept pour la commande robuste', Séminaire Toulousain «Représentation Diffusive et Applications», N° 1, novembre 2000, pp 29- 48, disponible sur : <http://conf.laas.fr/st-rda>
7. Chen, Y. Q., 'Fractional order calculus, Fractional filter and fractional-order Control: An Overview & some recent developments', Utah State University Seminar, March 6, 2003, disponible sur :http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/ece6800chen_foc.p
8. Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y. and Onaral,B., 'Fractal system as represented by singularity function', *IEEE Trans. on Automa. Cont.*, Vol. 37, No. 9, pp 1465-1470, 1992
9. Charef, A., Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional PI λ D μ controllers', *IEE Proceeding on Control Theory Applications*, Vol. 153, No. 6, pp 714-720, 2006
10. DJOUAMBI, "Contribution à la Commande Crone ", Université Mentouri,Constantine, Algérie, thèse de doctorat 2008.
11. D. IDIOU "Modélisation et Identification des Systèmes d'Ordre Fractionnaire ", Université des Frères Mentouri, Constantine-Algerie, Thèse de doctorat 2017
12. Berrim and Megdoud D. A., " Prédiction de la tension de contournement par l'approche d'optimisation PSO ", Université El Oued, Algérie, Mémoire de master 2019.
13. S. Das, "Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls," Springer, New York, 2008.

14. I. Podlubny, "Fractional Differential Equations," Academic Press, San Diego, 1999.
15. I. N'Doye, "Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires," Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 23 février, 2011
16. D. Matignon, "Stability result on fractional differential equations with applications to control processing," in Proc. IMACS-SMC Proceedings, Lille, France, pp: 963-968, 1996.
17. I. Petras and L. Dorcak, "The Frequency Method for Stability Investigation of Fractional Control Systems," Journal of SACTA, Vol. 1, No. 1-2, pp: 75–85, 1999.
18. A. Monje, Y-Q. Chen, B-M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu. "Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications," London: Springer, 2010
19. E.D. Sontag, "Mathematical control theory, Deterministic finite dimensional systems," Volume 6 of texts in applied mathematics, Springer Verlag, 1990.
20. D. Matignon, B. D'Andrea-Novell, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems," in Computational engineering in systems applications, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, Julie 1996.
21. D. Valério, "FractionalRobust System Control," PhD thesis, UniversidadeTécnica de Lisboa, Portugal, 2005.
22. S. Ladaci, "Contribution à la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire," Thèse de doctorat de l'Université Mentouri, Constantine, Algérie, 2007.
23. Bensafia, Y.; Khettab, K.; Idir, A. A Novel Fractionalized PID controller Using The Sub-optimal Approximation of FOTF. Alger. J. Signals Syst. **2022**, 7, 21–26.
24. M. Axtell and E.M. Bise. Fractional calculus applications in control systems. In Proc. of the IEEE Nat. Aerospace and Electronics Conf., pages 563–566, New York, USA, 1990.
25. Y.Q. Chen and D. Xue. A comparative introduction of four fractional order controllers. In Proc. Of the 4th IEEE World Congress on Intelligent Control and Automatic (WCICA02), pages 3228-3235, Shanghai, China, June 2002.
26. A. Oustaloup. La dérivation non entière. Hermès. Paris, 1995.
27. A. Oustaloup. La commande CRONE. Hermès. Paris, 1991.
28. A. Idir, M. Kidouche, M. Zelmat, & A. Ahriche, (2011). A Comparative Study between DTC, SVM-DTC and SVM-DTC with PI Controller of Induction Motor. *ICEO'11*, 94.

29. Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives - An expository review. *Nonlinear Dynamics*, 38 :155-170, 2004.
30. I. Kaya and D.P. Atherton. A PI-PD controller design for integrating processes. *Proc. of American Control Conference, ACC99*, pages 258-262, 1999.
31. A. Besançon-Voda and S. Gentil. Régulateurs PID analogiques et numériques. *Technique de l'Ingénieur R 7416, Traité Mesures et Contrôle*, 1999.
32. I. Podlubny. Fractional-order systems and fractional-order controllers. UEF-03-94, Slovak Academy of Science, Kosice, 1994
33. P. Borne. Analyse et régulation des processus industriels. Tome 1 : Régulation Continue, Editions Technip, Paris, pages 258-261, 1993.
34. C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu and Y.Q. Chen. Self-tuning of fractional lead-lag compensators. *IFAC World Congress, Prague, Czech, July 4-8 2005*.
35. K. Aström and T. Hägglund. PID controllers: theory, design and tuning. *Instrument Society of America*. 2nd edition, 1995.
36. J.G. Ziegler and N.B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A.S.M.E*, 64, 1942.
37. Idir, A.; Khettab, K.; Bensafia, Y. Design of an Optimally Tuned Fractionalized PID Controller for DC Motor Speed Control Via a Henry Gas Solubility Optimization Algorithm. *Int. J. Intell. Eng. Syst.* **2022**, 15, 59–70.
38. Bensafia, Y.; Khettab, K.; Idir, A. An Improved Robust Fractionalized PID Controller for a Class of Fractional-Order Systems with Measurement Noise. *Int. J. Intell. Eng. Syst.* **2018**, 11, 200–207.
39. F. S. Wang, W. S. Juang and C. T. Chan, Optimal tuning of PID controllers for single and cascade control loops, *Chemical Eng. Commun.* **132** (1995), 15–34.
40. Idir, A.; Canale, L.; Tadjer, S.A.; Chekired, F. High Order Approximation of Fractional PID Controller based on Grey Wolf Optimization for DC Motor. In *Proceedings of the 2022 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2022 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/ICPS Europe)*, Prague, Czech Republic, 28 June–1 July 2022; IEEE: Piscataway, NJ, USA, 2022; pp. 1–6.