N d'ordre :

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Présentée par

Bachir GAGUI

Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz

Soutenue publiquement le 03 03 2015 devant le jury composé de :

JURY

Abdelkader GASMI	Prof. Univ-M'sila	Président
Mostefa NADIR	Prof. Univ-M'sila	Rapporteur
Benyattou BENABDERRAHMENE	Prof. Univ-M'sila	Examinateur
Nacerdine HEMICI	Prof. Univ-Sétif	Examinateur
Azedine RAHMOUNE	MCA. Univ-BBA	Examinateur
Abdelbaki MEROUANI	MCA. Univ-BBA	Examinateur

Promotion 2014 - 2015

مُلَخص

في هذِه الأُطروحة، قمنَا بدرَاسة المعَادلَات التكَاملية الغير خطية و بَالأخص منهَا المعَادلَات المسمَات بنوع هَامرستَاين، أين يكون الشكل كَالتَالي :

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x,y) f(y, \varphi(y)) dy$$

بحيث المجموعة Ω قَابلة لِلقيَاس و الدَالتَان $k(.,.),\ f(.)$ مستمرتَان.

لِلمعَادلَات التكَاملية أهمية كبيرة في المجَالَات التطبيقية، علَى سبيل المثَال (رَاديَاتيف،... الخ).

لحل المعَادلَات التكَاملية من نوع هَامرستَاين، علينَا القيَام بعدة خطوَات :

١- **دراسة الإستمرَارية و التراص لِلمؤُثرَات من الشكل** H

٢- **دراسة الإنتمَاء لِلفضَاءَات التَالية : فضَاء لوبيغ، فضَاءَ أورليز**

٣- **تقدير الحلول التقريبية و هذَا بَالإعتمَاد علَى بعض الطرق و التقنيَات، منهَا :**

(i) طريقة النقطة الثَابتة.

(ii) تقنية تحويل المُؤثرَات الغير خطية إلَى خطية و هذَا بإستعمَال نظرية كرَاسنولسكي أو نميليشكي.

(iii) طريقة التقريب بإستعمَال المُؤثرَات المتعَامدة .

اَلكَلِمَات المفتَاحية: اَلمعَادلَات التكَاملية، اَلمعَادلَات التكَاملية من نوع هَامرستَاين ، فضَاءَ لوبيغ، فضَاءَ أورليز.

Abstract

In this thesis we study the nonlinear problems concerning the field of the integral equations, particularly equations of Hammerstein type, whose the general form is

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x,y) f(y, \varphi(y)) dy$$

where Ω be a measurable set and the $k(.,.)$, $f(.)$ are knowns functions.
A very important role the non linear integral equations play in the practical fields, for examples (radiative atmosphere,Ě. etc).
The solution of the operator H is given by a several steps :

1. **We study the continuity and the compactness of the operator H.**
2. **We study the belongs of the operator H to the Lebesgue and Orlicz spaces**
3. **Uniforms estimates on the approximate solutions.**
   These estimates of the nonlinear operator, are established by using a methods or technics :
   (i) method of the fixed point.
   (ii) method of linearization, i.e., the decomposition of certain operator of the Hammerstein type by a combination of the linear operators, for example the theory of Krasnoselkii, Nemytskij.
   (iii) a numerical aspect concerning methods of projections or methods of approximation by orthogonal polynomials which the points are choized by collocation or by zeros of this polynomials.

Keywords : Integral equations, Hammerstein integral equations, Lebesgue spaces, Orlicz spaces.

Résumé

Dans cette thèse on étudié les problèmes non linéaires concernant un type dans le domaine des équations intégrales particulièrement les équations intégrales de type Hammerstein, dont la forme générale est la suivante

$$H\varphi(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

où Ω est un ensemble mesurable et les fonctions $k(.,.)$, $f(.)$ sont connues.
Les équations intégrales non linéaires joue un rôle très important dans les domaines pratiques, par exemples (l'atmosphère radiatif,.... etc).
La résolution de l'équation H se faite en plusieurs étapes :

1. **On étudie la continuité et la compacité de l'opérateur H**
2. **Appartenance de l'opérateur H dans certains espaces de Lebesgue et d'Orlicz.**
3. **Estimations uniformes sur les solutions approchées.**
   Ces estimations sont établies par des méthodes ou des techniques :
   (i) La méthode du point fixe.
   (ii) La méthode de linéarisation, c'est-à-dire la décomposition de certain opérateur de type Hammerstein par une combinaison des opérateurs linéaires, par exemple la théorie de Krasnoselkii, Nemytskij
   (iii) Un aspect numérique concernant les méthodes de projections ou méthodes d'approximation par des polynômes orthogonaux dont les points de collocations sont des zéros de ces polynômes.

Mots clés : Equation intégrale, équation de Hammerstein, espace de Lebesgue, espace d'Orlicz.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à témoigner ma vive reconnaissance au Professeur Mostefa NADIR qui a guidé avec beaucoup d'attention, de gentillesse et de patience mes premiers pas en recherche en tant que directeur de mémoire de magister et de thèse de doctorat.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs Abdelkader GASMI, Benyattou BENABDERRAHMENE, Nacerddine HEMICI, Azedine RAHMOUNE et Abdelbaki MEROUANI d'avoir accepter et consacrer une partie de leur temps à la rédaction de rapports et à la participation au jury.

Un grand merci à tous mes collègues de université de Boumerdes et de M'sila, en particulier Lakehali Belkacem et à tous ceux qui m'ont aidé un jour.

Enfin, et à ce stade, ils doivent déjà se sentir oubliés, je pense à ma mère, mon père, ma soeur, mes frères et toute ma famille. Leurs amour, affection et soutient sont au-dessus de tous les remerciements.

Et pour finir, je pense à mes préférés et favoris collaborateurs : ma femme, mes enfants : Mohammed et Ayoub.

Notations

$p_- = \min\{p_i, \quad i = 1, \dots, N\}$ et $p_+ = \max\{p_i, \quad i = 1, \dots, N\}$.

$\Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_\infty)$.

$p_* = ess \inf\limits_{\Omega_0} p(x), \ p^* = ess \sup\limits_{\Omega_0} p(x)$.

p'_i conjugué de p_i, i.e., $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} = 1$.

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$ frontière de Ω.

$|\Omega|$ mesure de l'ensemble Ω.

$|E|$ mesure de l'ensemble E.

$\mathbb{R}^N$ espace euclidien réel de dimension n.

p.p. presque partout.

supp(f) support de la fonction f.

$\mathfrak{M}^+$ Le cône de tout les fonctions μ-mesurable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $[0, \infty]$.

χ_E fonction caractéristique de l'ensemble E.

$L^0(\Omega)$ L'espace de toutes les classes d'équivalence des fonctions à valeurs réelles

mesurables et finies p.p sur Ω.

$L^{\varphi}(\Omega) = \Big\{u \ : \ \text{fonction mesurable sur } \Omega \mid \exists\lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \varphi(\frac{u}{\lambda})\,dx < +\infty\Big\}$. muni de la norme de Luxemburg :

$$\|u\|_\varphi = \|u\|_{L_\varphi(\Omega)} = \inf\Big\{\lambda > 0 \quad \Big| \quad \int_\Omega \varphi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)\,dx \leq 1\Big\}.$$

$L^0(Q)$ L'ensemble des fonctions mesurables sur Q.

$S(\varepsilon, r)$ La sphère unité.

$B(\varepsilon, r)$ La boule unité.

$int(U)$ Intérieur de U.

$\overline{U}$ La fermeture de U.

$co(F)$ Codimension de l'ensemble F.

$\mathcal{M}^+$ Ensemble des éléments mesurables positifs.

$\mathcal{M}$ Ensemble des éléments mesurables.

EFB Espace fonctionnel de Banach.

$\mathcal{P}(\Omega)$ Ensemble des partitions des éléments.

A Opérateur intégral.

H Opérateur intégral de Hammerstein.

EI Equation intégrale.

EIFS Equation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

EIVS Equation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

EIL Equation intégrale linéaire.

EINL Equation intégrale non-linéaire.

Introduction

Le cadre général de cette thèse est l'analyse non linéaire dans les espaces fonctionnels associés à la géométrie de ces espaces. Ce travail est composé de deux parties. Dans la première partie on s'intéresse principalement aux applications (l'existence de la solution) des équations intégrales dans les espaces fonctionnels, Lebesgue, Lebesgue à exposant variable et l'espace d'Orlicz. La seconde partie aborde la structure asymptotique des espaces fonctionnels de dimension infinie puis certaines propriétés de régularité des polynômes entre ces espaces en liaison avec cette structure.

Les études de l'équations de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_\Omega k(x,y) f(y,\varphi(y)) dy = g(x)$$

a été faite par plusieurs auteurs, parmi ces, Hammerstein utilisé les méthodes variationnelles et Nemytskij utilisé la technique de décomposition, i.e., decompose l'opérateur A en deux opérateurs K et N.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral. Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de Fredholm [1] et les équations de Volterra [2]. Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable. Quelques équations intégrales s'appellent singulières, quelques auteurs appellent une équation singulière si l'intégrale ne peut pas

1. Ivare Fredholm (1866-1927), mathématicien Suédois.
2. Vito Volterra (1860-1940), mathématicien Italian.

être interprétée comme d'habitude (c'est-à-dire : dans le sens de Riemann ou de Lebesgue), mais doit être considéré en tant qu'intégrale de valeur principale.
Des équations qui ont des singularités mais intégrables s'appellent alors faiblement singulières. D'autres type de singularité s'appellent Winer-Hopp lorsque l'une ou les deux bornes de l'intégrale égales l'infini.
L'une des transformations intégrales linéaires les plus souples et peut être appliquée pour résoudre une large variété de problèmes dans les mathématiques, la science et la technologie, une équation intégrale linéaire (1). La simplicité de cette équation est trompeuse parce qu'elle inclut des problèmes aussi divers que l'équation en arrière de la chaleur, la méthode où la transformée de Green pour l'analyse et la solution des équations. Les généralisations impliquant des dimensions et des non-linearities plus élevées augmentent non seulement leur applicabilities mais également leur complexité habituelle. Il est nécessaire d'examiner des applications des équations intégrales, afin d'isoler des sous-classes des problèmes sur lesquels il est intéressant pour obtenir des algorithmes fiables. Ainsi, une partie de ces démarches est impliqué les applications examiner des équations intégrales.

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_I k(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

Historiquement, une classification normale et efficace pour des équations intégrales est comme suivent l'intervalle de l'intégration I dans (1) est fini et le noyau $k(x, y)$ est intégrable, trompette comme valeur principale de Cauchy. De tels équations s'appellent singulières de type de Cauchy sont des équations avec leur intervalles d'intégration soit semi-infinie ou soit infini. Les niveaux additionnels de la classification dépendent de la forme, les propriétés de (1) varient considérablement dépend le noyau $k(t, x)$. Par exemple, si $k(t, x)$ est continu par morceaux, est fortement oscillant, admet une singularité algébrique, aucune base générale de classification pour ces équations intégrales. D'autres détails cet sujet de la terminologie ci-dessus et les propriétés mathématiques des types correspondants de théorie d'équations intégrales voir ([19], [34], [50],...).
Elle était plus il y a de 80 ans, en 1932, cela la était évident les deux livres célèbres sur l'analyse fonctionnelle par S.Banach, $\ll$ *La Théorie des opérateurs linéaires* $\gg$, et l'article sur les espaces, appelés plus tard espaces d'Orlicz, par W. Orlicz [3], $\ll$ *Uber eine gewise*

3. Wladyslaw Orlicz (1903-1990) mathématicien Polonais

Klasse von Raumen vom Typus B $\gg$ dans la revue, *bull. Acad. Polon. Soc. Lectr, Ser.* La dernière notion est une prolongation importante de la notion des espaces L^p et l^p, présentée par F. Riesz en 1910 et 1913, respectivement. La naissance des investigations sur les propriétés géométriques des espaces de Banach, c-à-d., des propriétés qui sont invariables en ce qui concerne les isometries linéaires, peuvent être remontées à 1936, quand J.A. Clarkson a introduire la notion des espaces uniformément ronds dans le papier $\ll$ *les espaces uniformément convexes* $\gg$ dans la revue, *trans. Amer. Maths. Soc*, et montré que le L^p avec $1 < p < \infty$ sont des exemples de tels espaces.

Les espaces L^p semble être trop étroite pour fournir un bon modèle pour distinguer des subtilités, dans diverses propriétés géométriques des espaces de Banach. Un champ beaucoup plus riche des exemples semble être obtenu en considérant les espaces des fonctions d'Orlicz L^φ et de suites l^φ, où φ est une fonction d'Orlicz. On distingue dans les espaces d'Orlicz trois normes, la norme "0" d'Orlicz ($\|.\|^0$), la norme "1" de Luxembourg ($\|.\|^1$) et la norme "2" d'Amemiya ($\|.\|^2$), qui sont équivalentes, mais l'opérateur d'identité de (L^{φ_0}) à (L^{φ_1}) et (L^{φ_1}) à (L^{φ_2}), ne sont pas isometries linéaires, ce qui implique cela du point de vue des propriétés géométriques, parce que ces espaces sont différent essentiellement.

Bien que l'étude de la structure des espaces d'Orlicz soit intéressante et étendue, beaucoup d'applications aux équations différentielles et intégrales, avec le noyau de types non puissance, c'est la raison de base du développement des espaces d'Orlicz.

Cette thèse est organisée en cinq chapitres.

Le premier chapitre, on rappels quelques définitions et des propriétés des opérateurs linéaires et non-linéaires (bornés, continus, compact,... etc), aussi quelques théorèmes fondamentals très utiles dans ce qui suit.

Le deuxième chapitre, on expose brièvement les espaces fonctionnels notamment, espace de Lebesgue, Lebesgue à exposant variable (généralisé) et l'espace d'Orlicz et leur propriétés, la structure géométrique, ..., etc.

Dans le troisième, est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour notre objectif, de familiariser le lecteur de cette thèse avec le concept d'équation intégrale. Ainsi, nous y exposons certains modèles typiques pour voir où de telles équations sont intéressons.

Le quatrième, on expose le but de notre travail, concertant l'application de ces équations intégrales dans les espaces fonctionnels, en aspect fonctionnel, on trouve des résultats sur la solution des équations intégrales non linéaire de type Hammerstein .
Dans le dernier chapitre, on expose une généralisation de l'espace d'Orlicz ou l'espace connu comme habituelle espace d'Orlicz-Museilak, et la relation entre les espaces d'Orlicz et autres espaces, comme les espaces de Sobolev, de Lorentz, de Hardy, ... etc.

Table des Matières

Chapitre I

Notions de bases et préliminaires

Dans ce chapitre on expose des notions et des théorèmes fondamentals, qui l'on utilisera dans ce qui suit, i.e. les chapitres suivants, ces théorèmes que soit utilisé brièvement que soit intuitivement, de raison de guider vers l'axe de notre travails.

1 Quelques définitions et théorèmes fondamentals

Définition I.1
1- On dit que l'ensemble $\mathfrak{M} \subset C$ est compact, si seulement si est borné en norme et toutes les fonctions dans $\mathfrak{M}$ sont équi-continues uniformément.
2- On dit que l'opérateur A est compact par rapport à un ensemble G dans l'espace E, s'il transforme l'ensemble G de l'espace E en un ensemble compact dans cet espace.

Définition I.2
Soit E un espace de Banach, et $T : E \to E$ un opérateur.
On dit que T est un opérateur compact s'il transforme les ensembles bornés de E en ensemble relativement compact.

Théorème I.1 *(de Banach)*
Soit X, Y deux espaces de Banach et soit l'opérateur linéaire A défini de X dans Y, avec

$$ker(A) = X \quad et \; Im(A) = Y.$$

On suppose que A est continu et l'inverse A^{-1} existe, alors A^{-1} est continu.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ∎

Théorème I.2 *(Théorème de point fixe de Brouwer)*
Soit S la sphère unité fermée dans l'espace Ecludien E de dimension n, c'est-à-dire

$$S = \{x;\ x \in E^n; \|x\| \leq 1\}$$

Soit T un opérateur continu de S dans S, si $\|x\| \leq 1$, $\|T(x)\| \leq 1$, alors T admet un point fixe, c'est-à-dire il existe un x dans S, tel que $T(x) = x$.

Preuve.
Pour la preuve voir [31]. ∎

Théorème I.3 *(Théorème de point fixe de Schauder)*
Toute transformation continue d'un ensemble fermé et convexe d'un espace linéaire complet en sous ensemble compact, admet un point fixe.

Théorème I.4 *(Théorème de point fixe de Schaefer)*
Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur compact, alors
(i) L'équation $x = \lambda Tx$ admet une solution pour $\lambda = 1$, où
(ii) L'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in X; x = \lambda Tx, \lambda \in]0,1[\}$ est borné.

Preuve.
Pour la preuve voir [68]. ∎

Théorème I.5 *(de Carathéodory)*
Soient F un sous-ensemble d'un espace linéaire E et $co(F)$ de dimension m. Alors pour chaque point x de $co(F)$, est une combinaison convexe de au plus de $m+1$ points de F.

Théorème I.6 *(de Arzela-Ascoli)*
La condition nécessaire et suffisante que la famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$ soit compacte dans $C([a, b])$, est que cette famille soit uniformément compacte.

Preuve.
Pour la preuve voir [68]. ■

Lemme I.1
Si U est un ensemble convexe dans un espace normé, alors leur intérieur $intU$ et sa fermeture $\overline{U}$ sont convexes aussi.

Preuve.
Pour la preuve voir [48]. ■

Définition I.3
Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est satisfaite la condition de Carathéodory, si
(i) La fonction $x \to f(x, y)$ mesurable dans l'ensemble Ω, pour $y \in \mathbb{R}$
(ii) La fonction $y \to f(x, y)$ est continue dans $\mathbb{R}$, pour $x \in \Omega$

Définition I.4
Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfaite la condition de Carathéodory, alors pour chaque fonction $\varphi(y)$ étant mesurable sur l'ensemble Ω, nous définissons l'opérateur F de superposition comme

$$(F\varphi)y = f(y, \varphi(y)), \ y \in \Omega.$$

L'opérateur F s'appelle aussi l'opérateur de Nemytskij.

Définition I.5
Soit $A : X \to Y$ un opérateur entre deux espaces normés.
On dit que A est compact si l'image de la boule unité B_X de X est relativement compacte, i.e. si $\overline{A\,(B_X)}$ est compacte. Ceci est équivalent à dire que toute suite bornée (φ_n) de X, on peut extraire de $(A\varphi_n)$ une suite convergente dans Y.

Définition I.6
Soit A un opérateur intégral, on dit que l'opérateur A est continu dans l'espace fonctionnel X, si la suite $\{u_n\}$ convergente vers une fonction u, on obtient la suite $\{A(u_n)\}$ converge vers $A(u)$.

Définition I.7
On dit que la fonction M est convexe, s'elle est vérifiée l'inégalité suivante

$$M(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha M(u_1) + (1-\alpha)M(u_2) \tag{I.1}$$

pour tous α $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

1.1 N-fonctions

Une généralisation de la fonction définie par $\varphi(u) = |u|^p$, est donnée par la classe des fonctions suivantes.

Définition I.8
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, telle que :
(i) φ *est paire, convexe et continue,*
(ii) $\forall\, t > s \geq 0, \quad \varphi(t) > \varphi(s) \geq 0,$
(iii)

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s)}{s} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s\to +\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = +\infty$$

La fonction φ est appelée fonction de Young ou N-fonction.

Théorème I.7
Chaque fonction convexe $\varphi(u)$, qui vérifiée la condition $\varphi(a) = 0$, peut être représentée sous la forme

$$\varphi(u) = \int_a^u p(t)\,dt$$

où $p(t)$ est une fonction continue croissante. De même nous avons $\varphi'(u) = p_+(u)$

Preuve. Pour la preuve voir [47]. ■

Nous pouvons définir la fonction $\varphi(u)$ de manière équivalente

Définition I.9 *(Définition équivalente)*
Une fonction $\varphi(u)$ s'appelle N-fonction s'elle admette la représentation

$$\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt \tag{I.2}$$

où la fonction $p(t)$ est continue pour $t \geq 0$, positive pour $t > 0$ et non décroissante qui vérifiée les conditions

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty \tag{I.3}$$

Exemple I.1
Les fonctions suivantes sont N-fonctions :

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = |t|^p,\ \ 1 < p < +\infty,\\
&\varphi(t) = e^{|t|} - |t| - 1.\\
&\varphi(t) = e^{(|t|^p)} - 1,\ \ 1 < p < +\infty,\\
&\varphi(t) = (1 + |t|)\ln(1 + |t|) - |t|.
\end{aligned}$$

1.2 Propriétés de N-fonction

1- D'après la représentation (I.2), que chaque N-fonction est continue et augmente pour des valeurs positives.
2- Les N-fonctions sont convexes, en effet, si

$$0 \leq u_1 < u_2$$

et par la monotonicité de la fonction $p(t)$, nous avons cela

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \int_0^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt\\
&\leq \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} p(t)dt\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{u_1} p(t)dt + \int_0^{u_2} p(t)dt\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\right]
\end{aligned}$$

Dans le cas u_1, u_2 sont arbitraires, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \varphi\left(\frac{|u_1+u_2|}{2}\right)\\ &\leq \varphi\left(\frac{|u_1|+|u_2|}{2}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left[\varphi(u_1)+\varphi(u_2)\right]\end{aligned}$$

faisons $u_2 = 0$ en (I.1), nous obtenons

$$\varphi(\alpha u_1) \leq \alpha\varphi(u_1) \quad ,0 \leq \alpha \leq 1$$

la premiere condition (I.3) ($p(0) = 0$), signifie que

$$\lim_{u\to 0}\frac{\varphi(u)}{u} = 0 \tag{I.4}$$

pour de la deuxième condition (I.3) ($\lim_{u\to\infty} u = \infty$), alors

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u} = \infty, \tag{I.5}$$

puisque, pour $u > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(u)}{u} &= \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt\\ &\geq \frac{1}{u}\int_{u/2}^u p(t)dt \geq p(\frac{u}{2}),\end{aligned} \tag{I.6}$$

Définition I.10 *(Inégalité de Jensen) Soit φ une N-fonction*

(i) Soit $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des nombres positifs, alors

$$\varphi\left(\frac{\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+...+\alpha_n u_n}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1\varphi(u_1)+\alpha_2\varphi(u_2)+...+\alpha_n\varphi(u_n)}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} \tag{I.7}$$

(ii) Soit $\alpha = \alpha(x)$ *définie et positive sur* Ω*, alors*

$$\varphi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx}\right) \leq \frac{\int_\Omega \varphi(u(x))\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx} \tag{I.8}$$

Remarque I.1

L'inégalité (I.7) est appelée inégalité de Jensen et l'inégalité (I.8) est appelée inégalité intégrale de Jensen.

1.3 Fonctions de Steklov

Définition I.11

Soit $f(x)$ *une fonction définie sur tout l'espace eucludien considéré et soit* $S(x,\varepsilon)$ *la sphère de rayon* ε *autour du point* x *et* $V(\varepsilon)$ *le volume de cette sphère, on appelle la fonction*

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} f(t)dt \tag{I.9}$$

La moyenne intégrale ou fonction de Steklov de la fonction f*.*

Fonction Maximale

Définition I.12

On définit la fonction maximale dite de Hardy-Littlewood, la fonction définie par

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy, \tag{I.10}$$

où le cube $Q \subset \mathbb{R}^n$*.*

2 Principe du point fixe

Définition I.13

Soit T *un opérateur défini dans un espace de Banach* E *dans lui-même, alors pour tout* $x \in E$*, tel que* $x = T(x)$*, s'appelle un point fixe de l'opérateur* T*.*

Théorème I.8

Soit T un opérateur continu dans un espace de Banach E dans lui-même, et on définit la suite (x_m) par

$$x_{m+1} = T(x_m), \ m = 0, 1, ... \tag{I.11}$$

qui converge vers $x = x^*$, pour $x_0 \in E$, alors x^* c'est le point fixe de l'opérateur T, c'est-à-dire

$$x^* = T(x^*) \tag{I.12}$$

Preuve.

On peut le voir directement d'après l'équation (I.11), et que l'opérateur T est continu

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{m+1} = \lim_{m\to\infty} T(x_m) = T(x^*).$$

■

Définition I.14

Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \tag{I.13}$$

Remarque I.2

(i) *Si $k \geq 0$ dans la relation (I.13), T est dit Lipshchitziènne.*

(ii) *L'application Lipshchitziènne est nécessairement continue.*

(iii) *Si $k < 1$ dans la relation (I.13), T est dite contraction.*

(iv) *Si $k = 1$ dans la relation (I.13), T est dit nonexpansive.*

Théorème I.9

Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E.

Soit f une application contractante de F dans E, alors il existe un unique $z \in F$, tel que

$$f(z) = z.$$

Théorème I.10
Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \to F$ une application contractante, alors
(a) L'équation $Tx = x$, a une seule unique solution.
(b) La solution unique x peut être obtenu par la limite de la suite $\{x_n\}$ de F définie par $x_n = Tx_{n-1},\ n = 1, 2, ...,$ où x_0 est un élément arbitraire de F,

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0$$

Preuve.
Pour la preuve voir [24]. ■

Théorème I.11
Si T un opérateur continu dans un espace de Banach E, tel que pour $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur T^m est contractant, alors l'équation $T^m x = x$, admet une seule solution, cette solution c'set le point fixe.

Théorème I.12
Soient A un opérateur borné dans un espace de Banach E dans lui-même et g un élément de E, alors l'opérateur défini par

$$T\varphi = \alpha A\varphi + g$$

a un point fixe, pour $|\alpha|$ suffisamment petit, de plus, si k est une constante positive, telle que

$$\|A\varphi\| \leq k\|\varphi\|,\ \varphi \in E$$

alors $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique pour $|\alpha|k < 1$.

Preuve.
Puisque l'opérateur A est borné, alors il existe une constante k, telle que

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\| \textit{ pour } \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

ainsi

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = |\alpha|\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq |\alpha|k\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

et par conséquent T est une contraction, lorsque $|\alpha|k < 1$.
Dans ce cas et par le théorème précédant, T admet un point fixe unique. ■

Théorème I.13 *(de Krasnoselkii)*
Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un cône dans E.
On suppose que Ω_1, Ω_2 deux sous-ensembles ouverts dans E, avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ et soit

$$T : C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to C$$

un opérateur compact, tel que, (i) ou (ii) est vrai, alors T admet un point fixe dans $C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.
(i) $\|Tu\| \leq \|u\|, \ u \in C \cap \Omega_1$ *et* $\|Tu\| \geq \|u\|, \ u \in C \cap \Omega_2$, *ou*
(ii) $\|Tu\| \geq \|u\|, \ u \in C \cap \Omega_1$ *et* $\|Tu\| \leq \|u\|, \ u \in C \cap \Omega_2$

Preuve. Pour la preuve voir [46] ou [56]. ■

Théorème I.14 *(de Krasnoselkii)*
Soit F un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E et A, B deux opérateurs, tels que
(i) $A(F) + B(F) \subseteq F$,
(ii) *A est une application contractante,*
(iii) *B est continu et $B(F)$ est relativement compact.*
Alors, il existe un $y \in F$ avec $Ay + By = y$.

Preuve. Pour la preuve voir [46]. ■

Chapitre II

Les espaces fonctionnels, Lebesgue, Lebesgue à exposons variable et Orlicz

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et théorèmes de base sur les espaces fonctionnels (Construction géométriques des espaces, densité, séparabilité, isometries, ...), notamment les espaces des fonctions, ce sont les espaces de Lebesgue, Lebesgue généralisé et l'espace d'Orlicz.

0.1 Espace fonctionnel de Banach

Soit (Ω, μ) espace mesuré et soit $\mathcal{M}^+$ un cône des fonctions μ-mesurables sur Ω dont les valeurs dans $[0, \infty]$

Définition II.1
Soit l'application ρ suivante $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$.
On appelle une norme fonctionnelle de Banach l'application ρ, s'elle vérifiée les propriétés suivantes
Si pour tout f, g et $f_n (n = 1, 2, ...)$ dans $\mathcal{M}^+$ et pour $\lambda \geq 0$

(P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \mu - p.p.$
$\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$.
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$.

(P2) $0 \leq g \leq f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$.

(P3) $0 \leq f_n \uparrow f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$.

(P4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$.

(P5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$ *où la constante* C_E *dépend seulement de* E.

Définition II.2

Soit ρ *une norme fonctionnelle de Banach,* $X = X(\rho)$ *l'ensemble de toute les fonctions* f *dans* $\mathcal{M}$ *avec* $\rho(|f|) < \infty$*, s'appelle espace fonctionnel de Banach (EFB), pour toute* $f \in X$*, on définit*

$$\|f\|_X = \rho(|f|). \tag{II.1}$$

Théorème II.1

Soit ρ *norme fonctionnelle de Banach et soit* X *et* $\|.\|_X$ *comme dans la définition II.2, alors sous les opérations naturelles de l'espace vectoriel, l'espace* $(X, \|.\|_X)$ *est un espace vectoriel linéaire normé, avec les inclusion suivantes*

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0 \tag{II.2}$$

sont vérifiant, où S *est l'ensemble des fonctions* μ*-simple dans* $\mathbb{R}^n$*.*
En particulier, si $f_n \to f$ *dans* X*, alors* $f_n \to f$ *par mesure dans les ensembles de mesure finie, et par conséquent les sous-suites convergent ponctuellement vers* f μ*-p.p.*

Preuve. D'après la définition II.2 et de la propriété (P5) de la définition II.1 que chaque fonction dans X est localement intégrable μ-p.p. et par conséquent fini μ-p.p.(parce que μ est σ-fini). L'ensemble X hérite des opérations de l'espace vectoriel de $\mathcal{M}_0$ et alors il n'y a aucune difficulté dans l'utilisation (P1) et (II.1) pour vérifier que $(X, \|.\|_X)$ est un espace linéaire normé.
La propriété (P4) prouve que X contient la fonction caractéristique de chaque ensemble de mesure finie et par conséquent, la linéarité de chaque fonction μ-simple. Ceci établit les inclusions de (II.2).
Il reste de prouver que l'inclusion de X à $\mathcal{M}_0$ est continue. Puisque les deux espaces sont métrisable, donc il suffira de prouver que chaque suite convergente dans X est convergente aussi dans $\mathcal{M}_0$ (à la même limite, naturellement). Mais si $f_n \to f$ *dans* X, alors (II.1) montre

$$\rho(|f_n - f|) \to 0,\ si\ n \to \infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Par la propriété (P5)

$$\mu\{x \in E: \ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \leq \int_E \frac{1}{\varepsilon}|f - f_n| d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} C_E \rho(|f - f_n|),$$

ce qui converge vers 0, si $n \to \infty$ puisque C_E est indépendant de n. Ceci montre que $f_n \to f$ en mesure sur chaque ensemble de mesure fini, ou ce qui est la même chose de $f_n \to f$ dans $\mathcal{M}_0$. ■

Lemme II.1

Soit X un espace fonctionnel de Banach (EFB) et on suppose que $f_n \in X$, $(n = 1, 2, ...)$.

(i) Si $0 \leq f_n \uparrow f$ μ-p.p, alors ou bien $f \notin X$ et $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ ou bien $f \in X$ et $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$.

(ii) Si $f_n \uparrow f$ μ-p.p, et si $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_X < \infty$, alors $f \in X$ et $\|f\|_X \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_X$.

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate de la définition II.2 et de la propriété de Fatou (P3). Pour la deuxième partie, Soit $h_n(x) = \inf_{m\geq n} |f_m(x)|$ de sorte que $0 \leq h_n \uparrow |f| \mu$-p.p, et par les propriétés (P2) et (P3), on a

$$\begin{aligned} \rho(|f|) &= \lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\inf_{m\geq n} \rho(|f_m(x)|)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_X < \infty. \end{aligned} \tag{II.3}$$

■

Théorème II.2

Soit X un EFB, on suppose que

$$f_n \in X_n \ (n = 1, 2, ...) \ et \ \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge dans X vers la fonction f dans X et

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X.$$

En particulier l'espace X est complet.

Preuve. Pour la preuve voir [14]. ■

Théorème II.3
Soient X et Y deux espaces fonctionnels de Banach sur le même espace mesuré.
Si $X \subset Y$, alors en effet $X \hookrightarrow Y$, autrement dit (de manière équivalente)

$$\|f\|_Y \leq c\|f\|_X, \; f \in X \tag{II.4}$$

où la constante c est indépendante de f.

Preuve. Supposer $X \subset Y$ mais (II.4) n'est pas vraie, alors il existe des fonctions $f_n \in X$ pour lequel

$$\|f_n\|_X \leq 1, \; \|f_n\|_Y > n^3, \; n = 1, 2, ...$$

Remplaçant chacun f_n par sa valeur absolue, nous pouvons supposer $f_n > 0$ pour tout n. en vertu de la propriété de Riesz-Fischer (théorème II.1) que

$$\sum \frac{f_n}{n^2}$$

converge dans X vers une certaine fonction dans X.
L'hypothèse que X est un sous-ensemble de Y prouve que f appartient à Y. Mais c'est impossible parce que $0 \leq \frac{f_n}{n^2} \leq f$ ainsi

$$\|f_n\|_Y \geq \frac{\|f_n\|_Y}{n^2} > n, \; \forall n$$

. Par conséquent (II.4) est vérifiée pour certaine constante C indépendante de f. ■

Corollaire II.1
Si les deux espaces fonctionnels de Banach consistent (comprennent) le même ensemble de fonctions, alors les normes sont équivalentes.

0.2 Espace Modulaire

Définition II.3

Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. La fonction $\rho : X \to [0, \infty]$ est dite semimodulaire dans X, si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :

(i) $\rho(0) = 0$.

(ii) $\rho(\lambda x) = \rho(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, avec $|\lambda| = 1$.

(iii) ρ est continue à gauche.

(iv) $\rho(\lambda x) = 0, \forall \lambda > 0$ implique $x = 0$.

le semimodulaire ρ est dit continu si,

(v) l'application $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$ est continue dans $(0, \infty]$, pour $x \in X$.

Remarque II.1

1- Le semimodulaire est toujours convexe.

2- Le semimodulaire est dit modulaire si, $\rho(x) = 0$ implique $x = 0$.

Exemple II.1

Si $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors

$$\rho_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^p dx$$

definer un modulaire continu sur $L^0(\Omega)$.

Définition II.4

Si ρ est un semimodulaire ou modulaire dans X, alors

$$X_\rho = \left\{ x \in X; \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

Remarque II.2

Puisque $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x)$ require à $\lim\limits_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x)$, avec $\lambda \in (0, \infty]$, on peut définir X_ρ par :

$$X_\rho = \{x \in X, \rho(\lambda x) < \infty; \text{ pour } \lambda > 0\}.$$

Théorème II.4
Soit ρ un semimodulaire dans X, alors X_ρ est un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$, où la norme définie par

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq 1\right\}$$

Preuve. • X_ρ est un espace vectoriel.
- Il est claire que $0 \in X_\rho$.
- Soit $u, v \in X_\rho$ *et* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, par la définition de X_ρ et $\rho(\alpha u) = \rho(|\alpha| u)$ il est claire que $\alpha u \in X_\rho$.
- Par la convexité de la fonction ρ, on peut l'estimer

$$0 < \rho(\lambda(u+v)) \leq \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda u) + \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda v) \to 0, \lambda \to 0$$

et par conséquent, on a $u + v \in X_\rho$.
Donc X_ρ est un espace vectoriel.
• X_ρ est un espace normé.
- Il est claire que $\|u\|_\rho < \infty$, pour tout $u \in X_\rho$ et $\|0\|_\rho = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
-

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_\rho &= \inf\{\lambda > 0 \ ;\ \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\
&= |\alpha| \inf\{\lambda > 0 \ ;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\
&= |\alpha| \|u\|_\rho.
\end{aligned}$$

- Soit $u, v \in X$ *et* $x \geq \|u\|,\ y \geq \|v\|$, alors

$$\rho\left(\frac{u}{x}\right) \leq 1 \ et \ \rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1$$

et par conséquent de la convexité de ρ, on a

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{u+v}{x+y}\right) &= \rho\left(\frac{x}{x+y}\frac{u}{x} + \frac{y}{x+y}\frac{v}{y}\right) \\
&\leq \frac{x}{x+y}\rho\left(\frac{u}{x}\right) + \frac{y}{x+y}\rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1
\end{aligned}$$

alors $\|u+v\|_\rho \leq x+y$, d'où

$$\|u+v\|_\rho \leq \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$$

- Si $\|u\|_\rho = 0 \; alors \; \rho(\alpha u) \leq 1, \forall \alpha > 0$, donc

$$\rho(\lambda u) \leq \beta \rho \left(\frac{\lambda u}{\beta} \right) \leq \beta, \forall \lambda > 0 \; et \; \beta \in (0,1]$$

d'après les propriétés de ρ, alors $\rho(\lambda u) = 0, \; \forall \lambda > 0$ et que $u = 0$. ■

Lemme II.2

Soit ρ un semimodulaire sur X, alors $\|x\|_\rho \leq 1$ et $\rho(x) \leq 1$ sont équivalent.

Si ρ est continu, alors aussi $\|x\|_\rho < 1$ et $\rho(x) < 1$ sont équivalents, comme $\|x\|_\rho = 1$ et $\rho(x) = 1$.

Soient ρ un semimodulaire sur X et $x_k \in X_\rho$, alors $x_k \to 0$ pour $k \to \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\lambda x_k) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Preuve.

Si $\rho(x) \leq 1$, alors $\|x\|_\rho \leq 1$ par la définition de $\|.\|_\rho$, d'une part si $\|x\|_\rho \leq 1$, alors $\rho(\frac{x}{\lambda}) \leq 1$ pour tout $\lambda > 1$. Puisque ρ est continu à gauche, il suit $\rho(x) \leq 1$.

Soit ρ est continu, si $\|x\|_\rho \leq 1$, alors il existe $\lambda < 1$ avec $\rho(\frac{x}{\lambda}) \leq 1$, par conséquent et par les relations

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \leq |\lambda| \rho(x), \; pourtout \; |\lambda| \leq 1 \tag{II.5}$$

et

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \geq |\lambda| \rho(x), \; pourtout \; |\lambda| \geq 1, \tag{II.6}$$

on peut voir

$$\rho(x) \leq \lambda \rho(\frac{x}{\lambda}) \leq \lambda < 1.$$

D'une part si, $\rho(x) < 1$ alors par la continuité de ρ, il existe $\gamma > 0$ ou $\rho(\gamma x) < 1$, puisque

$$\|\gamma x\|_\rho \leq 1 \; et \; \|x\|_\rho \leq \frac{1}{\gamma} < 1.$$

L'équivalence de $\|x\|_\rho = 1$ et $\|x\|_\rho = 1$ est immédiate.
Soit $\|x_k\|_\rho \to 0$ et $\lambda > 0$, alors $\|K\lambda x_k\|_\rho < 1$ pour tout $K > 1$ et pour une large valeur de k, ainsi $\rho(K\lambda x_k) \leq 1$, par conséquent

$$\rho(\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}\rho(K\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}.$$

■

Corollaire II.2
Soit ρ un semimodulaire sur X et $x \in X_\rho$, alors
(i) *Si $\|x\|_\rho \leq 1$, alors $\rho(x) \leq \|x\|_\rho$.*
(ii) *Si $\|x\|_\rho > 1$, alors $\|x\|_\rho < \rho(x)$.*
(iii) *$\|x\|_\rho \leq \rho(x) + 1$.*

Preuve.
(i) Pour $x = 0$ elle est évidente.
Soit $0 < \|x\|_\rho \leq 1$, par le lemme précédent et $\|\frac{x}{\|x\|_\rho}\|_\rho = 1$, on a $\rho(\frac{x}{\|x\|_\rho}) \leq 1$ puisque $\|x\|_\rho \leq 1$ et par l'inégalités (II.5) et (II.6), on a

$$\frac{\rho(x)}{\|x\|_\rho} \leq 1.$$

(ii) Soit $\|x\|_\rho > 1$, alors $\rho(\frac{x}{\lambda}) > 1$ pour $1 < \lambda < \|x\|_\rho$ et par (II.5) et (II.6), on a

$$\frac{\rho(x)}{\lambda} > 1, \text{ puisque } \lambda \text{ est arbitraire } \rho(x) \geq \|x\|_\rho.$$

(iii) Elle est immédiatement par (ii). ■

0.3 Espace Idéal

Les espaces idéaux sont une classe très générale des espaces normés des fonctions mesurables, qui inclut les espaces de Lebesgue, d'Orlicz, de Lorentz et de Marcinkiewicz, parfois ces espaces s'appellent également les espaces fonctionnels de Banach ou les espaces de Köthe. [1]

1. G.M.H. Köthe (1905-1989), mathématicien Autrichien.

1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Les espaces de Lebesgue [2] $L^p(\Omega)(1 \leq p \leq \infty)$ joue un rôle principal dans beaucoup de branches d'analyse mathématique, il y a d'autres classes des espaces de Banach des fonctions mesurables qui sont également d'intérêt. Les plus grandes classes des espaces d'Orlicz et des espaces de Lorentz, par exemple, sont d'importance intéresser . Il y a une littérature considérable traitant chacune de ces classes. Ce terrain d'entente fournit la base pour la théorie abstraite des espaces fonctionnels de Banach.
Ceci tient compte d'un effet fructueux entre les techniques théories fonctionnelles-analytiques et de mesure.
Soient Ω un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et p un nombre réel positif.
On note par $L^p(\Omega)$ les classes de toute les fonctions mesurables u définies dans Ω, où

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty.$$

La fonctionnelle $\|.\|_p$ définie par

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$.

2 Espace de Lebesgue à exposons variable

Les espaces de Lebesgue à exposant variables sont apparus dans la littérature pour la première fois déjà dans un article 1931 par Orlicz. Le champ des espaces de fonctions à exposant variables a connu une croissance explosive ces dernières années. La référence standard pour les propriétés de base c'est l'article [42] par Kováčik et Rákosník. (Les mêmes propriétés ont été dérivées par différentes méthodes par Fan et Zhao [27], dix (10) ans après). Quelques aperçus du champ existent voir aussi, par exemple [22].
Le but de ce paragraphe est de suggérer des analogues propriétés des espaces de Lebesgue L^p, il est clair que nous ne puissions pas simplement remplacer p par $p(x)$ dans la définition

2. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), mathématicien Français.

usuel de la norme dans le L^p. Cependant, les espaces de Lebesgue peuvent être considérés comme cas particuliers des espaces d'Orlicz appartenant à une famille plus nombreuse des soi-disant espaces modulaires.
Si la fonction p est p.p fini dans Ω, alors $L^{p(x)}$ est un cas particulier de les espaces d'Orlicz-Musielak.

2.1 Définitions et propriétés

Définition II.5
Soit Ω un ensemble de $\mathbb{R}^n$ avec $|\Omega| > 0$, on note par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(\Omega) = \{\textit{Tous les fonctions mesurables } p : \Omega \to [1, +\infty]\} \\
&\Omega_1^p = \Omega_1 = \{x \in \Omega; p(x) = 1\}. \\
&\Omega_\infty^p = \Omega_\infty = \{x \in \Omega; p(x) = \infty\}. \\
&\Omega_0^\infty = \Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_\infty).
\end{aligned} \tag{II.7}$$

Remarque II.3
- *Si* $|\Omega_0| > 0,\ p_* = ess \inf_{\Omega_0} p(x),\ p^* = ess \sup_{\Omega_0} p(x)$.
- *Si* $|\Omega_0| = 0,\ p_* = p^* = 1$.

$c_p = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|$ *et* $r_p = c_p + 1/p_* - 1/p^*$.

Définition II.6
Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit la fonction ρ_p et $\|.\|_p$ par

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + ess \sup_{\Omega_\infty} |f(x)|. \tag{II.8}$$

$$\|f\|_p = \inf \{\lambda > 0 : \rho_p(f/\lambda) \leq 1\}. \tag{II.9}$$

$\rho_p(f)$ et $\|f\|_p$ s'appelle modulaire et la norme de l'espace (respectivement).

Définition II.7
L'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$, c'est les classes de toutes les fonctions u, telles que

$$\rho_p(\lambda u) < \infty, \quad \textit{pour } \lambda > 0$$

Lemme II.3
1- Si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors on a

$$\|f\|_{p(.)} \leq 1 \text{ équivalent à } \rho_{p(.)}(f) \leq 1.$$

2- Pour $f \in L^{p(.)}(\Omega)$, on a

(i) Si $\|f\|_{p(.)} \leq 1$, alors $\rho_{p(.)}(f) \leq \|f\|_{p(.)}$.

(ii) Si $1 < \|f\|_{p(.)}$, alors $\|f\|_{p(.)} \leq \rho_{p(.)}(f)$.

Preuve.
La démonstration de cet lemme est basée sur le lemme II.2 et le corollaire II.2. ■

Remarque II.4
Si la fonction $p(x) = p = cst$, donc la norme coïncide avec la norme usuelle de l'espace $L^p(\Omega)$, autrement dit

$$L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

2.2 Inégalités auxiliaires

Théorème II.5 ***(Inégalité de Hölder)***
Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour toute fonction f dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et pour toute $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a l'inégalité suivante

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq r_p \|f\|_{p} . \|g\|_{p'}$$

avec la constante r_p définie par : $r_p = c_p + \frac{1}{p_*} - \frac{1}{p^*}$.

Preuve.
Evidemment, on peut supposer $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_{p'} \neq 0$ *et* $|\Omega_0| > 0$ pour $x \in \Omega$ p.p, on trouve $1 < p(x) < \infty$, $|f(x)| < \infty$ *et* $|g(x) < \infty$.
Posons $a = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$, $b = \frac{g(x)}{\|g\|_p}$, $p = p(x)$ *et* $p'(x) = p'$, puis en utilisant l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

on intègre sur Ω_0 et on utile la relation

$$\rho_p(\frac{f}{\|f\|_p}) \leq 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} dx &\leq \sup_{\Omega_0} \text{ess} \frac{1}{p(x)} \rho_p(\frac{f}{\|f\|_p}) + \sup_{\Omega_0} \text{ess} \frac{1}{p'(x)} \rho_p(\frac{g}{\|g\|_{p'}}) \\ &\leq 1 + \frac{1}{p_*} + \frac{1}{p^*},\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f(x)g(x)dx &\leq (1 + \frac{1}{p_*} + \frac{1}{p^*})\|f\|_p \|f\|_p^{'} \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|f\chi_{\Omega_1}\|_1 \|g\chi_{\Omega_1}\|_\infty \\ &+ \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_1 \\ &\leq r_p \|f\|_p . \|g\|_{p'}.\end{aligned}$$

■

Théorème II.6
Soit l'ensemble

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_p^0 < \infty \right\}.$$

Pour $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a l'inégalité suivante

$$c_p^{-1} \|f\|_p \leq \|f\|_p^0 \leq r_p \|f\|_p$$

Preuve. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.
Si $\rho_{p'}(g) \leq 1$ et l'inégalité de Hölder vérifiée, alors

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq r_p \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

d'où la deuxième inégalité et par conséquent $\|f\|_p^0 < \infty$.
Au contraire, soit $\|f\|_p^0 < \infty$, puisque

$$\|\frac{f}{c_p\|f\|_p^0}\|_p^0 = c_p^{-1} \leq 1,$$

en utilisant la relation (ii) du lemme II.3, alors

$$\rho_p\left(fracfc_p\|f\|_p^0\|_p^0\right) \leq c_p^{-1}c_p = 1,$$

d'où la première inégalité et $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. ∎

2.3 Complétude de l'espace

Théorème II.7
L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach.

Preuve. Soit $\{f_k\}$ une suite de fonctions de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega)$, et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|dx < \varepsilon, \tag{II.10}$$

pout tout $m, n \geq n_0$ et pour toute fonction $g(x)$, telle que $\rho_{p'}(g) \leq 1$.
On décompose Ω en des sous ensembles disjoints Ω_k de mesure finie et on définit les fonctions

$$g_k = (1 + |\Omega_k|)^{-1}\chi_{\Omega_k}, \;\; k \in \mathbb{N},$$

alors

$$\rho_{p'}(g) \leq \int_{\Omega_k} (1 + |\Omega_k|)^{-p(x)}dx + (1 + |\Omega_k|)^{-1} \leq 1.$$

On remplace g par g_k dans (II.10), on trouve

$$\int_{\Omega_n} |f_m(x) - f_n(x)|dx \leq \varepsilon(1 + |\Omega_n|), \;\; m, n \geq n_0, \;\; k \in \mathbb{N},$$

alors la suite f_n est de Cauchy et convergente dans L^{Ω_k} par induction on trouve des sous suites $f_n^{(k)}$ et des fonctions $f^{(k)} \in L^1(\Omega_k)$, telles que $f_n^{(k)} \to f(x)$ pour $x \in \Omega_n, \;\; k \in \mathbb{N}$ p.p, ainsi

$$f_m^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)\chi_{\Omega_k}(x) = f(x) \ pour \ x \in \Omega \ p.p.$$

On remplace f_m par $f_m^{(m)}$ dans (II.10) et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega |f(x) - f_n(x)||g(x)|dx \leq \sup_m \int_\Omega |f_m^{(m)}(x) - f_n(x)||g(x)|dx \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_0$ et tout g, avec $\rho_{p'}(g) \leq 1$. Par conséquent

$$\|f - f_n\|_p^0 \leq \varepsilon.$$

■

Remarque II.5

Si $|\Omega| = 0$, alors l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est l'espace d'Orlicz.

Corollaire II.3

1- L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est l'espace $L^{p'(x)}(\Omega)$ ssi $p \in L^\infty(\Omega)$.

2- L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace reflexif ssi

$$1 < ess \inf_\Omega p(x) \leq ess \sup_\Omega p(x) < \infty$$

Théorème II.8

Soit $0 < |\Omega| < \infty$ et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$L^{q(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega), \ ssi \ p(x) \leq q(x), x \in \Omega \ p.p \tag{II.11}$$

Preuve.

Soit $p(x) \leq q(x), \ x \in \Omega \ p.p$, alors $\Omega_\infty^p \subset \Omega_\infty^q$, donc il suffit de démontrer que

$$\|f\|_p \leq |\Omega| + 1, \tag{II.12}$$

pour toute fonction $f \in L^{q(x)}$ *avec* $\|f\|_q \leq 1$ et la relation (ii) du lemme II.3, on trouve

$$\rho_q(f) = \int_{\Omega \backslash \Omega_\infty^q} |f(x)|^{q(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty^q} \text{ess}\, |f(x)| \leq 1,$$

en particulier $|f(x)| \leq 1, \ x \in \Omega_\infty^q$ *p.p.* Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\rho_p(f) &\leq \left| \{x \in \Omega \backslash \Omega_\infty^q; \ |f(x)| \leq 1\} + \int_{\Omega \backslash \Omega_\infty^q} |f(x)|^{q(x)} dx \right| \\
&+ |\Omega_\infty^q \backslash \Omega_\infty^p| + \sup_{\Omega_\infty^q} \text{ess}\, |f(x)| \\
&\leq |\Omega| + \rho_q(f) \\
&\leq |\Omega| + 1.
\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de ρ_p, on obtient

$$\rho\left(\frac{f}{|\Omega| + 1}\right) \leq (|\Omega| + 1)^{-1} \rho_p(f) \leq 1,$$

alors (II.12) est vérifiée.
Maintenant on suppose le contraire, c'est-à-dire $p(x) \leq q(x)$ n'est vérifiée, alors il existe un sous ensemble Ω^* de Ω, tel que $|\Omega^*| > 0$ et $p(x) > q(x), \ x \in \Omega^*$.
Depuis $L^{q(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ on construit une fonction $f \in L^{q(x)}(\Omega) \backslash L^{p(x)}(\Omega)$, si

$$|\Omega_\infty^p \cap \Omega^*| > 0, \tag{II.13}$$

alors il existe un ensemble $A \subset \Omega_\infty^p \cap \Omega^*, \ 0 < |A| < \infty$ et un nombre $r \in (1, \infty)$ tels que $1 \leq q(x) \leq r < \infty = p(x)$, pour tout $x \in A$.
Aussi on peut construire l'ensemble A_k, tel que

$$A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k, \ A_k \cup A_j = \emptyset, \ \textit{pour}\ k \neq j, \ |A_k| = 2^{-k}|A|, \ \textit{pour}\ k \in \mathbb{N} \tag{II.14}$$

et on définit la fonction

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{k/r} \chi_{A_k} \ \textit{sur}\ \Omega,$$

alors $\|f\|_p \geq \|f\chi_A\|_\infty = \infty$, mais

$$\begin{aligned}\rho_q(f) = \int_A |f(x)^{q(x)} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \frac{3}{2})^{k/r} dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2})^{k/r} |A_k| \\ &= |A| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4})^{k} = 3|A| = \infty,\end{aligned}$$

i.e., $f \in L^{q(x)}(\Omega)$.
Si la condition (II.13) n'est pas vérifiée, alors $1 \leq q(x) < p(x) < \infty$, pour $x \in \Omega^*$ p.p, et il existe un ensemble $A \subset \Omega^*,\ 0 < |A| < \infty$ et des nombres $a > 0,\ r \in (1, \infty)$, tels que

$$q(x) + a \leq p(x) \leq r,\ pourtout\ x \in A.$$

On peut trouver un ensemble A_k satisfait (II.14) et on définit la fonction

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k k^{-2})^{1/q(x)} \chi_{A_k},\ x \in \Omega,$$

alors

$$\rho_p(f) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k k^{-2} |A_k| = |A| \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty,$$

i.e., $f \in L^{q(x)}(\Omega)$.
D'une part, pour tout $\lambda \in (0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}\rho_p(f) &\geq \lambda^r \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} (2^k k^{-2})^{p(x)/q(x)} dx \\ &\geq \lambda^r \sum_{k=1}^{\infty} (2^k k^{-2})^{1+a/r} |A_k| \\ &= \lambda^r |A| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k/r} k^{-2(1+a/r)} = \infty,\end{aligned}$$

alors que $f \notin L^{q(x)}(\Omega)$. ■

Théorème II.9
Soit $B(x_0, r)$ la boule de centre x_0 et de rayon r inclue dans l'ensemble Ω, et soit p une fonction continue et non constante. Alors il existe une fonction $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, telle que $p(x)$ n'est pas continue au moyenne.

Preuve.
D'après les conditions du théorème, il existe un point $z \in B(x_0, r)$ où p n'est pas atteint avec l'extremum local, alors il existe des suites $x_n, y_n \in B(x_0, r)$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = z \text{ } et \text{ } p(x_n) < p(z) < p(y_n) \text{ } pour \text{ } n \in \mathbb{N}.$$

Par la continuité de la fonction p, alors il existe des nombres $r_n > 0$ tels que

$$p(x) < \frac{1}{2}(p(z) + p(x_n)) < p(z), \;\; x \in B(x_n, r) \tag{II.15}$$

$$p(x) > p(z), \;\; x \in B(y_n, r). \tag{II.16}$$

On pose $q_n = \frac{1}{2}(p(z) + p(x_n))$ et soit les fonctions f_n sur Ω, telles que

$$supp \; f_n \subset B(x_n, r_n), \;\; f_n \in L^{q_n}(B(x_n, r_n)) \backslash L^z(B(x_n, r_n)) \; et \; \|f_n\|_{q_n} = 1.$$

On définit la fonction f par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x),$$

en vertu de (II.15) et le théorème II.8, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|f_n\|_p \;\; & \leq \;\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|f_n\|_{q_n} (|B(x_n, r_n)| + 1) \\ & \leq \;\; 1 + \sup_n |B(x_n, r_n) < \infty. \end{aligned}$$

D'une part, on pose $h_n = y_n - x_n$ et par la relation (II.16) et le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} \|f_{h_n}\|_p \geq \|f_{h_n} \chi_{B(y_n, r_n)}\|_p \;\; & \geq \;\; (1 + |B(y_n, r_n)|)^{-1} \|f_{h_n} \chi_{B(y_n, r_n)}\|_{p(z)} \\ & = \;\; (1 + |B(y_n, r_n)|)^{-1} \|f \chi_{B(x_n, r_n)}\|_{p(z)} = \infty. \end{aligned}$$

Alors $f_{h_n} - f \notin L^{p(x)}$ et puisque $h_n \to 0$, la fonction f n'est pas continue par $p(x)$-moyenne.
■

3 Espace d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz ont été présentés la première fois en 1931 par le mathématicien polonais W.Orlicz et plus tard a été baptisé du nom de lui.
Dans cette section on expose les propriétés générales, de cet espace et on fait une extension des résultats, que nous voyons dans les espaces de Lebesgue.

Fonction complémentaire de N-fonction

Définition II.8
Soit la fonction positive $p(t),\ t > 0$, *continue à droite pour* $t \geq 0$, *croissante est satisfaite la condition (I.3). On definit la fonction* $q(s),\ (s \geq 0)$ *par l'égalité*

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t. \tag{II.17}$$

La fonction q *est dite fonction conjuguée de la fonction* p.

Définition II.9
Si φ *est une N-fonction, alors la fonction conjuguée (duale)* $\psi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, *est définie par*

$$\psi = sup\Big\{xy - \varphi(x)\Big\}.$$

Théorème II.10
Soit φ *une fonction de Young (N-fonction) et* ψ *la fonction conjuguée, alors* ψ *aussi est une fonction de Young.*

Preuve.
1- Pour tout y, la relation $xy - \varphi(x) = 0,\ si\ x = 0\ i.e.,\psi(y) \geq 0$, donc il est trivial que $\psi(0) = 0$.

2- Si $0 \leq y_1 \leq y_2$, alors

$$xy_2 - \varphi(x) \geq xy_1 - \varphi(x),\ pour\ tout\ x$$

implique $\psi(y_2) \geq \psi(y_1)$, alors $\psi \uparrow$.
Par définition, il existe un nombre $0 < x_0 < \infty$, tel que $\varphi(x_0) < \infty$, ainsi

$$\psi(y) \geq x_0 y - \varphi(x_0)\ pour\ tout\ y$$

tend vers ∞, si $y \to \infty$.
Puisque φ est convexe et $\varphi(0) = 0$, la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ croissante vers une valeur positive, lorsque x tend vers l'infini.
On note par m la limite de cette fonction et on suppose que $0 < y < m$, alors

$$xy - \varphi(x) \to -\infty,\ si\ x \to \infty$$

implique que $\psi(y)$ est finie.
3- ψ est convexe, si $0 \leq y_1 \leq y_2 < \infty$ *et* $0 < \lambda < 1$, alors

$$\begin{aligned} x(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) - \varphi(x) &= \lambda x y_1 + x y_2 - \lambda x y_2 - \varphi(x) \\ &= \lambda(xy_1 - \varphi(x)) + (1-\lambda)(xy_2 - \varphi(x)) \\ &\leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2), \forall x \geq 0. \end{aligned} \tag{II.18}$$

On prend le *sup* sur le membre à gauche, on trouve

$$\psi(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2)$$

■

Remarque II.6
Il est facilement de vu que la fonction q possède les mêmes propriétés que la fonction p, elle est positive pour $s > 0$, continue à droite pour $s \geq 0$, croissante et vérifiée les conditions

$$q(0) = 0,\ \lim_{s \to \infty} q(s) = \infty. \tag{II.19}$$

Exemple II.2
Soient M_1 et M_2 deux N-fonctions

1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 0$, *où* $p_1(t) = M_1^{'}(t) = t^{\alpha-1}, (t \geq 0)$, *donc* $q_1(s) = s^{\beta-1}$ $(s \geq 0)$ *avec* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. *Alors la fonction conjuguée est*
$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$
2. $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, *où* $p_2(t) = M_2^{'}(t) = e^t - 1$ $(t \geq 0)$ *donc* $q_2(s) = \ln(s+1)$, $(s \geq 0)$. *Alors la fonction conjuguée est*
$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s)ds = (1 + |v|)\ln(1 + |v|) - |v|.$$

Remarque II.7
1- Il est imposable dans beaucoup des cas trouvé une formule explicite pour déterminer le complémentaire de N-fonction, par exemple, le N-fonction $M(u) = e^{u^2} - 1$, *où* $p(t) = M^{'}(t) = 2te^{t^2}$, *nous ne pouvons pas exprimer q sous la forme explicite.*
2- Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}$, *on passe a la limite si* $\alpha \to 0 \Rightarrow$ *contredit de (II.27)*
ainsi : $M(\alpha u) < \alpha M(u)$, $0 < \alpha < 1$, $u \neq 0$.

Cette inégalité augmente strictement pour des valeurs positives de u
$$\frac{M(u^{'})}{u^{'}} \leq \frac{M(u)}{u},\ 0 < u^{'} < u$$
On note par $M^{-1}(v)$, $(0 \leq v < \infty)$ l'inverse de la N-fonction $M(u)$.
Cette fonction est convexe puisque, en vertu à l'inégalité (I.1), nous avons
$$M^{-1}(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \geq \alpha M^{-1}(v_1) + (1-\alpha)M^{-1}(v_2),\ pour\ v_1, v_2 \geq 0$$

La monotonicité de la dérivée droite $p(u)$ pour N-fonction $M(u)$ implique l'inégalité

$$\begin{aligned} M(u)+M(v) &= \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_0^{|v|} p(t)dt \\ &\leq \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_{|u|}^{|u+v|} p(t)dt \\ &= \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t)dt = M\left[|u|+|v|\right]. \end{aligned} \tag{II.20}$$

On suppose que $a = M(u), b = M(v)$ sont des nombres non négatifs arbitraires, d'après la relation (II.20), on a

$$M^{-1}(a+b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b).$$

Inégalité de Young

Nous utilisons la ligne du raisonnement habituellement utilisée dans la dérivation de l'inégalité de Hölder, géométriquement il est clair que l'inégalité suivante est vérifiée

$$uv \leq M(u) + N(v) \tag{II.21}$$

Remarque II.8

On déduit d'après (II.21) l'inégalité

$$N(v) \geq uv - M(u),$$

et par conséquent on a

$$N(v) = \max_{u \geq 0}\left[u|v| - M(u)\right]. \tag{II.22}$$

La formule (II.22) est une définition de N-fonction complémentaire de M.

3.1 La condition Δ_2

Définition II.10

On dit que la N-fonction $M(u)$ satisfaite la condition Δ_2, s'il existe une constante $k > 0$

telle que

$$M(2u) \leq kM(u), \ (u \geq u_0) \tag{II.23}$$

pour une valeur positive de u_0.

Remarque II.9

On le voit facilement que nous avons toujours $k \geq 2$ *puisque, en vertu (I.5), on a*

$$M(2u) > 2M(u) \text{ pour } u \neq 0.$$

Exemple II.3

1- La fonction $M(s) = |s|\ln(|s|+1)$ *est satisfaite la condition* Δ_2. *En effet, on peut vérifier aisément que* M *est une N-fonction et on a :* $k = 4$.
2- On a aussi, la fonction $M(s) = \frac{1}{p}|s|^p$, *pour* $p > 1$ *est vérifiée la condition* Δ_2. *En effet, on a* $k = 2^p$

Définition II.11

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction de Young.*
On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition ∇_2, *noté* $\varphi \in \nabla_2$, *si*

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2l}\varphi(x), \ x \geq x_0 \geq 0,$$

pour $l > 1$.

Définition II.12

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction de Young.*
1- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition Δ', *noté* $\varphi \in \Delta'$, *s'il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\varphi(xy) \leq c\varphi(x)\varphi(y), \ x, y \geq x_0 \geq 0.$$

2- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition ∇', *noté* $\varphi \in \nabla'$, *s'il existe une constante* $b > 0$, *telle que*

$$\varphi(x)\varphi(y) \leq \varphi(bxy), \ x, y \geq y_0 \geq 0.$$

Définition II.13
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction de Young.*
1- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition Δ^3*, noté* $\varphi \in \Delta^3$*, pour une constante* $b > 0$*, alors*
$$x\varphi(x) \leq \varphi(bx), \ x \geq x_0 \geq 0.$$
2- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition ∇^3*, noté* $\varphi \in \nabla^3$*, pour une constante* $k > 0$*, alors*
$$\varphi^{-1}(x)\varphi(x) \leq kx^2, \ x \geq x_0 \geq 0.$$
L'analyse structurale de base des espaces de fonction sur les espaces de mesure arbitraire dont les fonctions de Young est le but de cette section. Ce sont les espaces d'Orlicz, et on montre que sont des espaces de Banach, les espaces Orlicz sont équivalents avec les normes de gauge, leurs propriétés de séparabilité et des sous-espaces ayant des fonctions simples denses.

3.2 Les classes des espaces d'Orlicz

Nous d'abord présenterons et étudierons la structure des espaces d'Orlicz sur un espace de mesure arbitraire, et nous spécialisons ensuite pour obtenir des résultats particuliers. Soit l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) où Ω un certain ensemble de points et Σ est un σ-algèbre.

Remarque II.10
1- Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction de Young, où la fonction de Young permette de que, pour un certain* $x_0 \in \mathbb{R}$*, si la fonction* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *est measurable, alors* $\Phi(f) =: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *est measurable.*
2- D'après la définition de la fonction de Young, c'est une extension de la fonction réelle de Borel.

Définition II.14
L'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*, telles que*
$$\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < \infty,$$
est noté par $\widetilde{L}^\varphi(\mu)$*.*

Remarque II.11

1- $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz.

2- Les classes d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi}$ ne sont pas des espaces vectoriels.

Exemple II.4

On considère $\Omega =]0,1[$ et $\phi(t) = e^t$, alors la fonction $u(x) = -\frac{1}{2}\ln x$ appartient à $\widetilde{L}^{\varphi}$, mais la fonction $v(x) = 2u(x) = -\ln x$, n'appartient pas.

Théorème II.11

(i) L'espace $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est absolument convexe. i.e. si $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ et α, β des scalaires, tels que
$|\alpha| + |\beta| \leq 1$, alors

$$\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu).$$

Aussi si $h \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ et $|f| \leq |h|$, telle que f est measurable, alors $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$

(ii) L'espace $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est linéaire (i.e. espace vectoriel) si $\Phi \in \Delta_2$, globalement quand $\mu(\Omega) = \infty$ et localement si $\mu(\Omega) < \infty$.

Preuve.

(i) Soit $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Alors par monotonicité et convexité de Φ, pour $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(|\alpha f + \beta g|) \leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) &\leq \gamma\Phi(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|) \\ &\leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|), \end{aligned} \tag{II.24}$$

de même le membre droit est intégrable. Par conséquent $\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Le deuxième rapport est clair, puisque $\Phi(|f|) \leq \Phi(|h|)$.

(ii) Pour la linéarité, il suffit de vérifier que $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, puis $nf \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour tout nombre entier n et par conséquent aussi pour $\alpha > 0$, $\alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Par la dernière partie de (i), on a

$$af_1 + bf_2 = \gamma(\frac{a}{\gamma}f_1 + \frac{b}{\gamma}f_2) \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu), \gamma = |a| + |b| > 0,$$

pour tout $f_i \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu),\ i = 1, 2$, par (i).
Ainsi nous devons montrer seulement $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour toute $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$. Si Φ est satisfaite la condition Δ_2, on trouve $\mu(\Omega) = +\infty$,

$$\Phi(2|f|) \leq k\Phi(|f|),\ k > 0,$$

par conséquent $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ avec $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Le cas $\mu(\Omega) < \infty$, alors $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, pour $x \geq x_0 \geq 0$.
Maintenant soit

$$f_1 = \begin{cases} f, & |f| \leq x_0 \\ 0, & autre \end{cases}$$

On pose $f_2 = f - f_1$, alors $f = f_1 + f_2$ et

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + k\Phi(|f_2|).$$

Par conséquent

$$\int_\Omega \Phi(2|f|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(\Omega) + k\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < \infty$$

donc $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, ceci montre que $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est un espace linéaire.

■

Définition II.15
Soit $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble, présenté dans la définition II.14, sur un espace de mesure arbitraire (Ω, Σ, μ). Alors l'espace $L^{\varphi}(\mu)$ de toute fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour $\alpha > 0$, s'appelle l'espace d'Orlicz. Autrement dit

$$L^{\varphi}(\mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}},\ measurable\ ; \int_\Omega \Phi(\alpha f)d\mu < \infty \ pour\ \alpha > 0\} \tag{II.25}$$

Nous inclurons maintenant deux propriétés supplémentaires liées aux espaces classiques de Lebesgue $L^1(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$, dépendant la détermination de la théorie de l'espace d'Orlicz.

Proposition II.1

(a) Soit

(i) $L^1 = \cup\{\widetilde{L}^{\varphi}(\mu) : \Phi$ *portée sur toute N-fonctions*$\}$,

(ii) $L^\infty = \cap\{\widetilde{L}^{\varphi}(\mu) : \Phi$ *portée sur toute N-fonctions*$\}$.

(b) Si (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré et* (Φ, Ψ) *couple de N-fonctions complémentaire, alors*

$$L^1(\mu) = \widetilde{L}^{\psi}.\widetilde{L}^{\varphi} \text{ où } \widetilde{L}^{\varphi}.\widetilde{L}^{\psi} = \{f.g : f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu),\ g \in \widetilde{L}^{\psi}\}. \tag{II.26}$$

Preuve.
Pour la preuve voir [71]. ■

Remarque II.12
La théorie classique de L^p *indique que la partie (a) de la proposition ci-dessus ne se tient plus (no longer holds), si les fonctions* Φ *de Young sont restrictions à* $\phi(x) = |x|^p,\ 1 < p < \infty$.

Dans le reste de cette thèse, Ω est un ensemble borné, fermé dans l'espace euclidien de dimension fini, nous considérons la mesure de Lebesgue habituel. Nous notons que la majorité des assertions et les constructions présentées ci-dessous, leur validité pour le cas quand nous considérons un ensemble abstrait borné est fini.

Définition II.16
Soit $\Phi(u)$ *une N-fonction. On note par* $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$ *la classe de ces fonctions à valeurs réelles, définie sur* Ω*, par*

$$\rho(u; \Phi) = \int_\Omega \Phi[u(x)]d\mu < \infty.$$

Remarque II.13
1- Les fonctions qui est différentes seulement sur un ensemble de la mesure zéro, noteront soient considérées distinct.
2- La classe $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$ *s'appelle* ***classe d'Orlicz****, nous écrirons* $\widetilde{L}^{\varphi}$ *au lieu de* $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$.
3- Toutes les fonctions bornées, mais non toutes les fonctions sommables, appartiennent à $\widetilde{L}^{\varphi}$.
4- On le voit facilement que chaque fonction dans la classe $\widetilde{L}^{\varphi}$ *est sommable.*

Proposition II.2

Chaque fonction $u(x)$ qui est sommable sur Ω appartenir à une certaine classe d'Orlicz.

Preuve. On considérons les ensembles $\Omega_n = \Omega\{n-1 \leq |u(x)| < n\}$. Il est clair que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \text{ mes } \Omega_n \leq \int_{\Omega} |u(x)|dx + \text{mes } \Omega < \infty.$$

Comme est connu, on peut construire une suite croissante α_n telle que, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n n \text{ mes } \Omega_n < \infty. \tag{II.27}$$

On pose

$$p(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \alpha_n, & \text{si } n \leq t < n+1 (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

La fonction $p(t)$ possède toutes les propriétés, pour que

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

est une N-fonction. Puisque

$$\Phi(n) = \int_0^n p(t)dt \leq n\alpha_n$$

, nous avons, en vertu à l'équation (II.25), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi[u(x)]dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega_n} \Phi[u(x)]dx \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) \text{ mes } \Omega_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n n \text{ mes } \Omega_n < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$. ■

Comparaison de classes

Les Classes d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi_1}$ et $\widetilde{L}^{\varphi_2}$, qui sont déterminées par des N-fonctions distincte $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$, est généralement distincte.

Théorème II.12

L'inclusion suivant

$$L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi_2}, \tag{II.28}$$

est vérifié si et seulement si, s'il existe des constantes positives u_0 et a telles que

$$\varphi_2(u) \leq a\varphi_1(u), \ (u \geq u_0) \tag{II.29}$$

Preuve.

La condition suffisante de (II.29) est évidente pour une fonction arbitraire $u(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$, alors on a

$$\begin{aligned} \rho(u;\varphi_2) &= \int_\Omega \varphi_2[u(x)]dx \\ &\leq \varphi_2(u_0) \text{ mes } \Omega + \int_\Omega \varphi_1[u(x)]dx < \infty. \end{aligned}$$

On suppose que la condition (II.29) n'est pas vérifiée, alors on identifier une suite de nombres u_n croissante, on peut trouver telle que

$$\varphi_2(u_n) > 2^n \varphi_1(u_n), \ n = 1, 2, ...$$

On subdivisé l'ensemble Ω en des sous ensembles disjoints Ω_n, tels que

$$mes \ \Omega_n = \frac{\varphi_1(u_n) mes \ \Omega}{2^n \varphi_1(u_n)}, \ n = 1, 2, ... \tag{II.30}$$

et on pose

$$u(x) = \begin{cases} u_n(x), \ si \ x \in \Omega_n \\ 0, \ si \ x \in \cup_{i=1}^n \Omega_n \end{cases}$$

Donc la fonction $u(x)$ est dans L^{φ}, puisque

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varphi_1(u(x))dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \varphi_1(u(x))dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(u_n) mes\ \Omega_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(u_n) mes\ \Omega}{2^n} < \infty,\end{aligned}$$

mais $u \in L^v phi_2$, et en vertu (II.30), on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varphi_2(u(x))dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} \varphi_1(u(x))dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(u_n) mes\ \Omega_n \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(u_n) mes\ \Omega = \infty.\end{aligned}$$

■

Remarque II.14

En déduit de théorème ci-dessus que les deux fonctions φ_1 et φ_2 déterminer la même classe d'Orlicz, si et seulement si, s'il existe des constantes positives a, b et u_0 telles que

$$a\varphi_2(u) \leq \varphi_1(u) \leq b\varphi_2(u), \ \ (u \geq u_0) \tag{II.31}$$

3.3 La structure de l'espace d'Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$

D'après l'inégalité de Jensen la classe d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi}$ est un ensemble convexe, toutes les fois que la classe $\widetilde{L}^{\varphi}$ contient les deux fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ puis il contient également le segmentent entier

$$u_{\alpha}(x) = \alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

En effet, si $u_1(x), u_2(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$, alors

$$\begin{aligned}\rho(u_\alpha; \Phi) &= \int_\Omega \Phi[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)]dx \\ &\leq \alpha\rho(u_1; \Phi) + (1-\alpha)\rho(u_2; \Phi) < \infty.\end{aligned}$$

La norme d'Orlicz

Définition II.17

Soit (Ω, Σ, σ) un espace mesuré.
Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et (φ, ψ) couple complémentaire, de N-fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz $\|.\|_\varphi : u \mapsto \|u\|_\varphi$, par

$$\|u\|_0 = \|u\|_\varphi^O = \sup\left\{\int_\Omega |uv|d\mu : \int_\Omega \psi(v)d\mu \leq 1\right\}.$$

Les assertions juste prouvées nous permettrons de présenter la norme d'Orlicz dans l'ensemble L^φ à l'aide de l'égalité suivante :

$$\|u\|_\varphi = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|. \tag{II.32}$$

D'après la définition la norme ci-dessus, est que satisfaite les axiomes habituels :
1$-$ $\|u\|_\varphi = 0$ ssi $u(x) = 0$ p.p ;
2$-$ $\|\alpha u\|_\varphi = \alpha\|u\|_\varphi$;
3$-$ $\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi$.
L'ensemble L^φ devient un espace linéaire normé qui s'appel l'espace d'Orlicz.

Proposition II.3

La formule (II.32) définie une norme dans L^φ.

Preuve.

• Soit $\|u\|_\varphi = 0$ et soit Ω un sous ensemble de Ω, tel que $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
Soit ψ une fonction de Young (N-fonction), alors $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(t) = 0$ et par conséquent il existe $k > 0$, tel que $\psi(k) < \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$.

On définit la fonction v par

$$v(x) = \begin{cases} x, & si \ x \in \Omega_n \\ 0, & si \ x \in \Omega \backslash \Omega_1 \end{cases}$$

Alors

$$\rho(v;\psi) = \int_\Omega \psi(|v(x)|)dx = \int_{Omega_1} \psi(k)dx < 1,$$

et par la définition da la norme d'Orlicz, on a

$$\|u\|_\varphi \geq \int_\Omega |u(x)|v(x)dx = k\int_\Omega |u(x)|dx,$$

et $\|u\| = 0$ implique $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. Puisque $\Omega_1 \subset \Omega$ était arbitraire, $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.
Soit $u, w \in L^\varphi(\Omega)$ i.e., $\|u\|_\varphi < \infty$, $\|w\|_\varphi < \infty$ et soit $c \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \bullet \|cu\|_\varphi = \sup_v \int_\Omega |cu(x)v(x)|dx &= |c| \sup_v \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \\ &= |c|\|u\|_\varphi < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \|u+w\|_\varphi = \sup_v \int_\Omega |(u+w)(x)v(x)|dx &= \\ &= \sup_v \int_\Omega |u(x)+w(x)||v(x)|dx \\ &\leq \sup_v \int_\Omega |u(x)||v(x)|dx + \sup_v \int_\Omega |w(x)||v(x)|dx \\ &= \|u\|_\varphi + \|w\|_\varphi. \end{aligned}$$

■

Lemme II.4
Soit φ une fonction de Young et soit $u \in L^\varphi$, telle que $\|u\|_\varphi \neq 0$, alors

$$\int_\Omega \varphi\left(\frac{|ux|}{\|u(x)\|}\right) dx \leq 1.$$

Preuve.
Si $u \in L^{\varphi}$, alors

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx = \begin{cases} \|u\|_{\varphi}, \ si \ \rho(v, \psi) \leq 1 \\ \|u\|_{\varphi}\rho(v, \psi), \ si \ \rho(v, \psi) \geq 1. \end{cases} \tag{II.33}$$

La première partie de l'égalité ci-dessus est immédiatement de la définition de la norme d'Orlicz.
Pour la deuxième partie nous utilisons la définition de N-fonction, nous avons
$\psi(\alpha t) \leq \alpha\psi(t)$, pour $t \geq 0$ et $\alpha \in (0, 1)$
Posons maintenant, $t = |v(x)|, \ \alpha = 1/\rho(v, \psi)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_{\Omega} \psi\left(\frac{1}{\rho(v, \psi)}|v(x)|\right) dx \leq \frac{1}{\rho(v, \psi)}\rho(v, \psi) = 1$$

et par la définition de la norme d'Orlicz, on a

$$\int_{\Omega} |u(x)| \left(\frac{|v(x)|}{\rho(v, \psi)}\right) dx \leq \|u\|_{\varphi}$$

ce qui démontre la deuxième partie de l'inégalité. ■

Théorème II.13
On suppose que $u(x) \in L^{\varphi}$, *alors*

$$\sup_{\rho(v;\psi)\leq 1} |(u, v)| = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1} \left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| < \infty.$$

Preuve.
On suppose que cette assertion n'est vraie, alors on peut trouver une fonction $u_0(x) \in L^{\varphi}$ et une suite de fonctions $v_n(x) \in L^{\varphi}, \ \rho(v_n, \psi) \leq 1$, telle que

$$\int_{\Omega} u_0(x)v_n(x)dx > 2^n, \ n = 1, 2, ... \tag{II.34}$$

On considère la suite de fonctions est croissante

$$g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_n(x), \;\; n = 1, 2, ...$$

En vertu de la convexité de la N-fonction $\psi(u)$, on a

$$\rho(g_n, \psi) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(v_n, \psi) < 1,$$

et en vertu de (II.34), alors

$$\int_\Omega u_0(x) g_n(x) \geq n, \;\; n = 1, 2, ... \tag{II.35}$$

la suite de fonctions $g_n(x)$ est monotone ainsi converge presque par tout sur Ω vers la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k(x).$$

Puisque la suite de fonctions $\psi(g_n(x))$ et aussi croissante, on passe à la limite et en vertu du théorème de Levi [3], alors

$$\int_\Omega \psi(g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(g_n(x))dx \leq 1,$$

alors la fonction $g(x) \in L^\psi$.

La monotonicité de la suite de fonctions sommables $u_0(x)g_n(x)$ convergent presque par tout vers la fonction $u_0(x)g(x)$, donc en vertu du théorème de Levi et (II.35), on obtient

$$\int_\Omega u_0(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_0(x)g_n(x)dx = \infty.$$

Contradiction, puisque $u_0(x) \in L^\varphi$. ∎

3. Beppo Levi (1875-1961), mathématicien Italien.

Remarque II.15

Une propriété évidente de la norme. Si

$$u_1(x), u_2(x) \in L^{\varphi} \text{ et } |u_1(x)| \leq |u_2(x)|$$

presque partout sur Ω*, alors* $\|u_1\|_{\varphi} \leq \|u_2\|_{\varphi}$.

Exemple II.5

Considérons le cas de l'espace L^{φ} *déterminé par la N-fonction*

$$\varphi(u) = |u|^{\alpha}/\alpha, \ \ \alpha > 1.$$

La N-fonction complémentaire de φ *est,*

$$\psi(v) = |v|^{\beta}/\beta, \quad \text{avec } 1/\alpha + 1/\beta = 1$$

Soit $u_1(x) \in L^{\varphi}$*, alors*

$$\|u_1\|_{\alpha} = \left(\int_{\Omega} |u_1|^{\alpha} dx\right)^{\alpha} = 1. \tag{II.36}$$

En vertu du l'inégalité du Hölder, pour une fonction arbitraire $v(x) \in L^{\psi}$ *satisfaite la condition* $\rho(v;\psi) \leq 1$*, on trouve*

$$\left|\int_{\Omega} u_1(x)v(x)dx\right| \leq \left(\int_{\Omega} |u_1(x)|^{\alpha} dx\right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\beta} dx\right)^{1/\beta} \leq \beta^{1/\beta},$$

de sorte que

$$\|u_1\|_{\varphi} = \sup_{\rho(v;\psi)} \left|\int_{\Omega} u_1(x)v(x)dx\right| \leq \beta^{1/\beta}. \tag{II.37}$$

D'une part, pour la fonction $v_0(x) = \beta^{1/\beta}|u_1|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} u_1(x)$*, ce qui satisfaite la condition* $\rho(v;\psi) = 1$*, on trouve*

$$\int_{\Omega} u_1(x)v_0(x)dx = \beta^{1/\beta} \int_{\Omega} |u_1(x)|^{\alpha} dx = \beta^{1/\beta}.$$

De ceci et (II.37) si on regarder que $\|u_1\|_{\varphi} = \beta^{1/\beta}$.

Maintenant on suppose que $u(x)$ *est une fonction arbitraire dans* L^{φ}*, la condition (II.36)* *est vérifiée pour la fonction* $u_1(x) = u(x)/\|u\|_\alpha$*. Donc*

$$\|u\|_M = \beta^{1/\beta}\left(\int_\Omega |u|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}.$$

Ainsi, la norme d'Orlicz définie dans l'espace L^φ *est différente de la norme habituelle dans l'espace* L^α *par une constante multiplicateur.*

La norme de Luxemburg

L'ensemble L^φ peut être transformé en espace de Banach à l'aide des normes distinctes de la norme présentée ci-dessus.

Considérerons une telle norme qui a été étudiée en détail par Luxembourg ([70], [25]).

Définition II.18

Soient φ *une fonction de Young et* u *une fonction mesurable définie sur* Ω*, le nombre*

$$\|u\|_1 = \|u\|_\varphi^L = \inf\left\{k > 0; \int_\Omega \varphi\left(\frac{1}{k}|ux)|\right) dx \leq 1\right\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de u*.*

Remarque II.16

On peut noter, par

$$\|u\|_1 = \inf k, \tag{II.38}$$

où le minimum est sur tout $k > 0$*, tel que*

$$\rho(\frac{u}{k};\varphi) = \int_\Omega \varphi\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leq 1. \tag{II.39}$$

La norme de Amemiya

Définition II.19

Soient φ *une fonction de Young et* u *une fonction mesurable définie sur* Ω*, le nombre*

$$\|u\|_2 = \|u\|_\varphi^A = \min_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_\Omega \varphi[ku(x)]dx\right).$$

est appelé la norme de Amemiya de u*.*

Théorème II.14

Soit $\varphi(u)$ une N-fonction arbitraire, avec $u(x) \in L^{\varphi}$, alors la formule

$$\|u\|_{\varphi} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi[ku(x)]dx\right) \tag{II.40}$$

est valide.

Preuve.

Soit $u(x)$ une fonction arbitraire dans L^{φ}. On suppose que les fonctions $u_n(x)$ est définies par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} u(x), \ si \ |u(x)| \leq n \\ 0, \ si \ |u(x)| > n \end{cases}$$

et

$$\|u_n\|_{\varphi} = \frac{1}{k_n}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(k_n u_n(x))dx\right) \tag{II.41}$$

où

$$\int_{\Omega} \psi(p(k_n|u_n(x)|))dx = 1,$$

alors k_n n'est pas croissante

$$\frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(k_n u_n(x))dx\right) = \|u_n\| \leq \|u\|_{\varphi}.$$

Par conséquent, la suite k_n converge vers un nombre positif k^*. Soit $\varepsilon > 0$, en vertu à l'équation (II.41), on a

$$1 + \int_{\Omega} \varphi(k_n u_n(x))dx = k_n\|u_n\|_{\varphi} < (k^* + \varepsilon)\|u\|_{\varphi},$$

pour n assez grand, on passe à la limite (lemme de Fatou), on obtient

$$1 + \int_{\Omega} \varphi(k^* u(x))dx \leq \|u\|_{\varphi}(k^* + \varepsilon),$$

et pour que ε est arbitraire, alors

$$\frac{1}{k^*}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(k^* u(x))dx\right) \leq \|u\|_{\varphi}.$$

Maintenant, on construire une N-fonction φ_1 avec leur dérivée est continue, telle que

$$\varphi(u) \leq \varphi_1(u) < \varphi((1+\varepsilon)u), \; u > 0,$$

donc $L^{\varphi} = L^{\varphi_1}$ et

$$\|u\|_{\varphi} \leq \|u\|_{\varphi_1} \leq (1+\varepsilon)\|u\|_{\varphi}, \tag{II.42}$$

de même

$$\begin{aligned}\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(ku(x))dx\right) &\leq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi_1(ku(x))dx\right) \\ &\leq (1+\varepsilon) \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(ku(x))dx\right),\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)}\|u\|_{\varphi} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(ku(x))dx\right) \leq \|u\|_{\varphi_1},$$

et par aussi (II.42), on a

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\|u\|_{\varphi} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_{\Omega} \varphi(ku(x))dx\right) \leq (1+\varepsilon)\|u\|_{\varphi},$$

donc la formule (II.40) est valide pour la fonction $u(x)$. ■

Théorème II.15
Soit $u \in L^{\varphi}(\Omega)$, alors

$$\|u\|_1 \leq \|u\|_0 \leq 2\|u\|_1.$$

Preuve. Pour la preuve voir [41]. ■

Lemme II.5
Soit $u \in L^{\varphi}(\Omega)$, alors
(i) $\rho(u,\varphi) \leq \|u\|_1$, *si* $\|u\|_1 \leq 1$.
(ii) $\rho(u,\varphi) \geq \|u\|_1$, *si* $\|u\|_1 \geq 1$.

Preuve.
On pose $\alpha = \|u\|_{\varphi}^{L}$ et $t = \frac{u(x)}{\|u\|_{\varphi}^{L}}$ dans la relation

$$\varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t), \; \alpha \in [0,1], \; t \geq 0,$$

et on intègre sur Ω, puis en utilisant la relation

$$\rho\left(\frac{1}{\|u\|_{\varphi}}u,\varphi\right)=\int_{\Omega}\varphi\left(\frac{1}{\|u\|_{\varphi}}|u(x)|\right)dx\leq 1,$$

on obtient

$$\int_{\Omega}\varphi(|u(x)|)dx\leq\|u\|_{\varphi}\int_{\Omega}\varphi\left(\frac{1}{\|u\|_{\varphi}}|u(x)|\right)dx\leq\|u\|_{\varphi},$$

ce qui est démontre l'assertion (i). De même manière, en utilisant la relation

$$\varphi(\beta t)\geq\beta\varphi(t),\ \beta>1,\ t\geq 0,$$

dans le cas $\|u\|_{\varphi}>1$ et on pose $\beta=\|u\|_{\varphi}-\varepsilon$ et $t=\frac{|u(x)|}{\|u\|-\varepsilon}$ *pour ε petit*, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\varphi(|u(x)|)dx &\geq (\|u\|_{\varphi}-\varepsilon)\int_{\Omega}\varphi\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\varphi}-\varepsilon}\right)dx\\ &> \|u\|_{\varphi}-\varepsilon,\end{aligned}$$

là où la dernière inégalité suite la définition de la norme du Luxemburg, puisque $\varepsilon>0$ est arbitraire, donc la deuxième assertion est prouvée. ■

Remarque II.17

1- Dans le papier ([32]) les auteurs montrer que la norme de Amemiya et d'Orlicz sont égales.

2- D'après le lemme II.5, alors

$$\rho(v,\psi)\leq 1\quad \textit{si est seulement si}\quad \|v\|_{\psi}^{L}\leq 1.$$

Définition II.20 *(La norme de la fonction caractéristique)*

Soit $v(x)$ une fonction de L^{ψ}, telle que $\rho(v;\psi)\leq 1$, alors d'après l'inégalité intégrale de Jensen I.10, on a

$$\psi\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\int_{\mathcal{E}}v(x)dx\right)\leq\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\int_{\mathcal{E}}v(x)dx\leq\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}$$

donc

$$\int_{\mathcal{E}} v(x)dx \leq mes\ \mathcal{E}\ \psi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\right) \tag{II.43}$$

où ψ^{-1} est la fonction inverse de ψ.
Pour une fonction $v_0(x) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\right)\chi(x;\mathcal{E})$ satisfaite la condition $\rho(v;\psi) \leq 1$, on obtient

$$\int_{\mathcal{E}} v(x)dx \leq mes\ \mathcal{E}\ \psi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\right). \tag{II.44}$$

Par la définition de la norme, on a

$$\begin{aligned} \|\chi(x;\mathcal{E})\|_{\varphi} &= \sup_{\rho(v;\varphi)\leq 1}\left|\int_{\Omega}\chi(x;\mathcal{E})v(x)dx\right| \\ &\leq \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1}\left|\int_{\mathcal{E}} v(x)dx\right|, \end{aligned}$$

donc, par les deux inégalités II.43 et II.44, on obtient

$$\|\chi(x;\mathcal{E})\|_{\varphi} = mes\ \mathcal{E}\ \psi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\right). \tag{II.45}$$

Extension de l'inégalité de Hölder

Théorème II.16
Soit (φ,ψ) le couple complémentaires de fonctions de Young.
Si $u \in L^{\varphi}(\Omega)$ et $v \in L^{\psi}(\Omega)$, alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega}|u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{\varphi}\|v\|_{\psi} \tag{II.46}$$

Preuve.
Si $\|v\|_{\psi} = 0$, l'inégalité II.46 est évidente.
si $\|v\|_{\psi} \neq 0$, nous appliquons le lemme II.4 pour la fonction de Young ψ, on trouve

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_{\psi}};\psi\right) \leq 1,$$

et par la définition de la norme d'Orlicz de u, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)v(x)|dx &\le \|v\|_\psi \int_\Omega \left|u(x)\frac{v(x)}{\|v\|_\psi}\right| dx \\ &\le \|u\|_\varphi \|v\|_\psi.\end{aligned}$$

■

Remarque II.18

L'inégalité II.46 peut être vue comme prolongation de l'inégalité de H ?lder, mais il convient noter que l'inégalité habituelle de Hölder n'est pas cas particulier de II.46.

En effet, si nous traitons les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ comme des espaces d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$ et $L^\psi(\Omega)$, avec

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} \text{ et } \psi(t) = \frac{t^q}{q}, \ p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors l'inégalité II.46 est de la forme

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \|u\|_\varphi \|v\|_\psi$$

3.4 Complétude des espaces

Théorème II.17

Les espaces d'Orlicz L^φ sont complets, i.e., *sont des espaces de Banach.*

Preuve.

On suppose que la suite de fonctions $u_n(x) \in L^\varphi$, $(n = 1, 2, ...)$ est convergente en lui même, c.-à-d.

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_M = 0. \tag{II.47}$$

Ceci signifie que pour n'importe quelle fonction arbitraire $v(x) \in L^\psi$ satisfaite la condition $\rho(v;\psi) \le 1$, on a

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_\Omega |u_u(x) - u_m(x)||v(x)|dx = 0.$$

alors la suite $u_n(x)\,(n = 1, 2, ...)$ converge en mesure, et elle contiennent une sous suite $u_{n_k}(x)\,(n = 1, 2, ...)$ qui est convergente vers une certaine fonction $u_0(x)$ presque partout.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire, en vertu de (II.47), on peut trouver $k(\varepsilon)$ tel que, pour tout $k, k+p > k(\varepsilon)$, on trouve

$$\int_{\Omega} |u_{n_{k+p}} - u_{n_k}||v(x)|dx < \varepsilon \tag{II.48}$$

pour tout $v(x) \in L^{\psi}$ satisfaite la condition $\rho(v;\psi) \leq 1$, on passe à la limite dans l'inégalité (II.48), $p \to \infty$, et par le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_{\Omega} |u_{n_0} - u_{n_k}||v(x)|dx \leq \varepsilon. \tag{II.49}$$

pour tout $v(x) \in L^{\psi}$ satisfaite la condition $\rho(v;\psi) \leq 1$.
Par l'inégalité (II.49), premièrement $u_0(x) - u_{n_k}(x) \in L^{\varphi}$. En conséquent, nous avons également $u_0(x) \in L^{\varphi}$, et aussi par (II.49), on a

$$\|u_0 - u_{n_k}\| \leq \varepsilon$$

i.e., la sous suite u_{n_k} $(k = 1, 2, ...)$ converge en norme vers u_0, puisque u_{n_k} $(k = 1, 2, ...)$ est une sous suite convergente vers lui même, la suite initiale $u_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ aussi converge vers la fonction $u_0(x)$. ■

Convergence au moyenne

Nous disons que la suite des fonctions $u_n(x) \in L^{\varphi}$, $(n = 1, 2, ...)$ est convergente au moyenne vers la fonction $u_0 \in L^{\varphi}$, si

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi[u_n(x) - u_0(x)]dx = 0.$$

D'après l'inégalité $\rho(u;\varphi) \leq \|u\|_{\varphi}$ que chaque suite $u_n(x)$, $(n = 1, 2, ...)$ converge en norme dans l'espace L^{φ} vers une fonction $u_0(x)$ est également la convergence au moyenne vers $u_0(x)$. L'inverse, d'une façon générale n'est pas vraie.

Théorème II.18

Soit φ une N-fonction satisfaite la condition Δ_2, alors la convergence en norme équivalente à la convergence au moyenne.

Preuve.
Nous avons besoin seulement du fait que la convergence au moyenne implique la convergence en norme.
Soit $u_n(x) \in \widetilde{L}^{\varphi} = L^{\varphi},\ n = 0, 1, ...$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi(u_n(x) - u_0(x))dx = 0. \tag{II.50}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un arbitraire, tel que $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$, puisque la N-fonction satisfaite la condition Δ_2, d'après (II.50), alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi(2^k(u_n(x) - u_0(x)))dx = 0.$$

Soit n_0 un nombre naturel, tel que pour $n \geq n_0$, on a

$$\int_{\Omega} \varphi(2^k(u_n(x) - u_0(x)))dx < 1,$$

alors, en vertu (II.46), on a

$$\|2^k(u_n - u_0)\|_{\varphi} \leq \rho(2^k(u_n - u_0), \varphi) + 1 < 2,$$

alors

$$\|u_n - u_0\|_{\varphi} \leq \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Donc la suite $u_n,\ n = 1, 2, ...$ converge en norme vers u_0. ■

Remarque II.19
pour chaque fonction $u(x) \in L^{\varphi}$, nous avons

$$\|u\|_{\varphi} = \sup_{\rho(v;\psi)} |(u, v)| \leq \rho(u; \varphi) + 1. \tag{II.51}$$

L'inégalité II.51 aussi s'appelle inégalité de Hölder.

3.5 L'espace E^{φ}

Définition II.21
On note par E^{φ} la fermeture dans L^{φ} de l'ensemble de fonctions bornées.

Remarque II.20
Comme nous avons déjà noté, l'ensemble de fonctions bornées est partout dense dans la classe d'Orlicz $\widetilde{L}^\varphi$ dans le sens de la convergence moyenne. D'après le théorème II.18, l'ensemble de fonctions bornées est partout dense dans l'espace d'Orlicz $\widetilde{L}^\varphi = L^\varphi$, si la condition Δ_2 est satisfaite, alors l'espace E^φ et L^φ coïncident.

Séparabilité de E^φ
Supposons que $u(x)$ est une fonction bornée, $|u(x)| \leq a$. En vertu du théorème de Luzin [4], une suite des fonctions continues $u_n(x)$, $|u_n(x)| \leq a$, on peut trouver u, tel que la différence $u(x) - u_n(x)$ est différent de zéro seulement sur un ensemble $\Omega_n \subset \Omega$ avec la mesure inférieur que $1/n$. Alors, d'après la formule (9.11) pour la norme de la fonction caractéristique, on trouve

$$\begin{aligned}
\|u - u_n\|_\varphi &= \sup_{\rho(v;\psi)} \left| \int_\Omega [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| \\
&\leq 2a \sup_{\rho(v;\psi)} \int_{\Omega_n} |v(x)| dx \\
&= 2a \|k(x;\Omega_n)\|_\varphi \\
&= 2a \; mes \; \Omega_n \psi^{-1} \left(\frac{1}{mes \; \Omega_n} \right) \\
&\leq \frac{2a}{n} \psi^{-1}(n),
\end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0$.
Ainsi l'ensemble des fonctions continues est dense dans l'espace E^φ.
Conditions nécessaires de séparabilité des espaces d'Orlicz
Comme a été montré ci-dessus, l'espace E^φ est toujours séparable, ceci signifie que l'espace

$$\widetilde{L}^\varphi = L^\varphi = E^\varphi,$$

est séparable si la fonction $\varphi(u)$ satisfaite la condition Δ_2.

4. Luzin (1883-1950), mathématicien Russe.

Théorème II.19
On suppose que la N-fonction φ ne satisfaite pas la condition Δ_2, alors l'espace L^φ n'est pas séparable.

Preuve.
On considère que l'espace L^φ est séparable et soit $u_n(x),\ n = 1, 2, ...$, être un ensemble dense comptable dans L^φ, d'après le théorème de Luzin, donc on peut trouver l'ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$ de mesure nul, pour que les fonctions $u_n(x),\ n = 1, 2, ...$ sont continues.
On considère l'espace $L^{\varphi_1}(\Omega_1)$ et note par $E^\varphi(\Omega_1)$ la fermeture dans $L^{\varphi_1}(\Omega_1)$ des fonctions bornées sur Ω_1, alors les fonctions $w_n(x),\ n = 1, 2, ..., n$ sont définies sur Ω_1 et coincide dans l'ensemble qui est correspondant à les fonctions $u_n(x)$ appartient à $E^\varphi(\Omega_1)$, d'après le théorème de l'espace propre, on peut trouver une fonction $w(x) \in L^\varphi(\Omega)$ telle que $d(w, E^\varphi(\Omega_1)) > 1$, on pose

$$u(x) = \begin{cases} w(x), & \text{si } x \in \Omega \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \backslash \Omega_1, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_\varphi &= \sup_{\rho(v,\psi)\leq 1} \left| \int_\Omega (u(x) - u_n(x))v(x)dx \right| \\ &\geq \sup_{\rho(v,\psi)\leq 1} \left| \int_{\Omega_1} (u_n(x) - u(x))v(x)dx \right| \\ &= \|w - w_n\|_\varphi > 1. \end{aligned}$$

Alors la suite $u_n(x),\ n = 1, 2, ...$ n'est dense dans L^φ, donc on arrive a une contradiction.
■

Continuité absolue en norme
Nous dirons qu'une fonction $u(x) \in L^\varphi$ est continue absolument en norme, si pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver un δ tel que

$$\|u\chi(x; \mathcal{E})\|_\varphi = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1} \left| \int_{\mathcal{E}} u(x)v(x)dx \right| < \varepsilon$$

avec mes $\mathcal{E} < \delta,\ (\mathcal{E} \subset \Omega)$

Théorème II.20
Une fonction $u(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$ est continue absolument en norme, si seulement si $u(x) \in E^{\varphi}$.

Preuve.
Soit $u(x) \in E^{\varphi}$, on suppose que $\varepsilon > 0$ arbitraire et note par $u_1(x)$ la fonction bornée $|u_1(x)| < a, \ x \in \Omega$, telle que

$$\|u - u_1\|_{\varphi} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque la fonction $v\psi^{-1}(\frac{1}{v})$ est décroissante pour $v \geq 0$, l'équation $\delta\psi^{-1}(\frac{1}{\delta})$ admet une solution unique $\delta > 0$.
On suppose que $mes\ \mathcal{E} < \delta, \ \mathcal{E} \subset \Omega$, alors d'après la formule (II.45), on a

$$\begin{aligned} \|u\chi(x;\mathcal{E}\|_{\varphi} &\leq \|u - u_1\|_{\varphi} + a\|\chi(x;\mathcal{E}\|_{\varphi} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + a\ mes\ \mathcal{E}\psi^{-1}(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + a\delta\psi^{-1}(\frac{1}{\delta}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant on suppose que la fonction $u(x) \in L^{\varphi}$ est continue absolument en norme, on note par Ω_n l'ensemble $\Omega\{|u(x)| \leq n\}$, puisque $u(x)$ est sommable, alors

$$\lim_{n\to\infty} mes\ (\Omega \backslash \Omega_n) = 0$$

en vertu de la continuité absolu en norme, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u\chi(x;\Omega_n)\|_{\varphi} = 0$$

ainsi $u(x)$ est la limite de la suite de fonctions bornées dans E^{φ}. ∎

3.6 Critères de compacité

Critère de Vallée Poussin

Nous nous rappelons qu'une famille $\mathfrak{R}$ de fonction $\varphi(x)$ équi-continue absolument en intégrale, si pour un ε arbitraire et un $h > 0$ peut être trouvé, tels que, on a

$$\int_{\mathcal{E}} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$$

pour toutes les fonctions dans la famille $\mathfrak{R}$, où mes $\mathcal{E} < h$.
Le critère général pour l'équi-continue absolument en intégrale d'une famille des fonctions est donnés par le théorème suivant.

Théorème II.21 *(de Vallée Poussin)*
Soit $\varphi(u)$, $(0 \leq u < \infty)$ une fonction monotone et croissante qui satisfaite la condition

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$$

Supposer que $u(x)$ une fonction d'une certaine famille de $\mathfrak{R}$, l'intégrale de fonction $\varphi[|u(x)|]$ est uniformément bornée

$$\int_{\Omega} \varphi[|u(x)|] dx \leq A < \infty, \quad u(x) \in \mathfrak{R}$$

Alors la famille $\mathfrak{R}$ est équi-continue absolument.

Preuve.
Pour la preuve voir [48]. ■

Lemme II.6
Supposons qu'une famille de fonction donnée $\mathfrak{R} \subset \widetilde{L}^{\varphi}$, uniformément bornée

$$\|u\|_{\varphi} \leq A, \; u(x) \in \mathfrak{R}$$

Alors la famille $\mathfrak{R}_{\varepsilon}$ de fonctions de Steklov $u_{\varepsilon}(x), u(x) \in \mathfrak{R}$ est compact selon la norme choisi (respecté de l'uniformément en norme dans l'espace des fonctions continues sur Ω).

Preuve.
Depuis la relation

$$\int_{\Omega} \varphi \left[\frac{u(x)}{A} \right] dx \leq \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{u(x)}{\|u\|_{\varphi}} \right] dx \leq 1, \tag{II.52}$$

pour $u(x) \in \mathfrak{R}$ et d'après l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned} |u_r(x)| \leq \frac{1}{m_r}\int_{S_r(x)}|u(t)|dt \ &\leq \ \frac{A}{m_r}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|}{A}dx \\ &\leq \ \frac{A}{m_r}(1+\psi(1)mes\ \Omega). \end{aligned}$$

Ainsi les fonctions de la famille $\mathfrak{R}_r$ sont uniformément bornées, alors d'après le théorème de Vallée Poussin et la relation (II.52) les fonctions de la famille $\mathfrak{R}$ est équi-continues absolument i.e., pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver $h > 0$, tel que

$$\int_{\mathcal{E}}|u(x)dx < \varepsilon| \tag{II.53}$$

pour toute les fonctions vérifiant $mes\ \mathcal{E} < h,\ \mathcal{E} \subset \Omega$.
On note par $S_{x,y}$ l'ensemble $(S_r(x) \cup S_r(y))\backslash(S_r(x) \cap S_r(y))$ et leur volume inférieur a h pour $d(x,y) < \delta$. Alors pour toute fonctions dans $\mathfrak{R}_r$ et d'après (II.53), on trouve

$$|u_r(x) - u_r(y)| \leq \frac{1}{m_r}\int_{S_{x,y}}|u(t)|dt < \frac{\varepsilon}{m_r},$$

pour $d(x,y) < \delta$, alors les fonctions de la famille $\mathfrak{R}_r$ sont équi-continues.
Les assertions du lemme suit maintenant le théorème d'Arzela-Ascoli. ■

Critère de compacité de Kolmogrov pour l'espace E^φ

Théorème II.22
Une famille $\mathfrak{R}$ des fonctions de l'espace E^φ est compacte si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaisantes
(i) $\|u\|_\varphi \leq A,\ u(x) \in \mathfrak{R}$
(ii) *Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que $r < \delta$, implique $\|u - u_r\|_\varphi < \varepsilon$ pour toute les fonctions du famille $\mathfrak{R}$.*

Preuve.
La suffisante de conditions (i) et (ii) est directement du lemme II.6 et par le théorème de Fréchet, un ensemble des fonctions est compact dans $C(\Omega)$ est aussi compact dans un espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$.
On suppose que la famille $\mathfrak{R}$ de fonctions est compacte dans E^φ, alors on peut construire

de cette famille un $\frac{\varepsilon}{3}$-net consiste des fonctions continues $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), ..., u^{(n)}(x)$. Alors les fonctions $u^{(i)},\ n = 1, 2, ...$ peut être appartient à la famille $\mathfrak{R}$.
Soit $r > 0$ un nombre tel que $d(x, t) < r$, on trouve

$$|u^{(i)}(x) - u^{(i)}(t)|,\ n = 1, 2, ...$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u^{(i)}(x) - u^{(i)}(t)\| &\leq \frac{1}{m_r}\int_{S_r(x)} |u^{(i)}(x) - u^{(i)}(t)|dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3c}, i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

et

$$\|u_r^{(i)} - u^{(i)}\|_\varphi \leq \frac{\varepsilon}{3c}\|\chi(x; \Omega)\|_\varphi = \frac{\varepsilon}{3}.$$

On suppose que $u(x)$ est une fonction arbitraire de $\mathfrak{R}$, on peut trouver une fonction $u^{(i_0)}(x)$, telle que $\|u - u^{i_0}\|_\varphi$, alors d'après la relation $\|u_r\|_\varphi \leq \|u\|_\varphi$ et (3.6), on a

$$\begin{aligned} \|u - u_r\|_\varphi &\leq \|(u - u^{(i_0)}\|_\varphi + \|u^{(i_0)} - u_r^{(i_0)}\|_\varphi + \|u_r^{(i_0)} - u_r\|_\varphi \\ &\leq 2\|(u - u^{(i_0)}\|_\varphi + \|u_r^{(i_0)} - u_r\|_\varphi < \varepsilon. \end{aligned}$$

La nécessité de la condition (ii) est ainsi prouvée, la nécessité de la condition (i) est évidente. ■

Remarque II.21
Dans le cas ou la N-fonction $\varphi(u)$ satisfaite la condition Δ_2, alors

$$E^\varphi = L^\varphi = \widetilde{L}^\varphi.$$

Par conséquent dans le cas quand le Δ_2 est satisfaisant, théorème II.22 rapporte un critère nécessaire et suffisant pour la compacité d'une famille de fonction dans L^φ. Depuis dans ce cas-ci, la convergence en norme est équivalente à la convergence au moyenne.

Théorème II.23
On suppose que la N-fonction $\varphi(u)$ satisfaite la condition Δ_2.

La condition nécessaire et suffisante qu'une famille de fonctions $\mathfrak{R} \subset L^{\varphi} = \widetilde{L}^{\varphi}$ est compacte, s'il est les deux conditions suivantes soient satisfaisantes :
(i) $\int_{\Omega} \varphi[u(x)]dx \leq A, \; u(x) \in \mathfrak{R}$
(ii) *pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que*

$$\int_{\Omega} \varphi[u(x) - u_r(x)]dx < \varepsilon$$

pour toute les fonctions du famille $\mathfrak{R}$.

Preuve.
For the proof see [47]. ∎

Critère de Riesz pour la compacité des espaces E^{φ}
Nous donnerons un critère pour la compacité pour qu'une famille de fonctions dans E^{φ}.

Théorème II.24
Une famille $\mathfrak{R}$ de fonctions dans l'espace E^{φ} est compacte si seulement si, les deux conditions suivantes soient satisfaisantes :
(i) $\|u\|_{\varphi} \leq A, \; u(x) \in \mathfrak{R}$
(ii) *Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que $d(h, 0) < \delta$, alors*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{\varphi} < \varepsilon, \quad \textit{pour tout } u(x) \in \mathfrak{R}$$

Preuve.
On suppose que $u(x) \in \mathfrak{R}$ et $u_{\varepsilon}(x)$ est la fonction de Steklov, alors

$$|u(x) - u_{\varepsilon}(x)| \leq \frac{1}{m_{\varepsilon}} \int_{T_{\varepsilon}(x)} |u(x) - u(t)|dt.$$

pour $v(x) \in L^{\psi}, \; \rho(v; \psi) \leq 1$, on a

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(x) - u(x)|v(x)dx \leq \frac{1}{m_{\varepsilon}} \int_{\Omega} \left[\int_{T_{\varepsilon}(x)} |u(x) - u(t)|dt \right] v(x)dx$$

On change les variables et l'ordre de l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)-u_r(x)|v(x)dx &\leq \frac{1}{m_r}\int_{S_0}\left[\int_\Omega |u(x+s)-u(x)|v(x)ds\right]\\ &\leq \frac{1}{m_r}\int_{S_0}\|u(x+s)-u(x)\|_\varphi ds,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|u(x)-u_r(x)\|_\varphi &= \sup_{\rho(v,\psi)\leq 1}\left|\int_\Omega (u(x)-u_r(x))v(x)dx\right|\\ &\leq \frac{1}{m_r}\int_{S_0}\|u(x+s)-u(x)\|_\varphi ds,\end{aligned}$$

donc la condition (ii) des cet théorème est vérifiée.
La condition (i) de les deux théorèmes est coïncide avec la condition suffisante, alors on démontre la condition nécessaire.
On suppose que $\mathfrak{R}$ est une famille de fonctions compacte dans E^φ, alors on peut extraire de cette famille un $\frac{\varepsilon}{3}$-net consiste des fonctions continues $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), ..., u^{(n)}(x)$.
On note par c la norme de la fonction caractéristique sur Ω dans L^φ. Soit le nombre $\delta > 0$, tel que

$$|u^{(i)}(x+h)-u^{(i)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3c},\ i=1,2,...,n$$

est vérifiée $d(h,0) < \delta$ il est claire que

$$|u^{(i)}(x+h)-u^{(i)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ i=1,2,...,n \tag{II.54}$$

Soit $u(x)$ est une fonction arbitraire de $\mathfrak{R}$, on peut trouver une $u^{(i_0)}(x)$, telle que

$$\|u-u^{(i_0)}\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{3},$$

alors d'après (II.54) et l'inégalité

$$\|u(x+h)\|_\varphi \leq \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1}\int_\Omega |u(t)v(t-s)|dt \leq \|u\|_\varphi,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\|u(x+h)-u(x)\|_\varphi &= \|(u(x+h)-u^{(i_0)}(x+h)\|_\varphi + \|u^{(i_0)}(x+h)-u^{(i_0)}(x)\|_\varphi \\ &+ \|u^{(i_0)}(x)-u(x)\|_\varphi < \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Autre critère de la compacité

Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{R}$ de fonctions $u(x) \in L^\varphi$ est absolument équi-continue, si pour un $\varepsilon > 0$, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tels que $\|u\chi(x;\mathcal{E})\|_\varphi < \varepsilon$ pour toute les fonctions de la famille $\mathfrak{R}$, et mes $\mathcal{E} < \delta$.

Clairement dans ce cas, nous avons $\mathfrak{R} \subset E^\varphi$.

Si $\mathfrak{R}$ est un ensemble compact dans E^φ, alors on peut montrer, qui est absolument équi-continue en norme.

Lemme II.7

Une condition nécessaire et suffisante, qu'une suite des fonctions $u_n(x) \in E^\varphi$, $(n = 1, 2, ...)$, qui est convergente en mesure, convergente en norme, alors est absolument équi-continues en norme.

Preuve.

Pour la condition nécessaire, il suffit du fait qu'une suite convergente est compacte.

Pour la condition suffisante du lemme. On suppose que la suite $u_n(x) \in E^\varphi,\ n = 1, 2, ...$ converge en mesure et équi-continue absolument en norme.

Soit $\varepsilon > 0$ et on note par

$$\mathcal{E}_{mn} = \Omega\{|u_n(x) - u(x)| > \eta\},$$

où

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3\ mes\ \Omega\varphi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\right)}$$

Soit le nombre $\delta > 0$, tel que

$$\|u_n\chi(x;\mathcal{E}\|_\varphi \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \text{est vérifié } mes\ \mathcal{E} < \delta.$$

Puisque la suite $u_n(x),\ n = 1, 2, ...$ converge en mesure, pour n_0 on peut trouver, tel que *mes* $\mathcal{E}_{mn} < \delta$, pour $n, m > n_0$. Alors

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_\varphi &\leq \|(u_n - u_m)\chi(x; \mathcal{E})\|_\varphi + \|(u_n - u_m)\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_\varphi \\ &\leq \|u_n\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_\varphi + \|u_m\chi(x; \mathcal{E}_{mn})\|_\varphi + \eta\|\chi(x; \mathcal{E})\|_\varphi < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où la suite $u_n(x),\ n = 1, 2, ...$ converge dans L^φ. ■

Théorème II.25
Si la famille $\mathfrak{R} \subset E^\varphi$ est absolument équi-continue en norme et est compacte au sens de la convergence en mesure, alors la famille $\mathfrak{R}$ est compact dans L^φ.

Preuve.
Pour chaque suite de la famille $\mathfrak{R}$, on peut sélectionner une sous suite qui est converge en mesure, donc d'après le lemme précédant cette suite est convergente en norme dans L^φ.
■

Chapitre III

Classifications et théories des équations intégrales

Dans ce chapitre, on donne les définitions et les types des équations intégrales (classifications) qui l'on utilisera dans le chapitre qui suit, et on oubliera pas la théorie de ces équations (compacités des opérateurs intégraux, La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm,...etc)

0.7 Equation intégrale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non-linéaires dont les formes suivantes

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x,t)F(x,t,\varphi(t))dt \tag{III.1}$$

1 Classifications des équations intégrales

La classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont :
(A)- Linéarité ou non, (B)- Limite de l'intégration, (C)- Le placement de la fonction inconnue.

1.1 Equations intégrales linéaires

Définition III.1

1- On appelle équation intégrale de Fredholm (EIF) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{III.2}$$

2- On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{III.3}$$

Définition III.2

1- On appelle équation intégrale de Volterra (EIV) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{III.4}$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{III.5}$$

Remarque III.1

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x,t) = 0$ *pour* $t > x$*.*

1.2 Equations intégrales non-linéaires

Définition III.3

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (EINF) de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{III.6}$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt = 0$$

Définition III.4

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (EINV) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{III.7}$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt = 0$$

Remarque III.2

(i) *Si* $f(x) \neq 0$*, dans les équations (III.2), (III.4), (III.6) et (III.7) sont dites non homogènes.*

(ii) *Si* $f(x) = 0$*, dans les équations (III.2), (III.4), (III.6) et (III.7) sont dites homogènes.*

Définition III.5

1- On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_\Omega F\left(x,t,\varphi(t)\right) = g(x), \ \ t \in \Omega,$$

où F *et* g *sont des fonctions arbitraires.*

2- On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_\Omega k(x,t) f(t,\varphi(t)) = g(x), \ \ t \in \Omega$$

Remarque III.3

L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Uryson.

1.3 Equations intégrales singulières et faiblement singulières

Définition III.6

1- Considérons l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) - \int_\Omega R(x,t)\varphi(t)dt = g(x). \tag{III.8}$$

On dit que (III.8) est singulière si $R(x,t)$ admet une singularité ou le domaine Ω n'est pas borné. 2- On considère l'équation intégrale de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \int_\Omega k(x,t)\varphi(t)dt = g(x), \tag{III.9}$$

où $k(x,t)$ est singulier ou faiblement singulier, en générale $k(x,t)$, est donné par

$$k(x,t) = \begin{cases} |x-t|^{-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1 \\ \log|x-t| \end{cases}$$

Alors
(i) Le cas ou $k(x,t) = |x-t|^{-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1$ l'équations (III.9) est de Abel.
(ii) Le cas ou $k\,(x,t) = \log|x-t|$ s'appelle singularité logarithmique.

Définition III.7
On appelle équation intégrale de Carleman, une équation de la forme

$$a(x)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{t-x}\varphi(t)dt = f(x)$$

où $a, \ b$ et φ sont des fonctions continues

Remarque III.4
L'équation de Carleman admet une singularité de type de Cauchy.

2 Existence et unicité des solutions des EIs

2.1 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe, on désigne par $A : X \to X$ l'opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui-même.
Nous présentons la théorie de base pour une équation

$$\varphi - A\varphi = f.$$

On définit l'opérateur L, par

$$L = I - A$$

où I designe l'opérateur d'identité.

Théorème III.1 *(Premier Théorème de Riesz)*
L'espace nul de l'opérateur L, i.e. le noyau de l'opérateur L

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\varphi \in X : \ L\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension fini.

Preuve.
Le noyau de l'opérateur linéaire borné L est un sous-espace fermé de X. Puisque pour chaque suite $\varphi_n \to \varphi, \ n \to \infty$ et $L\varphi_n = 0$, alors on a $L\varphi = 0$, donc

$$\varphi \in \mathrm{Ker}(L) \text{ est équivalent à } A\varphi = \varphi.$$

Et donc la restriction de A sur $\mathrm{Ker}(L)$ coïncide avec l'opérateur d'identité sur $\mathrm{Ker}(L)$, l'opérateur A est compact dans X et donc rendre compact de $\mathrm{Ker}(L)$ sur $\mathrm{Ker}(L)$, puisque $\mathrm{Ker}(L)$ est fermé. Par conséquent $\mathrm{Ker}(L)$ est de dimension fini. ■

Théorème III.2 *(Deuxième Théorème de Riesz)*
L'image de l'opérateur L, i.e.

$$Im(L) = \{L\varphi : \ \varphi \in X\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie

Preuve.
L'image de l'opérateur L est un sous-espace. Soit f un élément de $\overline{L(X)}$, alors il existe une suite (φ_n) de X tel que $L\varphi_n \to f, \ n \to \infty$, on choisit la meilleure approximation χ_n, i.e.

$$\|\varphi_n - \chi_n\| = \inf_{\chi_n \in Im(L)} \|\varphi_n - \chi_n\| ,$$

on définit la suite

$$\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n - \chi_n,\ n \in \mathbb{N},$$

qui est bornée.
On suppose que la suite $(\widetilde{\varphi}_n)$ n'est pas bornée, alors on peut extraire une sous-suite $\left(\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right)$, telle que $\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\| \geq k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, maintenant on pose

$$\psi_k = \frac{\widetilde{\varphi}_{n(k)}}{\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|},\ k \in \mathbb{N},$$

avec $\|\psi_k\| = 1$ et A est compact, alors il existe une sous-suite $\psi_{k(j)}$ telle que $A\psi_{k(j)} \to \psi,\ j \to \infty$ en d'autre part

$$L\psi_k = \frac{\left\|L\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|}{\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|} \leq \frac{\left\|L\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|}{k} \to 0,\ k \to \infty,$$

puisque la suite $(L\varphi_n)$ est converge et donc bornée. Par conséquent

$$L\psi_{k(j)} \to 0,\ j \to \infty,$$

alors, on obtient

$$\psi_{k(j)} = L\psi_{k(j)} + A\psi_{k(j)} \to \psi,\ j \to \infty$$

et puisque L est borné, et par les deux équations précédentes nous concluons que $L\varphi = 0$.
Mais comme

$$\chi_{n(k)} + \left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\| \psi \in Im\,(L)\,,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\|\psi_k - \psi\| &= \frac{1}{\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|} \left\|\varphi_{n(k)} - \left\{\chi_{n(k)} + \left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|\right\} \psi\right\| \\
&\geq \frac{1}{\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|} \inf_{\chi \in Im(L)} \left\|\varphi_{n(k)} - \chi_n\right\| \\
&= \frac{1}{\left\|\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right\|} \left\|\varphi_{n(k)} - \chi_{n(k)}\right\| = 1.
\end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que cela $\psi_{k(j)} \to \psi,\ j \to \infty$. Par conséquent $(\widetilde{\varphi}_n)$ est bornée, et puisque A est compact, on peut extraire une sous suite $\left(\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right)$ telle que $\left(A\widetilde{\varphi}_{n(k)}\right)$ converge pour $k \to \infty$. En raison que $L\widetilde{\varphi}_{n(k)} \to f,\ k \to \infty$, et par

$$\widetilde{\varphi}_{n(k)} = L\widetilde{\varphi}_{n(k)} + A\widetilde{\varphi}_{n(k)}$$

On observe que $\widetilde{\varphi}_{n(k)} \to \varphi \in X,\ k \to \infty$, mais $L\widetilde{\varphi}_{n(k)} \to L\varphi \in X,\ k \to \infty$. ∎

Théorème III.3 *(Troisième Théorème de Riesz)*
Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur L tel que :
$\{0\} = \mathrm{Ker}(L^0) \subset \mathrm{Ker}(L^1) \subset \ldots\ldots \subset \mathrm{Ker}(L^r) \subset \mathrm{Ker}(L^{r+1})$
$E = \mathrm{Im}(L^0) \supset \mathrm{Im}(L^1) \supset \ldots\ldots\ldots \supset \mathrm{Im}(L^r) \supset \mathrm{Im}(L^{r+1})$.
Et on a la somme directe

$$E = \mathrm{Ker}(L^r) \oplus \mathrm{Im}(L^r).$$

Preuve.
Pour la preuve voir [50] ∎

Théorème III.4
De même conditions dans les théorèmes précédents, alors
(i) *$I - A$ est injectif si et seulement s'il est surjectif.*
(ii) *Si $I - A$ est injectif, alors l'opérateur inverse $(I - A)^{-1} : X \to X$ est borné.*

Preuve.
Par le théorème III.2, l'injectivité de l'opérateur $I - A$ est équivalent de $r = 0$. Et par le théorème III.3, la surjectivité de l'opérateur $I - A$ est équivalent de $r = 0$, puisque l'injectif et le surjectif de l'opérateur $I - A$ sont équivalent.
Il reste de montrer que L^{-1} est borné quand le $L = I - A$ est injectif. Assume que L^{-1} n'est pas borné alors il existe une suite (f_n) de X avec $\|f_n\| = 1$ telle que $\|L^{-1}f_n\| \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$g_n = \frac{f_n}{\|L^{-1}f_n\|},\quad \varphi_n = \frac{L^{-1}f_n}{\|L^{-1}f_n\|},\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

alors $g_n \to 0,\ n \to \infty$, et $\|\varphi_n\| = 1$ pour tout n. Puisque A est compact, on peut extraire une sous suite $\left(\varphi_{n(k)}\right)$ telle que $A\varphi_{n(k)} \to \varphi \in X,\ k \to \infty$, alors puisque

$$\varphi_n - A\varphi_n = g_n$$

on observe que $\varphi_{n(k)} \to \varphi,\ k \to \infty$ et $\varphi \in Im(L)$. Par conséquent $\varphi = 0$, contradiction. Car

$$\|\varphi_n\| = 1 \ \textit{pourtout}\ n.$$

■

Corollaire III.1

i- Si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0 \tag{III.10}$$

admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour tout $f \in X$ l'équation

$$\varphi - A\varphi = f \tag{III.11}$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ et cette solution et depend de la continuité de f.
ii- Si l'équation homogène (III.10) n'admet pas la solution triviale $\varphi = 0$, alors elle a seulement un nombre fini $m \in \mathbb{N}$ de solutions $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ de X sont linéairements independents et l'équation non homogène (III.11) est unsolvable ou sa solution est de la forme générale

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont des nombres arbitraires complexes et $\widetilde{\varphi}$ une solution particulière de l'équation non homogène.

Preuve.

Pour la preuve voir [50] ■

Définition III.8

Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui même. Le nombre complexe λ est appelle valeur propre, s'il existe un élément $\varphi \in X$, $\varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$

Remarque III.5
(i) *Le nombre λ s'appelle une valeur de régulière de A.*
(ii) *Si $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et borné, alors l'ensemble de toute valeur régulière de A est appelée l'ensemble des résolvant $\rho(A)$ et $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$.*
(iii) *Le complément de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé le specter de A, noté $\sigma(A)$ et $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$ est appelé le rayon spectral de A.*

Théorème III.5 *(Série de Neumann)*
Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui même, avec $\|A\| < \lambda$. Alors $A_\lambda = A - \lambda I$ admet un opérateur inverse borné donné par la série

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}},$$

de plus

$$(A - \lambda I)^{-1} \leq \frac{1}{\|\lambda\| - \|A\|}$$

Preuve.
Puisque $\|A/\lambda\| < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{\lambda^k} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A}{\lambda} \right\|^k < \infty.$$

Donc, puisque l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ est complet, alors il existe un opérateur linéaire borné B dans E, tel que

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)B &= (A-\lambda I)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(A-\lambda I)\frac{A^k}{\lambda^k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}-\lambda A^k}{\lambda^k}\\
&= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A^{k+1}}{\lambda^{k+1}}-\frac{A^k}{\lambda^k}\right) = -\lambda I,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{B}{\lambda} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

Pour démontre la deuxième relation, on observe que

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{\lambda^k}\right\| &= \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{\|\lambda\|-\|A\|}\\
&= \frac{1}{\|\lambda\|-\|A\|}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire III.2

Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach, alors l'équation

$$x = x_0 + \lambda A x$$

admet une solution unique donnée par

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A^k x_0, \ \textit{avec} \ |\lambda|\|A\| < 1.$$

Théorème III.6
Sous les hypothèses du théorème III.5, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + g, \; n = 0, 1, 2, ...$$

converge vers l'unique solution φ *de l'équation* $A\varphi - \varphi = g$, *pour toute* $g \in X$ *et* φ_0 *est arbitraire dans* X.

Preuve.
On ait, la successive

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 & = & g \\ \varphi_1 & = & A\varphi_0 + g \\ \varphi_2 & = & A\varphi_1 + g = A^2\varphi_0 + Ag + g \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \varphi_n & = & A\varphi_{n-1} + g, \end{array}$$

alors

$$\varphi_{n+1} = A^n\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} A^k g,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^k g = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g = (I - A)^{-1} g.$$

■

2.2 La théorie du point fixe

Théorème III.7
Soit l'équation suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = g(x)$$

admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$*, avec le noyau* k *est continu sur l'intervalle* $[a,b]$*,*

$$g \in L^2([a,b]) \ et \ |\lambda| k < 1, \ avec \ k = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx dy}$$

Preuve.
On considère l'équation

$$(T\varphi)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{III.12}$$

puisque $g \in L^2([a,b]), \ T\varphi \in L^2([a,b])$. Si

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \in L^2([a,b]).$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \right| &\leq \int_a^b |k(x,y)\varphi(y)| \, dy \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 \varphi(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \right|^2 \leq \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 \varphi(y) dy \right) \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right),$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 \varphi(y) dy \right) \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dy dx \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dy dx < \infty \quad et \ \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy < \infty,$$

alors l'équation (III.12) est satisfaisante et T de $L^2([a,b])$ dans lui-même.
Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

est borné, donc par le théorème I.10 l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, pour $|\lambda|k < 1$. ■

Théorème III.8

On suppose que le noyau k est continu, $g(x) \in L^2([a,b])$ et
(a) $\| \int_a^b k(x,y,\varphi(y))\| \leq M\|\varphi(y)\|$.
(b) $|k(x,y,z_1) - k(x,y,z_2)| < N(x,y)|z_1 - z_2|, \;\; x,y,z_1,z_2 \in [a,b]$.
(c) $\int_a^b \int_a^b |N(x,y)|^2 dxdy = k^2 < \infty$.
Alors l'équation non-linéaire de type Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y,\varphi(y))dy = g(x)$$

admette une solution dans $L^2([a,b])$, avec $|\lambda|k < 1$.

Preuve.

On considère l'opérateur

$$T\varphi = g + \lambda A\varphi,$$

où

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y,\varphi(y))dy,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| &= |\lambda| \left\| \int_a^b \left[k(x,y,\varphi_1(y)) - k(x,y,\varphi_2(y))\right] dy \right\| \\
&\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b |k(x,y,\varphi_1(y)) - k(x,y,\varphi_2(y))|^2 dy \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b N(x,y)|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|.
\end{aligned}$$

Il est clair que, si $|\lambda|k < 1$, T est un opérateur contractant, de sorte qui admet un point fixe, ce point c'est la solution de l'équation non-linéaire. ∎

Théorème III.9

On considère l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce (EIVSE)

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy = g(x) \tag{III.13}$$

On suppose que $g \in L^2([0,1])$ et le noyau k vérifé

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x,y)|dxdy < \infty \tag{III.14}$$

alors l'équation (III.13) admet une solution unique dans $L^2([0,1])$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve.

On pose

$$A(x) = \int_0^x |k(x,y)|^2 dy, \;\; B(y) = \int_y^1 |k(x,y|dx$$

avec la condition

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x,y)|dxdy < \infty$$

les fonctions A *et* B sont intégrables, de sorte qu'il existe une constante M, telle que

$$\int_0^1 A(x)dx \leq M \;\; et \;\; \int_0^1 B(y)dy \leq M$$

On définit la fonction λ sur $[0,1]$, par

$$\lambda(x) = \int_0^x A(y)dy$$

il est clair que $\lambda(1) \leq M$. On considère l'opérateur suivant

$$(T\varphi)(x) = \lambda \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy + g(x)$$

Si T a un point fixe, alors ce point doit être une solution unique de l'équation (III.13). Pour démontre que, si le point fixe existe pour certains $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montre que T^n

est contactant.
Par le théorème I.9, l'opérateur T admet un seule point fixe.
On écrit $T\varphi = \lambda W\varphi + g$, avec

$$(W\varphi)(x) = \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy.$$

Alors

$$T^n\varphi = \lambda Wg + \lambda^2 W^2 g + ... + \lambda^n W^n g + g,$$

et

$$(W^n\varphi)(x) = \int_0^x k_m(z,y)\varphi(y)dy,$$

où

$$\begin{aligned} k_1(x,y) &= k(x,y) \\ k_m(x,y) &= \int_y^x k(x,z)k_{m-1}(z,y)dy, \ (m = 2,3,...) \end{aligned}$$

Pour estimer la valeur $\|W\|$, nous examinons K_m pour $m = 2$, on ait

$$k_2(x,y) = \int_y^x k(x,z)k_1(z,y)dy$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz, on trouve

$$|k_2(x,y)|^2 \leq \int_y^x |k(x,z)|^2 dz \int_y^x |k_1(z,y)|^2 dz \leq A(x)B(y),$$

même pour

$$\begin{aligned} |k_3(x,y)|^2 &\leq \int_y^x |k(x,z)|^2 dz \int_y^x |k_2(z,y)|^2 dz \\ &\leq A(x)B(y)\int_y^x A(z)dz = A(x)B(y)\left(\lambda(x) - \lambda(y)\right). \end{aligned}$$

Par indication, nous pouvons montrer que

$$|k_m(x,z)|^2 \leq A(x)B(y)\frac{[\lambda(x) - \lambda(y)]^{m-2}}{(m-2)!}, \ m \geq 2,$$

donc

$$\begin{aligned}
|T^m\varphi_1 - T^m\varphi_2|^2 &= |\lambda|^{2m}|\int_0^x k_m(x,y)[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy|^2\\
&\leq |\lambda|^{2m}\left[\int_0^x \frac{A(x)B(y)\left[\lambda(x)-\lambda(y)\right]^{m-2}}{(m-2)!}dy\int_0^x |\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|^2dy\right]\\
&\leq \frac{|\lambda|^{2m}A(x)\left[\lambda(x)\right]^{m-2}}{(m-2)!}\int_0^x B(y)dy\|\varphi_1\varphi_2\|\\
&\leq \frac{|\lambda|^{2m}A(x)\left[\lambda(x)\right]^{m-2}M}{(m-2)!}\|\varphi_1\varphi_2\|.
\end{aligned}$$

En intégrant, avec x dans $(0,1)$, on obtient

$$\|T^m\varphi_1 - T^m\varphi_2\|^2 \leq \frac{|\lambda|^{2m}M^m}{(m-2)!}\|\varphi_1\varphi_2\|^2,\ m\geq 2,$$

donc, puisqu'il existe $n\in\mathbb{N}$, tel que

$$\frac{|\lambda|^{2n}M^n}{(n-1)!} < 1.$$

T^n est contractant, ce qui implique que l'équation (III.13) admet une solution unique. ■

Théorème III.10

On considère l'équation suivante

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy,\ x\in[0,1] \tag{III.15}$$

qui admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$.

Preuve.

Soit l'équation homogène de deuxième espèce de Volterra

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy,\ x\in[0,1],$$

alors

$$|\varphi(x)| = |\lambda|\int_0^x |k(x,y)\varphi(y)|dy \leq |\lambda|Mp, \tag{III.16}$$

où
$$p = \int_0^1 |\varphi(y)|dy,$$
et
$$|k(x,y)| \leq M, \quad pour\ x, y \in [0,1].$$
Par conséquent, et si on remplace la relation (III.16) dans (III.15), on obtient
$$|\varphi(x)| = |\lambda| \int_0^x |k(x,y)||\lambda| Mpdy \leq |\lambda|^2 M^2 px$$
En continuant le processus, on obtient
$$|\varphi(x)| \leq |\lambda|^n M^n p \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{|\lambda|^n M^n p}{(n-1)!} \longrightarrow 0\ lorsque\ n \to \infty$$
Ceci montre que $\varphi = 0$, pour tout $x \in [0,1]$. ∎

2.3 Méthode des approximations successives

On considère l'équation
$$\varphi = g + \lambda T\varphi \tag{III.17}$$
Si T un opérateur intégral
$$(T\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy,$$
alors (III.17) est une équation de Fredholm de deuxième espèce (EIFS)
$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{III.18}$$
donc
$$\begin{aligned}(T^2\varphi)(x) &= T\left(\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy\right)\\ &= \int_a^b k(x,z)\left(\int_a^b k(z,y)\varphi(y)dy\right)dz\\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,z)k(z,y)dz\right)\varphi(y)dy,\end{aligned}$$

alors, T^2 est un opérateur intégral avec le noyau est

$$\int_a^b k(x,y)k(z,y)dz,$$

de même pour

$$(T^n\varphi)(x) = \int_a^b k_n(x,y)\varphi(y)dy, \quad pour\ n \geq 2,$$

où le noyau k_n de l'opérateur T^n est donné par

$$k_n(x,y) = \int_a^b k(x,\xi)k_{n-1}(\xi,y)d\xi, \ n > 2,$$

on peut écrire aussi le noyau sous la forme

$$k_n(x,y) = \int_a^b ... \int_a^b k(x,\xi_{n-1})k(\xi_{n-1},\xi_{n-2}) \ ... \ k(\xi,y)d\xi_{n-1}d\xi_{n-2} \ ... \ d\xi$$

d'après le corollaire III.2, l'équation (III.17) admet une solution unique donnée par la série de Neumann

$$\varphi = g + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n g,$$

et par conséquent aussi l'équation intégrale (III.18), si $|\lambda|\|T\| < 1$ admet une solution unique donnée par la série de Neumann

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x,y)\right] g(y)dy.$$

Chapitre IV

Les équations intégrales dans les espaces fonctionnels

Après une brève de mise en contacte des activités scientifiques de recherche pour virons de qu'elle étude fondamentales d'autre chercheurs basés (Méthodes et techniques).
Dans ce chapitre nous discuterons sur l'objectif de notre article dont on prouve l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Hammerstein, en utilisant la technique de décomposition de l'opérateur A en deux opérateurs K et N dans les espaces de Lebesgue et on montre l'efficacité de ce résultat par des exemples numériques.

1 Opérateur linéaire dans $L^p(\Omega)$

Dans cette section on donne quelques résultats et théorèmes qui sont utiles dans ce qui suit.

Définition IV.1
Soit D un ensemble mesurable de Ω. On définit l'opérateur linéaire P_D, par

$$P_D x(s) = \begin{cases} x(s) & , s \in D \\ 0 & , s \notin D \end{cases}$$

Remarque IV.1

(i) *Il est claire que* $P_D^2 = P_D$ *et* $\|P_D\|_p = 1$.

(ii) *Si* $mes(D) \neq 0$. *La norme dans* $L^p(\Omega)$, *posée la propriété de la continuité uniforme, alors pour une fonction* $x(s) \in L^p(\Omega)$, *on a*

$$\lim_{mes(D)\to 0} \|P_D x\|_p = 0.$$

Définition IV.2

On dit qu'une famille $\mathfrak{M}$ *de fonctions dans* L^p *équi-continues en norme, si quel que soit* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $\delta > 0$, *tel que* $mes(D) < \delta$ *et* $x(s) \in \mathfrak{M}$, *ce qui implique l'inégalité*

$$\|P_D x(s)\|_p < \varepsilon.$$

Remarque IV.2

Il claire que la convergence de suite de fonctions $x_n(s)$ *vers* $x_0(s)$ *en norme de* L^p, *implique la convergence de cette suite en mesure (mais n'est pas presque partout).*

Lemme IV.1 *([48])*

Une famille $\mathfrak{M}$ *des fonctions* $x(s) \in L^P$ *est compacte, si et seulement s'elle est compacte en mesure et* $\mathfrak{M}$ *est équi-continues en norme.*

Remarque IV.3

Pour vérifier que les fonctions dans un ensemble $\mathfrak{M}$ *sont équi-continues absolument en norme, il est parfois, utiliser le critère de Vallée-Poussin.*

Nous nous rappelons qu'une famille $\mathfrak{M}$ de fonctions $\varphi(x)$ a intégrale équi-continues absolument, si pour ε arbitraire un $h > 0$ peut être trouvé, tels que pour toutes les fonctions dans la famille $\mathfrak{M}$, par

$$\int_\xi |\varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

Des critères généraux pour l'équi-continues absolument des intégrales d'une famille des fonctions sont donnés par le théorème suivant.

Lemme IV.2 *([48])*

L'ensemble borné $\mathfrak{M}$ *de fonctions dans* L^0 *est compact si seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition finie de l'ensemble* Ω,

$$\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n, \text{ telle que}$$

pour toute fonction $x(s) \in \mathfrak{M}$

$$ess \sup_{s,t\in\Omega_i} |x(s) - x(t)| < \varepsilon, \ i = 1, 2, ..., n$$

Remarque IV.4
On peut modifier la condition de compacité, si $\mathfrak{M}$ *est borné dans un sous espace de* L^0. *Par exemple, si* $\mathfrak{M} \subset C$ (C *l'espace de fonctions uniforment continues*), *et* Ω *est un ensemble borné, alors le critère d'Arzela-Ascoli est valid.*

Définition IV.3
Soient E_1, E_2 *deux espaces fonctionnels et soit* A *un opérateur de* E_1 *dans* E_2.
On dit que A *est un opérateur positif, s'il transforme des fonctions positives aux fonctions positives.*

Remarque IV.5
Si A *est un opérateur positif, alors on a l'inégalité suivante*

$$|Ax| \leq A|x|.$$

Théorème IV.1
Soit A *un opérateur linéaire positif de* L^α *à* L^β. *Alors* A *est continu.*

Preuve. Pour la preuve voir [48] ∎

2 Opérateur non-linéaire dans $L^p(\Omega)$

Dans tout ce qui suit Ω désigne un ensemble mesurable de l'espace euclidien. L'objet présent est l'étude de l'équation

$$u(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y,u(y))dy \tag{IV.1}$$

avec x, y désignant des variables indépendantes. L'équation plus générale

$$\varphi(x) = g(x) + \int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy \tag{IV.2}$$

dans laquelle $g(x)$ est une fonction connue, se ramène à l'équation (IV.1) par la substitution

$$u(y) = \varphi(y) - g(y),$$

cette équation a été étudiée par M.M. Hamerstein, Iglisch, Leray et Cacciopoli. Mais tandis que ces auteurs se sont bornés à l'étude du noyau symétrique.

2.1 Continuité des opérateurs de type Hammerstein

Lemme IV.3
Soit $\{f(x)\}$ une famille de fonctions bornées dans l'espace hilbertien, les intégrales moyennes correspondantes au fonction de Steklov $\{f_\varepsilon(x)\}$ forment une famille de fonctions dans leur ensemble uniformément continues et bornées, donc d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, est une famille compacte (au sens de la convergence uniforme).

Preuve.
Les fonctions de la famille $\{f_\varepsilon\}$ sont bornées dans leur ensemble. En effet

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} 1.|f(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{V(\varepsilon)} \sqrt{\int_{S(x,\varepsilon)} dt \int_{S(x,\varepsilon)} f^2 dt} \\ &\leq V^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) K^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Les fonctions de la famille $\{f_\varepsilon\}$ sont uniformément continues dans leur ensemble. En effet, en appelant I l'ensemble

$$I = \{S(x,\varepsilon) - S(y,\varepsilon)\} + \{S(y,\varepsilon) - S(x,\varepsilon)\},$$

nous avons

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| &= \left| \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x,\varepsilon)} f(t)dt - \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(y,\varepsilon)} f(t)dt \right| \\ &\leq \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_I 1.|f(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{V(\varepsilon)} (\text{mes } I)^{\frac{1}{2}}.K^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{IV.4}$$

La mesure de I tend vers zéro avec la distance des points x et y. ∎

Lemme IV.4
Soit $S = \{u(x)\}$ une famille de fonctions et $f(x,u)$ une fonction continue en u et telle que, pour $x \in F$, on a

$$\sup_{u(x) \in S} f^2(x, u(x)) < L(x),$$

où $L(x)$ étant intégrable. Si l'on a alors

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u, u_n) = 0, \;\; u_n(x) \in S,$$

il s'en suit

$$\lim_{n\to\infty} \rho\{f(x,u), f(x,u_n)\} = 0.$$

Théorème IV.2
L'opérateur

$$Au(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y, u(y)) dy$$

est continu dans l'espace hilbertien par rapport a la famille $S = \{u(x)\}$, si
(i) $\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega k^2(x,y)dxdy \leq L$.
(ii) $\rho(f(x,u^{'}), f(x,u^{''})) < C\rho(u^{'},u^{''})$, *avec C est une constante.*

Preuve.
Soit $\{u_n(x)\}$ une suite qui converge vers $u(x)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u, u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u(x) - u_n(x)]^2 \, dx = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\rho^2 [Au, Au_n] &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u(x) - u_n(x)]^2 \, dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_\Omega k(x,y) f(y,u) dy - \int_\Omega k(x,y) f(y,u_n) dy \right]^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \left\{ \int_\Omega k^2(x,y) dy \int_\Omega [f(y,u) - f(y,u_n)]^2 \, dy \right\} dx \\
&< C \int_\Omega (u - u_n)^2 dy \int_\Omega \int_\Omega k^2(x,y) dx dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$\rho^2(Au, Au_n) \leq L.C \int_\Omega (u - u_n)^2 dy,$$

alors

$$\rho(Au, Au_n) \leq \sqrt{L.C} \rho(u, u_n).$$

■

Théorème IV.3
Soit $S = \{u(x)\}$ un ensemble de fonctions dans l'espace hilbertien, si l'on a pour $u \in S$
(i) $\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega k^2(x,y) dx dy \leq L^2$,
(ii) $\sup f^2(x, u(x)) < D(x)$
(iii) $f(x, u(x))$ *est continue en* u,
alors l'opérateur

$$Au = \int_\Omega k(x,y) f(y,u) dy$$

est continu sur S dans l'espace hilbertien, où L est une constante et $D(x)$ est une fonction sommable.

Preuve.
Il faut démontrer que, si $\rho(u_n, u) \to 0,\ u_n \in S$, la suite correspondante

$$Au_n = \int_{\Omega} k(x,y) f(y, u_n(y)) dy$$

converge dans l'espace hilbertien vers

$$Au = \int_{\Omega} k(x,y) f(y, u(y)) dy.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [A(u) - A(u_n)]^2 \, dx &= \int_{\Omega} \left[\left| \int_{\Omega} k(x,y)(f(y,u(y)) - f(y,u_n(y)))dy \right| \right]^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} |k(x,y)||f(y,u(y)) - f(y,u_n(y))|dy \right]^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} k^2(x,y)dy \int_{\Omega} [f(y,u(y)) - f(y,u_n(y))] \, dy \right]^2 dx \\
&= \int_{\Omega} [f(y,u(y)) - f(y,u_n(y))]^2 \, dy \int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x,y) dx dy \\
&\leq L^2 \int_{\Omega} [f(y,u) - f(y,u_n(y))]^2 \, dy.
\end{aligned}$$

Donc, en vertu du lemme IV.4, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} [Au - Au_n]^2 \, dx \leq L^2 \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} [f(x,u) - f(x,u_n(x)))]^2 \, dx = 0$$

■

2.2 Existence et unicité des solutions

Dans cette section on donne quelques théorèmes d'existence et unicité des solutions des équations intégrales non-linéaires, on s'intéresse aux équations de type Hammerstein.

Théorème IV.4
L'équation (IV.1) admet une solution, si les conditions suivantes sont vérifiées :
(i) $\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x,y) dx dy < C_1$,

(ii) $f^2(x, u(x)) < C(x)$ *pour* $\int_\Omega u^2(x)dx < K$,

(iii) $f(x, u)$ *est continue en* u *pour* $\int_\Omega |u(x)|^2 dx < K$,

(iv) $C_1 C_2 < K$ *où* $C_2 = \int_\Omega C(x)dx$.

Preuve.

Considérons L l'ensemble des fonctions mesurables $u(x)$, telles que

$$L = \left\{ u(x); \int_\Omega |u(x)|^2 dx < K \right\}.$$

l'ensemble L est convexe et fermé dans l'espace hilbertien, en vertu de théorème IV.3, l'opérateur

$$Au(x) = \int_\Omega k(x, y) f(y, u) dy$$

est compact et continu dans l'espace hilbertien.

L'opérateur est évidement mesurable, puis nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^2 u(x) dx &\leq \int_\Omega \left[\int_\Omega k(x, y) f(y, u(y)) dy \right]^2 dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \int_\Omega k^2(x, y) dx dy. \int_\Omega f^2(y, u(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 C_2 < K. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Schauder, il existe dans l'ensemble des fonctions $\{u(x) < k\}$ une fonction $u(x)$ pour laquelle, on a

$$u(x) = \int_\Omega k(x, y) f(y, u) dy,$$

cette fonction est la solution cherchée. ■

Théorème IV.5

L'équation (IV.1) admet une solution unique, si l'on a :

(i) $\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega k^2(x, y) dx dy < C_1$,

(ii) $\int\limits_\Omega f^2(y, u(y)) dy < C_2$ *pour* u *tel que* $\int_\Omega u(x)^2 dy < k$,

(iii) $\int\limits_\Omega [f(x, u_1) - f(x, u_2)]^2 dx \leq L \int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^2 dx$, *pour* u *tel que* $\int\limits_\Omega u^2(x) dx \leq k$,

(iv) $C_1 L = q < 1$,
(v) $C_1 C_2 < k$.

Preuve.
De la même manière du théorème précédent, on voit que l'existence de la solution sera démontrée.
Si nous prouverons que l'ensemble $S = \{u(x)\}$ des fonctions $u(x)$ pour laquelle

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leq k,$$

la sphère $S(0,k)$, se transforme en sous-ensemble, nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega [Au_1(x) - A_n u_2(x)]^2\, dx &\leq \int_\Omega \left[\int_\Omega k(x,y)(f(y,u_1) - f(y,u_2))dy\right]^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \int_\Omega k^2(x,y)dxdy \int_\Omega [f(y,u_1) - f(y,u_2)]^2\, dy \\ &\leq C_1 L \int_\Omega (u_1 - u_2)^2 dy \\ &= q \int_\Omega (u_1 - u_2)^2 dy, \text{ avec } q < 1,\end{aligned}$$

de plus cette solution est unique en vertu du principe de Cacciopoli. ■

Théorème IV.6
On suppose que les fonctions $k(x,y)$ et $f(y,\varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes

(A1)*Le noyau $k(x,y)$ est mesurable sur $[a,b]\times[a,b]$ et tel que*

$$\left(\int_a^b |k(x,y)|^\sigma\, dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq M_1, \text{ pour tout } y \in [a,b],$$

où $\sigma < p$ et $\sigma, p > 1$.

(A2)*Le noyau $k(x,y)$ est mesurable sur $[a,b]\times[a,b]$ et tel que*

$$\left(\int_a^b |k(x,y)|^{\frac{p-\sigma}{p-1}}\, dy\right)^{\frac{p-1}{p-\sigma}} \leq M_2, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

(A3)*La fonction non linéaire $f(y,\varphi(y))$ de $[a,b]\times\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ satisfaite la condition* *de Carathéodory et telle que*

$$|f(y,\varphi(y))| \leq a_0(y) + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}},$$

où $a_0(y) \in L^q([a,b],\mathbb{R})$, $b_0 > 0$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

*Sous les conditions **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** l'opérateur*

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y) f(y,\varphi(y)) dt, \tag{IV.5}$$

est de L^p *dans* L^p.

Preuve. D'après la condition **(A3)**, on peut écrire

$$|f(y,\varphi(y))|^q \leq \left(|a_0(y)| + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}}\right)^q,$$

donc

$$\|f(y,\varphi(y))\|_q = \left(\int_a^b |f(y,\varphi(y))|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b \left(|a_0(y)| + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}}\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

en utilisant l'inégalité de Minkovski, on a

$$\begin{aligned} \|f(y,\varphi(y))\|_q &\leq c\left(\left(\int_a^b |a_0(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b b_0^q |\varphi(y)|^p\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\leq c\left(\|a_0(y)\|_q + b_0 \|\varphi(t)\|_p^{\frac{p}{q}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent l'opérateur $f(y,\varphi(y))$ est un élément continu de $L^q([a,b],\mathbb{R})$.

Dans l'espace $L^p([a,b],\mathbb{R})$ on considère

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y) f(y,\varphi(y)) dy,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x)| &= \left|\int_a^b k(x,y)f(y,\varphi(y))dy\right|, \\
&\leq \int_a^b |k(x,y)f(y,\varphi(y))|\, dy, \\
&= \int_a^b \left(|k(x,y)|^{\sigma}\, |f(y,\varphi(y))|^{q}\right)^{\frac{1}{p}} |k(x,y)|^{1-\frac{\sigma}{p}}\, |f(y,\varphi(y))|^{1-\frac{q}{p}}\, dy, \\
&\leq \left(\int_a^b |k(x,y)|^{\sigma}\, |f(y,\varphi(y))|^{q}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |k(x,y)|^{p-\sigma}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(y,\varphi(y))|^{q}\, dy\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \\
|A\varphi(x)| &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b |k(x,y)|^{\sigma}\, |f(y,\varphi(y))|^{q}\, dy\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x)|^{p} &\leq \left(M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b |k(x,y)|^{\sigma}\, |f(y,\varphi(y))|^{q}\, dy\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \\
\left(\int_a^b |A\varphi(x)|^{p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^{\sigma}\, |f(x,\varphi(y))|^{q}\, dydx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_a^b |k(x,y)|^{\sigma}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(y,\varphi(y))|^{q}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}}\, M_1^{\frac{\sigma}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|^{\frac{q}{p}} \\
\|A\varphi(x)\|_{p} &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}}\, M_1^{\frac{\sigma}{p}}\, \|f(y,\varphi(y))\|_{q}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $A\varphi(x)$ est bien défini de L^p vers L^p par l'interpolation. ■

On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x,y)f(y,\varphi(y))dy :$$

Nous voudrons savoir quelles sont les conditions exiger dessus sur $k(x,y)$ et $f(y,\varphi(y))$ pour que cette équation admet une solution $\varphi(y) \in L^p([a,b])$.

Théorème IV.7

On suppose que les fonctions $k(x,y)$ et $f(y,\varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes

(B1)*Le noyau $k(x,y)$ appartient à l'espace L^p pour tout $x \in [a,b]$*

$$\left(\int_a^b |k(x,y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq N_1(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

(B2) *La fonction $f(y,\varphi(y))$ appartient à l'espace L^q pour tout $x \in [a,b]$*

$$\left(\int_a^b |f(y,\varphi(y))|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq C,$$

et satisfaite la condition de Lipschitz

$$|f(y,\varphi_1(y)) - f(y,\varphi_2(y))| \leq L(y) \, |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| \, ,$$

avec la function $L(y)$ appartient à l'espace $L^{\frac{pq}{p-q}}$ avec $q \leq p$,

$$\left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}} \, dy\right)^{\frac{p-q}{pq}} \leq N_2.$$

Sous les assumptions ***(B1)*** *et* ***(B2)****,l'approximation successive*

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x,y) f(y,\varphi_n(y)) dy,$$

converge presque partout à la solution de l'équation (IV.1) vérifier

$$N_2^p \int_a^b N_1^p(y) dy = N^p < 1.$$

Preuve.

Pour cette méthode, on pose $\varphi_0(y)$ comme fonction identiquement nulle et successivement

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x,y) f(y,\varphi_n(y)) dy, \quad n = 0,1,2,...,n..,$$

donc, on obtient

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &\leq \int_a^b |k(x,y)|\,|f(y,\varphi_n(y))-f(y,\varphi_{n-1}(y))|\,dy,\\
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &\leq \int_a^b |k(x,y)|\,L(y)\,|\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(y)|\,dy,\\
&\leq \left(\int_a^b |k(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\int_a^b |\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|^p \leq N_1^p(x)N_2^p\int_a^b |\varphi_{n+1}(y)-\varphi_n(y)|^p\,dy, \tag{IV.6}
$$

utilisons la condition $\varphi_0(y)=0$, on obtient

$$
|\varphi_1(x)|^p \leq N_1^p(x)\left(\int_a^b |f(x,0)|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}} = N_1^p(x)C^p,
$$

et par (IV.6), elle vient

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|^p &\leq N_1^p(x)N_2^p\int_a^b N_1^p(x)C^p dx = C^pN^pN_1^p(x),\\
|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)|^p &\leq N_1^p(x)N_2^p\int_a^b C^pN_1^p(x)N^p dx = C^pN^{2p}N_1^p(x),
\end{aligned}
$$

plus généralement

$$
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|^p \leq C^pN^{2np}N_1^p(x),
$$

et d'après la simplification

$$
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq CN^{2n}N_1(x).
$$

Cette expression donne la suite suivante $\varphi_n(x)$ et on exprime par la série

$$
\varphi_1(x)+(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))+....+(\varphi_p(x)-\varphi_{p-1}(x))+...,
$$

majorant par

$$CN_1(x)(1 + N + N^2 + ...N^{p-1} + ..$$

Naturellement cette série est convergente, et par conséquent la suite $\varphi_n(x)$ converge vers la solution de l'équation (IV.1). ■

Implémentations numériques

Dans cette section on donnons certains exemples numériques pour résoudre l'équation de Hammerstein, où la fonction φ représente la solution exacte et $\widetilde{\varphi}$ représente la solution approchée.

Example 1

On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$10\varphi(x) - \int_0^1 \exp(t^4 + x^4)(\varphi(t))^3 dt = 10x - \frac{1}{4}(e-1)\exp(x^4),$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

t	solution exacte	solution appro	Erreur	Erreur [10]
0.000000	0.000000e+000	2.209477e-005	2.209477e-005	2.1462e-003
0.250000	2.500000e-001	2.500222e-001	2.218125e-005	2.1546e-003
0.500000	5.000000e-001	5.000235e-001	2.351976e-005	2.2846e-003
0.750000	7.500000e-001	7.500303e-001	3.031818e-005	2.9450e-003
1.00000	1.000000e+000	1.000060e+000	6.005982e-005	2.8340e-003

Tableau 1. Coparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur [10].

Example 2

On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$20\varphi(x) - \int_0^1 \sin(\exp(t) + x)\exp(\varphi(t))dt = 20x + \cos(\exp(1) + x) - \cos(1 + x),$$

avec la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

Points de t	Solution exacte	Solution appro	Erreur	Erreur [10]
0.000000	0.000000e+000	-3.184043e-006	3.184043e-006	1.6361e-005
0.250000	2.500000e-001	2.499964e-001	3.602525e-006	4.3978e-005
0.500000	5.000000e-001	4.999962e-001	3.797019e-006	6.8861e-005
0.750000	7.500000e-001	7.499962e-001	3.755433e-006	8.9462e-005
1.00000	1.000000e+000	9.999965e-001	3.480352e-006	1.0450e-004

Tableau 2. Coparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur[10].

Example 3

On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 tx(\varphi(t))^3 dt = \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{16}x,$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Points de t	Solution exacte	Solution appro	Erreurr	Erreur [25]
0.000000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
0.200000	9.615385e-001	9.615348e-001	3.642846e-006	1.194620e-004
0.400000	8.620690e-001	8.620617e-001	7.285693e-006	2.389660e-004
0.600000	7.352941e-001	7.352832e-001	1.092854e-005	3.581180e-004
0.800000	6.097561e-001	6.097415e-001	1.457139e-005	4.780980e-004

Tableau 3. Coparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur[25].

Example 4

On considère l'équation intégrale de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 \sin(t+x)\ln(\varphi(t))dt = \exp(x) - 0.382\sin(x) - 0.301\cos(x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = \exp(t)$.

Points de t	Solution exacte	Solution appro	Erreur	Erreur [55]
0.000000	1.000000e+000	1.000195e+000	1.953229e-004	0.000000e+000
0.200000	1.221403e+000	1.221559e+000	1.567282e-004	1.940000e-004
0.400000	1.491825e+000	1.491937e+000	1.118852e-004	5.410000e-004
0.600000	1.822119e+000	1.822181e+000	6.258175e-005	3.360000e-004
0.800000	2.225541e+000	2.225552e+000	1.078332e-005	2.890000e-004

Tableau 4. Coparaison entre la solution exacte, approchée et l'erreur[55].

3 Opérateurs dans les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$

Dans cette on s'intéresse sur le role de la fonction maximale qui est l'on utilisera pour estimer un opérateur intégral linéaire, et enfin la relation entre de cet opérateur est les équations intégrales singulières de la forme suivante

$$Au(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} u(y)dy.$$

et n'oublier pas l'estimation d'un opérateur intégral singulier par les opérateurs pseudo différentiels, utilisant la fonction maximale, pour plus détaille concernant ce domaine voir les références ([72], [73]).
Soit l'opérateur intégral suivant

$$Kf(x) = \int_{\Omega} k(x,y)f(y)dy$$

où le noyau $K(x,y)$ est dominé par le noyau de différence, *i.e.*,

$$|k(x,y)| \leq \mathcal{A}(|x-y|). \tag{IV.7}$$

Définition IV.4

Soit $p_-, p_+ \in (1, \infty)$, on dit que p vérifier la condition log, *si*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{\log \frac{1}{d(x,y)}}, \ \ x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) \leq \frac{1}{2}. \tag{IV.8}$$

Remarque IV.6

1- Il existe des nombres p_*, p_* tels que

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty. \tag{IV.9}$$

2- Il existe la limite $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ et

$$|p(x) - p(\infty)| \leq \frac{A}{\log(2 + |x|)}, \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{IV.10}$$

Théorème IV.8

Soit $p_j : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$, $j = 1, 2$ sont des fonctions bornées est mesurables, et soit A un opérateur linéaire défini dans $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|Au\|_{L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C_j \|u\|_{L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}, \ \ j = 1, 2 \tag{IV.11}$$

alors A alors A est aussi borné sur l'espace intermédiaire $L^{p_\theta(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|A\|_{B(L^{p_\theta(\cdot)})} \leq \|A\|^{\theta}_{B(L^{p_1(\cdot)})} \|A\|^{1-\theta}_{B(L^{p_2(\cdot)})}.$$

Preuve.

Pour la preuve voir [48] ∎

Proposition IV.1

Soit $p_j : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$, $j = 1, 2$. sont des fonctions mesurables bornées satisfaisant les conditions (IV.8)-(IV.10) et soit A un opérateur linéaire défini de $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ satisfait la condition (IV.11). Si

$$A : L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur compact, alors

$$A : L^{\theta(.)}(\mathbb{R}^n) \to L^{\theta(.)}(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur compact dans chaque espace intermédiaire $L^{\theta(.)}(\mathbb{R}^n),\ \theta \in (0, 1]$.

Preuve.
Pour la preuve voir [48] ■

Théorème IV.9
Soit $|\Omega| < \infty,\ 1 \leq p_- \leq p^+$*, l'opérateur intégral linéaire, avec* $\mathcal{A}(|x|)$ *est radial dominant intégrable décroissant et de son noyau est compact dans l'espace* $L^{p(.)}(\Omega)$*, si l'opérateur maximal est borné dans ce espace.*

Preuve.
Pour la preuve voir [72] ■

Lemme IV.5
Soit $\mathcal{A}$ *est intégrable*

$$\int_{B(0,R)} \mathcal{A}(|x|)dx < \infty,\ R = 2diam\Omega,$$

on peut décomposer l'opérateur k *de la façon suivante*

$$\begin{aligned} kf(x) &= \int_{|x-y|<\varepsilon} k(x,y)f(y)dy + \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)f(y)dy \\ &= k_\varepsilon f(x) + T_\varepsilon f(x) \end{aligned} \tag{IV.12}$$

Si la condition (IV.7) est vérifiée, alors l'estimation suivante est satisfaisante

$$|k_\varepsilon f(x)| \leq a(\varepsilon)Mf(x),\ x \in \Omega,$$

avec

$$a(\varepsilon) = C^2_{\mathcal{A}} \int_{B(0,R)} \mathcal{A}(|x|)dx \to 0, \quad si\ \varepsilon \to 0$$

et le coefficient $C^2_{\mathcal{A}}$ *est diminué en fonction de* $\mathcal{A}$.

Remarque IV.7
Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a

$$|k_\varepsilon f(x)| \leq C_{\mathcal{A}}^2 \|\mathcal{A}\|_1 M f(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque IV.8
L'opérateur maximal est borné pour le cas $X = L^{p(.)}(\Omega)$ sous les conditions (IV.9) et (IV.10).

4 Opérateurs linéaires dans $L^\varphi(\Omega)$

On suppose que $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ deux N-fonctions complémentaires. Soit $v(x)$ une fonction fixe dans $L^\psi(\Omega)$, d'après l'inégalité de Hölder (II.46) que la fonctionnelle linéaire

$$l(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ u(x) \in L^\varphi(\Omega) \tag{IV.13}$$

est défini sur l'espace entier $L^\varphi(\Omega)$.
L'inégalité

$$\|l\| \leq \|v\|_\psi \leq 2\|l\| \tag{IV.14}$$

est vérifiée, avec la note que $\|l\|$ la norme du fonctionnel $l(u)$

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_\varphi \leq 1} |l(u)|.$$

L'inégalité gauche dans (IV.14), depuis l'inégalité de Hölder

$$|l(u)| = |(u, v)| \leq \|u\|_\varphi \|v\|_\psi,$$

l'inégalité droite dans (IV.14), d'après (II.51)

$$\|v\|_\psi = \sup_{\rho(u;\varphi)\leq 1} |(u, v)| \leq \sup_{\|u\|_\varphi \leq 2} |(u, v)| = 2\|l\|.$$

Nous rappelons que, pour chaque fonction $u(x) \in L^{\varphi}(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{\varphi} = \alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}\left\{\int_{\Omega}\varphi[u(x)]dx\right\}^{1/\alpha}$$

avec $1/\alpha + 1/\beta = 1$, donc

$$\begin{aligned}\|l\| = \sup_{\|u\|_{\varphi}\leq 1}\left|\int_{\Omega}u(x)v(x)dx\right| &= \sup_{\alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}\left\{\int_{\Omega}\varphi[u(x)]dx\right\}^{1/\alpha}\leq 1}\left|\int_{\Omega}u(x)v(x)dx\right| \\ &= \frac{1}{\alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}}\sup_{\int_{\Omega}\varphi[u(x)]dx\leq 1}\left|\int_{\Omega}u(x)v(x)dx\right| \\ &= \frac{\|v\|_{\psi}}{\alpha^{1/\alpha}\beta^{1/\beta}} \qquad \text{(IV.15)}\end{aligned}$$

Théorème IV.10

On suppose que la N-fonction φ ne satisfaite pas la condition Δ_2, alors (IV.13) n'est pas en général une fonctionnelle linéaire sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega)$

Preuve.

Soit E^{φ} un sous-espace linéaire de L^{φ}.

La fermeture de E^{φ} dans L^{φ}, est l'ensemble de tout les fonctions bornées, d'après le théorème II.18 et la relation $E^{\varphi} \subset L^{\varphi}$, alors E^{φ} est un sous espace de L^{φ}.

Soit $u_0(x) \in L^{\varphi}\backslash E^{\varphi}$, on définit la fonctionnelle linéaire $l(u)$ sur L^{φ} par $l(u_0) = 1$ et $l(u) = 0$ pour tout $u(x) \in E^{\varphi}$, et on faire l'extension sur tout l'espace L^{φ} utilisant le théorème de Han-Banach.

Soit la fonctionnelle

$$l(u) = \int_{\Omega}u(x)v(x)dx,\ u(x) \in L^{\varphi},$$

où $v(x)$ est une fonction quelconque.

On construire la suite de fonctions bornées

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x),\ |v(x)| \leq n \\ 0,\ |v(x)| > n \end{cases} \quad n = 1, 2, ...$$

par la construction de la fonctionnelle $l(u)$, on a

$$\int_{\Omega} v_n(x)v(x)dx = 0,\ \ n = 1, 2, ...$$

Alors que la fonction $v(x)$ égale zéro presque partout, mais aussi on trouve $l(u_0) = 0$, contradiction avec $l(u_0) = 1$. ■

Théorème IV.11
La formule (IV.13), où $v(x) \in L^{\psi}$, define la forme générale d'une fonctionnelle linéaire sur E^{φ}.

Preuve.
Soit $l(u)$ une fonctionnelle linéaire définie sur E^{φ}, on définit sur tous les sous-ensembles mesurables $\mathcal{E}$ de Ω, l'ensemble de fonctions $F(\mathcal{E})$ par l'égalité $F(\mathcal{E}) = l[\chi(x; \mathcal{E})]$, où $\chi(x; \mathcal{E})$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{E}$, la fonction $F(\mathcal{E})$ est absolument continue puisque en vertu (II.45), on a

$$|F(\mathcal{E})| = |l(\chi(x; \mathcal{E})| \leq\leq \|l\|\ mes\ \mathcal{E}\psi^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \mathcal{E}}\right),$$

ce que suit

$$\lim_{mes(\mathcal{E})} |F(\mathcal{E})| = 0,$$

et en vertu du théorème de Radon-Nikodym, la fonction $F(\mathcal{E})$ est représentée comme suite

$$F(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} v(x)dx,$$

où $v(x)$ est une fonction sommable sur Ω, alors l'égalité

$$l(u) = \int_{\Omega} u(x)dx \tag{IV.16}$$

est valide, pour toute fonction mesurable $u(x)$.
Soit $u(x)$ une fonction arbitraire dans L^{φ}, la suite des fonctions bornées $u_n(x),\ n = 1, 2, ..., n$ est converge presque partout vers $u(x)$, on peut trouver, telle que

$$|u_n(x)| \leq |u(x)|\ presque\ partout,\ \ si\ \|u_n(x)\| \leq \|u(x)\|.$$

La suite des fonctions positives $|u_n(x)v(x)|$ est aussi converge vers la fonction $|u(x)v(x)|$ presque partout, alors d'après le lemme du Fatou et la relation

$$\int_\Omega \int_\Omega k(x,y)u(y)v(x)dxdy < \infty,$$

on a

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| &\leq \sup_n \left\{\int_\Omega |u(x)v(x)|dx\right\} \\ &= \sup_n |l(|u_n(x)|sgn\ v(x))|| \\ &\leq \|l\| \sup_n \|u_n\|_\varphi \\ &\leq \|l\|\|u\|_\varphi < \infty, \end{aligned}$$

alors $v(x) \in L^\psi$.
On note par $l_1(u)$, tel que

$$l_1(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

la fonctionnelle définie dans L^φ, en vertu à la relation (IV.40) les fonctionnelles $l(u)$ et $l_1(u)$ sont linéaires et continues et donne même valeurs sur l'ensemble des fonctions bornées qui est dense dans E^φ, i.e., la formule (IV.40) est valide pour toute les fonctions $u(x) \in E^\varphi$.
■

Conditions de continuité des opérateurs intégraux linéaires

Dans cette partie on s'intéresse aux opérateurs intégraux de la forme

$$Au(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)dy \tag{IV.17}$$

Le problème fondamental dans cette section consistent a l'étude des conditions où l'opérateur (IV.17) est continu considéré comme un opérateur de L^{φ_1} dans L^{φ_2}, i.e. qu'il satisfait la condition

$$\|Au\|_{\varphi_2} \leq \|A\|\|u\|_{\varphi_1}$$

où $\|A\|$ est un certain nombre.
Nous rechercherons naturellement des conditions pour la continuité de A dans les diverses caractéristiques du noyau $k(x,y)$, le noyau appartient à un certain espace d'Orlicz, c'est-à-dire

l'intégrale est finie

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\varphi[\alpha k(x,y)]dxdy,$$

pour certain α.

Théorème IV.12

Soit $\varphi(u)$ une N-fonction telle que, pour tout $u(x)\in L^{\varphi_1},\ v(x)\in L^{\psi_2}$, on a

$$w(x,y)=u(x)v(y)\in L^{\varphi} \tag{IV.18}$$

avec

$$\|w(x,y)\|\leq C\|u\|_{\varphi_1}\|v\|_{\psi_2} \tag{IV.19}$$

où C est une constante.

On suppose le noyau $k(x,y)$ de l'opérateur intégral linéaire (IV.17) appartient à l'espace L^{ψ}, où $\psi(v)$ est la N-fonction complémentaire de la N-fonction $\varphi(u)$. Alors l'opérateur (IV.17) appartient à l'espace $L^{\varphi_1}\to L^{\varphi_2}$ est continue.

Preuve.

En utilisant l'inégalité de Hölder et (IV.19), pour $u(x)\in L^{\varphi},\ v(x)\in L^{\psi}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}Au(x)v(x)dx &= \int_{\Omega}\int_{\Omega}k(x,y)u(y)v(x)dxdy\\ &\leq \|k(x,y)\|_{\psi}\|w(x,y)\|_{\varphi}\\ &\leq C\|k(x,y)\|_{\psi_2}\|w(x,y)\|_{\varphi_1}\end{aligned} \tag{IV.20}$$

alors ce qui suit que l'opérateur A de L^{φ_1} dans L^{φ_2}.

Puisque $\|v\|_{\psi_2}\leq 2$ pour $\rho(v;\psi_2)\leq 1$, d'après (IV.20) alors

$$\|Au\|_{\varphi_2}=\sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1}\left|\int_{\Omega}Au(x)v(x)dx\right|\leq 2C\|k(x,y)\|_{\psi}\|u\|_{\varphi_1} \tag{IV.21}$$

ainsi, l'opérateur A est borné et par conséquent, il est continu. ■

Théorème IV.13

Soient $\phi(u)$ et $\Psi(v)$ deux N-fonctions complémentaires.

On suppose que le noyau $k(x,y)$ de l'opérateur linéaire (IV.17) appartient à l'espace L^{Ψ}, alors l'opérateur (IV.20) appartient à $\{L^{\varphi_1} \to L^{\varphi_2}; c.\}$ si est seulement si une des conditions suivantes est satisfaisante :

(i) $\varphi_2[\psi_1(v)] < \Psi(v)$.

(ii) $\psi_1[\varphi_2(v)] < \Psi(v)$.

(iii) *la fonction $\phi(u)$ satisfaite la condition Δ' et $\psi_1(v) < \Psi(v),\ \varphi_2(v) < \Psi(v)$.*

Preuve. Pour la preuve voir [47]. ∎

Conditions de compacité des opérateurs intégraux linéaires

Cas des noyaux continus

Nous continuons maintenant l'étude de l'opérateur intégral linéaire

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x,y)u(y)dx. \tag{IV.22}$$

Nous étudierons le problème des conditions pour la compacité de l'opérateur (IV.22), i.e. les conditions dans lesquelles l'opérateur (IV.22) transforme la sphère unité de l'espace L^{φ_1}, en un ensemble compact dans l'espace L^{φ_2}.

Lemme IV.6

On suppose que $k(x,y)$ est continu sur Ω.

Soient L^{φ_1} et L^{φ_2} deux espaces d'Orlicz arbitraires, alors l'opérateur (IV.22) appartient à $L^{\varphi_1} \to L^{\varphi_2}$ est compact.

Preuve.

D'après le théorème IV.13, l'opérateur A appartient à $L^{\varphi_1} \to L^{\varphi_2}$ est continu.

Soit $S(0,1)$ la sphère unité de l'espace L^{φ_1}, puisque

$$\int_{\Omega} |u(x)|dx \leq \|u\|_{\varphi_1} \|\chi(x;\Omega)\|_{\psi_1} \leq \text{mes } \Omega \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\right) \tag{IV.23}$$

pour $u(x) \in S(0,1)$, et pour $x \in \Omega,\ u(x) \in S(0,1)$, on a

$$|Au(x)| = \left|\int_{\Omega} k(x,y)u(y)dy\right| \leq K\ mes\ \Omega\ \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\right) \tag{IV.24}$$

avec $K = \max|k(x,y)| \quad, x, y \in \Omega$.

ceci signifie que les fonctions $|Au(x)|,\ u(x) \in S$ sont uniformément bornées. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit un $\delta > 0$ tel que

$$|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{mes\ \Omega \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\right)},\ pour\ d(x_1, x_2) < \delta,$$

donc, pour une fonction arbitraire $u(x) \in S$, et d'après la définition de la norme de la fonction caractéristique sur l'ensemble Ω dans l'espace L^{φ}, on a

$$\begin{aligned} |Au(x_1) - Au(x_2)| &\leq \int_{\Omega} |k(x_1, y) - k(x_2, y)||u(y)|dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{mes\ \Omega \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{mes\ \Omega}\right)} \int_{\Omega} |u(y)|dy \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors les fonctions $Au(x),\ u(x) \in S$ sont équi-continues, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli l'ensemble AS est compact dans l'espace $C(\Omega)$, donc est compact dans un espace arbitraire d'Orlicz. ■

Théorème IV.14 *(Condition suffisante)*
Soient $\phi(u)$ et $\Psi(v)$ deux N-fonctions complémentaires.
On suppose que $k(x, y)$ de l'opérateur intégral linéaire (IV.22) appartient à l'espace E^{Ψ}, alors chacune des conditions suivantes (i), (ii) et (iii) du théorème IV.13 est suffisante pour l'opérateur (IV.22) appartenant à $L^{\varphi_1} \to E^{\varphi_2}$, est compact et continu.

Preuve.
Puisque $k(x, y) \in E^{\Psi}$, la suite $k_n(x, y)$, $(n1, 2, ...)$ des noyaux continus peuvent être construits, tels que

$$\|k(x, y) - k_n(x, y)\|_{\Psi} < \frac{1}{n}.$$

On note par A_n, les opérateurs intégraux linéaires

$$A_n u(x) = \int_{\Omega} k_n(x, y)u(y)dy,$$

par le lemme IV.6, ces opérateurs de L^{φ_1} dans E^{φ_2} et ils sont compacts et continus. ■

Lemme IV.7 *(de Zaanen)*
On suppose que le noyau $k(x, y)$ satisfait l'une de ces deux conditions suivantes :

a) pour presque tout $x \in \Omega$, le noyau $k(x,y)$ en fonction de y, appartient à l'espace L^{ψ_1}, où la fonction $\varphi(x) = \|k(x,y)\|_{\psi_1}$ appartient à l'espace L^{φ_2} ;
b) pour presque tout $y \in \Omega$, le noyau $k(x,y)$ en fonction de x, appartient à l'espace L^{φ_2}, où la fonction $\psi(y) = \|k(x,y)\|_{\varphi_2}$, appartient à l'espace L^{ψ_1}.
Alors l'opérateur (IV.22) appartient à $L^{\varphi_1} \to L^{\varphi_2}$ est continu.

Preuve.
On suppose que la condition a) est vérifiée, alors d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega Au(x)v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega \left|\int_\Omega k(x,y)u(y)dy\right| |v(x)|dx \\ &\leq \|u\|_{\varphi_1} \int_\Omega \varphi(x)\|v(x)\|dx \end{aligned} \tag{IV.25}$$

pour les fonctions arbitraires $u(x) \in L^{\varphi_1},\ v(x) \in L^{\psi_2}$, on a

$$\|Au\|_{\varphi_2} = \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left|\int_\Omega Au(x)v(x)dx\right| \leq \|\varphi\|_{\psi_2}\|u\|_{\varphi_1} \tag{IV.26}$$

Si la condition b) est vérifiée, alors, en échangeant l'ordre de l'intégration (théorème de Fubini), on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega Au(x)v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega \left|\int_\Omega k(x,y)v(x)dx\right| |u(y)|dy \\ &\leq \|v\|_{\psi_2} \int_\Omega \psi(y)\|u(y)\|dy \\ &\leq \|v\|_{\psi_2}\|\psi\|_{\psi_1}\|u\|_{\varphi_1} \end{aligned} \tag{IV.27}$$

pour les fonctions arbitraires $u(x) \in L^{\varphi_1},\ v(x) \in L^{\psi_2}$, on a

$$\begin{aligned} \|Au\|_{\varphi_2} = \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left|\int_\Omega Au(x)v(x)dx\right| &\leq \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 2} \left|\int_\Omega Au(x)v(x)dx\right| \\ &\leq 2\|\Psi\|_{\psi_1}\|u\|_{\varphi_1} \end{aligned} \tag{IV.28}$$

∎

Théorème IV.15
On suppose que le noyau $k(x,y)$, en fonction de y appartient à l'espace E^{ψ_1}.

pour presque tous $x \in \Omega$, ou la fonction $\varphi(x) = \|k(x,y)\|_{\psi_1}$ appartient à l'espace E^{ψ_2}, alors l'opérateur (IV.22) appartient à $L^{\varphi_1} \to E^{\varphi_2}$ est compact et continu.

Preuve.

En vertu du lemme précédent, l'opérateur (IV.22) de L^{φ_1} vers L^{φ_2} est continu. Il reste de prouver que cet opérateur transforme la sphère d'unité $S(0,1)$ de l'espace L^{φ_1}, en ensemble de fonctions qui est compact dans E^{φ_2}, en vertu de la compacité de E^{ψ_1}-faiblement de la sphère S, il suffit de prouver que l'opérateur A transforme une suite de E^{ψ_1}-faiblement des fonctions convergent sur la sphère S en suite des fonctions dans E^{φ_2} qui est converge en norme.

On suppose que la suite $u_n(x) \in T$ $(n = 1,2,...)$ est E^{ψ_1}-faiblement convergente vers la fonction $u_0(x)$, en vertu de la condition du théorème, la suite de fonctions $Au_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ converge vers la fonction $Au_0(x)$ presque partout et par conséquent elle converge à cette fonction en mesure. On va démontrer que les fonctions $Au_n(x)$ est équi-continues absolument en norme dans L^{φ_2}.

Soit $\chi(x;\mathcal{E})$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{E} \subset \Omega$, $v(x) \in L^{\psi_2}$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{E}} Au_n(x)v(x)dx\right| &\leq \int_{\mathcal{E}} \left|\int_{\Omega} k(x,y)u_n(x)dy\right| |v(x)|dx \\ &\leq \int_{\mathcal{E}} \varphi(x)\|v(x)\|dx \end{aligned} \tag{IV.29}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \|Au_n\chi(x;\mathcal{E})\|_{\varphi_2} &= \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left|\int_{\mathcal{E}} Au_n(x)v(x)dx\right| \\ &\leq \|\varphi(x)\chi(x;\mathcal{E})\|_{\varphi_2} \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Puisque la fonction $\varphi(x)$ appartient à E^{ψ_2}, alors les fonctions $Au_n(x)$ est absolument équi-continues en norme, en vertu du lemme II.7, la suite $Au_n(x)$ de E^{φ_2} converge en norm. ■

Théorème IV.16

On suppose que le noyau $k(x,y)$, en fonction de x appartient à l'espace E^{ψ_2}, pour $y \in \Omega$, ou la fonction $\psi(y) = \|k(x,y)\|_{\varphi_2}$, appartient à l'espace E^{ψ_1}, alors l'opérateur (IV.22) appartient à $E^{\varphi_1} \to E^{\varphi_2}$ est compact et continu.

Preuve.
En vertu du Lemma IV.7, $A \in L^{\varphi_1} \to L^{\varphi_2}$ est continu.
On considère que l'opérateur A est défini

$$A^*v(x) = \int_\Omega k(x,y)v(y)dy$$

de L^{ψ_2} a L^{ψ_1}, et en vertu du théorème IV.15 l'opérateur A^* appartient à $L^{\psi_2} \to L^{\psi_1}$ est compact et continu, en vertu du théorème IV.15 l'opérateur $A = (A^*)^*$ de E^{φ_1} dans E^{φ_2}. Afin d'accomplir la preuve, il reste pour s'avérer que l'opérateur A transforme chaque suite de E^{φ_1}-faiblement des fonctions convergent de la sphère d'unité S de l'espace L^{φ_1}, dans une suite ce qui converge en ce qui concerne la norme dans le L^{φ_2}.
On suppose que la suite $u_n(x) \in S$ $(n = 1, 2, ...)$ de E^{ψ_2}-faiblement convergente vers la fonction $u_0(x)$, on le voit facilement que $\|uo\|_{\varphi_1} \leq 2$ la suite $Au_n(x)$ est E^{ψ_2}-faiblement convergente vers la fonction $Au_0(x)$, puisque pour chaque fonction $u(x) \in E^{\psi_2}$, on trouve d'après l'égalité

$$\int_\Omega Au(x)v(x)dx = \int_\Omega u(y)A^*v(y)dy,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega A[u_n(x) - u_0(x)]v(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u_0(x)]A^*v(x)dx = 0.$$

Soit un $\varepsilon > 0$ donné, on note par $A^*v(x)_1, A^*v(x)_2, ..., A^*v(x)_s$ la suite finie a $(\varepsilon/6)$ de l'ensemble $\{A^*v\}$ $(\rho(v;\psi_2) \leq 1)$ ce qui est compact en vertu de la continuité et la compacité de l'opérateur A^*. Alors pour chaque fonction $v(x) \in L^{\psi_2}$, $(\rho(v;\psi_2) \leq 1)$ on peut trouver une fonction $v_{i(v)}(x)$, telle que $\|A^*v - A^*v_{i(v)}\| < \varepsilon/6$.
On suppose l'inégalités

$$\int_\Omega [u_n(x) - u_0(x)]A^*v_i(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}, \ (i = 1, 2, ..., s)$$

sont vérifiant pour $n \geq n_0$.

Alors pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\|Au_n - Au_0\|_{\varphi_2} &= \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left| \int_\Omega A[u_n(x) - Au_0(x)]v(x)dx \right| \\
&= \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left| \int_\Omega [u_n(x) - Au_0(x)]A^*v(x)dx \right| \\
&\leq \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \left| \int_\Omega [u_n(x) - Au_0(x)]A^*v_{i(v)}(x)dx \right| \\
&+ \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \int_\Omega |u_n(x) - Au_0(x)||A^*v(x) - A^*v_{i(v)}(x)|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|u_n - u_0\|_{M_1} \sup_{\rho(v;\psi_2)\leq 1} \|A^*v_{i(v)} - A^*v\| \qquad \text{(IV.31)}
\end{aligned}$$

i.e., la suite $Au_n(x)$ converge en norm vers $Au_0(x)$. ■

5 Opérateurs non-linéaires dans $L^{\varphi}(\Omega)$

Soit K l'opérateur de Uryson

$$Ku(x) = \int_\Omega k[x, y, u(y)]dy \qquad \text{(IV.32)}$$

Nous supposerons que la fonction $k(x, y, u)$ vérifiée les conditions de Carathéodory et satisfaite l'inégalité

$$|k(x, y, u)| \leq k(x, y)[a(x) + R(|u|)] \qquad \text{(IV.33)}$$
$$(x, y \in \Omega, \ -\infty < u < \infty)$$

avec

$$\int_\Omega \int_\Omega \varphi[k(x, y)]dxdy \leq b < \infty, \qquad \text{(IV.34)}$$

où $\varphi(u)$ est une N-fonction $a(x)$ est une fonction non négative et $R(u)$ est une fonction monotone, croissante, positive et continue, pour $u > 0$.

Nous serons intéressés au problème dans quels cas sont les conditions (IV.33) et (IV.34) suffisantes, alors l'opérateur (IV.32) d'Uryson fonctionnent dans l'espace d'Orlicz L^φ et soient continu, borné et compact dans cet espace.

Remarque IV.9

(i) *Les conditions (IV.33) et (IV.34) implique que la valeur de l'opérateur sur la sphère $S(\theta, r; L^\varphi)$ est bornée*

$$\|Ku\|_\varphi \leq c \qquad \|u\|_\varphi \leq r. \tag{IV.35}$$

et

$$\Phi(\alpha u) < \varphi(u),\ \ \alpha > 0, \tag{IV.36}$$

(ii) *Pour que l'opérateur d'Uryson est borné, notre attention principale sera porté sur le cas, la N-fonction $\psi(v)$ complémentaire à $\varphi(u)$ est satisfaite la condition Δ'.*

Lemme IV.8

On suppose que la N-fonction $\psi(v)$ satisfaite la condition Δ', et soit les conditions (IV.33), (IV.34), (IV.36) et

$$\psi[\beta R(\gamma u)] \leq k\Phi(\alpha u)$$

sont vérifiant.

Soit $a(x) \in L^\psi$, alors l'opérateur (IV.32) est défini sur la sphère $S(\theta, \gamma/\alpha; L^\varphi)$ et l'ensemble de ses valeurs est uniformément borné dans L^φ :

$$\|Ku\|_\varphi \leq C\|k(x,y)\|_{\hat{\varphi}} \quad ,\ \|u\|_\varphi \leq \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{IV.37}$$

où la constante C ne dépend pas à le noyau $k(x,y)$.

Preuve.

On suppose que l'inégalité

$$\psi[\beta R(\gamma u)] < k\Phi(\alpha u) \tag{IV.38}$$

est vérifiée pour $u \geq u_0$, puisque

$$\begin{aligned}\|a(x)+R(|u(x)|)\|_{\psi} &\leq \|a\|_{\psi}+\frac{1}{\beta}\|\beta R(|u(x)|)\|_{\psi}\\ &\leq \|a\|_{\psi}+\frac{1}{\beta}\left\{1+\int_{\Omega}\psi(\beta R(|u(x)|))dx\right\},\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (IV.38) et $\|u\|_{\Phi} \leq \frac{\gamma}{\alpha}$, on trouve

$$\begin{aligned}\|a(x)+R(|u(x)|)\|_{\psi} &\leq \|a\|_{\psi}+\frac{1}{\beta}\left\{1+\psi[\beta R(\gamma u_0)] \quad \text{mes} \quad \Omega+k\int_{\Omega}\Phi(\frac{\alpha}{\gamma}u(x))dx\right\}\\ &\leq \|a\|_{\psi}+\frac{1}{\beta}\left\{1+k+\psi[\beta R(\gamma u_0)] \quad \text{mes} \quad \Omega\right\},\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|a(x)+R(|u(x)|)\|_{\psi} \leq c_1 \tag{IV.39}$$

en vertu du théorème IV.13, l'opérateur linéaire

$$Av(x)\int_{\Omega}k(x,y)v(y)dy$$

de L^{ψ} à L^{Φ}, avec

$$\|Av\|_{\Phi} \leq 2c\|k(x,y)\|_{\widehat{\varphi}}\|v\|_{\psi} \tag{IV.40}$$

en vertu à l'inégalité (IV.33)

$$|ku(x)| \leq A[a(x)+R(|u(x)|)],$$

et d'après (IV.40) et(IV.39), on a

$$\begin{aligned}\|ku(x)\|_{\Phi} &\leq 2c\|k(x,y)\|_{\widehat{\varphi}}\|a(x)+R(|u(x)|)\|_{\psi}\\ &\leq 2cc_1\|k(x,y)\|_{\widehat{\varphi}}.\end{aligned}$$

■

Théorème IV.17

Soient φ et ψ deux N-fonctions complémentaires, et on suppose que la N-fonction ψ

vérifiée la condition Δ'. *Soit*

$$|k(x,y,u| \leq k(x,y)[a(x)+R(|u|)],\ \ x,y \in \Omega,\ \ -\infty < u < \infty$$

où $k(x,y) \in E^{\varphi}(\Omega \times \Omega),\ \ a(x) \in L^{\psi}$ *et* $R(u)$ *est une fonction positive et croissante. On suppose que, l'on peut trouver des nombres positifs* $\beta,\ \gamma$ *et* C, *tels que*

$$\psi[\beta R(\gamma u)] \leq C\varphi(u),$$

alors l'opérateur

$$Ku(x) = \int_{\Omega} k[x,y,u(y)]dy, \tag{IV.41}$$

appartient à $S(\theta,\gamma;L^{\varphi}) \to L^{\phi}$ *est compact et continu, où* ϕ *est une N-fonction satisfaite l'inégalités suivantes*

$$\psi[\beta R(\gamma u)] \leq C\phi(u) \leq C\varphi(u)$$

Preuve. Pour la preuve voir [47]. ■

Chapitre V

Espace d'Orlicz généralisé ou espace d'Orlicz-Musielak

Dans ce chapitre on expose une généralisation de l'espace d'Orlicz, d'où une généralisation de la fonction de Young (N-fonction) $\varphi(u)$, en une N-fonction généralisée $\Phi(x,u)$, alors on a, un espace d'Orlicz généralisé ou espace d'Orlicz-Musielak.

1 Propriétés et définitions

Définition V.1
Soit $(\mathcal{A},\Sigma,\mu)$ un espace mesuré complet σ-fini. La fonction $\Phi : A\times[0,\infty)\to[0,\infty]$ est dite une généralisation de N-fonction sur $(\mathcal{A},\Sigma,\mu)$, si :
(i) $\Phi(y,.)$ est une φ-fonction (N-fonction).
(ii) La fonction $y\mapsto\Phi(y,t)$ mesurable, pour tout $t\geq 0$.

Remarque V.1 *(1) Si Φ est une fonction généralisée de la N-fonction φ sur l'espace $(\mathcal{A},\Sigma,\mu)$, on écrit $\Phi\in\varphi(\mathcal{A},\mu)$.*

(2) Si Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue, où l'abréviation $\Phi\in\varphi(\Omega)$, on sait que Φ est une généralisation de φ.

(3) Toute généralisation de la N-fonction φ généré un semimodulaire sur l'espace $L^0(\mathcal{A},\mu)$.

Lemme V.1
Si $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$ (c'est-à-dire Φ est une généralisation de N-fonction φ) et $f \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$, alors la fonction $y \mapsto \Phi(y, |f(y)|)$ est μ-mesurable et

$$\rho_\Phi(f) = \int_A \Phi(y, |f(y)|) d\mu(y),$$

est un semimodulaire sur $f \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$.
Si Φ est positive, alors ρ_Φ est un modulaire.

Preuve. Par la décomposition de la fonction f en deux parties, positive et négative, il suffit de considéré le cas $f \geq 0$.
Soit $f_k \uparrow f$ ponctuellement avec f_k sont des fonctions simples et non négatives, alors

$$\Phi(y, |f_k(y)|) = \sum_j \Phi(y, \alpha_j^k) \chi_{A_j^k},$$

qui est mesurable et $\Phi(y, f_k(y)) \uparrow \Phi(y, f(y))$, ainsi $\Phi(., f(.))$ est mesurable.
Il est évidente que $\rho_\Phi(0) = 0$ et $\rho_\Phi(\lambda x) = \rho_\Phi(x)$ pour $|\lambda| = 1$, la convexité de ρ_Φ est une conséquence directe de la convexité de Φ.
Maintenant, on montre que ρ_Φ est continu à gauche, si $\lambda_k \to 1^-$ et $y \in \mathcal{A}$, alors

$$0 \leq \Phi(y, \lambda_k f(y)) \to \Phi(y, f(y)),$$

par la continuité à gauche et la monotonicité de $\Phi(y, .)$ et par conséquent

$$\rho_\Phi(\lambda_k f) \to \rho_\Phi(f),$$

en vertu du théorème de la convergence monotone, donc ρ_Φ est continu à gauche au sens de la définition II.3.
Considérons maintenait $f \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$ telle que $\rho_\Phi(\lambda f) = 0$, $\forall > 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\Phi(y, kf(y)) = 0$ pour presque tout $y \in \mathcal{A}$. Puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable, on déduit que $\Phi(y, kf(y)) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{A}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La convexité de Φ et $\Phi(y, 0) = 0$ implique que $\Phi(y, \lambda f(y)) = 0$ pour presque tout $y \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda > 0$, puisque $\lim\limits_{t \to \infty} \Phi(y, t) = \infty$ pour tout $y \in \mathcal{A}$ implique que $|f(y)| = 0$ pour

presque tout $y \in \mathcal{A}$. Par conséquent $f = 0$, alors ρ_Φ est un semimodulaire dans $L^0(\mathcal{A}, \mu)$. Considérons Φ est positive et $\rho_\Phi(t) = 0$, alors $\Phi(y, f(y)) = 0$ pour presque tout $y \in \mathcal{A}$, puisque Φ est positive $f(y) = 0$ pour presque tout $y \in \mathcal{A}$ ainsi $f = 0$, alors ρ_Φ est un modulaire dans $L^0(\mathcal{A}, \mu)$. ■

Définition V.2

Soient $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$ et ρ_Φ défini par

$$\rho_\Phi(f) = \int_A \Phi(y, |f(y)|)d\mu(y) \textit{ pour tout } f \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$$

alors l'espace semimodulaire

$$\begin{aligned} \Big(L^0(\mathcal{A}, \mu)\Big)_{\rho_\Phi} &= \Big\{f \in L^0(\mathcal{A}, \mu);\ \lim_{\lambda \to 0} \rho_\Phi(\lambda f) = 0\Big\}, \\ &= \Big\{f \in L^0(\mathcal{A}, \mu);\ \rho_\Phi(\lambda f) < \infty,\ \textit{pour} \lambda > 0\Big\}, \end{aligned}$$

s'appel l'espace d'Orlicz-Musielak et on noté par $L^\Phi(\mathcal{A}, \mu)$.

Remarque V.2

L'espace d'Orlicz-Musielak s'appel aussi espace d'Orlicz généralisé.

Exemple V.1

Soit $(\mathcal{A}, \Sigma, \mu)$ espace mesuré complet σ-fini.
Soit $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$, alors

$$\rho_\Phi(f) = \int_A \Phi(y, |f(y)|)d\mu(y)$$

est un semimodulaire sur l'espace $L^0(\mathcal{A}, \mu)$. Si Φ est positive, alors ρ est un modulaire sur l'espace $L^0(\mathcal{A}, \mu)$ et l'espace $L^\Phi(\mathcal{A}, \mu)$ s'appel espace d'Orlicz.

Théorème V.1

Si $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$, alors l'espace d'Orlicz-Musielak est un espace de Banach.

Avant de démontré le théorème on a besoin les lemme suivants :

Lemme V.2

Soient $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$ et $\mu(\mathcal{A}) < \infty$, alors pour toute suite $\|.\|_\Phi$-Cauchy, elle aussi est une suite de Cauchy converge en mesure.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et soit l'ensemble

$$V_t = \{y \in \mathcal{A} : \ \phi(y,t) = 0 \ pour \ t > 0\},$$

alors V_t est mesurable, pour tout $y \in \mathcal{A}$ la fonction $t \to \phi(y,t)$ est croissante et $\lim_{t\to\infty} \phi(y,t) = \infty$, ainsi $V_t \searrow \emptyset, \ si \ t \to \infty$, donc

$$\lim_{k\to\infty} \mu(V_K) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Si $\mu(A) < \infty$ alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(V_K) < \varepsilon$.
On note, si ϕ est positive, alors $V_t = \emptyset$ pour tout $t > 0$.
Soit l'ensemble $E \subset \mathcal{A}$ est μ-mesurable, on définit

$$\nu_K(E) = \rho_\Phi(K\chi_E) = \int_E \Phi(y,K)d\mu(y).$$

Si E est μ-mesurable avec $\nu_K(E) = 0$, alors $\Phi(y,K) = 0$ pour μ-presque chaque $y \in E$, ainsi $\mu(E\backslash V_k) = 0$ et par la définition de V_k, par conséquent E est un ensemble $\mu_{|_{A\backslash V_k}}$-nul, ce qui signifie que la mesure $\mu(E\backslash V_k)$ est absolument continu on respect ν_K. Puisque $\mu(E\backslash V_k) \leq \mu(A) < \infty$ et $\mu_{|_{A\backslash V_k}}$ est absolument continu on respect ν_K, il existe $\delta \in (0,1)$ tel que $\nu_K(E)\delta$ implique que $\mu(E\backslash V_k) \leq \varepsilon$, puisque f_k est une suite $\|.\|_\Phi$-Cauchy, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|k\varepsilon^{-1}\delta^{-1}(f_m - f_k)\|_\Phi \leq 1 \ pourtout \ m,k \geq k_0.$$

On suppose maintenant que $m,k \geq k_0$, par les deux relations

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x) \leq |\lambda|\rho(x) \ pourtout \lambda| \leq 1, \tag{V.1}$$

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x) \geq |\lambda|\rho(x) \ pourtout \lambda| \geq 1, \tag{V.2}$$

et le lemme II.2, on a

$$\rho_\Phi(K\varepsilon^{-1}\delta^{-1}(f_m - f_k)) \leq \delta\rho_\Phi(K\varepsilon^{-1}\delta^{-1}(f_m - f_k)) \leq \delta.$$

On écrit

$$E_{m,k,\varepsilon} = \{y \in \mathcal{A}; \ |f_m(y) - f_k(y)| \geq \varepsilon\},$$

alors

$$\begin{aligned}\nu_k(E_{m,k,\varepsilon}) &= \int_{E_{m,k,\varepsilon}} \Phi(y,K)d\mu(y)\\ &\leq \rho_\Phi(K\varepsilon^{-1}(f_m - f_k)) \leq \delta.\end{aligned}$$

Par un choix de δ, alors

$$\mu(E_{m,k,\varepsilon}\backslash V_K) \leq \varepsilon \textit{ avec } \mu(V_K) < \varepsilon,$$

donc $\mu(E_{m,k,\varepsilon}) \leq 2\varepsilon$.
Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre que f_k est une suite de Cauchy (on respect la convergence en mesure).
Si $\|f_k\|_\Phi \to 0$, alors depuis ci-dessous il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\{|f_k| \geq \varepsilon\}) \leq 2\varepsilon$, pour tout $k \geq K$, alors $f_k \to 0$ en mesure. ∎

Lemme V.3
Soit $\Phi \in \varphi(\mathcal{A},\mu)$, alors pour toute suite $\{f_k\} \subset L^\Phi$, $\|.\|_\Phi$-Cauchy admette une sous-suite converge μ-p.p vers une fonction mesurable f.

Preuve. Soit μ est σ-fini.
Soit $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$ avec A_i sont disjoints et $\mu(A_i) < \infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors par le lemme précédant f_k est une suite de Cauchy avec le respect de la convergence en mesure dans A_1, donc il existe une fonction mesurable $f : A_1 \to (K)$ et une sous suite f_k qui converge vers f μ-p.p, de même manière on répéter pour A_i et on passe à le diagonal de la suite on obtient une sous suite f_{k_j} et une fonction μ-mesurable $f : A \to \mathbb{K}$ telles que

$$f_{k_j} \to f \quad \mu - p.p.$$

∎

Preuve du théorème V.2.
Preuve.
Soit f_k une suite de Cauchy, par le lemme V.2 il existe une sous suite f_{k_j} et une fonction

μ-mesurable $f : A \to \mathbb{K}$ telles que $f_{k_j} \to f_k$ pour μ-presque tout $y \in \mathcal{A}$ implique

$$\Phi(y, |f_{k_j}(y) - f(y)|) \to 0, \quad \mu - p.p.$$

Soient $\lambda > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$, puisque f_k est une suite de Cauchy il existe un $K = K(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\lambda(f_m - f_k)\|_\Phi \leq \varepsilon, \; pourtout \; m, k \geq K,$$

le corollaire II.2 implique

$$\rho_\Phi(\lambda(f_m - f_k)) \leq \varepsilon,$$

donc par le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} \rho_\Phi(\lambda(f_m - f)) &= \int_A \lim_{j\to\infty} \Phi(y, \lambda|f_m(y) - f_{k_j}(y)|d\mu(y)) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \inf \int_A \Phi(y, \lambda|f_m(y) - f_{k_j}(y)|d\mu(y)) \\ &= \lim_{j\to\infty} \inf \rho_\Phi(\lambda(f_m - f_{k_j})) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho_\Phi(\lambda(f_m - f)) \to 0 \; pour \; m \to \infty \text{ et pour tout } \lambda > 0$$

et

$$\|f_k - f\|_\Phi \to 0,$$

par le lemme II.2, alors toute suite de Cauchy converge dans L^Φ. ∎

Lemme V.4

Soient $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$ et $f_k, f, g \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$.
1- Si $f_k \longrightarrow f$ μ-p.p, alors $\rho_\phi(f) \leq \lim_{k\to\infty} \inf \rho_\Phi(f_k)$.
2- Si $f_k \nearrow |f|$ μ-p.p, alors $\rho_\phi(f) = \lim_{k\to\infty} \rho_\Phi(f_k)$.
3- Si $f_k \longrightarrow f$ μ-p.p, $|f_k| \leq |g|$ μ-p.p et $\rho_\phi(\lambda g) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$, alors $f_k \to f$ dans L^Φ

Preuve.

Les fonctions $\Phi(y,.)$ sont semi continues inférieur ainsi le lemme de Fatou implique que

$$\begin{aligned}
\rho_\Phi(f) &= \int_A \Phi(y, \lim_{k\to\infty} |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \int_A \lim_{k\to\infty} \inf \Phi(y, |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_A \Phi(y, |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \rho_\Phi(f_k)
\end{aligned}$$

donc on montre (1).

Soit $|f_k| \nearrow |f|$, alors par la continuité à gauche et la monotonicité de $\Phi(y,.)$, on a

$$0 \leq \Phi(y, |f_k|) \nearrow \Phi(y, |f|) \ p.p,$$

ainsi le théorème de la convergence monotone donné

$$\begin{aligned}
\rho_\Phi(f) &= \int_A \Phi(y, \lim_{k\to\infty} |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \int_A \lim_{k\to\infty} \Phi(y, |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \int_A \Phi(y, |f_k(y)|)d\mu(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \rho_\Phi(f_k),
\end{aligned}$$

ce qui montre (2).

Soit $f_k \to f \ p.p, \ |f_k| \leq |g| \ et \ \rho(\lambda g) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$, alors

$$|f_k - f| \to 0 \ p.p, \ |f| \leq |g| \ et \ |f_k - f| \leq 2|g|,$$

puisque $\rho_\Phi(2\lambda g) < \infty$, on peut utiliser le théorème de la convergence dominé, alors

$$\lim_{k\to\infty} \rho_\Phi(\lambda|f - f_k) = \int_A \Phi(y, \lim_{k\to\infty} \lambda|f_k(y)|)d\mu(y) = 0,$$

puisque $\lambda > 0$ est arbitraire, le lemme II.2 implique que $f_k \to f$ dans L^Φ. ∎

Remarque V.3
Les propriétés précédentes s'appelant propriétés de Fatou, convergence monotone et convergence dominé (respectivement).

Théorème V.2
Soit $\Phi \in \varphi(\mathcal{A}, \mu)$, alors les propriétés suivantes sont vérifiant :

(i) $\|f\|_\Phi = \||f|\|_\Phi$, *pour tout* $f \in L^\phi$

(ii) *Si* $f \in L^\phi$, $g \in L^0(\mathcal{A}, \mu)$ *et* $0 \leq |g| \leq |f| \mu$*-p.p, alors* $g \in L^\phi$ *et* $\|g\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi$

(iii) *Si* $f_k \longrightarrow f \mu$*-p.p, alors* $\|f\|_\phi \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|f_k\|_\Phi$

(iv) *Si* $|f_k| \nearrow |f| \mu$*-p.p avec* $f_k \in L^\Phi(A, \mu)$ *et* $\sup_k \|f_k\|_\Phi < \infty$, *alors* $f \in L^\Phi$ *et* $\|f_k\| \nearrow \|f\|_\Phi$

Preuve.
Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes.
Soient $f_k \longrightarrow f \mu$-p.p et $\lambda > \lim_{k\to\infty} \inf \|f_k\|_\Phi$, alors $\|f_k\|_\Phi < \lambda$ pour une valeur large de k ainsi par la propriété de la boule unité $\rho_\Phi(\frac{f_k}{\lambda}) \leq 1$ pour une valeur large de k, d'après le lemme V.4, on a $\rho_\Phi(\frac{f}{\lambda}) \leq 1$ donc $\|f\|_\Phi \leq \lambda$ deuxième fois par la propriété de la boule unité, on a

$$\|f\|_\Phi \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|f_k\|_\Phi.$$

Ce qui est montre (iii).
Soit $|f_k| \nearrow |f| \mu$-p.p avec $\sup_k \|f_k\|_\Phi < \infty$, par (i) et (ii), on peut voir

$$\|f\|_\Phi \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|f_k\|_\Phi \leq \sup_k \|f_k\|_\Phi < \infty,$$

alors on montre que $f \in L^\Phi$, d'une part $|f_k| \nearrow |f|$ et (ii) implique que

$$\|f\|_\Phi \nearrow \lim_{k\to\infty} \sup \|f_k\|_\Phi,$$

ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \sup \|f_k\|_\Phi = \|f\|_\Phi,$$

et

$$\|f_k\|_\Phi \nearrow \|f\|.$$

■

2 La condition Δ_2

Définition V.3

On dit que $\Phi \in \varphi(\mathcal{A})$ satisfaite la condition Δ_2, s'il existe une constante $k > 0$, telle que

$$\Phi(y, 2t) \leq k\Phi(y, t)$$

pour tout $y \in \mathcal{A}$ et $t \geq 0$.

Remarque V.4

Le semimodulaire ρ dans X est satisfait la condition Δ_2, s'il existe $k \geq 2$ telle que

$$\rho(2f) \leq k\rho(f), \ \forall f \in X_\rho$$

Lemme V.5

Soit ρ un semimodulaire dans X satisfait la condition Δ_2, alors ρ est un semimodulaire continu et pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, k)$ tel que

$$\rho(f) \leq 1 - \varepsilon \ \textit{implique} \ \|f\|_\rho \leq 1, \ \textit{pour} \ f \in X_\rho$$

Preuve.

Si $\rho(f) = 0$, alors $\rho(2^m f) \leq k^m \rho(f) = 0$ ou k la constante de la condition Δ_2 de Φ, cela montre que $f = 0$ ainsi que ρ est un modulaire, alors ρ est continu à gauche, donc il suffit de vérifié

$$\rho(f) = \lim_{\lambda \to 1^+} \rho(\lambda x),$$

par la monotonicité, on a

$$\rho(x) \leq \lim_{\lambda \to 1^+} \inf \rho(\lambda x),$$

et par la convexité de ρ, on a

$$\begin{aligned} \rho(af) &\leq (2-a)\rho(f) + (a-1)\rho(2f) \\ &\leq ((2-a) + k(a-1))\rho(f) \\ &\leq (1 + (k-1)(a-1))\rho(f), \end{aligned}$$

pour $a \in [1, 2]$ par conséquent

$$\rho(x) \geq \lim_{\lambda \to 1^+} \inf \rho(\lambda x).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in X_\rho$ avec $\rho(f) \leq 1 - \varepsilon$, on fixe $a = a(k, \varepsilon) \in (1, 2)$ tel que la côté droite de l'inégalité précédente est bornée par 1, alors $\rho(af) \leq 1$ et par la propriété de la boule unité on a $\|af\|_\rho \leq 1$. ■

Définition V.4

On dit que la N-fonction généralisée Φ est uniformément convexe, si pour $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$, tel que

$$|u - v| \leq \max\{u, v\}$$

ou

$$\Phi\left(y, \frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{\Phi(y,u) + \Phi(y,v)}{2}$$

pout tout $u, v \geq 0$.

Définition V.5

On dit que le semimodulaire ρ dans X est uniformément convexe, si pour $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$, tel que

$$\rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq \varepsilon\frac{\rho(f) + \rho(g)}{2}$$

ou

$$\rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{\rho(f) + \rho(g)}{2}$$

pout tout $f, g \in X_\rho$.

Théorème V.3

Soit la N-fonction Φ est uniformément convexe, alors ρ_Φ est uniformément convexe.

Preuve.
Soit $\varepsilon_2, \delta_2 > 0$ être comme dans la définition V.4 et soit $\varepsilon = 2\varepsilon_2$, il n'y a rien à montrer si $\rho_\Phi(f) = \infty$ ou $\rho_\Phi(g) = \infty$.
Soit $\rho_\Phi(f), \rho_\Phi(g) < \infty$ ce qui implique par la convexité de $\rho(\frac{f+g}{2}), \rho(\frac{f-g}{2}) < \infty$.
On pose que
$$\rho_\Phi\left(\frac{f-g}{2}\right) > \varepsilon\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}$$
et on démontre que
$$\rho_\Phi\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \left(1-\frac{\delta_2\varepsilon}{2}\right)\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}$$
ce qui montre que le ρ_Φ est uniformément convexe.
On définit
$$E = \left\{y \in A :\ |f(y)-g(y)| > \frac{\varepsilon}{2}\max\{|f(y)|, |g(y)|\}\right\}.$$
En particulier
$$\rho_\Phi\left(\chi_{A\setminus E}\frac{f-g}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{\rho_\Phi(\chi_{A\setminus E}f)+\rho_\Phi(\chi_{A\setminus E}g)}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}.$$
Et
$$\rho_\Phi\left(\frac{f-g}{2}\right) > \varepsilon\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2},$$
implique que
$$\begin{aligned}\rho_\Phi\left(\chi_E\frac{f-g}{2}\right) &= \rho_\Phi\left(\frac{f-g}{2}\right) - \rho_\Phi\left(\chi_{A\setminus E}\frac{f-g}{2}\right)\\ &> \frac{\varepsilon}{2}\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}.\end{aligned}$$
Par un choix de δ_2 dans la définition V.4, alors
$$\rho_\Phi\left(\chi_E\frac{f+g}{2}\right) \leq (1-\delta_2)\frac{\rho_\Phi(\chi_E f)+\rho_\Phi(\chi_E g)}{2},$$

donc on estimons

$$\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}-\rho_\Phi\left(\frac{f+g}{2}\right)\geq\frac{\rho_\Phi(\chi_E f)+\rho_\Phi(\chi_E g)}{2}-\rho_\Phi\left(\chi_E\frac{f+g}{2}\right).$$

On coupé le domaine des intégrales sur les ensembles E et $A\backslash E$ et en utilisant la relation

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(f)+\Phi(g)-\Phi(\frac{f+g}{2})\right)\geq 0$$

sur $A\backslash E$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}-\rho_\Phi\left(\frac{f+g}{2}\right) &\geq \delta_2\frac{\rho_\Phi(\chi_E f)+\rho_\Phi(\chi_E g)}{2}\\ &\geq \delta_2\rho_\Phi\left(\chi_E\frac{f-g}{2}\right)\\ &\geq \frac{\delta_2}{2}\frac{\rho_\Phi(f)+\rho_\Phi(g)}{2}.\end{aligned}$$

■

Théorème V.4
Soit ρ un semimodulaire dans X satisfait la condition Δ_2, alors la norme $\|.\|_\rho$ dans X_ρ est uniformément convexe. Par conséquent X_ρ est uniformément convexe.

Preuve.
Soit $\varepsilon>0$ fixe et soit $x,y\in X$ avec $\|x\|_\rho,\|y\|_\rho\leq 1$ et $\|x-y\|_\rho>\varepsilon$, alors $\|\frac{x-y}{2}\|_\rho>\frac{\varepsilon}{2}$. Par le lemme V.5 il existe $\alpha=\alpha(\varepsilon)>0$ tel que $\rho\left(\frac{x-y}{2}\right)>\alpha$ et par le lemme II.2, on a $\rho(x),\rho(y)\leq 1$ ainsi

$$\rho\left(\frac{x-y}{2}\right)>\alpha\frac{\rho(x)+\rho(y)}{2},$$

puisque ρ est uniformément convexe alors il existe $\beta=\beta(\alpha)>0$, tel que

$$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq(1-\beta)\frac{\rho(x)+\rho(y)}{2}\leq 1-\beta.$$

■

Lemme V.6

Soit ρ_1, ρ_2 deux semimodulaires uniformément convexe dans X, alors $\rho = \rho_1 + \rho_2$ est uniformément convexe.

Preuve.

Si $\varepsilon > 0$ alors il existe un $\delta > 0$, tel que pour $j = 1, 2$

$$\rho_j\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq \varepsilon \frac{\rho_j(f)+\rho_j(g)}{2},$$

ou

$$\rho_j\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq (1-\delta) \frac{\rho_j(f)+\rho_j(g)}{2},$$

alors

$$\rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq 2\varepsilon \frac{\rho(f)+\rho(g)}{2},$$

ou

$$\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq (1-\delta\varepsilon) \frac{\rho(f)+\rho(g)}{2}.$$

On fixe f et g et on assumer

$$\rho\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq 2\varepsilon \frac{\rho(f)+\rho(g)}{2},$$

nous pouvons assumer $\rho_1\left(\frac{f-g}{2}\right) \leq \varepsilon \frac{\rho_2(f)+\rho_j(g)}{2}$ pour un choix spécifique de f et de g, donc

$$\rho_1\left(\frac{f-g}{2}\right) > \varepsilon \frac{\rho(f)+\rho(g)}{2} \leq \varepsilon \frac{\rho_1(f)+\rho_1(g)}{2}$$

ainsi le choix de δ implique

$$\rho_1\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq (1-\delta) \frac{\rho_1(f)+\rho_1(g)}{2},$$

Tenant compte de la convexité de ρ_2, on obtient

$$\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{\rho(f)+\rho(g)}{2} - \delta \frac{\rho_1(f)+\rho_1(g)}{2},$$

puisque

$$\frac{\rho_1(f)+\rho_1(g)}{2} \geq \rho_1\left(\frac{f-g}{2}\right) > \varepsilon\frac{\rho(f)+\rho(g)}{2},$$

donc

$$\frac{\rho(f)+\rho(g)}{2} \leq (1-\delta\varepsilon)\frac{\rho(f)+\rho(g)}{2}.$$

■

Lemme V.7

Soient ρ un semimodulaire uniformément convexe dans X et $x_k, x \in X_\rho$, tels que

$$x_k \to x,\ \rho(x_k) \to \rho(x) \text{ et } \rho(x) < \infty.$$

Alors

$$\rho\left(\frac{x_k-x}{2}\right) \longrightarrow 0.$$

Preuve.

Nous procédons par contradiction. Supposer que il existe un $\varepsilon > 0$ et une sous suite x_k telle que

$$\rho\left(\frac{x_{k_j}-x}{2}\right) > \varepsilon,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, puisque ρ est uniformément continu il existe $\delta > 0$ tel que

$$\rho\left(\frac{x_k-x}{2}\right) \leq \varepsilon \text{ ou } \rho\left(\frac{x_k+x}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{\rho(x_k)+\rho(x)}{2}$$

En particulier la suite x_k satisfaite toujours la deuxième alternative. En même temps que $\frac{1}{2}(x_k+x) \to x$ on faiblir la semicontinuité inférieur de ρ et $\rho(x_k) \to \rho(x)$ implique que

$$\begin{aligned}\rho(x) &\leq \lim j \to \infty \inf \rho\left(\frac{x_k+x}{2}\right)\\ &\leq (1-\delta)\lim j \to \infty \inf \frac{\rho(x_{k_j})+\rho(x)}{2}\\ &= (1-\delta)\rho(x).\end{aligned}$$

Utilisons que $\rho(x) < \infty$, on obtient $\rho(x) = 0$ et par la convexité et $\rho(x_k) \to \rho(x)$, alors

$$\rho\left(\frac{x_k - x}{2}\right) \leq \frac{\rho(x_k) + \rho(x)}{2} \to \rho(x) = 0,$$

pour $n \to \infty$. Contradiction. ∎

3 Séparabilité

Définition V.6

Soit Φ une N-fonction généralisée, l'ensemble

$$\widetilde{L}^{\Phi} = \left\{f \in L^{\Phi};\ \rho_{\Phi}(f) < \infty\right\}$$

est appelé la classe de Orlicz-Museilak et l'ensemble

$$E^{\Phi} = \left\{f \in L^{\phi};\ \rho_{\Phi}(\lambda f) < \infty \text{ pour } \lambda > 0\right\}$$

est un sous espace vectoriel contenant dans $\widetilde{L}^{\Phi}$.

Définition V.7

On dit qu'une fonction $\Phi \in \varphi(\Omega, \mu)$ est localement intégrable sur Ω, si $\rho_{\Phi}(t\chi_E) < \infty$, pour tout $t \geq 0$ et E μ-mesurable tel que $E \subset \Omega$, avec $\mu(E) < \infty$.

Remarque V.5

1- On note que la notion de localement intégrable dans définition est différente qu'on utilise L^1_{loc}.
2- L'ensemble E^{Φ} est un sous ensemble fermé de L^{Φ}.

Théorème V.5

Soit S l'ensemble de toute les fonctions simples intégrables sur Ω et soit $\Phi \in \varphi(\Omega, \mu)$ une fonction localement intégrable, alors $S \subset E^{\Phi}$, de plus, on suppose que μ est σ-finie, alors E^{Φ} est la fermeture de S et S est ρ-dense dans L^{Φ}.

Preuve.
L'intégrabilité locale implique que $S \subset E^{\Phi}$. Puisque E^{Φ} est fermé d'après la remarque précédente, il suffit de prouver que chaque $f \in E^{\Phi}$ est dans la fermeture du S.
Soit $f \in E^{\Phi}$ avec $f \geq 0$, puisque $f \in L^0(A)$ il existe $f_k \in S$ tel que $0 \leq f_k \nearrow f$ presque par tout, ainsi $f_k \to f$ dans $L^P hi$ et par le théorème de la convergence dominé f est dans la fermeture de S.
Si nous laissons tomber la prétention, alors on coupe x en deux parties positives et négatives (réelle et imaginaires) qui appartiennent aussi à E^{Φ}. ∎

Théorème V.6
Soit $\Phi \in \varphi(\Omega, \mu)$ une fonction localement intégrable et soit μ est séparable, alors E^{Φ} est séparable.

Preuve.
Pour la preuve voir [23]. ∎

4 Exemples

Cette section est consacré à des exemples de quelques classes des espaces inspirés par les espaces d'Orlicz, qui trouvent l'application importante dans la théorie des potentiels et les équations differtielles, notamment les espaces d'Orlicz-Sobolev, d'Orlicz-Lorentz et d'Orlicz-Hardy.
• Soient k un entier positif, Ω un ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in \varphi$ une fonction convexe.
Soit X un espace de mesure de Lebesgue et soit la fonction de valeur x admet une dérivée $D^{\alpha}x$ d'ordre $|\alpha| \leq k$ appartient à l'espace L^{Φ}, avec

$$\rho(x) = \int_{\Omega} \Phi(t, |x(t)|)dt, \ \rho_{\alpha}(x) = \rho(D^{\alpha}x) \text{ et } \overline{\rho}(x) \sum_{|\alpha| \leq k} \rho_{\alpha}(x).$$

L'espace modulaire X_{ρ} est appelé espace **d'Orlicz-Sobolev généralisé**, et on noté par $W^k_{\Phi}(\Omega)$.
• Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $\Phi \in \varphi$.

Soit $h = h_\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction monotone croissante, on définit l'espace **d'Orlicz-Lorentz** par

$$L^{\Phi,h} = \left\{ f \in L^0 : \|f\|'_{\Phi,h} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|'_{\Phi,h} = \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{k}\right) dh(t) \leq k \right\}.$$

• Soient D le disque d'unité ouvert dans le plan complexe et C comme son borne *i.e.,*

$$D = \{z; |z| < 1\},\ C = \{z; |z| = 1\}.$$

Soit φ une fonction non négative dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(x) \to 0$ si $x \to -\infty$ non croissante mais positive $\varphi(x) > 0,\ x \neq 0$, alors l'ensemble $\widetilde{H}^\varphi$ de toute fonction $f : D \to \mathbb{C}$, telle que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\log |f(re^{i\theta})|\right) d\mu(\theta)$$

est bornée, pour $0 \leq r < 1$. Si la fonction φ est convexe, $\widetilde{H}^\varphi$ est appelé classe de l'espace **d'Orlicz-Hardy**.

l'espace **d'Orlicz-Hardy**, noté par H^φ est l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ telle que $\alpha f \in \widetilde{H}^\varphi$ pour $\alpha = \alpha_f > 0$.

Conclusion générale et perspectives

Dans notre travail on traiter les équations intégrales au aspect fonctionnel et effectuions cette etude par des résultat numériques, nous intéressons aux équations intégrales non linéaires, c-à-d, l'appartenance de tels opérateurs de la forme

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, y, u)dy,$$

et le cas particulier l'équation de Hammerstein de la forme

$$Hu(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, u)dy,$$

aux espaces fonctionnels notamment espace de Lebesgue classique, à exposant variable et en fin l'espace d'Orlicz.

Le rôle le plus essentiel c'est l'étude de la compacité d'un opérateur, pour dire que l'existence de la solution d'après des critère connus dans ce domaine (de Fredholm et autres).

L'équation intégrale de type Hammerstein ont été étudiée par de nombreux auteurs et ont un des domaines les plus importants d'application des méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire, et en particulier la théorie des opérateurs non linéaires de type monotone. Les premiers résultats de la solvabilité uniques de l'équation ont été obtenus en 1930 par Hammerstein à l'aide des méthodes variationnelle. Choisir la meilleure méthode dépend de l'espace de la recherche de positions en solution, déterminée par les propriétés de la fonction f et k.

Le but de cet article est d'étudier l'existence des différentes solutions de l'équation de type Hammerstein avec d'imposition des hypothèses sur l'espace X (espace de Lebesgue

classique) et les opérateurs K et N_f.
La première application de la notion opérateurs monotones de l'équation intégrale de Hammerstein a été faite implicitement par Golomb en 1935 et Vainberg en 1956. Les Méthodes de Monotoniques ont été appliquées avec succès pour les opérateurs K et N_f dans les espaces Hilbert, Dolph et Minty (1963) et Kolodner (1964). Par la suite, la théorie des opérateurs monotones appliqués à l'équation de Hammerstein dans les espaces de Banach par Amann (1969), Brézis (1968) et Gupta Browder (1969), Browder, Figueiredo et Gupta (1970), Petryshyn et Fitzpatrick (1971).
Pour résoudre numériquement l'équation de type Hammerstein on peut appliquer les méthodes de projections, spectrales, ... etc.
L'étude de l'équation de Hammerstein sur un domaine non borné, où la forme suivante

$$Au(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)f(y,u)dy$$

bien sur elle change plusieurs notions qu'on a été faite dans cette thèse.
Le principal ouvrages de référence monographie sur l'équation de Hammerstein sont Pascali-Sburlan (1978) et Zeidler (1990).
Ainsi l'espace le plus riche pour étudier les équations intégrales singulières avec son importance dans plusieurs domaine scientifiques, où généralement ces équations sont de la forme suivante

$$Au(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} u(y)dy \tag{V.3}$$

cette etude est basé sur les estimations en utilisant la fonction maximale, et on regarde que cette tache est liée avec un domaine connu les théories des opérateurs pseudo-différentiels.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Acadimic Press, New York, 1995. 2

[2] R.P. Agarwal, S. Ding and C. Nolder, *Infinite Interval Problems For Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, London, 2001.

[3] R.P. Agarwal, S. Ding and C. Nolder, *Inequalities for Differential Forms*, Springer, New York, 2009.

[5] J. Appell and P.P. Zabreiko, *Nonlinear superposition operators*, Spring, 1989.

[5] J. Appell, E. De Pascale and A. Vignoli, *Nonlinear Spectral Theory*, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[6] R. Azzati and K. Shakibi, *On approximation and numerical solution of Fredholm-Hammerstein integral equations using multiquadric quasi-interpolation*, Communication in numerical analysis, Vol 112 (2012), pp. 1-10.

[7] K. Balachandran and S. Ilamaran, *A note on integrable solutions of Hammerstein integral equations*, Math. Sci, Vol 105 (1995), pp. 99-103.

[8] H. Z. Bang, *Separability of Sobolev-Orlicz spaces of finite order*, Mathematical Notes, Vol 61 (1997), pp. 141-143.

[9] J. Banas and Z. Knap, *Integrable solutions of a functional-integral equation*, Revista Mathematica. Vol 2 (1989), pp. 31-38.

[10] C. Bardaro and G. Vinti, *Some inclusion theorems for Orlicz and Musielak-Orlicz type spaces.* Annali di Matematica pura ed applicata, Vol CLXVIII (1995), pp. 189-203.

[11] H.O. Bakodah and M.A. Darwish, *On Discrete Adomian decomposition method with Chebyschev abscissa for nonlinear integral equations of Hammerstein type.* Advances in pure mathematics. Vol 2 (2012), pp. 310-313.

[12] K. Baron and H. Hundzik, *Orlicz spaces which are L^p-spaces*, Aequationes Mathematicate. Vol 48 (1994), pp. 254-261.

[13] T.D. Benavides and M.A.J. Pineda, *Fixed-point theorem for asymptotically regular mappings in Orlicz function spaces*, Nonlinear Analysis. Vol 44 (2001), pp. 829-842.

[14] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Acadimic press.Inc, Florida, 1988. 14

[15] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[16] F.E. Browder, *Strongly nonlinear integral equations of Hammerstein type*, National Academy of sciences, Vol 72 (1975), pp. 1937-1939.

[17] T. Cardinali and N.S. Papageorgiou, *Hammerstein Integral inclusions in reflexive Banach spaces*, AMS, Vol 127 (1999), pp. 95-103.

[18] Q.L.G.F. Cao, *Hardy-Orlicz spaces and thier multiplication operators*, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol 21 (2005), pp. 593-598.

[19] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, 2008.

[20] C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations*, Chelsea Publishing Company, Second Edition, 1977.

[21] O. Christensen, *Functions, Spaces, and Expansions*, Birkhauser, Berlin, 2010.

[22] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$, Math. Inequal. App, Vol 7 (2004), pp. 245-253. 19

[23] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto and M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer Heidelberg, London, 2011. 128

[24] L. Debnath and P. Mikusninski, *Introduction to Hilbert spaces with application*, Academic press, New York, 1990. 9

[25] N. Dunford and J. Schwazrtz, *Linear operator I.* Int. Publ, New Yourk, 1966. 45

[26] X.L. Fan, *Amemiya norm equals Orlicz norm in Musielak-Orlicz spaces*, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol 23 (2007), pp. 281-288.

[27] X.L. Fan and D. Zhao, *On the spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl, Vol 263 (2001), pp. 424-446. 19

[28] D. Franco, G. Infante and D. O'regan, *Positive and nontrivial solutions for the Urysohn integral equations*, Acta Mathematica Sinica, Eg Series, Vol 22 (2006), pp. 1745-1750.

[29] M. González and J. M.Gutiérrez, *Orlicz-Pettis polynomials on Banach spaces*, Monatsh. Math, Vol 129 (2000), pp. 341-350.

[30] P. Hess, *On nonlinear equations of Hammerstein type in Banach spaces*, AMS, Vol 30 (1971), pp. 308-312.

[31] H. Hochstadt, *Integral Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1989. 2

[32] H. Hundzik and L. Maligranda, *Amemiya norm equals Orlicz norm in general*, Indag. Mathem, Vol 11 (2000), pp. 573-585. 48

[33] P.Jain, L.E.Persson and P.Uppeti, *Inequalities and properties of some generalized Orlicz classes and spaces*, Acta Math. Hungar, Vol 117 (2007), pp. 161-174.

[34] R.P. Kanwal, *Linear Integral Equations, Theory and Technique*, Academic Press, New York, 1971.

[35] A.Yu. Karlovich, *Singular integral operators with regulated coefficients in reflexive Orlicz spaces*, Siberian Mathematical Journal, Vol 38 (1997), pp. 297-311.

[36] A.Yu. Karlovich, *The index of singular integral operators in reflexive Orlicz spaces*, Mathematical Notes, Vol 64 (1998), pp. 383-396.

[37] A. Kasperski, *Compactness and compact operators on Musielak-Orlicz spaces of multifunctions*. Arch.Math, Birkh ?user Verlag, Basel, Vol 68 (1997), pp. 45-54.

[38] N. Kikuchi and S. Nakagiri, *An exixtence Theorem of Solutions of Non-Linear Integral equations*. Funkcialaj Ekvacioj, Vol 15 (1972), pp. 131-138.

[39] B.S. Komal and S. Gupta, *Multiplication Operators Between Orlicz Spaces*. Intedr.equ.oper.theory, Birkh ?user Verlag, Basel, Vol 41 (2001), pp. 324-330.

[40] J. Kondo, *Integral Equations*, Kodansha, Tokyo, and Clarendon Press, Oxford, 1991.

[41] P. Kosmol and D.M. Wichards, *Optimization in functions spaces*, De Gruyter series in non linear analysis and applications, Berlin, 2011. 47

[42] O. Kovacik and J. Rakosnik, *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak mathematical journal, Vol 41 (1991), pp. 592-618. 19

[43] A. Kufner, J. Oldrich and S. Fucik, *Function spaces*, Noordhoff international publishing, Leyden, Netherlands, 1977.

[44] R. Kumar, *Composition operators on Orlicz spaces*, Intedr.equ.oper.theory, Birkh ?user Verlag, Basel, Vol 29 (1997), pp. 17-22.

[45] M.A. Krasnoselskii, *On the continuity of the operator Fu(x)=f(x,u(x))*, Dokl.Akad.Nauka, SSSR Vol 77 (1951), pp. 259-262.

[46] M.A. Krasnoselskii, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspehi. Mat. Nauk, Vol 10 (1955), pp. 123Ű127. 10

[47] M.A. Krasnoselskii and YA.B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Nordhoff Ltd. Groningen, 1961. 4, 59, 104, 112

[48] M.A Krasnoselskii, P.P. Zabrejko, J.I. Pustyl'ink and P.J. Sobolevskii, *Integral operators in spaces of summable functions*, (English translation : Noordhoff, Leyden, 1976), Nauka Moscow, 1966. 3, 56, 82, 83, 97, 98

[49] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabrejko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, (Translated from the Russian by Christian C. Fenske, 1984), Nauka Moscow, 1975.

[50] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York, 1999. 69, 70

[51] O. Lipovan, *Asymptotic properties of solution to some nonlinear integral equations of convolution type*, Nonlinear. Math, Vol 00, (2007), pp. 00-00.

[52] I.A. Leca, *Analiza si aproximea solutiilor ecuatiilor Hammerstein*, Thèse doctorat, Costanta, 2009.

[53] W.A.J. Luxemburg, *Banach function spaces*, Thesis of Doctorate, Delft, 1955.

[54] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen, *Compactness of Integral Operators in Banach Function spaces*, Math. Annalen, Vol 149 (1963), pp. 150-180.

[55] K. Maleknedjad, K. Nouri and M. Norsati, *Convergence of approximate solution of nonlinear Fredholm-Hammerstein integral equations*, Communications in nonlinear science and numerical simulation, Vol 15 (2010), pp. 1432-1443.

[56] M. Meehan and D. O'regan, *Positive L^p solutions of Hammerstein integral equations*, Arch. Math, Vol 76 (2001), pp. 366-376. 10

[57] J. Muzielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Springer-Verlag. New York, 1983.

[58] P.F.X. Muller and W. Schachermayer, *Geometry of Banach Spaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 158 , Proceedings of the Conference held in Strobl, Austria, 1989.

[59] M. Nadir and B. Gagui, *two Points for the adaptive Method For the numerical Solution of Volterra Integral Equations*, International Journal Mathematical Manscripts, Vol 1 (2007), pp. 133-140.

[60] M. Nadir and B. Gagui, *A numerical approximation for solutions of Hammerstein integral equations in L^p spaces*,Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences Vol 8 (2014), pp. 23-31.

[61] I.P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, GITTL, Moscow-Leningrad,1950, 1957(Russian), Ungar, New York, Vol I, 1955, Vol II, 1960.

[62] M.P. Navarro, *The Bochner integral of functions with values in an Orlicz space*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics. Vol 24 (2000), pp. 65-72.

[63] V. Niemytzki, *Théorèmes d'existences et d'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires*, MATHEMATICAL COLLECTOR, Vol 41 (1934), pp. 421-438.

[64] M. Nowak, *Compactness of Bochner representable operators on Orlicz spaces*, Positivity, Birkh ?user Verlag, Basel-Switzerland, Vol 13 (2009), pp. 193-199.

[65] P. Nowosad and R. Tovar, *The Carleman-Smithies theory of integral operators for reflexive Orlicz spaces*, Integr.equ.oper.theory. Vol 2/3 (1979), pp. 388-406.

[66] W. Orlicz, *Linear functionnal analysis*, Series in real analysis Vol.4, World scientific Co.Pte.Ltd, 1992.

[67] W.V. Petryshyn and P.M. Fitzpatrick, *New existence theorems for nonlinear equations of Hammerstein type*, AMS, Vol 160 (1971), pp. 39-63.

[68] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer-Science+Business Media, 2002. 2, 3

[69] J. Robert, *Approximations des espaces d'Orlicz et applications*, Numer.Math, Vol 17 (1971), pp. 338-356.

[70] M.M. Rao and Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker Inc. New York-Basel-Hong Kong, 1991. 45

[71] M.M. Rao and Z.D. Ren, *Applications of Orlicz spaces*, Marcel Dekker Inc. New York-Basel-Hong Kong, 2002. 36

[72] S. Samko, *On compactness of operators in variable exposant Lebesgue spaces*, Operator Theory Advances and Applications, Vol 202 (2010), pp. 497-508. 96, 98

[73] S. Samko and V. Rabinovich, *Pseudodifferential operators approach to singular integral operators in weight variable exposant Lebesgue spaces on Carleson curves*, Int. Equ. Oper. Theory, Vol 69 (2011), pp. 405-444. 96

[74] J. Spurný, *A note on compact operators on normed linear spaces*, Expositions Mathematicae, Vol 25 (2007), pp. 261-263.

[75] H. Triebel, *Theory of function spaces.* Akad. Verlag. Geest and Portig K.-G, Leipzig, 1983.

[76] B.V. Trushin, *Embedding of Sobolev space in Orlicz spaces for a domain with irregular boudary*, Mathematical Notes, Vol 79 (2006), pp. 767-778.

[80] M. Väth, *Volterra and integral equations of vector functions*, Marcel Dekker Inc, New York, Basel, 2000.

[78] M. Väth, *Complete continuity of the Uryson operator*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol 30 (1997), pp. 527-534.

[79] M. Väth, *Ideal spaces*, Springer, New York, 1997.

[80] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publications. INC, NEW YORK, 1959.

[81] P.A. Vuillermot, *Compact embeddings for weighted Orlicz-Sobolev spaces on* $\mathbb{R}^n$, Math.Ann. Vol 279 (1987), pp. 277-296.

[82] Z. Xuexian, *Weighted inequalities for certain maximal functions in Orlicz spaces*, Approx. Theory & its Appt. Vol 17 (2001), pp. 65-76.

[83] N.N. Yerzakova, *On measures of non-compactness and apllications to embeddings*, Nonlinear Analysis Methods and application, Vol 30 (1997), pp. 535-540.

[84] P.P. Zabrejko and J.I. Pustyl'ink, *On the continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L^p spaces*, Uspehi Mat. Nauka, Vol 19 (1982), pp. 204-205.

[85] P.P. Zabrejko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnoselskii, S.G. Mikhlin, L.S. Rakovshchik and V.J. Stetsenko, *Integral equations*, (English translation : Noordhoff, Leyden, 1975), Nauka Moscow, 1968.

مُلَخص

في هذِه الأُطروحة، قمنَا بدرَاسة المعَادلَات التكَاملية الغير خطية و بَالأَخص منهَا المعَادلَات المسمَات بنوع هَامرستَاين، أين يكون الشكل كَالتَالي :

$$H\varphi(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

بحيث المجموعة Ω قَابلة لِلقيَاس و الدَالتَان $k(.,.),\ f(.)$ مستمرتَان.
لِلمعَادلَات التكَاملية أهمية كبيرة في المجَالَات التطبيقية، علَى سبيل المثَال (رَاديَاتيف،.. الخ).

لحل المعَادلَات التكَاملية من نوع هَامرستَاين، علينَا القيَام بعدة خطوَات :

١- **درَاسة الإِستمرَارية و الترَاص لِلمؤَثرَات من الشكل** H

٢- **درَاسة الإِنتمَاء لِلفضَاءَات التَالية : فضَاء لوبيغ، فضَاءَ أورليز**

٣- **تقدير الحلول التقريبية و هذَا بَالَإعتمَاد علَى بعض الطرق و التقنيَات، منهَا :**
(i) طريقة النقطة الثَابتة.
(ii) تقنية تحويل المؤَثرَات الغير خطية إلَى خطية و هذَا بإِستعمَال نظرية كرَاسنولسكي أو نميليشكي.
(iii) طريقة التقريب بإِستعمَال المؤُثرَات المتعَامدة .

أَلكَلِمَات المفتَاحية: أَلمعَادلَات التكَاملية، أَلمعَادلَات التكَاملية من نوع هَامرستَاين ، فضَاءَ لوبيغ، فضَاءَ أورليز.

Abstract

In this thesis we study the nonlinear problems concerning the field of the integral equations, particularly equations of Hammerstein type, whose the general form is

$$H\varphi(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

where Ω be a measurable set and the $k(.,.),\ f(.)$ are knowns functions.
A very important role the non linear integral equations play in the practical fields, for examples (radiative atmosphere,. etc).

The solution of the operator H is given by a several steps:

1. **We study the continuity and the compactness of the operator H.**
2. **We study of the operator H to belongs in the spaces of Lebesgue and Orlicz**
3. **Uniforms estimates on the approximate solutions.**
   These estimates of the nonlinear operator, are established by using a methods or technics :
   (i) method of the fixed point.
   (ii) method of linearization, i.e., the decomposition of certain operator of the Hammerstein type by a combination of the linear operators, for example the theory of Krasnoselkii, Nemytskij.
   (iii) a numerical aspect concerning methods of projections or methods of approximation by orthogonal polynomials which the points are choized by collocation or by zeros of this polynomials.

Keywords : Integral equations, Hammerstein integral equations, Lebesgue spaces, Orlicz spaces.

Résumé

Dans cette thèse on étudié les problèmes non linéaires concernant un type dans le domaine des équations intégrales particulièrement les équations intégrales de type Hammerstein, dont la forme générale est la suivante

$$H\varphi(x) = \int_\Omega k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

où Ω est un ensemble mesurable et les fonctions $k(.,.),\ f(.)$ sont connues.
Les équations intégrales non linéaires joue un rôle très important dans les domaines pratiques, par exemples (l'atmosphère radiatif,.... etc).

La résolution de l'équation H se faite en plusieurs étapes :

1. **On étudie la continuité et la compacité de l'opérateur H**
2. **Appartenance de l'opérateur H dans certains espaces de Lebesgue et d'Orlicz.**
3. **Estimations uniformes sur les solutions approchées.**
   Ces estimations sont établies par des méthodes ou des techniques :
   (i) La méthode du point fixe.
   (ii) La méthode de linéarisation, c'est-à-dire la décomposition de certain opérateur de type Hammerstein par une combinaison des opérateurs linéaires, par exemple la théorie de Krasnoselkii, Nemytskij
   (iii) Un aspect numérique concernant les méthodes de projections ou méthodes d'approximation par des polynômes orthogonaux dont les points de collocations sont des zéros de ces polynômes.

Mots clés : Equation intégrale, équation de Hammerstein, espace de Lebesgue, espace d'Orlicz.