

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGINIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE

OPTION : COMMANDE ELECTRIQUE

THEME

***MODELISATION DU FILTRE R.I.F PAR LA TRANSFORMEE DE FOURIER
DISCRETE***

Proposé et dirigé par :
Monsieur : NOURI Hamou

Présenté par :
Belkheir Tarek
Berrabah Ahmed
Bouguerra Abderrahmane

Année Universitaire: 2006/2007

Remerciements

À l'issue de cette fin d'étude, nous adressons nos sincères remerciements premièrement à dieu tout puissant qui nous à donné la santé, la volonté et la patience, ensuite à notre promoteur monsieur NOURI Hamou pour son dévouement incessant, ses orientations et surtout sa gentillesse afin de nous permettre l'accomplissement de ce travail.

Qu'il nous soit permis aussi d'exprimer nos vifs remerciements et notre gratitude à tous ceux qui ont accepté de juger ce travail, ainsi qu'à ceux qui nous ont aidé de près comme de loin pour le mener à bien, sans oublier tout le personnel du département électrotechnique.

LISTE DES FIGURES :

Figure I.1 : Représentation graphique de la classification amplitude continu- discret	10
Figure I.2 : Théorème de projection	13
Figure I.3 : Représentation graphique du signal $x(t)$	17
Figure I.4 : Représentation de l'approximation $\tilde{x}(t)$ à l'aide des signaux orthonormés	17
Figure I.5 : Signal périodique à une énergie finie	18
Figure II.1 : Graphe de fluence de la première étape	42
Figure II.2 : Graphe de fluence de la deuxième étape	43
Figure II.3 : Graphe de fluence complet de la TFD pour $N=8$ par la FFT en temps partagé	44
Figure III.1 : Gabarit d'un filtre	47
Figure III.2 : Représentation schématique d'un filtre numérique	50
Figure III.3 : Filtres non-récurrents et récurrents	51
Figure III.4 : Réalisation d'un filtre numérique par transformée de Fourier discrète	52
Figure III.5 : Blan uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées	53
Figure III.6 : Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées	53
Figure III.7 : Structure directe d'un filtre numérique non-récurrent	61
Figure III.8 : Structure directe d'un filtre numérique récurrent	62
Figure III.9 : Structure canonique d'un filtre numérique récurrent	63
Figure III.10 : Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre	64
Figure III.11 : Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.	64
Figure III.12 : Structure directe d'un filtre à convolution	65
Figure III.13 : Structure transposée d'un filtre à convolution	65
Figure IV.1 : Organigramme général de la résolution numérique du RIF	71
Figure IV.2 : Représentation graphique de la TFD	72
Figure IV.3 : Influence du lobe principale sur la solution	73
Figure IV.4 : Influence des lobes secondaires sur la réponse du système	74
Figure IV.5 : Fenêtre triangulaire	75
Figure IV.6 : Fenêtre Hamming	76
Figure IV.7 : Fenêtre de Hanning	76
Figure IV.8 : Fenêtre de Blackman	77
Figure IV.9 : Fenêtre de Kaiser	78

Figure IV.10 : Filtre passe bas avec fenêtre rectangulaire	79
Figure IV.11 : Filtre passe bas avec fenêtre triangulaire	80
Figure IV.12 : Filtre passe bas avec fenêtre Hamming	81
Figure IV.13 : Filtre passe bas avec fenêtre Kaiser	82
Figure IV.14 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1}=0.1$ et $w_{c2}=0.35$ d'ordre $N=100$	83
Figure IV.15 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1}=0.1$ et $w_{c2}=0.25$ d'ordre $N=167$	83
Figure IV.16 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1}=0.1$ et $w_{c2}=0.21$ d'ordre $N=228$	84
Figure IV.17 : Spectre d'amplitude du filtre passe bande limite par Hamming	84
Figure IV.18 : Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mot quantifie sur 4 bits	87
Figure IV.19 : Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mots quantifies sur 8 bits	88
Figure IV.20 : Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mot quantifies sur 16 bits	88
Figure IV.21 : Signal de fréquence normalisée 0.25	90
Figure IV.22 : Signal de fréquence normalisée 0.05	90
Figure IV.23 : Signal d'entrée de filtre 1	91
Figure IV.24 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure directe	91
Figure IV.25 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure FFT	92
Figure IV.26 : Signal de fréquence normalisée 0.05	93
Figure IV.27 : Signal de fréquence normalisée 0.25	93
Figure IV.28 : Signal de fréquence normalisée 0.1	94
Figure IV.29 : Signal d'entrée du filtre	94
Figure IV.30 : Signal de sortie du filtre 1 selon la structure directe	95
Figure IV.31 : Signal de sortie du filtre 2 selon la structure directe	95
Figure IV.32 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure FFT	96
Figure IV.33 : Signal de sortie du filtre 2 selon une structure FFT	96
Figure IV.34 : Signal d'entré du filtre 1	97
Figure IV.35 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure directe	97

SOMMAIRE

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SIGNAUX ET TRAITEMENT DU SIGNAL

I.1- Introduction	3
I.2- Place de la théorie et du traitement des signaux.....	3
I.3- Modèle et mesure des signaux	4
I.4- Traitement des signaux	5
I.5- Classification des signaux	6
I.5.1- Classification déterministe – aléatoire	6
I.5.2- Classification énergétique	8
I.5.3- Classification continu – discret.....	9
I.6- Représentation vectorielle des signaux	11
I.6.1- Intérêt de la représentation vectorielle des signaux	11
I.6.2- Espace vectoriel des signaux	11
I.6.3- Approximation au sens de l'erreur quadratique minimale.....	12
I.6.3.1- Théorème de projection.....	13
I.6.3.2- Théorème de Parseval	14
I.6.4- Développement en série d'impulsions rectangulaires décalées.....	16
I.6.5- Développement en série de Fourier	18
I.6.5.1- Coefficients de série de Fourier.....	18
I.6.5.2- Transition des séries de Fourier vers la transformée de Fourier.....	21
I.7-Conclusion.....	22

CHAPITRE II

LES TRANSFORMEES DE FOURIER

II.1- Introduction	23
II.2- Généralités sur la transformée de Fourier générale	23
II.3- Propriétés de la transformée de Fourier	25
II.3.1- linéarité	25
II.3.2- Dérivation et intégration	26
II.3.3- Translation	26
II.3.4- Symétrie	27
II.4- Transformation en Z	28
II.4.1- Généralités	28
II.4.2- Définition de la transformée en Z.....	28
II.4.3- Propriétés de la transformée en z	28
II.4.3.1- Linéarité	28
II.4.3.2- Décalage temporel	29
II.4.3.3- Facteur d'échelle en z	29
II.4.3.4- Inversion de l'axe temporel	29
II.4.3.5- Convolution	29
II.4.4- Transformée en Z inverse	30
II.5- Introduction à la transformée de Fourier discrète	31
II.6- Introduction à partir de la transformée de Fourier d'un signal à temps continu	31
II.7- Introduction à partir de la transformée de Fourier d'un signal à temps discret	32
II.8- Discrétisation de fréquence	32

II.9- Effet de la discrétisation de la fréquence	33
II.9.1- Propriété de séparabilité	34
II.9.2- Propriété: périodicité	34
II.9.3- Propriété :orthonormalité	34
II.10- Qualité de l'approximation discrète	34
II.11- Transformée de Fourier discrète des signaux périodiques	35
II.12- Transformation de Fourier discrète pour des signaux de durée illimitée	36
II.13- Propriétés de la T.F.D.	36
II.13.1- Périodicité	36
II.13.2- Linéarité	36
II.13.3- Décalage cyclique temporel	37
II.13.4- Décalage cyclique fréquentiel	37
II.13.5- Symétrie de la TFD	37
II.13.6- Convolution et corrélation cyclique.....	38
II.13.7- Théorème de Parseval.....	38
II.14- Relation entre TFD et la transformée en Z	39
II.14.1- Reconstitution on Z	39
II.14.2- Reconstitution de la transformée de Fourier.....	39
II.15- Réalisation pratique	40
II.16- Transformée de Fourier rapide	40
II.16.1- Principe	40
II.16.2- FFT partagée dans le temps.....	41
II.16.2.a- Première étape	41
II.16.2.b- Deuxième étapes	42
II.16.2.c- Dernière étape	43

II.17- Comparaison de la TFD et de la FFT	45
II.18- Conclusion	45

CHAPITRE III

FILTRAGES NUMERIQUES

III.1-Introduction	46
III.2- Définition d'un filtre	46
III.3- Définition du gabarit d'un filtre	46
III.3.1- Paramètres de spécification	47
III.4- Causalité et stabilité d'un filtre	47
III.4.1- Causalité	47
III.4.1.1- Principe de Causalité	47
III.4.2- Stabilité	48
III.5- Les filtres numériques	49
III.5.1- Introduction et définition	49
III.5.2- Filtrage numérique simple - lissage temporel	52
III.6- Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie	53
III.6.1-Équation aux différences	54
III.6.2- Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$	55
III.6.2.1- Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle ..	56
III.6.2.2- Méthode de l'invariance indicielle	57
III.6.2.3- Transformation adaptée	58
III.6.2.4- Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation	58
III.6.2.5- Transformation homographique ou équivalence de l'intégration	59
III.7- Synthèse des filtres numériques à impulsion finie	60

III.8- Réalisation des filtres numériques	61
III.9- Filtres numériques synthétisés par $H(z)$	61
III.9.1- Structure directe	61
III.9.2- Structure canonique	62
III.9.3- Structure en composants simples	63
III.10- Filtres numériques basés sur la convolution	65
III.11- Filtres numériques avancés	66
III.11.1- Filtres numériques de la valeur médiane.....	66
III.11.2- Filtres numériques multiscadence	67
III.12-Comparaison des filtres RIF et RII	67
III.13- Conclusion	69

CHAPITRE IV

MODELISATION DES FILTRES NUMERIQUES RIF

IV.1-Introduction	70
IV.2-Les étapes de résolution	71
IV.3- Les fenêtres Principales.	72
IV.3.1- Fenêtre rectangulaire	72
IV.3.2- Effet de la limitation de durée	72
IV.3.3- Caractérisation des fenêtres spectrales.....	73
IV.3.4- Fenêtre triangulaire	75
IV.3.5- Fenêtre de Hamming et de Hanning	75
IV.3.6- Fenêtre de Blackman	77
IV.3.7- Fenêtre de Kaiser	78
IV.4- Synthèses des filtres numériques RIF par la méthode de fenêtrage	78
IV.4.1- Présentation de la méthode.....	78

IV.4.2 - Synthèse d'un filtre passe bas.....	79
IV.4.2.1- Avec fenêtre rectangulaire.....	79
IV.4.2.2- Avec fenêtre triangulaire.....	80
IV.4.2.3- Avec fenêtre hamming.....	81
IV.4.2.4- Avec fenêtre kaiser.....	82
IV.4.3- Interprétation du résultat	85
IV.5- Méthode de l'échantillonnage en fréquence	85
IV.6-Quantification	86
IV.6.1-Quantification par troncature	86
IV.6.2-Quantification par l'arrondi	87
IV.6.3-Résultat et interprétation :.....	87
IV.6- Simulation des filtres numériques RIF a phase linéaire.....	89
IV.6.1- Types des signaux appliques à l'entrée du filtre	89
IV.6.2- Résultat et interprétation	89
IV.7- Conclusion.....	98
Conclusion générale.....	99

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Le signal support de l'information et le moyen de communication des hommes entre eux et avec leur environnement de nature très variée. Les signaux sont l'objet d'une modélisation mathématique commune appelée théorie du signal, s'appuyant principalement sur l'analyse fonctionnelle l'algèbre linéaire et le calcul des probabilités. Cette théorie fournit les outils permettant de modéliser les principaux traitements opérés sur les signaux, puisque le filtrage linéaire joue dans ceux-ci un rôle dominant.

La théorie du signal fait aujourd'hui partie de bagage culturel de tout ingénieur touchant de près ou de loin à la commande électrique, cette discipline est un ensemble de concepts et modèles mathématique et s'appuie essentiellement sur l'électronique et l'informatique par sa mise en pratique et trouve son champ d'application dans tous les domaines concernés par la transmission et le traitement d'informations. Cette vaste champ s'étend de télécommunications à l'instrumentation scientifique, de l'automatique industrielle au génie biomédical en passant par le traitement de la parole, de l'image, des signaux géophysiques et des signaux issus de radar ou de sonar ...etc.

Un filtre est caractérisé dans le domaine fréquentielle par sa fonction de transfert, et dans le domaine temporelle par sa réponse impulsionnelle, qui en fait, et la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. Les filtres numérique ont été développés et étudiés dans le but de pouvoir simuler les filtres analogiques sur ordinateur. Ceci permet de vérifier les performances et d'optimiser les paramètres de ces filtres avant leur éventuelle réalisation. Le développement de la technologie des circuits intégrés numériques augmente l'intérêt économique des filtres numériques. C'est pourquoi, en complément aux résultats bien établis pour la simulation, les méthodes propres pour la synthèse des filtres numériques ont été développées.

Lorsque les nombres de coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre numérique est infini, il est dit à réponse impulsionnelle infini (R.I.I), sinon on parle de filtre à réponse impulsionnelle fini (R.I.F). L'un des principaux avantages des filtres R.I.F est qu'ils peuvent donner des phases exactement linéaires.

Le présent travail consiste en l'étude, la synthèse et la simulation des filtres numériques R.I.F a phase linéaire. Pour entamer ce travail il nous assemler nécessaire d'introduire les différentes outils mathématiques.

L'introduction d'outils de simulation a rendu possible une méthode de recherche qui combine les approches théorique et pratique. Le langage matlab, d'une grande simplicité d'emploi, entre dans cette catégorie. De manière plus générale, la simulation est devenue aujourd'hui un outil de validation des algorithmes issue de la recherche [1].

La modélisation linéaire est exploitée dans nombreuse application en traitement du signal à cause de sa simplicité d'implantation [2].

Lorsque la modélisation linéaire d'un phénomène physique donne des résultats insatisfaisant comme est le cas pour les circuits électrique et électronique, qui présentent une non linéarité de type saturation, il est intéressant d'introduire les filtres numériques.

Cette étude à pour but de faire comprendre les principaux phénomènes dus à l'échantillonnage et à la transformation de Fourier discrète, et ceci pour des signaux élémentaires ou des combinaisons des signaux élémentaires pour la première phase, pour la deuxième phase, nous étudians les différentes méthodes numériques en traitement et filtrages des signaux par l'analyse et la synthèse des différentes paramètres. Notre travail de fin d'étude consiste à calculer les différents paramètres des filtres numériques à impulsions finies, en comprend l'influence des différentes fenêtres sur la résolution des problèmes réelles.

Cette mémoire contient quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur la théorie et traitement du signal.

Au deuxième chapitre nous avons rappelé les principaux supports de la transformée de fourier.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du filtrage des signaux à temps discrète déterministes.

Le quatrième chapitre est consacré aux synthèses des filtres numériques, a partie simulation des filtres numérique à réponse impulsionnelle finie fait l'objet de ce dernier chapitre.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SIGNAUX ET TRAITEMENT DU SIGNAL

I.1- Introduction :

La théorie des signaux est une discipline appartenant à la fois à des bases théoriques fondamentales et à des techniques particulières. Son influence déborde toutefois aussi sur les techniques de l'énergie, dans la mesure où l'on y rencontre de nombreux phénomènes (fluctuations de charge d'un réseau électrique, vibrations d'une machine tournante, variations transitoires du courant d'excitation d'un moteur électrique, perturbations électromagnétiques, ... etc.) qui peuvent être étudiés avec les mêmes outils théoriques ou expérimentaux que ceux utilisés pour les signaux informationnels. En fait, la théorie et le traitement des signaux intéressent tous les secteurs techniques et scientifiques dans lesquels l'information est perçue par l'intermédiaire d'observations expérimentales de grandeurs mesurables.

Ces deux termes-clefs : perception et traitement, indiquent pourquoi cette discipline s'est avant tout développée en relation avec les applications de l'électricité et plus particulièrement celles de la métrologie, responsable de la perception, des télécommunications et de l'informatique, chargés du traitement.

La métrologie fournit les capteurs qui traduisent pratiquement n'importe quel phénomène physique en une grandeur électrique facilement amplifiée, filtrée, conditionnée, codée...etc. par des dispositifs électroniques appropriés. Les circuits de télécommunications acheminent le signal électrique ainsi créé vers son destinataire. L'informatique, grâce à son énorme puissance de calcul, permet d'effectuer des tâches complexes de manipulations et d'interprétation de l'information véhiculée par le signal.

I.2- Place de la théorie et du traitement des signaux :

D'une façon générale, on appelle signal toute manifestation sous forme d'une grandeur physiquement observable d'un phénomène le plus souvent électrique, acoustique ou optique dans un sens plus restrictif, un signal est la représentation physique de l'information qui est convoyée d'une source vers un destinataire.

Bien que la plupart des signaux soient des grandeurs électriques (généralement courant, tension, champ électrique, champ magnétique), la théorie du signal reste indépendante de la nature physique du signal. Bien que la théorie et le traitement du signal soient des disciplines qui intéressent de nombreux secteurs techniques et scientifiques qui débordent le cadre d'une information à transmettre comme la mécanique (vibration d'une machine tournante ...) ou le transport d'énergie (perturbations électromagnétiques ...), nous puiserons nos exemples dans le domaine des communications analogiques et numériques et du traitement numérique du signal [6].

La description mathématique des signaux est l'objectif fondamental de la théorie du signal complémentaire de la théorie des circuits, elle fournit les moyens de mettre en évidence, sous forme mathématique, les principales caractéristiques d'un signal.

On pourrait se demander en quoi la théorie du signal se distingue de la théorie mathématique des fonctions d'une variable réelle, des distributions ou des opérateurs. En fait, une part importante de la théorie du signal est de nature mathématique. Mais son originalité tient à la nature des questions auxquelles elle répond. Ainsi, certaines questions mathématiques fondamentales comme la continuité ou la dérivabilité des fonctions ne se transposant pas aisément au domaine physique où leurs significations deviennent douteuses. Par ailleurs, les impératifs physiques conduisent à introduire des conditions parfois contraignantes comme la causalité, sans intérêt particulier du point de vue mathématique.

Ainsi la théorie du signal s'intéresse par exemple à la répartition spectrale de l'énergie d'un signal et à la distribution de son amplitude. Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage à travers de blocs fonctionnels (dispositifs généralement électroniques). Par la même, Elle fournit les renseignements essentiels nécessaires à la conception (cahier des charges) ou à l'utilisation (mode d'emploi) de ces dispositifs. C'est ainsi que l'on peut établir les règles à respecter pour passer d'un signal analogique à un signal numérique avec une perte contrôlée d'information. Elle permet aussi de déterminer et de prendre en compte les limites de fonctionnement imposées par la présence de perturbations aléatoires comme le bruit de fond.

I.3- Modèle et mesure des signaux :

Le modèle mathématique d'un signal est une fonction, réelle ou complexe, à une ou plusieurs dimensions d'une ou plusieurs variables réelles ou entières. Puisqu'on confond en général la grandeur physique observée et l'objet mathématique qui la modélise, cette fonction sera aussi appelée signal.

Comme dans toute modélisation d'une réalité physique, l'objet mathématique associé à un signal dépend du but poursuivi dans l'étude d'un phénomène physique. Ainsi la tension électrique aux bornes d'une prise de courant pourra être modélisée par une sinusoïde "éternelle" $\cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad \forall t \in \mathfrak{R}$ pour un simple utilisateur d'un appareil domestique ou par une fonction $a(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$. $a(t)$ et $\theta(t)$ étant des fonctions revêtant un grand intérêt pour un distributeur de courant électrique. On pourra représenter sous certaines conditions vérifiées par $a(t)$ et $\theta(t)$, ce dernier signal par une fonction complexe $a(t) e^{j\theta(t)}$.

Si la fonction est à une [resp. plusieurs] dimension, on parle de signal scalaire [resp. vectoriel]. Le premier cas est le plus courant : cette fonction peut représenter l'évolution d'une grandeur électrique ou d'une grandeur traduite sous cette forme par un capteur approprié (microphone pour un signal acoustique..). Le second cas représente par exemple les trois composantes en coordonnées cartésiennes d'un champ électrique en fonction du temps. Un signal vectoriel peut quelquefois avoir un nombre important de composantes. En traitement d'antenne, ou une antenne composée de plusieurs capteurs reçoit des ondes issues de sources émettrices à travers un milieu de propagation bruité, on fait appel à des signaux vectoriels dont les composantes sont les différents signaux prélevés derrière chaque capteur constituant l'antenne.

Cette opposition entre signal scalaire et signal vectoriel ne doit pas être confondue avec la notion de signal considéré comme vecteur d'un ensemble de signaux ayant une structure d'espace vectoriel. Dans ce dernier exemple, les deux types de traitement que sont le filtrage d'antenne (dont le but est d'estimer le signal émis par une source utile préalablement sélectionnée par élimination des signaux émis par les autres sources) et l'image d'antenne (dont le but est d'estimer des paramètres spatiaux et quelquefois spectraux de l'ensemble des sources émettrices) utilisent après l'acquisition des signaux d'origine physique de natures variées, des méthodes identiques quelque soit les domaines d'application : sonar, radar, passif, sismique, biomédica ...etc.

La variable de la fonction peut être réelle ou entière. Dans le premier cas, il s'agit usuellement du temps que l'on notera t , on parle dans ce cas de signal temporel, quelquefois il peut s'agir d'une variable à caractère spatial comme une distance ou un angle; on parle alors de signal spatial. Dans le deuxième cas, la variable est un simple indice dans un tableau de valeurs, cet indice pouvant prendre un sens temporel ou spatial discret.

Le cas d'une image fixe $i(x,y)$ [resp. $i(x,y,z)$] est un signal bidimensionnel (ou 2D) [resp. tridimensionnel (ou 3D)] dont les variables sont des coordonnées spatiales. Un signal à variables à la fois temporelle et spatiale (exemple : une image animée $i(x,y,t)$) est appelé signal spatio-temporel. Nous porterons notre étude sur les signaux scalaires à une et deux dimensions, de variables réelles ou entières.

I.4- Traitement des signaux :

La théorie du signal et son traitement sont intimement liés : la théorie du signal modélise et décrit les signaux, alors que le traitement des signaux interprète et élabore d'autres signaux à l'aide des ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée. C'est

l'importance pratique du traitement effectué par les systèmes linéaires invariants dans le temps, qui explique que nous porterons une attention particulière à la représentation de Fourier des signaux.

Le langage utilisé par la théorie et le traitement du signal sera celui des schémas blocs (ou boîtes noires), c'est-à-dire d'un assemblage symbolique représenté sous forme graphique de blocs fonctionnels réalisant une fonction donnée. Dans l'exemple : $y(t) = x^2(t)$, $y(t)$ désigne la sortie d'un dispositif (ou système) quadrature dont l'entrée est le signal $x(t)$.

I.5- Classification des signaux :

Il existe de nombreux types de signaux et il est important d'introduire quelques propriétés permettant d'en faire une certaine classification.

I.5.1- Classification déterministe – aléatoire :

Cette première classification est obtenue en considérant la nature de l'évolution du signal. Celle-ci est à caractère prédéterminé ou non prévisible. Un signal déterministe est un signal dont l'évolution en fonction du temps peut parfaitement être prédite par un modèle mathématique approprié. On les rencontre principalement aux laboratoires : signaux de test et d'excitation (utilisés pour simuler un milieu expérimental), signaux d'étalonnage (utilisés pour la calibration des capteurs), séquences binaires d'apprentissage en égalisation adaptative et de synchronisation en communication numérique.

Au contraire, la plupart des signaux d'origine physique ont un caractère non reproductible. Ces signaux sont porteurs d'informations (signaux de parole, de données) car ils présentent une certaine imprévisibilité, ils seront modélisés par des signaux aléatoires. On considérera ainsi un signal aléatoire comme un ensemble probabilisé de signaux élémentaires dont chacun apparaît une fois sélectionné comme un signal déterministe. Une telle modélisation par un signal aléatoire ne pourra donc s'appliquer que dans les situations physiques dans lesquelles on observe un phénomène aléatoire, c'est-à-dire un phénomène qui puisse se répéter tout en donnant lieu à un signal imprévisible.

Remarquons ainsi que cette distinction déterministe-aléatoire est quelquefois arbitraire, car fonction de l'observateur. Une sinusoïde d'amplitude et de fréquence connue utilisée comme porteuse d'une modulation est considérée comme un signal déterministe par l'émetteur, car sa phase est accessible et comme un signal aléatoire par le récepteur car sa phase est un paramètre inconnu qu'il faudra estimer en démodulation cohérente [8].

Nous remarquons que l'opposition entre signal déterministe et signal aléatoire doit être maniée avec grandes précautions. En effet, certains signaux peuvent être prévisibles tout en étant de type aléatoire ; c'est le cas des signaux sinusoïdaux aléatoires dont l'amplitude, la phase et la fréquence sont de nature aléatoire. De plus, la physique moderne exige des modèles de signaux solutions d'équations déterministes non linéaires qui ne peuvent pas être prévisibles pratiquement et qui sont appelés signaux chaotiques déterministes.

Les signaux pseudo-aléatoires forment une catégorie particulière de signaux dont le comportement rappelle celui d'un signal aléatoire. En effet, il s'agit de signaux périodiques dont la période est grande par rapport à la durée d'observation et dont l'allure sur une période paraît "aléatoire" pour un observateur n'ayant pas de connaissances a priori sur ce signal. De tels signaux sont utilisés en particulier pour la simulation sur ordinateur de phénomènes aléatoires et pour la génération de signaux à fonction d'auto corrélation très pointue. Ces derniers signaux sont applicables au cryptage (exemple : image Canal +), à la synchronisation d'informations en télécommunications, à l'embrouillage- désembrouillage de données dans les modems et à la génération d'impulsion RADAR.

La méthode la plus courante de génération de tels signaux pseudo-aléatoires est basée sur la théorie des séquences binaires dites à longueur maximum. De telles séquences sont facilement produites à l'aide d'un registre binaire à décalage comportant N cellules en série complété par un circuit de contre-réaction réinjectant dans la première cellule.

La théorie des polynômes sur le corps (0,1) permet de déterminer pour chaque valeur de N, la position de ces contre-réactions qui assurent une période maximale T de la séquence binaire générée. Celle-ci vaut $T = (2^N - 1)T_H$ (T_H désigne la période d'horloge). Par exemple, on utilise très souvent en instrumentation $N=17$ avec deux rebouclages en position 3 et 17 qui donnent $T=131071$. On peut démontrer que cette séquence possède sur une période T des propriétés remarquables qui donnent l'illusion d'un caractère non prédictible lorsque $N \gg 1$. On peut montrer en particulier, qu'une période contient $2^{N-1} - 1$ valeurs (0) et 2^{N-1} valeurs (1) et si l'on considère deux segments de séquences de durée T différentes, le nombre de valeurs coïncédants deux à deux est inférieur d'une unité au nombre de valeurs qui diffèrent. Nous remarquons que cette propriété est à l'origine de l'utilisation de ces signaux dans les problèmes de synchronisation.

I.5.2- Classification énergétique :

Les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou par la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs et la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation. Dans ce bref chapitre, nous nous contenterons de rappeler les définitions uniquement d'un point de vue mathématique.

Mathématiquement, les signaux sont représentés par des fonctions. Nous rappelons les diverses convergences des fonctions et les approximations qu'elles impliquent. Pour tout signal $x(t)$ (fonction réelle ou complexe de t), on appelle énergie la quantité E_x définie, si elle existe, par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.1})$$

Et puissance moyenne la quantité P_x définie, si elle existe, par :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.2})$$

Ces termes s'interprètent physiquement. En particulier, si le signal est une intensité ou une tension électrique, ceux-ci représentent respectivement l'énergie ou la puissance moyenne consommée dans une résistance à un constant multiplicatif pré.

On définit à l'aide de ces notions des signaux tels que $0 < E_x < \infty$ appelés signaux à énergie finie (on a alors $P_x = 0$) et des signaux tels que $0 < P_x < \infty$ appelés signaux à puissance moyenne finie (on a alors $E_x = \infty$).

La première catégorie de signaux comprend tous les signaux transitoires et la seconde englobe les signaux de type permanents comme les signaux périodiques ou les signaux aléatoires permanents.

Dans la réalité physique, Les grandeurs observées d'énergie finie et les signaux de puissance moyenne finie sont commodes pour modéliser certains comportements permanents des systèmes physiques. Il est ainsi raisonnable de modéliser les signaux électriques issus d'un générateur de fonctions comme des signaux périodiques et la tension électrique observée aux bornes d'une prise de courant comme un signal sinusoïdal "éternel". Nous verrons d'autre part que ce dernier est très commode pour analyser le comportement des systèmes linéaires.

Certains signaux n'appartiennent à aucune des deux catégories précédentes. C'est le cas de la distribution de Dirac $\delta(t)$ ou de la distribution peigne de Dirac : $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ que l'on utilisera tantôt pour modéliser des grandeurs physiques, tantôt comme simples intermédiaires de calcul. Un cas important de signaux pour lesquels les notions précédentes sont peu portionneuses est celui des signaux nuls à gauche, c'est-à-dire des signaux qui sont nuls à tout instant qui précède un certain temps t_0 . Ainsi. L'échelon unité $u(t)$ possède une énergie infinie et une puissance moyenne finie de $1/2$ au sens de (I.2). La définition (I.2) n'a ainsi d'intérêt que pour les signaux qui modélisent des phénomènes éternels, c'est-à-dire qui n'ont ni début ni fini. Pour des signaux nuls avant t_0 , il serait préférable d'utiliser pour définition de la puissance moyenne :

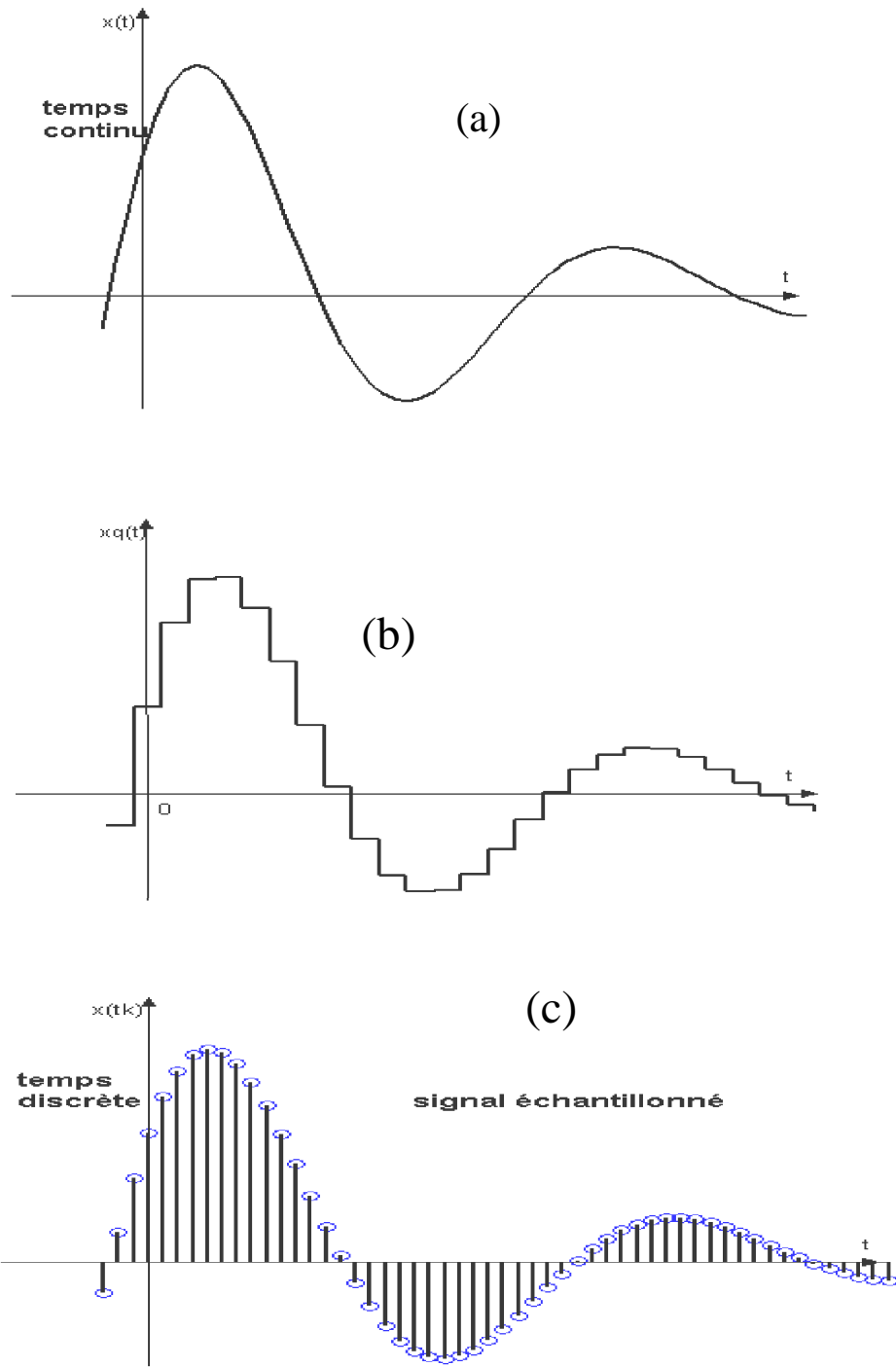
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T |x(t)|^2 dt$$

Avec cette définition $u(t)$ possède une puissance moyenne finie de $1/2$.

I.5.3- Classification continu – discret :

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est une variable continue ou discrète et que la variable est elle-même continue ou discrète. On distingue ainsi plusieurs types de signaux Figure (I.1).

Les systèmes de traitement des signaux sont également classés selon la nature des signaux sur lesquels ils opèrent. On parle ainsi de systèmes analogiques de technologie ou électronique ou pratique (amplificateurs, filtres analogiques...), de systèmes échantillonnés (filtres à capacités commutées, à transfert de charges ou à onde de surface) et de systèmes numériques où digitaux (filtres numériques, processeurs de signal ...). On rencontre également des systèmes hybrides (convertisseurs analogique-numérique, modems...). Lors de la conception d'un système complexe, chaque élément du schéma d'ensemble est réalisé grâce à un des types de systèmes précédents selon les contraintes technologiques particulières [6].



- (a) Signal analogique.
- (b) Signal quantifié.
- (c) Signal échantillon.

Figure I.1 : Représentation graphique de la classification amplitude continu- discret.

I.6- Représentation vectorielle des signaux :

I.6.1- Intérêt de la représentation vectorielle des signaux :

Le principe de la représentation vectorielle des signaux repose sur le fait que tout signal $x(t)$ appartenant à un certain ensemble de signaux peut se décomposer selon une combinaison linéaire de fonctions connues $\phi_k(t)$ prenant leurs valeurs dans C [9].

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+N} a_k \phi_k(t) \quad \text{Ou} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k(t) \tag{I.3}$$

Les coefficients a_k constituent une représentation discrète du signal $x(t)$. Ceci constitue la base de l'analyse des signaux. Le choix des fonctions $\phi_k(t)$ dépend de l'ensemble des signaux considérés et du traitement opéré sur les signaux. L'intérêt majeur de cette décomposition linéaire d'un signal à l'aide de signaux "plus simples" (par exemple les signaux $\phi_k(t) = e^{i2\pi f_k t}$) est de faciliter l'analyse de la réponse des systèmes linéaires à des signaux d'entrée très généraux. Naturellement, les décompositions (I.3) suggèrent une structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des signaux considérés. Un signal apparaît ainsi comme un vecteur d'un espace vectoriel et admettra plusieurs représentations possibles selon la base de décomposition. De plus, l'espace vectoriel sera très souvent un espace de Hilbert, ceci permettra d'interpréter géométriquement des notions difficiles à visualiser comme l'orthogonalité, la distance et l'intercorrélation de deux signaux. Nous allons présenter ces notions pour les signaux à temps continu, elle peut s'étendre pour les signaux à temps discrets.

I.6.2- Espace vectoriel des signaux :

Afin de présenter les notions précédentes, nous prenons comme exemple l'ensemble des signaux $x(t)$ complexes d'énergie E_x finie. Il s'agit d'un espace vectoriel sur C que nous pouvons munir structure d'espace hermitien grâce au produit scalaire :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt \tag{I.4}$$

Il faut remarquer que nous considérons comme signal nul, un signal d'entrée nulle et qu'ainsi nous devons considérer comme vecteur de l'espace hermitien, la classe des signaux presque partout égaux. D'un point de vue pratique, tous les éléments de cette classe d'équivalence seront considérés comme le inter corrélation signal et, par suite, un signal sera sur tout l'axe du temps sauf sur un ensemble de mesure nulle (ainsi, par exemple, on fera

souvent appel au signal $\text{rect}_T(t)$ défini par sa valeur 1 pour $|t| < \frac{T}{2}$ et 0 pour $|t| > \frac{T}{2}$ sans préciser ses valeurs pour $t = \pm \frac{T}{2}$).

Le carré de la norme $\|x\|^2$ représente l'énergie du signal. La distance associée est une mesure de la dissemblance entre les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.5})$$

A cette distance, nous pouvons associer la notion de convergence d'une suite de signaux $x_n(t)$ vers un signal $x(t)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Cette convergence est appelée convergence en moyenne quadratique. L'espace hermitien précédent est complet (toute suite de signaux est convergente dans cet espace). On a aussi construit un espace vectoriel de Hilbert complexe.

Avec les outils précédemment définis, nous disposons d'une interprétation géométrique des signaux dont nous pouvons utiliser tous les aspects métriques : orthogonalité, théorème de projection, approximation quadratique, orthogonalisation de Gram- Schmidt et inégalité de Schwarz dont l'expression est rappelée ci-dessous :

Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des signaux d'énergie finie, le produit scalaire de ceux-ci vérifie :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt \quad (\text{I.6})$$

Nous remarquons que l'égalité précédente n'est atteinte que pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$ proportionnels.

I.6.3- Approximation au sens de l'erreur quadratique minimale :

Considérons un signal $x(t)$ appartenant à un espace de Hilbert E de signaux complexes et un sous ensemble F de E . On peut s'intéresser à des approximations $\tilde{x}(t)$ de $x(t)$ appartenant à F . La différence $e(t) \stackrel{\Delta}{=} x(t) - \tilde{x}(t)$ est un signal d'erreur d'approximation dont la norme est égale à la distance $d(x, \tilde{x})$. Le carré de cette norme est appelé erreur quadratique moyenne. C'est une mesure absolue de l'imperfection de l'approximation obtenue. Il est parfois préférable d'exprimer la qualité de cette approximation en relative. Celle-ci est obtenue à

l'aide du rapport $\frac{\|x\|^2}{\|e\|^2}$ qui est un rapport signal à bruit d'approximation exprimé souvent en

$$\text{décibels} \left(10 \log_{10} \frac{\|x\|^2}{\|e\|^2} \right).$$

I.6.3.1- Théorème de projection :

L'approximation $\tilde{x}(t)$ de $x(t)$ est optimale au sens de l'erreur quadratique minimale si la distance $d(x, \tilde{x})$ est minimale. Lorsque le sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel fermé de E , le théorème de projection orthogonal affirme qu'il existe un signal unique de F qui minimise cette distance ; Il s'agit de la projection orthogonal de $x(t)$ sur F montrer sur la Figure (I.2).

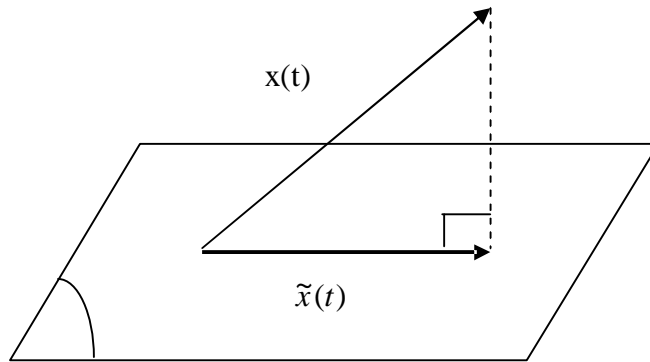


Figure I.2 : Théorème de projection.

Nous avons donc $\|e\|^2 + \|\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2$ (relation de Pythagore).

Lorsque le sous-espace vectoriel F est engendré par un ensemble fini de N signaux $\phi_k(t)$, F est bien entendu fermé et l'approximation unique $\tilde{x}(t)$ est caractérisée par les N relations d'orthogonalité :

$$\langle e, \phi_k \rangle = 0 \quad \text{Pour } k \in \{1, \dots, N\}$$

C'est-à-dire :

$$\langle x - \tilde{x}, \phi_k \rangle = 0 \quad \text{Pour } k \in \{1, \dots, N\}$$

Dans ce cas

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^N a_k \phi_k(t)$$

$$\text{Et} \quad \|e\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k^* a_l \langle \phi_l, \phi_k \rangle = \|x\|^2 - a^* R_\phi a$$

Avec $a = [a_1, \dots, a_k, \dots, a_N]^T$ et R_ϕ la matrice carrée $N \times N$ de termes d'indice $k, l \langle \phi_l, \phi_k \rangle$.

Les coefficients a_k sont solutions du système d'équations :

$$\sum_{l=1}^N \langle \phi_l, \phi_k \rangle a_l = \langle x, \phi_k \rangle \quad \text{Pour } k \in \{1, \dots, N\} \quad (I.7)$$

Avec des notions plus compactes : $R_\phi a = R_{\phi,x}$ où $R_{\phi,x}$ désignant la matrice colonne d'ordre N de terme général $\langle x, \phi_k \rangle$. Ce système n'admet une solution unique en a_k que si les N signaux $\phi_k(t)$ sont linéairement indépendants. Ce qui est équivalent à la régularité de la matrice R_ϕ .

Le système d'équation précédent se simplifie si les signaux $\phi_k(t)$ sont orthogonaux, ils sont alors linéairement indépendants et forment une base orthogonale de F . En effet, dans ce cas puisque $\langle \phi_l, \phi_k \rangle = 0$ pour $k \neq l$; le système (I.7) devient :

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle a_k = \langle x, \phi_k \rangle \quad \text{Pour } k \in \{1, \dots, N\}$$

La base précédente sera dite orthonormée si de plus les signaux $\phi_k(t)$ sont tous de norme unité (cette condition peut toujours être obtenue par une normalisation en introduisant les nouveaux signaux $\Psi_k(t) = \frac{\phi_k(t)}{\|\phi_k\|}$). Dans ce cas :

$$a_k = \langle x, \phi_k \rangle \quad \text{Pour } k \in \{1, \dots, N\} \quad (I.8)$$

Lorsque les signaux $\phi_k(t)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne une erreur quadratique d'approximation :

$$\|e\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \|\phi_k\|^2$$

Lorsque les signaux $\phi_k(t)$ sont de plus normés nous avons :

$$\|e\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N |a_k|^2 = \|x\|^2 - a^* a \quad (I.9)$$

I.6.3.2- Théorème de Parseval :

Considérons maintenant un ensemble dénombrable de signaux orthonormés $\phi_k(t)$ de E (on prendra ici $k \in \mathbb{N}^*$) et appelons $\tilde{x}_n(t)$ l'approximation optimale du signal $x(t)$ appartenant

au sous-espace vectoriel F_n engendré par $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$. La suite a_k définie à l'aide de ces signaux $\phi_k(t)$ par la relation (I.8) est telle que la série de terme général $|a_k|^2$ est convergente car la somme de ses N premiers termes est majorée par $\|x\|^2$ d'après (I.9). Nous avons l'inégalité appelée inégalité de Bessel-Parseval :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2 \tag{I.10}$$

Cet ensemble dénombrable de signaux orthonormés $\phi_k(t)$ de E sera dit complet (ou total) si l'ensemble des combinaisons linéaires finies de signaux $\phi_k(t)$ est dans E , c'est-à-dire s'il est possible d'approximer n'importe quel signal $x(t)$ de E par une combinaison linéaire finie de signaux $\phi_k(t)$ avec une erreur quadratique moyenne aussi petite que souhaitée. Dans ce cas l'inégalité (I.10) devient l'égalité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \tag{I.11a}$$

Et de façon générale, en appelant b_k les coefficients associés au signal $y(t)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k^* \tag{I.11b}$$

Dans ce cas, si l'on cherche à approximer $x(t)$ à l'aide d'un sous ensemble H fini quelconque de signaux $\phi_k(t)$ selon le critère de l'erreur quadratique minimum, on obtiendra une approximation avec des coefficients a_k identique à ceux de la décomposition (I.11a) en se restreignant à $k \in H$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k \in H} a_k \phi_k(t).$$

Un espace de Hilbert E de signaux tel que l'on puisse trouver un ensemble dénombrable de signaux orthogonaux $\phi_k(t)$ complet de E est dit séparable. L'espace E des signaux d'énergie finie sur un intervalle $[T_1, T_2]$ borné ou non est un exemple d'espace vectoriel de Hilbert séparable. Dans ce cas l'égalité de Parseval a une interprétation énergétique.

Chaque composante $a_k \phi_k(t)$ du développement en série de signaux orthonormés complet

de $x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \phi_k(t)$ possède une énergie :

$$\int_{T_1}^{T_2} |a_k \phi_k(t)|^2 dt = |a_k|^2$$

Et l'égalité (I.11a) représente l'énergie totale :
$$E_x = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2$$

Le développement (I.3) représente donc une analyse d'un signal $x(t)$ d'une manière telle que l'énergie du signal soit égale à la somme des composantes. Nous allons maintenant donner des exemples de développement en série de signaux orthonormés.

I.6.4- Développement en série d'impulsions rectangulaires décalées :

Considérons l'ensemble E des signaux $x(t)$ d'énergie finie sur $]-\infty, +\infty[$. Un exemple élémentaire de suite de signaux orthonormés est obtenu en choisissant comme signaux de bases $\phi_k(t)$ les impulsion rectangulaires de durée τ centrées en $k\tau$ et d'amplitudes $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{rect}_{\tau}(t - k\tau) \quad \text{Pour } k \in \mathbb{Z}$$

Cet ensemble dénombrable de signaux de E n'est pas complet, il suffit de représenter graphiquement l'approximation $\tilde{x}(t)$ du signal $x(t)$ à l'aide des signaux orthonormés $\phi_k(t)$ pour s'en rendre compte Figure (I.4). Puisque la relation (I.8) donne :

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} x(t) dt$$

Nous avons :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} x(\theta) d\theta \right) \text{rect}_{\tau}(t - k\tau) \tag{I.12}$$

Nous voyons ainsi qu'il existe des signaux non nuls dont toutes les composantes a_k sont nulles, ce qui confirme que l'ensemble des signaux $\phi_k(t)$ n'est pas complet. Ainsi :

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - k\tau) \quad \text{avec} \quad g(t) \stackrel{\Delta}{=} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \text{rect}_{\tau}(t)$$

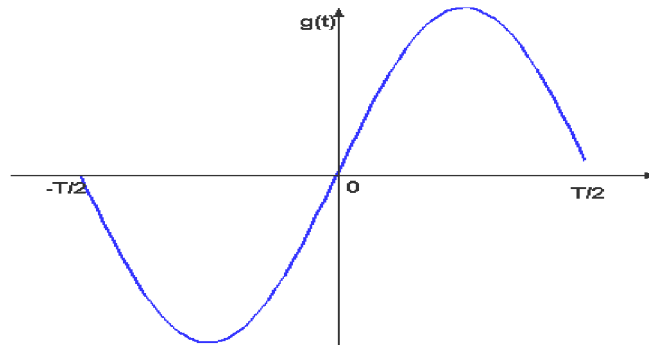


Figure I.3 : Représentation graphique du signal $x(t)$.

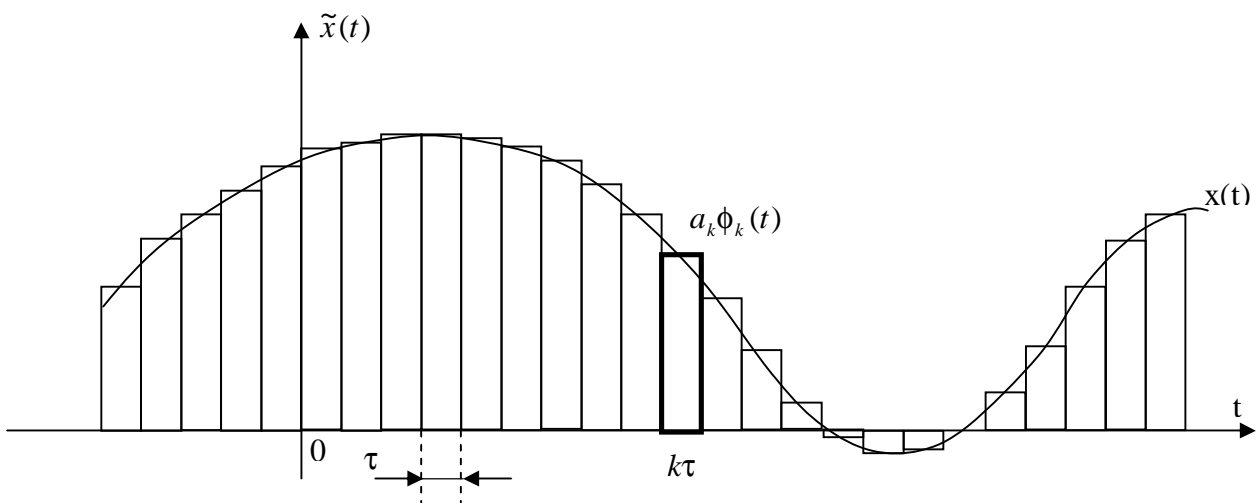


Figure I.4 : Représentation de l'approximation $\tilde{x}(t)$ à l'aide des signaux orthonormés.

En général, l'erreur d'approximation $e(t)$ ne sera pas nulle. Toutefois la qualité de l'approximation est d'autant meilleure que τ est petit.

En mettant l'expression (I.12) sous la forme suivante :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{(k-1/2)\tau}^{(k+1/2)\tau} x(\theta) d\theta \right) \frac{1}{\tau} \text{rect}_{\tau}(t - k\tau)$$

Et en utilisant le résultat : $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}_{\tau}(t) = \delta(t)$, nous pouvons obtenir de façon heuristique en prenant la limite de l'expression précédente lorsque τ tend vers 0 :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \delta(t - u) du \tag{I.13}$$

On reconnaît ici l'intégrale de convolution qui est fondamentale en théorie du signal, car elle permet de représenter un signal $x(t)$ comme "une somme continue de distribution de Dirac pondérées et décalées les unes des autres".

I.6.5- Développement en série de Fourier :

I.6.5.1- Coefficients de série de Fourier :

Nous considérons ici, soit l'espace de Hilbert E_1 des signaux d'énergie finie sur $[T_1, T_2]$, soit l'espace de Hilbert E_2 des signaux périodique de période $T = T_2 - T_1$ ayant une énergie finie sur la période T . Les signaux de E_1 peuvent être considérés comme la restriction à l'intervalle $[T_1, T_2]$ des signaux de E_2 et les signaux de E_2 peuvent être considérés comme les signaux périodisés associés à ceux de E_1 Figure (I.5).

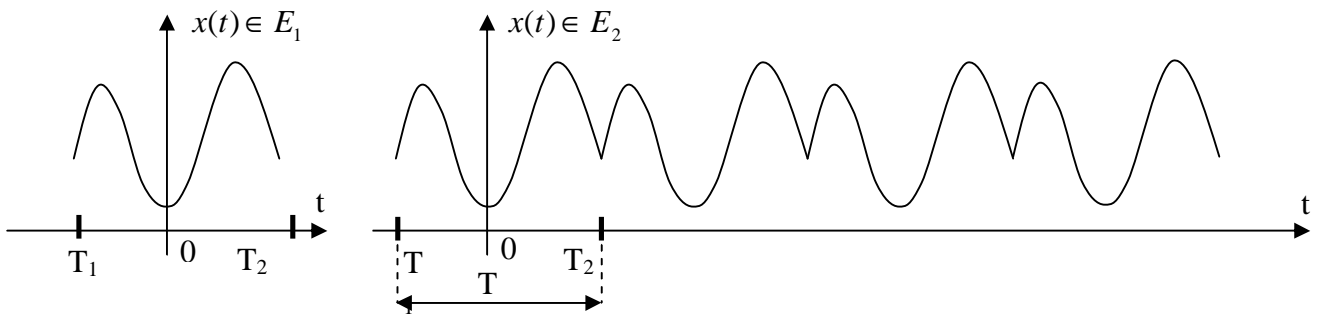


Figure I.5 : Signal périodique à une énergie finie.

Ces espaces de Hilbert sont séparables et une base orthonormée complète de ces espaces est donnée par :

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad \text{Pour } k \in \mathbb{Z}$$

Ces signaux $\phi_k(t)$ sont définis sur l'intervalle $[T_1, T_2]$ pour l'espace E_1 et sur \mathbb{R} pour l'espace E_2 .

D'après (I.8) les coefficients a_k sont donnés ici par : $a_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$

c'est-à-dire à l'aide des coefficients $X_k \triangleq \frac{1}{\sqrt{T}} a_k$ appelés coefficients de série de Fourier.

$$\text{Où : } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt \quad (I.14)$$

Pour un signal de E_1 , cette égalité a lieu pour $t \in [T_1, T_2]$ et, pour un signal de E_2 , elle a lieu $\forall t \in \mathfrak{R}$. La composante X_0 de $x(t)$ est appelée composante continue. Elle est égale à la

valeur moyenne de $x(t)$:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) dt$$

La somme des composantes $X_1 e^{j2\pi \frac{t}{T}}$ et $X_{-1} e^{-j2\pi \frac{t}{T}}$ constitue le fondamental de $x(t)$ et les composantes $X_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$ pour $k \notin \{-1, 0, +1\}$ constituent les harmoniques de $x(t)$.

L'égalité de Parseval (I.11a) devient ici : $E_x = P_x T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

En appelant E_x l'énergie et P_x la puissance moyenne du signal $x(t)$ dans l'intervalle $[T_1, T_2]$. C'est-à-dire, à l'aide des coefficients X_k :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \tag{I.15}$$

Une autre base orthonormée complète est constituée par l'ensemble des signaux :

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi k \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi k \frac{t}{T} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

La convergence de la somme de l'égalité (I.14) est une convergence en moyenne quadratique dans un ensemble dont les éléments sont des signaux, c'est-à-dire une classe d'équivalence de fonctions presque partout égales. En appelant :

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} X_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

Nous avons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_1}^{T_1+T} |\tilde{x}_N(t) - x(t)|^2 dt = 0$$

Quand il existe des points de discontinuité, certaines difficultés apparaissent lorsque $x(t)$ est approximé par la décomposition finie $\tilde{x}_N(t)$. Le signal $\tilde{x}_N(t)$ présente des oscillations au voisinage des points de discontinuité dénommées phénomène de Gibbs. Car, la convergence en moyenne quadratique n'assure pas forcément la convergence uniforme.

Nous remarquons, qu'il existe des conditions suffisantes pour assurer la convergence uniforme de $\tilde{x}_N(t)$ vers $x(t)$. Par exemple, si $x(t)$ est une fonction définie sur $[T_1, T_2]$ ou périodique de période $T = T_2 - T_1$, continue et pourvue d'une dérivée, sauf peut-être en un nombre fini de points dans une période qui sont des points de discontinuité de première

espèce pour $x(t)$ et $x'(t)$. Nous aurons l'équivalence à la relation suivante : $\exists x(t_0^+)$ et $x(t_0^-)$ avec $x(t_0^+) \neq x(t_0^-)$.

La suite $\tilde{x}_N(t)$ est alors simplement convergente vers $\frac{1}{2}[x(t^+) + x(t^-)]$, soit vers $x(t)$ en tout point t où $x(t)$ est continu. De plus, la convergence de $\tilde{x}_N(t)$ vers $x(t)$ est uniforme dans tout intervalle où $x(t)$ est continu.

Dans le cas des signaux réels, la relation (I.14) montre que :

$$x(t) = x^*(t) \Leftrightarrow X_{-k} = X_k^* \tag{I.16}$$

Par suite, un signal réel est caractérisé par la propriété $X_{-k} = X_k^*$ de ses coefficients de série de Fourier appelée symétrie hermitienne. D'un point de vue physique, cela signifie que dans le développement en série de Fourier (I.14) les fréquences négatives $-\frac{k}{T}$ ($k \in N^*$) n'apportent aucune information nouvelle par rapport aux fréquences positives.

Pour ces signaux, les coefficients du développement à l'aide de la base orthonormée complète sont constitués de :

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi k \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi k \frac{t}{T} \quad (\text{pour } k \in \mathbb{Z})$$

En effet, décomposer les coefficients X_k à l'aide du module p_k et de l'argument ϕ_k où

$$X_k = p_k e^{j\phi_k} \quad (0 \leq \phi_k < 2\pi) \text{ est équivalent à: } p_{-k} = p_k e^{t\phi_{-k}} = -\phi_k$$

Et ainsi (I.14) peut s'écrire sous la forme :
$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2p_k \cos(2\pi k \frac{t}{T} + \phi_k)$$

Cette expression peut également être mise sous la forme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k \frac{t}{T}) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k \frac{t}{T}) \tag{I.17}$$

Avec: $a_0 \stackrel{\Delta}{=} X_0 = \frac{t}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) dt$; $a_k \stackrel{\Delta}{=} X_k + X_{-k} = 2 \text{Re}(X_k) = \frac{2}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) \cos(2\pi k \frac{t}{T}) dt$

et $b_k \stackrel{\Delta}{=} j(X_k - X_{-k}) = -2 \text{Im}(X_k) = \frac{2}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(t) \sin(2\pi k \frac{t}{T}) dt$ pour $k \in N$

Dans le calcul des coefficients de Fourier de signaux réels, il est recommandé de conserver le développement général (I.14), c'est-à-dire de calculer d'abord les coefficients X_k

puis, si l'on désire un développement en $\cos(2\pi k \frac{t}{T})$ et $\sin(2\pi k \frac{t}{T})$, d'utiliser les relations de transformation précédentes [6].

I.6.5.2- Transition des séries de Fourier vers la transformée de Fourier :

Nous allons employer un argument heuristique pour introduire la transformation de Fourier d'un signal d'énergie finie quelconque, à partir du développement en série de Fourier d'un signal de durée et d'énergie finie. Considérons un signal $x(t)$ d'énergie finie quelconque, sa restriction $x_T(t)$ à l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ est un signal d'énergie finie, donc appartient à E_1 (avec $T_1 = -\frac{T}{2}$ et $T_2 = +\frac{T}{2}$). Nous pouvons donc utiliser le développement (I.14) pour $x_T(t)$:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(u) e^{-j2\pi k \frac{u}{T}} du$$

Soit :

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{+T/2} x(u) e^{-j2\pi \frac{k}{T} u} du \right) e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \frac{1}{T}$$

En passant à la limite pour $T \rightarrow +\infty$, l'intervalle $\frac{1}{T}$ entre deux fréquences tend vers 0.

Nous obtenons alors de façon intuitive :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du \right) e^{j2\pi f t} df$$

L'expression située à l'intérieur de la parenthèse est appelée Transformée de Fourier de $x(t)$, on la note $X(f)$ et elle sera le centre du prochain chapitre. La relation précédente nous donne l'expression de $x(t)$ à l'aide de cette transformée de Fourier [10] :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{avec} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{I.18}$$

Nous pouvons noter que, de façon formelle, $x(t)$ apparaît comme décomposée dans une "base continue" d'exponentielles complexes. Puisque l'ensemble des indices de sommation est continu. Un parallèle peut ainsi être fait entre le développement (I.14) des signaux de durée

finie ou des signaux périodiques d'énergie finie sur une période et le développement (I.18) des signaux quelconques d'énergie finie [6].

I.7- Conclusion :

L'étude des signaux nécessite un formalisme mathématique ou stochastique qui permet d'une part la représentation et d'autre l'analyse des caractéristiques : durée utile d'un signal, largeur utile d'un spectre, puissance moyenne d'un signal et la classification du signal et sa représentation.

Le signal est physiquement une grandeur mesurable : tension électrique, courant électrique, pression d'un fluide, température d'un enceinte, ...etc.

CHAPITRE II

LES TRANSFORMEES DE FOURIER

II.1- Introduction :

Il y a deux domaines importants de description du signal selon la nature de variables indépendantes :

- Domaine de discrétion temporelle de la forme $x(t)$, dans lequel la variable indépendante est le temps t . Il s'agit du domaine de discrétion usuelle des signaux. Dans ce domaine de représentation, le signal peut être caractérisé par sa durée, sa période fondamentale, ou son amplitude.
- Domaine des fréquence de la forme $X(f)$, dans lequel la variable indépendante est la fréquence f dont la dimension est l'inverse du temps. Dans ce domaine de représentation, le signal peut être caractérisé par sa bande passante, sa fréquence fondamentale, ou sa phase.

Ces deux domaines de discrétion du signal sont reliés entre eux par la transformation de Fourier. Cette transformation de Fourier joue un rôle fondamental en traitement du signal.

Les méthodes discrètes d'analyse et de traitement sont fondamentales dans l'étude des systèmes et des signaux numériques. Les progrès considérables réalisés dans les domaines de la micro-électronique et de l'informatique ont apporté une dimension nouvelle à ces méthodes. L'apparition en 1983 de véritables processeurs de traitement du signal (DSP: digital signal processor) a permis des traitements numériques complexes en temps réel. Le développement en 1965 par J.W.COOLEY et J.W.TURKEY d'un algorithme célèbre appelé transformation de fourrier rapide (FFT : Faste Fourier Transform) a rendu la transformée de fourrier discrète. Cet algorithme efficace réduit le nombre d'opérations, de l'ordre N^2 multiplications complexes et $N(N-1)$ additions complexes, requis au calcul de la transformée de fourrier discrète d'une suite de N échantillons à environ $\frac{N}{2} \ln N$ multiplications complexes et $N \ln N$ Additions complexes. En effet, la FFT s'adapte parfaitement à l'implantation numérique et réduit considérablement le temps de calcul [11].

II.2- Généralités sur la transformée de Fourier générale :

Comme la mémoire d'un ordinateur est limitée, on ne pourra donc observer le signal que sur une fenêtre de temps fini. Supposons que N échantillons (x_0, \dots, x_{N-1}) ont été prélevés sur le signal analogique à une fréquence d'échantillonnage de 1Hz. On cherche une méthode numérique pour estimer le spectre du signal analogique à partir de ces données. Nous devons maintenant compenser notre ignorance des valeurs de (x_n) en dehors de (0.....N-1).

Deux hypothèses classiques peuvent nous aider :

- On peut par exemple, considérer que le signal $x_e(t)$ est N périodique.
- On peut également supposer que $x_e(t)$ est nul en dehors de l'intervalle $[0, N]$.
- D'autres hypothèses peuvent être formulées à condition qu'elles permettent de trouver $x_e(t)$ sur tout l'axe temporel.

Les deux premiers cas, nous amènent à introduire la notion de transformée de Fourier discrète d'un signal x_i , qui est un outil numérique de choix pour calculer $X_a(v)$ en fonction des mesures (x_0, \dots, x_{N-1}) . [12]

La transformée de Fourier est une généralisation de la série de Fourier appliquée aux signaux non périodiques. Soit à décomposer en série de Fourier un signal périodique $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(f_0) \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot f_0 t} \quad (\text{II.1})$$

Et

$$X(f_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} dt \quad (\text{II.2})$$

En posant $f_0 = 1/T_0$ et en substituant (II.1) dans (II.2), on obtient:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot \frac{1}{T_0} \cdot t} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j \cdot 2\pi \cdot n \cdot \frac{1}{T_0} \cdot t} dt \right) \quad (\text{II.3})$$

En faisant tendre $T_0 \rightarrow \infty$, l'espacement entre deux raies successives devient infinitésimal et $\frac{1}{T_0} \rightarrow df$. La fréquence de chaque harmonique $n f_0$ tend vers une variable continue f et la

somme est remplacée par une intégrale. Par conséquent, la relation (II.3) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \right) e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df \quad (\text{II.4})$$

La relation (II.4) est appelée transformation de Fourier du signal $x(t)$ dénotée T.F. Sa signification devient en remarquant que l'intégral $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$ est en fonction uniquement de la fréquence f . Cette intégrale est appelée la transformée du signal a périodique $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (\text{II.5})$$

L'équation (II.4) s'écrit alors sous la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j.2.\Pi.ft} df \quad (\text{II.6})$$

La forme (II.6) est appelée la transformée de Fourier inverse. Ainsi, la transformation de Fourier exprime la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse. Par analogie, la transformée de Fourier $x(f)$ est en générale une fonction complexe pouvant se mettre sous la forme :

$$X(f) = \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} \quad (\text{II.7})$$

Qui relève une autre écriture de la transformée de Fourier :

$$X(f) = |X(f)| e^{j.\varphi(f)} \quad (\text{II.8})$$

Qui constitue la représentation spectrale du signal $x(t)$. Elle se décompose en un spectre d'amplitude $|X(f)|$ et spectre de phase $\varphi(f)$ continus. Le spectre d'amplitude est défini par :

$$|X(f)| = \sqrt{(\text{Re}\{X(f)\})^2 + (\text{Im}\{X(f)\})^2} \quad (\text{II.9})$$

Et le spectre de phase est :

$$\varphi(f) = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{X(f)\}}{\text{Re}\{X(f)\}} \quad (\text{II.10})$$

II.3- Propriétés de la transformée de Fourier :

II.3.1- linéarité :

Si

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(f)$$

Et

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} X_2(f)$$

Alors

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{TF} aX_1(f) + bX_2(f) \quad (\text{II.11})$$

a et b étant deux constants arbitraires. La transformée de Fourier de la combinaison linéaire de deux signaux est linéaire.

II.3.2- Dérivation et intégration :

Si

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

Alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j.2\Pi.f.X(f) \quad (\text{II.12})$$

Cette propriété importante montre que la dérivation d'un signal $x(t)$ équivaut à la multiplication par $j.2\Pi.f$ de sa transformée de fourier. Ce résultat est obtenu en dérivant les deux membres de la transformée de Fourier inverse (II.6) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j.2\Pi.f.t} df \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} j.2\Pi.f(X(f) e^{j.2\Pi.f.t} df \right)$$

Signalons que le raisonnement que nous avons fait pour la dérivée première peut s'appliquer aux dérivées successives .Ainsi, pour la dérivée d'ordre n on à :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j.2\Pi.f)^n X(f) \quad (\text{II.13})$$

Puisque la dérivation d'un signal par rapport au temps correspond à une multiplication par $j.2\Pi.f$ de sa transformée de Fourier, on pourrait conclure que l'intégration d'un signal $x(t)$ équivaut à une division par $j.2\Pi.f$ de sa transformée de fourier. En effet, cette remarque fournit une partie de la solution .Le résultat précis est :

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{TF} \frac{1}{j.2\Pi.f} X(f) + \frac{1}{2} x(0)\delta(f) \quad (\text{II.14})$$

L'impulsion de Dirac $\delta(f)$ qui apparaît dans le nombre de droite de la relation, reflète la composante continue qui provient de l'intégration. La démonstration peut être facilement déduite à partir du théorème de la convolution et de la transformée de Fourier de l'echelan unité.

II.3.3- Translation :

Si

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

Alors

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{-j.2\Pi.f.t_0} \quad (\text{II.15})$$

La démonstration de cette propriété est obtenue en appliquant la définition de la transformée de Fourier (II.5) au signal $x(t-t_0)$ et en effectuant le changement de variable $t' = t - t_0$.

II.3.4- Symétrie :

Si

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

Alors

$$X(t) \xrightarrow{TF} x(-f) \quad (\text{II.16})$$

Et

$$x(f) \xrightarrow{TF} X(-t) \quad (\text{II.17})$$

En comparant l'écriture du couple d'équation donnée par les formules (II.5) et (II.6), on remarque une symétrie qui constitue une des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier. Les variables d'intégration sont muettes. On peut leur donner n'importe quel nom. En particulier, il n'y a pas de risque à échanger f et t dans (II.5) de sorte que :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) e^{-j.2.\Pi.f.t} \quad (\text{II.18})$$

D'où

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j.2.\Pi.f.t} dt \quad (\text{II.19})$$

En effectuant le changement de variable $f = -v$ dans l'équation (II.16), on a :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-v) e^{j.2.\Pi.v.t} dv \quad (\text{II.20})$$

En comparant les équations (II.6) et (II.20), on peut déduire la relation (II.16).

D'une manière similaire, en effectuant le changement de variable $t = -\tau$ dans l'équation (II.19) on obtient :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\tau) e^{-j.2.\Pi.f.\tau} d\tau \quad (\text{II.21})$$

On comparant les équations (II.5) et (II.21), on déduit la relation (II.17) [11].

II.4- Transformation en Z :

II.4.1- Généralités :

La transformation de Fourier est un outil précieux en traitement des signaux, numériques et analogique, sur les plans théorique et expérimentales. Toutefois, dans certain problème, surtout dans ceux qui sont orienté vers analyse et la synthèse des systèmes de traitement (par exemple en filtrage numérique), les limites des capacités de la transformation de Fourier sans vite atteintes. Nous besoin ainsi crée d'un outil plus puissant est comblé, principalement sur le plan théorique, par la transformation en Z. Cette transformation peut être considérée comme une généralisation de la transformation de Fourier a laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier. Par sa nature générale, la transformation en Z permet, par exemple, de représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombre. Ces nombres, caractérisant complètement le signal, permettent de la reconstituer entièrement [14].

II.4.2- Définition de la transformée en Z :

La transformée en Z directe d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{II.22})$$

La transformée en Z établit une correspondance entre l'espace des signaux à temps discret et un espace de fonctions définies sur un sous-ensemble du plan complexe. On définit le plan en Z comme étant le plan complexe. La série des puissances introduite dans l'équation de définition précédente ne converge que pour un sous-ensemble du plan complexe. Ce sous-ensemble est appelé région de convergence ou domaine de convergence. Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que $X(z)$ soit définie et à valeurs finies. Spécifier le domaine de convergence de la transformée est tout aussi important que la transformée elle-même.

II.4.3- Propriétés de la transformée en Z :

II.4.3.1- Linéarité :

Soient deux signaux à temps discret $x_1(n)$ et $x_2(n)$ ayant pour transformées en Z respectives $X_1(z)$ et $X_2(z)$. Soit le signal $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$.

La définition de la transformée en Z (une somme de monômes en Z) conduit directement à la relation suivante :

$$X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

II.4.3.2- Décalage temporel :

Soit un signal $x(n)$ de transformée en Z, $X(z)$. Soit k , un indice temporel quelconque et $x'(n)=x(n-k)$, on obtient simplement à partir de la définition de la transformée :

$$X'(z) = z^{-k} X(z)$$

La région de convergence reste inchangée, excepté l'ajout ou la suppression de $z=0$ ou $z=\infty$. C'est de cette propriété que vient l'utilisation d'une cellule z^{-1} pour tenir compte d'un décalage temporel d'une unité.

II.4.3.3- Facteur d'échelle en Z :

Soit un signal $x(n)$ de transformée $X(z)$ avec $r_1 < |z| < r_2$ pour région de convergence. Soit $x'(n)=x(-n)$, on a alors :

$$X'(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Avec $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$ pour région de convergence.

II.4.3.4- Inversion de l'axe temporel :

Soit $x(n)$ avec $X(z)$ pour transformée et $r_1 < |z| < r_2$ pour rayon de convergence. Soit $x'(n)=x(-n)$, on a alors :

$$X'(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$ comme rayon de convergence.

II.4.3.5- Convolution :

Soient $x_1(n)$ et $x_2(n)$ avec pour transformées en Z respectives $X_1(z)$ et $X_2(z)$.

Soit $x(n)=x_1(n) * x_2(n)$, on a alors :

$$X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(n-k) z^{-n} \right] \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) z^{-k} \right) X_2(z) \\
&= X_1(z) X_2(z)
\end{aligned}$$

Pour calculer la convolution de deux signaux, il peut être intéressant de multiplier les transformées respectives des deux signaux convolués et de rechercher la transformée en Z inverse de la transformée résultante.

Soit $s(n)$ la sortie d'un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(n)$ soumis à l'entrée $e(n)$:

$$s(n) = e(n) * h(n)$$

Alors:

$$S(z) = E(z)H(z)$$

II.4.4- Transformée en Z inverse :

A partir d'une liste de transformées en Z de signaux élémentaires connus, il peut être efficace de retrouver des signaux temporels à partir de transformées dérivées des opérateurs et propriétés décrits précédemment. Cependant, lorsque la transformée ne peut facilement s'écrire comme la combinaison de transformées élémentaires, il reste les techniques générales de transformation inverse :

1. L'intégration sur un contour fermé.
2. Le développement en puissance de Z et de Z^{-1} .
3. Le développement en fractions élémentaires.

2.4.1- Transformée inverse par intégration :

Soit $X(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$. On définit la transformée en Z inverse, la relation déterminant $x(n)$ à partir de $X(z)$ telle que :

$$x(n) = \frac{1}{j.2.\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (\text{II.23})$$

L'intégrale précédente consiste à sommer $X(z)z^{n-1}$ pour des valeurs de z prises sur un contour fermé du plan complexe qui contient l'origine du plan tout en étant incluse dans le domaine de convergence de la fonction [15].

II.5- Introduction à la transformée de Fourier discrète :

La transformée de Fourier d'un signal $x(k)$ est définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j.2.\Pi.f.k} \quad (\text{II.24})$$

La fonction $X(f)$ est périodique de période 1 et elle est généralement une fonction complexe de la variable réelle f . Le $k^{\text{ième}}$ échantillon du signal est donné par la relation inverse.

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{j.2.\Pi.f.k} df \quad (\text{II.25})$$

Comme $x(f)$ est périodique de période 1, cette intégrale peut être calculée sur n'importe quelle période $[f, f+1]$. Les limites choisies dans la relation (II.25) permettent une représentation bilatérale de la fonction $X(f)$ autour de la fréquence $f=0$ dans l'intervalle principal [9].

II.6- Introduction à partir de la transformée de Fourier d'un signal à temps continu :

Afin de pouvoir être obtenue par un ordinateur, la transformée de Fourier d'un signal à temps continu $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j.2.\Pi.f.t} dt \quad \text{Doit être mise sous une forme appropriée.}$$

Si les échantillons $x(kT_e)$ vérifient le théorème de l'échantillonnage, nous avons appliqué aux signaux $x(t)$ et $e^{j.2.\Pi.f.t}$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_e x(kT_e) e^{-j.2.\Pi.k.f.T_e} \quad \text{Pour } f \in \left[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}\right]$$

Puis en limitant le nombre de ces échantillons à une valeur finie N . Une approximation fournit alors les valeurs :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} T_e x(kT_e) e^{-j.2.\Pi.k.f.T_e} \quad \text{Pour } f \in \left[-\frac{1}{2T_e}, +\frac{1}{2T_e}\right]$$

Naturellement, la position $[0, (N-1)T_e]$ de la fenêtre d'observation est choisie de façon à conserver les échantillons importants du signal.

Comme le calculateur est limité en puissance de calcul, il ne peut fournir les valeurs $\tilde{X}(f)$ que pour un nombre limité de valeurs de la fréquence f .

Puisque $\tilde{X}(f)$ est périodique de période $\frac{1}{T_e}$ et qu'on établira que l'on peut retrouver

$\tilde{X}(f)$ par interpolation à partir des N valeurs $\tilde{X}(\frac{n}{NT_e})$ pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, calculera les N

valeurs suivante :
$$\tilde{X}(\frac{n}{NT_e}) = \sum_{k=0}^{N-1} T_e x(kT_e) e^{-j.2.\Pi.\frac{k.n}{N}}$$

II.7 - Introduction à partir de la transformée de Fourier d'un signal à temps discret :

De même, à fin de pouvoir être obtenue par un ordinateur, le calcul de transformée de Fourier du signal à temps discret $x(k) : X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j.2.\Pi.k.f}$ Doit être adapté, d'une part en limitant le nombre des valeurs de $x(k)$ à une valeur finie N en choisissant une fenêtre d'observation de façon à conserver les valeurs importantes du signal, on obtient alors :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j.2.\Pi.k.f}$$

Et d'autre part en ne calculant que les N valeurs [6] :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j.2.\Pi.\frac{k.n}{N}} \text{ Pour } n \in \{0, \dots, N-1\}$$

II.8- Discrétisation de fréquence :

L'introduction de calcul des termes $\tilde{X}(\frac{n}{N})$ est réalisée par le remplacement de la variable continue f par une variable discrète n , qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$f = n.\Delta f \tag{II.26}$$

Où Δf est l'incrément utilisé sur l'axe des fréquences harmoniques de la TFD.

Comme $X(f)$ est périodique de période 1, il suffit d'utiliser la substitution (II.26) sur une seule période. Nous pouvons diviser une période en N incréments et nous avons:

$$\Delta f = \frac{1}{N} \text{ si la période choisie est celle qui va de } 0 \text{ à } 1 \tag{II.27}$$

Pour les signaux apériodiques de durée limitée à N , la relation (II.24) devient :

$$X(f) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k)e^{-j.2.\Pi.f.k} \tag{II.28}$$

En tenant compte des relations (II.26) et (II.27), nous pouvons mettre cette relation sous la forme suivante :

$$X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k)e^{-j.2.\Pi.k.n./N} \quad \text{Avec } n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.29})$$

La transformée est donnée par :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j.2.\Pi.k.n./N} \quad \text{Avec } k \in \{k_0, \dots, k_0 + N - 1\} \quad (\text{II.30})$$

Les relations (II.29) et (II.30) définissent la transformée de Fourier discrète (TFD) pour un signal apériodique à durée finie N.

II.9- Effet de la discrétisation de la fréquence :

Compte tenu du changement de variable, la relation (II.25) est approximée par une somme de type :

$$x(k) \cong \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N/2-1} X(n)e^{j.2.\Pi.\frac{n.k}{N}} \quad (\text{II.31})$$

La valeur exacte de cette somme sera dénotée par $x_p(k)$:

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n)e^{j.2.\Pi.\frac{n.k}{N}} \quad (\text{II.32})$$

Ainsi :

$$x(k) \cong x_p(k) \quad (\text{II.33})$$

Il faut déterminer la qualité de cette approximation et chercher dans quelle condition la relation (II.33) devient une identité. Pour ceci, considérons les propriétés du terme :

$$\exp(j.2.\Pi.\frac{n.k}{N}) \quad (\text{II.34})$$

Qui représente un signal numérique exponentiel complexe. La notation presque unanimement admise représenter la N^{ieme} racine de l'unité est :

$$W_N = e^{-j.2.\frac{\Pi}{N}} \quad (\text{II.35})$$

Ainsi, le signal complexe (II.34) est dénoté par :

$$W_N^{n.k} = e^{-j.2.\Pi.\frac{n.k}{N}} \quad (\text{II.36})$$

II.9.1- Propriété de séparabilité :

$$x_N^{k+l} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}(k+l)} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}l} \quad (\text{II.37})$$

$$= w_N^k \cdot w_N^l \quad (\text{II.38})$$

II.9.2- Propriété: périodicité :

$$w_N^{k+l.N} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}(k+l.N)} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N}k} \times e^{j2\pi l} = w_N^k \quad (\text{II.39})$$

Ou l est un nombre entier .ainsi : $w_N^k = w_N^{k \cdot \text{mod} \cdot N}$

II.9.3- Propriété :orthonormalité

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{n.k} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = lN \text{ avec } l \text{ entier.} \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

II.10- Qualité de l'approximation discrète :

On remarque d'après la relation (II.39), que w_N^{-nk} est périodique en k de période N . Ainsi le signal $x_p(k)$, donnée par la relation (II.32) est un signal périodique de période N . Alors que le signal $x(k)$ n'est pas supposé périodique, son approximation obtenue par discrétisation de sa transformée de Fourier $X(f)$ est périodique, c'est une différence essentielle pour l'approximation (II.33). Pour trouver la relation entre les signaux $x_p(k)$ et $x(k)$, on peut substituer la relation (II.24), modifiée avec le changement

$$(II.26), \text{ dans la relation (II.32). On obtient : } x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-j \cdot 2\pi \frac{n.l}{N}} \right] e^{j \cdot 2\pi \frac{n.k}{N}}$$

$$\text{En intervertissant l'ordre de sommation. On a : } x_p(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{-j \cdot 2\pi \frac{n}{N}(l-k)} \right]$$

L'expression entre crochets, vertu de la relation (II.40), vaut 1 si $l-k = iN$ ou i est un nombre entier. Elle est nulle pour toutes les autres valeurs de $l-k$ ainsi, $l = iN + k$, d'où :

$$x_p(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(iN + k) \quad \text{Pour } k = -\infty, \dots, +\infty$$

Cette relation indique que le signal périodique $x_p(k)$ est obtenu par répétition périodique de période N de signal $x(k)$.

II.11- Transformée de Fourier discrète des signaux périodiques :

Le développement de la section précédente, permet de déduire directement la transformation de Fourier discrète pour un signal périodique $x_p(k)$ de période N . Il faut alors restreindre la somme infinie dans (II.24) à une période de $x_p(k)$.

En considérant la période $[0, N-1]$, nous aurons :

$$X_p(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j.2.\Pi.f.k} \quad (\text{II.41})$$

On peut vérifier aisément que la fonction $x_p(f)$ est périodique et de période 1. En utilisant le changement de variable (II.26), nous pouvons encore écrire :

$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) e^{-j.2.\Pi.k.n./N} \quad \text{Avec } n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.42})$$

La transformée inverse devient ainsi :

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_p(n) e^{j.2.\Pi.k.n./N} \quad \text{Avec } k \in \{k_0, \dots, k_0 + N-1\} \quad (\text{II.43})$$

D'une façon générale, nous pouvons définir la TFD, comme une application linéaire qui associe à N valeurs $x(0), \dots, x(k), \dots, x(N-1)$, N autres valeurs $X(0), \dots, X(n), \dots, X(N-1)$ définies par :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j.2.\Pi.k.n./N} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w_N^{nk} \quad \text{Pour } n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.44})$$

Avec : $w_N^{n.k} = e^{-j.2.\Pi.k.n./N}$

D'après (II.29), l'application est bijective, nous parlons alors de transformée de Fourier discrète inverse que l'on notera TFDI :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j.2.\Pi.k.n./N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(n) w_N^{-n.k} \quad \text{Pour } k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.45})$$

Avec : $w_N^{n.k} = e^{-j.2.\Pi.k.n./N}$

II.12- Transformation de Fourier discrète pour des signaux de durée illimitée :

Nous avons vu, qu'un signal ne peut être représenté complètement par N échantillons de sa transformée de Fourier que si sa durée est limitée à N. nous ne pouvons pas définir exactement la TFD d'un signal à durée illimitée. La TFD dans ce cas, n'est définie qu'approximativement en limitant la durée du signal par un moyen approprié [14].

II.13- Propriétés de la TFD :

Nous présentons dans cette section, les principales propriétés de la TFD. Ces propriétés vont nous permettre un usage facile et efficace de la TFD.

II.13.1- Périodicité :

Nous avons considéré que le nombre d'échantillons N contenu dans le signal x_n est égal à celui contenu dans son spectre $x(k)$. Nous connaissons que la discrétisation dans le domaine temporel conduit à un spectre périodique dans le domaine des fréquences. De la même façon, une discrétisation dans le domaine des fréquences, conduit à un signal périodique dans le domaine temporel. Ainsi, les suites des échantillons $x(n)$ et $x(k)$ sont périodiques de période N. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} X(n) &= x(n + N) && \text{Pour } n=0, 1, 2, \dots \\ x(k) &= x(k + N) && \text{Pour } k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Cette propriété de périodicité est démontrée en prenant la TFD.

II.13.2- Linéarité :

La TFD est une transformation linéaire. Cette propriété permet de calculer les TFD de différents signaux et de déterminer la TFD résultante et elle est largement utilisée dans l'analyse des signaux numériques.

$$\text{Si } x_i(k) \xrightarrow{TF} X_i(n) \Rightarrow \sum_{i=0}^L x_i(k) \xrightarrow{TF} \sum_{i=0}^L X_i(n) ; \quad \text{Pour } i=0, 1, 2, \dots, L$$

Où a_i sont des constants arbitraires. La TFD de chaque suite d'élément $s(n)$ doit être calculée sur une durée N définie par : $N = \max \{N_i\}$ pour $i=0, 1, 2, \dots, L$

Chaque signal discret $x(k)$ de durée $N_i < N$ doit être prolongé par $N_i - N$ échantillons nuls avant de calculer sa TFD.

II.13.3- Décalage cyclique temporel :

Si $x(k) \xrightarrow{TF} X(n)$ Alors la TFD d'une suite de nombre $x(k)$ décalée circulairement de n est donnée par :

$x(k - k_0) \xrightarrow{TF} X(n)e^{-j2\Pi.n.k_0./N}$ Pour déterminer la TFD de $s(k-k_0)$, on considère la définition de la ITFD :

$$x(k - k_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j.2.\Pi.n.(k-k_0)/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X(n)e^{-j.2.\Pi.k_0.n/N} \right) e^{j.2.\Pi.n/N} = IDFT \left\{ X(n)e^{-j.2.\Pi.n_0/N} \right\}$$

II.13.4- Décalage cyclique fréquentiel :

$$x(k) \xrightarrow{TF} X(n)$$

$$x(k)e^{j2\Pi.k.n_0./N} \xrightarrow{TF} X(n - n_0)$$

Pour déterminer la TFD de $x(n_0 - n)$, nous considérons la définition de la TFD :

$$\begin{aligned} X(n - n_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j.2.\Pi.k.(n-n_0)/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(k)e^{j.2.\Pi.k.n_0/N} \right) e^{-j.2.\Pi.k.n/N} \\ &= TFD \left\{ x(k)e^{j.2.\Pi.n_0/N} \right\} \end{aligned}$$

II.13.5- Symétrie de la TFD :

Si $x(k)$ est une suite réelle, alors : $x(k) = x^*(N - k)$ pour $k = 0,1,2,3,\dots, N-1$

Les échantillons de la suite $x(n)$ sont symétriques par rapport à $N/2$. Ainsi, $\text{réel}[X(n)]$ et $\text{imaginaire}[X(n)]$ sont respectivement des fonctions paire et impaire par rapport à $N/2$. Cette propriété permet donc d'éviter la moitié des calculs dans (II.44), et elle est facilement démontrée en calculant $x^*(N - n)$ à partir de l'équation (II.44) et en tenant compte du fait que le signal discret $x(n)$ est réel :

$$X^*(N - n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)e^{j2\Pi\frac{(N-k)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k)e^{j2\Pi n} e^{-j2\Pi\frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\Pi\frac{kn}{N}} = X(n)$$

Ainsi, pour une suite $x(k)$ réelle, $X(n)$ et $x^*(N - n)$ sont complexes conjugués. Comme $X(n)$ est une suite périodique de période N , nous avons aussi :

$$X\left(\frac{N}{2} + n\right) = X\left(-\frac{N}{2} + n\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - n\right)$$

Qui correspond à une symétrie hermétique par rapport à $k=0$ [11].

II.13.6- Convolution et corrélation cyclique:

Pour conserver la propriété classique qui échange produit simple et produit de convolution par la transformation de Fourier, nous devons introduire ici un produit de convolution particulier, qui ne concerne que les signaux à temps discret de support temporel $\{0, \dots, N-1\}$ appelé produit de convolution cyclique par position au produit de convolution classique appelé quelque fois produit de convolution linéaire.

On appelle produit de convolution cyclique de deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de supports temporels $\{0, \dots, N-1\}$ le signal $z(k)$ de support temporel $\{0, \dots, N-1\}$ Défini par :

$$z(k) = x(k) \otimes y(k) \Leftrightarrow z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(k-n)$$

Le terme cyclique provient de la visualisation suivante de ce produit. Par suite :

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^{N-1} x(r)y(k-r) \right] e^{-j.2\pi \frac{kn}{N}} = \left[\sum_{r=0}^{N-1} x(r)e^{-j.2\pi \frac{rn}{N}} \right] \left[\sum_{k=0}^{N-1} y(k-r)e^{-j.2\pi \frac{(k-r)n}{N}} \right]$$

Puisque l'indice $k-r$ de $y(k-r)$ est à prendre en modulo N et que

$$e^{-j.2\pi \frac{(k-r)n}{N}} = e^{-j.2\pi \frac{(k-r+N)n}{N}}$$

$$z(k) = x(k) \otimes y(k) \xrightarrow{TFD} z(n) = x(n) + y(n)$$

On démontrerait de même :

$$z(k) = x(k)y(k) \xrightarrow{TFD} z(n) = \frac{1}{N} x(n) \otimes y(n)$$

De même, on définit un produit de corrélation cyclique des deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de supports temporels $\{0, \dots, N-1\}$ par le signal de supports temporels $\{0, \dots, N-1\}$ [6] :

$$x(k) \otimes y^*(-k)$$

II.13.7- Théorème de Parseval :

D'après la relation appliquée aux signaux $x(k)$ et $y^*(k)$ pour $n=0$ [11] :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y^*(k)e^{-j.2\pi \frac{k.n}{N}} \Big|_{n=0} = \frac{1}{N} \left[\sum_{r=0}^{N-1} x(r)y^*(-(n-r)) \right] \Big|_{n=0}$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) y^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) y^*(r)$$

Et pour $y(k) = x^*(k)$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |x(r)|^2$$

II.14- Relation entre TFD et la transformée en Z :

II.14.1- Reconstitution on Z :

La transformée en Z d'un signal à durée limitée $x(k)$ est donnée par :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) z^{-k} \quad (\text{II.46})$$

En substituant la relation (II.20) dans cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) w_N^{-n.k} \right] z^{-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{n.k} z^{-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{w_N^{n.N} z^{-N} - 1}{w_N^n z^{-1} - 1} = \frac{z^{-N} - 1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{1}{w_N^n z^{-1} - 1} \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Avec } w_N^{n.N} = e^{-j.2.\Pi n} = 1$$

II.14.2- Reconstitution de la transformée de Fourier :

Nous pouvons également, considérer les coefficients $X(n)$ de la TFD comme les échantillons prélevés sur la transformée en Z aux N points répartis sur le cercle unité avec incrément de $2\Pi/N$ radians.

En prenant $Z = \exp(j2\Pi f)$, nous obtenons la transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{e^{-j.2\Pi.f.N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{1}{e^{j2.\Pi.n/N} e^{-j2.\Pi f} - 1} \quad (\text{II.48})$$

Nous pouvons mettre, cette expression sous une forme plus compacte en utilisant la

relation suivante [14] :

$$e^{j.x} - 1 = e^{j.x/2} (e^{j.x/2} - e^{-j.x/2}) = 2j e^{j.x/2} \sin x/2 \tag{II.49}$$

Nous obtenons :

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{\sin \Pi.f.N}{\sin \Pi(f - n/N)} e^{j.\Pi(f(1-N)-n/N)} \tag{II.50}$$

II.15- Réalisation pratique :

Pour calculer ces séries de TFD, il existe un algorithme de transformée de Fourier rapide ou FFT (Fast Fourier Transform) qui dans le cas où $N = 2^M$ est particulièrement performant (en utilisant cet algorithme pour $N= 1024$, le temps de calcul est divisé par un facteur environ 1000 par rapport à l'utilisation directe de la définition. Implantée sur des ordinateurs ou réalisations à base de processeurs actuels, il dure moins d'une μs). Cet algorithme très célèbre est largement étudié dans les cours d'informatique et d'algorithmique.

II.16- Transformée de Fourier rapide:

II.16.1- Principe :

J.W.COOLEY et J.W.TURKEY ont révolutionné le domaine du traitement numérique du signal, avec la publication en 1965 d'un algorithme de calcul rapide de la TFD appelé transformation de Fourier rapide plus connu sous la FFT.

On considère l'expression (II.44) : $X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)w_N^{n.k}$ Avec $n \in \{0, \dots, N-1\}$

Cette expression peut se mettre sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^0 & \dots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & \dots & w_N^{N-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w_N^0 & w_N^{N-1} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{II.51}$$

La TFD est donc, le produit d'une matrice de transformation w_n par un vecteur x formé par les échantillons d'un signal discret. Pour la simplicité, nous n'exploiterons pas le fait que pour certaines valeurs de n et k $w_N^{n.k}$ est égale à $\pm j$ ou ± 1 . Dans ce cas, l'examen de la

matrice (II.51) montre que la détermination de la TFD nécessite N^2 multiplications complexes et $N(N-1)$ additions complexes.

L'idée de la base de la FFT est de réduire le nombre de multiplications et d'additions complexes permettant de déterminer la TFD. La FFT existe sous deux formes dites partagées ou entrelacées dans le temps et dans les fréquences. Dans la première forme, les N échantillons du signal discret $x(k)$ sont décomposés en plusieurs intervalles comportant chacun N_i échantillons. Dans la seconde forme, le même processus est réalisé dans le domaine des fréquences. Nous allons considérer le cas du partage dans le temps. Pour simplifier, on supposera que le nombre d'échantillons N est une puissance de 2 $N=2^r$ [11].

II.16.2- FFT partagée dans le temps :

II.16.2.a- Première étape :

N est pair, on peut donc partager la suite $x(k)$ en deux suites de $N/2$ valeurs.

Posons $k = 2.i$ pour les valeurs paires et $k = 2.i + 1$ pour les valeurs impaires. $i \in \left\{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}$

La relation (II.44) pourra alors s'écrire :
$$X(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i)w_N^{2.n.i} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1)w_N^{n(2i+1)}$$

Soit la propriété importante de w_N suivante :

$$w_N^\alpha = e^{-j.2\pi \frac{\alpha}{N}} = e^{-j.2\pi \frac{\alpha}{N/\alpha}} = w_{N/\alpha} \quad (\alpha \in N)$$

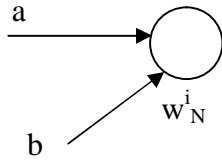
D'où :

$$X(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i)w_N^{n.i} + w_N^n \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1)w_N^{n.i} \quad (\text{II.52})$$

Posons $x(2.i) = x_1(i)$ et $x(2.i+1) = x_2(i)$. Chacune des deux sommes est une TFD d'ordre $N/2$ d'où :

$$X(n) = X_1(n) + w_N^n X_2(n) \quad (\text{II.53})$$

Le graphe de fluence de la première étape, est la représentation schématique des calculs dans leurs différentes étapes. Le résultat de la première étape, se présente sous la forme dans la Figure (II.1), dans laquelle Pour $N = 8$.



Signifie $a+b.w_N^i$

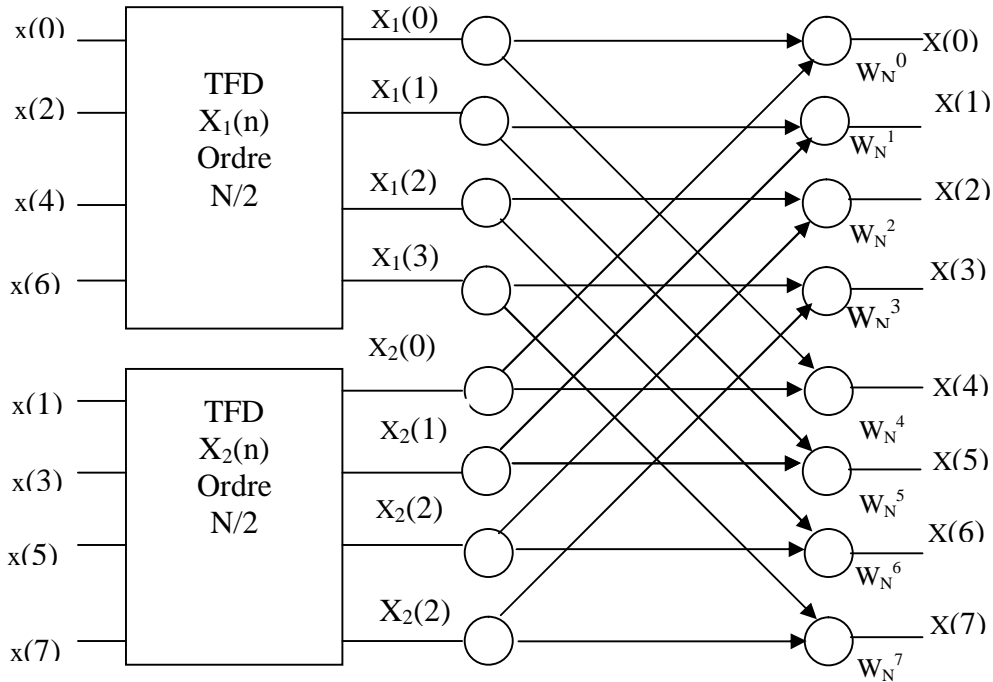


Figure II.1 : Graphe de fluence de la première étape.

II.16.2.b- Deuxième étapes :

Prenant : $N = 2^r$; $N/2 = 2^{r-1}$ est également pair, chacune des TFD d'ordre $N/2$ peut elle même être partagée en deux TFD d'ordre $N/4$.

Détermination de $X_1(n)$:

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(i) w_{\frac{N}{2}}^{ni} \quad \text{Avec } i \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

Soit j tel que $i = 2.j$ pour les valeurs paires et $i = 2.j+1$ pour les valeurs impaires.

$$j \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \right\}$$

$$X_1(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j) w_{\frac{N}{2}}^{2nj} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2j+1) w_{\frac{N}{2}}^{n(2j+1)} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j) w_{\frac{N}{4}}^{n.j} + w_{\frac{N}{2}}^n \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2j+1) w_{\frac{N}{4}}^{n.j} \quad (\text{II.54})$$

Posons $x_1(2j) = x_{11}(j)$ et $x_1(2j+1) = x_{12}(j)$, chacune des deux sommes est une TFD

d'ordre $N/4$, d'où :

$$X_1(n) = X_{11}(n) + w_{\frac{N}{2}}^n X_{12}(n)$$

Détermination de $x_2(n)$:

$$X_2(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2j) w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j} + w_{\frac{N}{4}}^n \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_2(2j+1) w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j} = X_{21}(n) + w_{\frac{N}{2}}^n X_{22}(n)$$

Le Graphe de fluence de la deuxième étape est donné par la Figure (II.2)

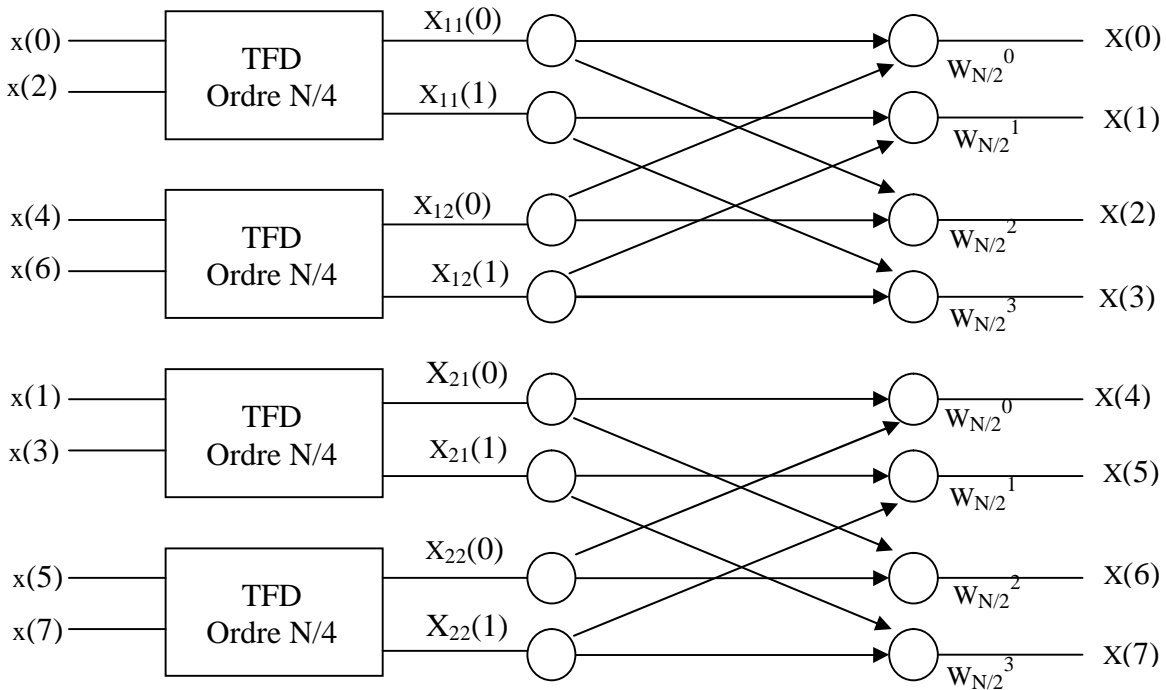


Figure II.2 : Graphe de fluence de la deuxième étape.

II.16.2.c- Dernière étape :

Les étapes suivantes sont conduites comme les deux premières. La dernière étape qui est la 1^{ième} pour $r = 3$ donne le résultat ci-dessous [13] :

$$X_{11}(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j) w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j} :$$

$$X_{11}(0) = x_1(0) + x_2(2) = x(0) + x(4)$$

$$X_{11}(1) = x_1(0) + x_2(2) w_{\frac{N}{4}}^1 = x(0) + x(4) w_{\frac{N}{4}}^1$$

$$X_{12}(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j+1)w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j}$$

$$X_{12}(0) = x_1(1) + x_2(3) = x(2) + x(6)$$

$$X_{12}(1) = x_1(1) + x_2(3)w_{\frac{N}{4}}^1 = x(2) + x(6)w_{\frac{N}{4}}^4$$

$$X_{21}(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j)w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j}$$

$$X_{21}(0) = x_1(0) + x_2(2) = x(1) + x(5)$$

$$X_{21}(1) = x_1(0) + x_2(2)w_{\frac{N}{4}}^1 = x(1) + x(5)w_{\frac{N}{4}}^4$$

$$X_{22}(n) = \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2j+1)w_{\frac{N}{4}}^{n \cdot j}$$

$$X_{22}(0) = x_1(1) + x_2(3) = x(3) + x(7)$$

$$X_{22}(1) = x_1(1) + x_2(3)w_{\frac{N}{4}}^1 = x(3) + x(7)w_{\frac{N}{4}}^4$$

Le graphe de fluence de la dernière étape est représenté par la Figure (II.3) suivante :

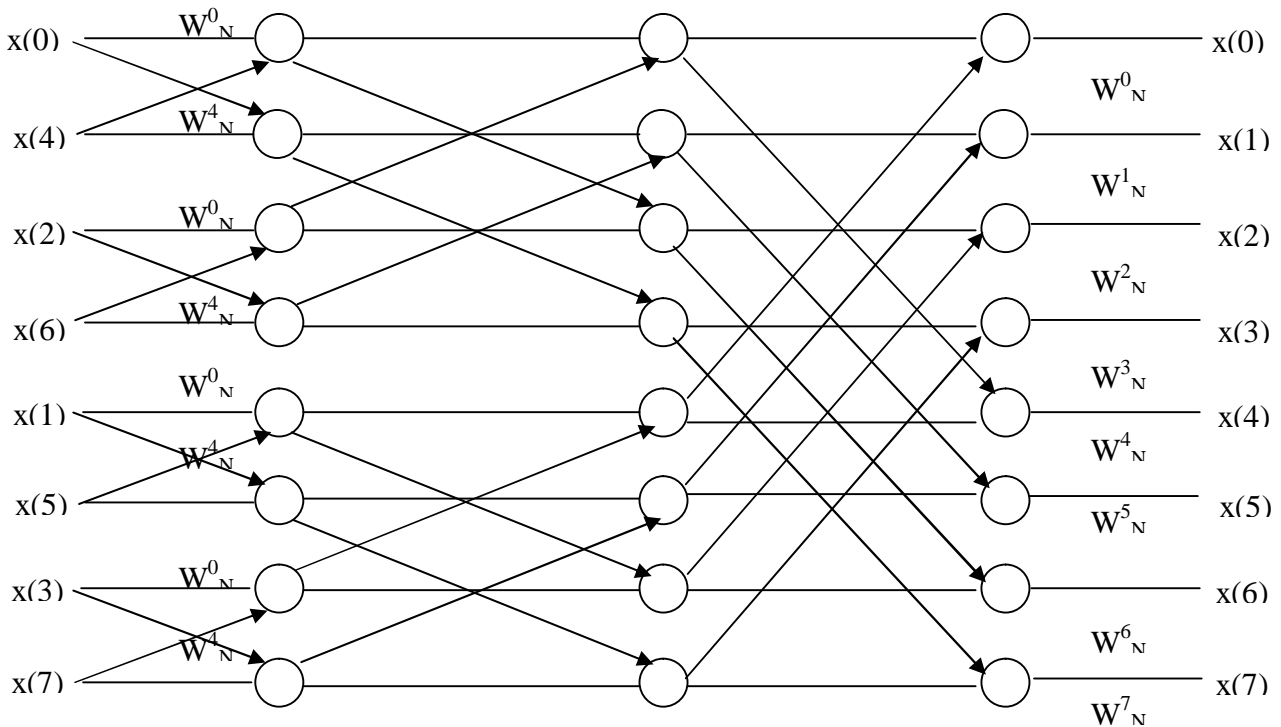


Figure II.3 : Graphe de fluence complet de la TFD pour N=8 par la FFT en temps partagé.

II.17- Comparaison de la TFD et de la FFT :

La différence fondamentale entre la TFD et FFT, réside dans la méthode de calcul des éléments de la suite $x(n)$. La TFD calcule directement ces éléments à partir de la relation (II.17) si N est une puissance de 2 : $N=2^M$. La FFT est simplement une méthode de décomposition de la TFD d'ordre N en deux TFD d'ordre de $N/2$ chacune. Ce processus de décomposition est répète jusqu'à ce que la TFD d'ordre 2 soit engendrée. Ces étapes ont pour but de réduire le nombre de multiplications et d'additions complexes. Puisque le nombre d'étapes intermédiaires est égale à $M=\log_2 N$ et comme chacune de ces étapes comporte $N/2$ multiplications complexe et N additions complexes, la FFT nécessite donc un nombre de multiplications complexes : $M_c = \frac{N}{2} \log_2 N$ et un nombre d'additions complexes:

$$A_c = N \log_2 N .$$

Le nombre de multiplications peut être encore réduit, du fait que pour certaines valeurs de n et k W_N^{nk} est égale à ± 1 ou $\pm j$ si nous concéderons que le temps de calcul est proportionnel au nombre de multiplications complexes. Alors le rapport du nombre de multiplications complexes nécessaire pour le calcul direct par celui nécessaire pour la calcul indirect donne le gain en temps de calcul: $G = \frac{2N}{\log_2 N}$ Pour $N=10^{10}=1024$. La FFT permet de réduire le temps de calcul de 295 fois [11].

II.18- Conclusion :

La transformation de Fourier est un outil très précieux en traitement des signaux, elle intervient en particulier dans l'analyse spectrale, qui en est une application fondamentale. Avec les méthodes classiques, le calcul de cette transformation par voie numérique nécessite un temps de calcul prohibitif. L'algorithme de calcul rapide connu sous le nom de transformation de Fourier rapide (en anglais : Fast Fourier Transform ou FFT) a permis de réduire considérablement ce temps de calcul.

Plusieurs méthodes, en particulier un certain nombre de traitements numérique des signaux bidimensionnels, non linéaires développés préalablement sur le plan théorique, ont pu être appliquées avec succès grâce à cet algorithme.

CHAPITRE III

FILTRAGES NUMERIQUES

III.1- Introduction :

Le filtrage des signaux est une opération essentielle en traitement du signal (filtrage anti-repliement, détection synchrone,...). Cette opération peut être réalisée soit par des systèmes analogiques (filtre RC, composants optiques, acoustiques...), soit par un algorithme informatique à condition que les signaux soient sous forme numérique. La méthode numérique est d'autant plus intéressante que la puissance et la rapidité de calcul des microprocesseurs sont élevées. Elle est particulièrement utile en Physique où les données expérimentales sont souvent sous forme de suites numériques.

Comme pour les signaux à temps continus, le principal traitement opéré sur les signaux à temps discret sont les traitements linéaires invariants dans le temps que nous appellerons également filtrage. Nous ferons ici l'hypothèse que le traitement des signaux discrets se fait avec une précision infinie. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que l'utilisation de systèmes numérique impose une quantification en nombre fini de bits des signaux et des paramètres du filtre provoquant des effets indésirables tels que le bruit d'arrondi, la saturation et, dans le pire des cas, des instabilités [6].

III.2- Définition d'un filtre:

Un filtre est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres. Un exemple connu du grand public est l'égaliseur audio.

Un filtre modifie (ou filtre) certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temps et dans le domaine fréquence. D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes ; le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes [16].

III.3- Définition du gabarit d'un filtre :

C'est une représentation graphique des conditions limites amplitude – fréquence, nécessaire pour réaliser un filtrage donnée; il délimite la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle le gain doit être maintenant quasi constant c'est-à-dire avec un marge tolérable.

Il donne les limites entre lesquelles, le gain peut fluctue, ainsi que les fréquences au delà desquelles le signal devra subir une atténuation spécifique Comme montre sur la Figure (III.1) [17].

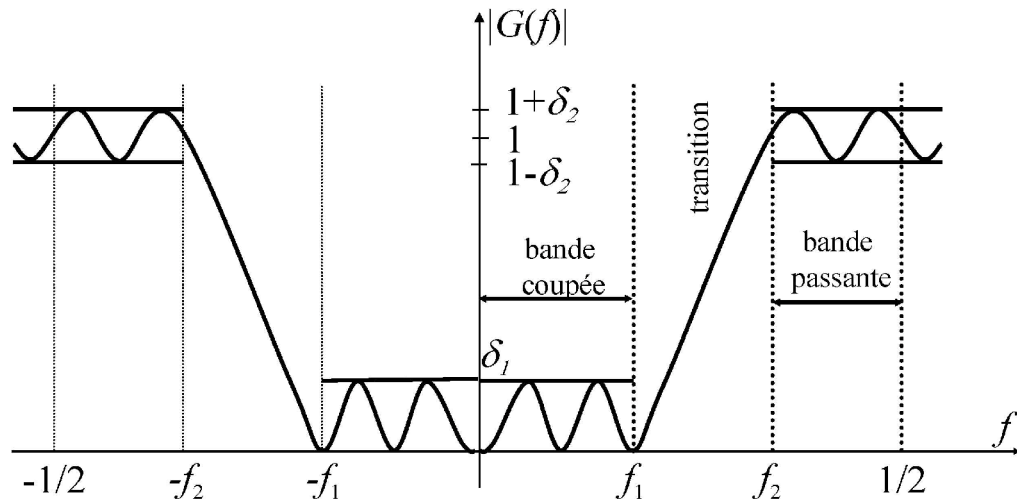


Figure III.1 : Gabarit d'un filtre. [22]

III.3.1- Paramètres de spécification :

- f_1 et f_2 , fréquences de bord (bandes coupée et passante).
- Taux d'ondulation maximum en bande passante, souvent défini par $-20 \log_{10}(1 - \delta_2)$ dB.
- Atténuation minimum en bande coupée, souvent définie par $-20 \log_{10}(\delta_1)$ dB.

III.4- Causalité et stabilité d'un filtre :

Comme pour les filtres à temps continu, nous allons apporter deux restrictions à la relation générale de convolution $S(k) = \sum_{n=0}^M x(n).h(k-n) = \sum_{n=1}^N x(k-n)h(n)$: la causalité et la stabilité. Celles-ci vont permettre réaliser physiquement un filtre à temps discret.

III.4.1- Causalité :

Un filtre est dit causale si et seulement si à une entrée e nulle pour $t < 0$ correspond une sortie $s=H(e)$ nulle pour $t < 0$, autrement dit si et seulement si $h(e)$ est nulle pour tout $t < 0$. Une telle réponse impulsionnelle h est dite causale [26].

III.4.1.1- Principe de Causalité :

Le principe de causalité suggère que le fonctionnement d'un filtre s'accomplisse en temps réel. Cette définition n'est pas très rigoureuse mais nous ne possédons pas tous les outils mathématiques pour le définir plus précisément. Pour comprendre intuitivement le principe de causalité il est préférable d'analyser ses effets qui sont relativement simples à

assimiler sur un exemple pratique. Pour ce faire, revenons sur le filtre passe-bas à moyenne mobile et examinons précisément les indices des échantillons utilisés dans son expression. On note que le calcul de l'échantillon d'indice n fait intervenir les échantillons d'indice $n-1$ et $n+1$. Si l'on considère et c'est toujours le cas, que l'indice n correspond à l'échantillon courant (celui qui vient immédiatement), un problème apparaît inévitablement sur la signification de l'échantillon $n+1$. En effet, puisque n est l'instant courant, le terme $f(n+1)$ de l'équation $g(n) = \frac{f(n-1) + f(n) + f(n+1)}{3}$ constitue une valeur futur. Cela ne pose pas de problème

dans l'exemple sur l'enregistrement. Les données étant sauvegardées, tous les points sont disponibles aux l'instant n et $n+1$. Pour les applications en temps réel, il n'y a cependant pas le choix, on est contraint d'utiliser uniquement les valeurs courantes et passées. Le filtre basé sur ces valeurs est appelé filtre causal alors que celui nécessitant une ou plusieurs valeurs futures est dit non-causal (c'est le cas du filtre MA). Notons que les filtres naturels du monde réel sont nécessairement causaux. Cette dernière remarque permet de souligner un autre avantage du TNS qui est de permettre la construction de filtres (non causaux) ne pouvant pas être réalisés par d'autres technique. Reprenons le cas du filtre MA, et remarquons qu'on peut rendre le filtre causale en décalant vers l'avant l'instant d'arrivée du signal de sortie. Ainsi, on obtient $y(n+1) = \frac{f(n+1) + f(n) + f(n-1)}{3}$. En remplaçant n par $n-1$, on obtient de façon parfaitement équivalente : $y(n) = \frac{f(n) + f(n-1) + f(n-2)}{3}$ [19].

III.4.2- Stabilité :

Un filtre linéaire est dit stable au sens strict (Entrée Bornée – Sortie borée) si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Il est dit stable au sens large si $|h(t)| < M \forall t \in \mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit stable au sens strict est que sa réponse impulsionnelle vérifie : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$

Soit h un filtre causal tel que $H_z(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Alors h est stable si et seulement si les zéros de Q sont de modules < 1 .

En effet, si la réponse impulsionnelle vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$ et si $x(t)$ est un signalé borné tel que $|x(t)| \leq A$, alors la sortie $y(t)$ vérifie :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| |x(t - \theta)| d\theta \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty$$

Réciproquement, comme le signal $x(t) = e^{-j\text{Arg}(h(-t))}$ est borné, la sortie associée à ce signal vérifie :

$$|y(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) x(-\theta) d\theta \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty.$$

Un filtre stable au sens large peut être instable au sens strict et réciproquement. En effet, si $h(t)$ est égal à l'échelon unité $u(t)$, le filtre est stable au sens large mais instable au sens strict et si $h(t) = \delta(t)$, le filtre est stable au sens strict mais instable au sens large.

Un filtre à temps continu est dit à phase minimale s'il est stable et si tous ses zéros sont à partie réelle négative.

Un filtre est à phase linéaire si l'argument de sa fonction de transfert est une fonction linéaire ($A(\theta) = \text{Arg}[H(z)] = a\theta$) [17].

III.5- Les filtres numériques :

III.5.1- Introduction et définition :

On appelle «filtre numérique» un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages tels que : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

Le problème se pose de la même manière que pour les filtres analogiques. Il consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue. Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(kT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même instant kT_e des n entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_k$ pour tout $i \in \{k-1, \dots, k-N\}$ et de plus des sorties

numériques précédentes $y_i(iT_e) = y_i$ pour tout $i \in \{k - 1, \dots, k - N\}$ Figure (III.2) :

$$y_k = F_{onction}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-N})$$

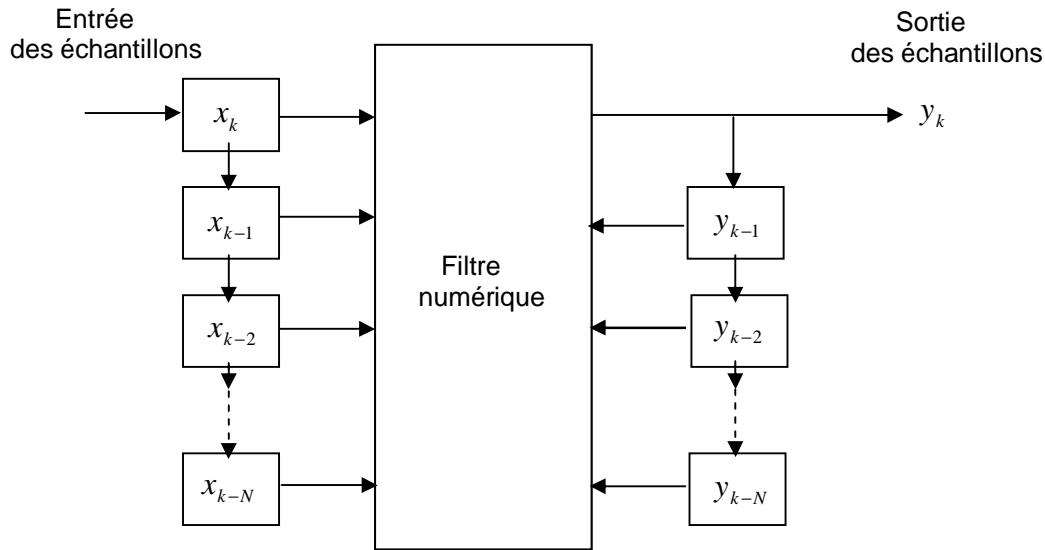


Figure III.2 : Représentation schématique d'un filtre numérique.

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants, la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution. Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k soit une combinaison linéaire de n éléments d'entrée ou de sortie précédents x_i et y_i :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j}$$

(III.1)

Cette équation générale des filtres numériques est appelée équation aux différences. A partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres Figure (III.3) : les filtres non récursifs pour lesquels tous les coefficients b_i sont nuls et les filtres récursifs pour lesquels au moins un coefficient b_i est non nul. Ces derniers sont encore définis comme des filtres possédant une boucle de contre-réaction. Pour les filtres non récursifs, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_{k-i} \tag{III.2}$$

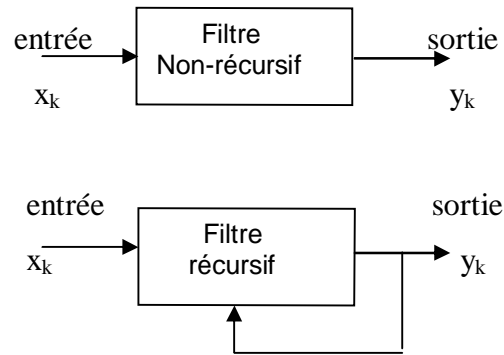


Figure III.3 : Filtrés non-récurrents et récurrents.

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, qui est liée aux échantillons de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{III.3})$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou filtres à moyenne ajustée (MA) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation (III.3) qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle, soit la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^N h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{III.4})$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir des filtres non récurrents. En effet, l'équation (III.4) correspond à l'équation (III.2) pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récurrents.

L'autre catégorie de filtres numériques est celle des filtres dits à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou filtres généraux (ARMA), pour lesquels la relation (III.4) ne sera pas applicable ; il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale (III.1). Il est possible de définir une catégorie particulière des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (AR) pour lesquels nous avons la relation suivante (cas

particulier de la relation (III.1) :
$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j}$$

Enfin, il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD). Il est possible d'appliquer le produit

dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma de la Figure (III.4) que celui présenté au Figure (III.2).

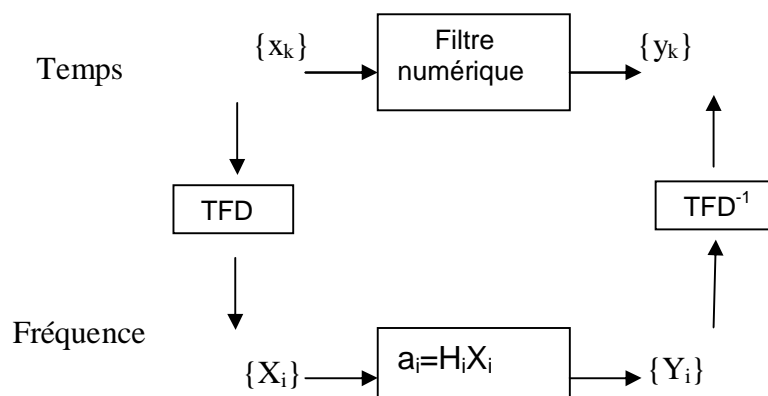


Figure III.4 : Réalisation d'un filtre numérique par transformée de Fourier discrète.

La conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

- Modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;
- Synthèse du filtre numérique basée sur l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;
- Réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

Nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets, en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en Z [20].

III.5.2- Filtrage numérique simple - lissage temporel :

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations (III.1) et (III.4), la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N .

Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « *lissage* » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un

bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N , appelé aussi profondeur de lissage, qui s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i}$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences (III.2) des filtres non récursifs pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$.

L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et $+1$ avec une moyenne nulle et un écart type de $0,6$, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0,6, +0,6]$ avec un écart type de $0,18$ dans le cas de 10 valeurs moyennées Figures (III.5)-(III.6). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage, par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information.

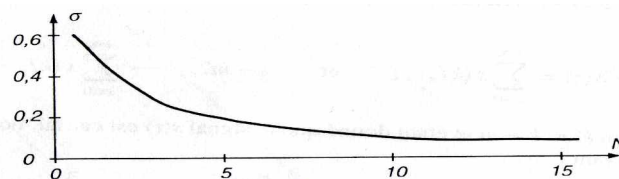


Figure III.5 : Blan uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

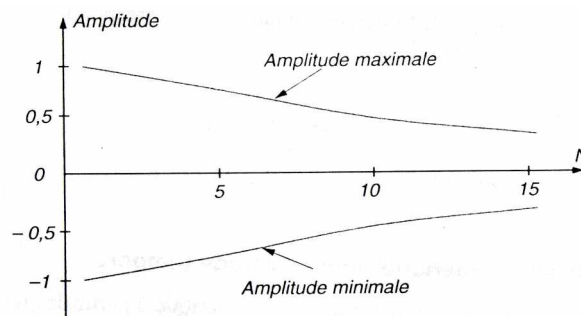


Figure III.6 : Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

III.6- Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie :

La conception et la réalisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont essentiellement basées sur la fonction de transfert $H(z)$: gabarit de filtrage de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. La première étape est donc l'obtention

de cette fonction de transfert à partir de l'équation aux différences [21].

III.6.1- Équation aux différences :

Nous considérons des filtres numériques linéaires et invariants dans le temps correspondant aux filtres analogiques décrits par des équations différentielles à coefficients constants de la forme :

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = \beta_0 y(t) + \beta_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Dans cette hypothèse, les systèmes sont représentés par des équations aux différences de la forme (équation (III.1)) :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j y_{k-j} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^N a_i x_{k-i} = \sum_{j=1}^N b_j y_{k-j} \quad \text{avec } b_0=1$$

Cette équation aux différences est une équation linéaire à coefficients constants d'ordre N du filtre numérique où y_k et x_k sont respectivement le signal de sortie (réponse) et le signal d'entrée (excitation).

En appliquant la transformée en Z à l'équation générale précédente et soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées en Z de y_k et x_k , il vient :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^N b_j y_{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=0}^N a_i x_{k-i} \right] z^{-k}$$

Soit :

$$Y(z) \cdot \sum_{j=0}^N b_j z^{-j} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}$$

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z ou « transmittance » en z , $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}} \quad (\text{III.6})$$

Ou dans le cas d'un filtre non-récurrentiel :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \quad (\text{III.7})$$

Ensuite la question fondamentale à résoudre est comment obtenir $H(z)$ pour des caractéristiques bien définies (gain, phase...) correspondant par exemple à un filtre

analogique défini par son équation différentielle ou par sa fonction de transfert $H(p)$: c'est le domaine très vaste de la synthèse des filtres numériques. Les méthodes qui permettent de déterminer une fonction de transfert $H(p)$ répondant à des spécifications données de gain et de phase ou à des réponses impulsionnelles ou indicielles sont bien connues dans le cas des filtres analogiques. Une première approche à cette problématique est de réaliser une transposition du filtre analogique en filtre numérique.

III.6.2- Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$:

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H_p(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z . Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H_z(z)$ dans le plan z , il suffit de définir une relation $p = F_{\text{onction}}(z)$, d'où :






$$H(z) = H_p(p) = F_{\text{onction}}(z)$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$Z = e^{p.T_e}$$

$$\text{Soit} \quad p = \frac{1}{T_e} \text{Ln} (z) \quad (\text{III.8})$$

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H_p(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p . Il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme « quotient de deux polynômes ». De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse pulsionnelle, réponse indicielle, etc. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes :

-  Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle.
-  Méthode de l'invariance indicielle.
-  Transformation adaptée.
-  Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation.
-  Transformation homographique ou équivalence de l'intégration.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons brièvement la méthode pour transformer $H(p)$ en $H(z)$, les conditions pour pouvoir réaliser cette transformation et, enfin, les avantages et inconvénients de cette méthode.

III.6.2.1- Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle :

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e , s'exprime par :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e . Soit la relation :

$$H_e(f) = H(f) * \text{Pgn}_{T_e}(f) \text{ d'où } h_e(t) = h(t) \cdot [T_e \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)]$$

Par conséquent la transformée en Z $H_z(z)$ de $h_e(t)$ est donnée par :

$$h_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot z^{-k}$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{a_i}{p-p_i}$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique : $H(p) = a_i \cdot e^{p_i t}$

Ainsi la transformation à réaliser pour obtenir le filtre numérique à partir du filtre analogique caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ est :

$$\frac{1}{p-p_i} \rightarrow T_e \cdot \frac{1}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.9})$$

Si un filtre quelconque peut s'exprimer sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p-p_i} \rightarrow H(z) = [T_e \cdot \frac{z-1}{z}] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.10})$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

- **Condition** : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de Shannon.

- *Domaine d'application* : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande.
- *Inconvénient* : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

III.6.2.2- Méthode de l'invariance indicielle :

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $S_{ind}(t)$ s'obtient en utilisant la relation suivante :

$$S_{ind}(t) = h(t) * u(t)$$

La fonction $u(t)$ est la fonction unité ou échelon d'Heaviside, précédemment étudiée, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en Z de cette fonction est très simple à établir :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

Les transformées de Laplace et en Z de l'équation donnant $S_{ind}(t)$ sont respectivement :

$$S_{ind}(p) = H(p) \cdot U(p) = \frac{H(p)}{p} \quad \text{et} \quad S_{ind}(z) = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente. Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z)/(z-1)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{1}{p-p_i} \rightarrow \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T_e}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.11})$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p-p_i} \rightarrow H(z) = \left[T_e \cdot \frac{z-1}{z} \right] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.12})$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- *Condition* : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon.

- *Domaine d'application* : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande.
- *Inconvénient* : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

III.6.2.3- Transformation adaptée :

Par cette méthode, appelée aussi (matched transform), on obtient un filtre numérique dont les pôles de la fonction de transfert ou transmittance sont conservés. En considérant que $H(p)$ est sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre (filtre analogique ne présentant que des pôles), cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation identique à la précédente, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{p - p_i} \rightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}}$$

Pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en série, nous obtenons alors la relation complète.

$$H(p) = \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \rightarrow H(z) = T_e \cdot \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.13})$$

III.6.2.4- Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation :

Étant donné une équation différentielle reliant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, la méthode, qui correspond à une démarche classique en analyse numérique, consiste à donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Dans le cas de la transformation d'Euler, l'approximation réalisée est la plus simple :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette approximation correspond également à l'approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \rightarrow x_k = x_{k-1} + T_e \cdot y_k$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle initiale est :

$$Y(p) = p \cdot X(p) \quad \text{d'où } H(p) = p$$

La transformée en Z de l'équation différentielle initiale discrétisée est :

$$y(z) = \frac{1}{T_e} \cdot [x(z) - x(z) \cdot z^{-1}] = \frac{1-z^{-1}}{T_e} \cdot x(z)$$

Soit
$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

Cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e} \quad (\text{III.14})$$

La transformation d'Euler ou par équivalence à la dérivation est caractérisée par :

- *Domaine d'application* : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres analogiques simples.
- *Inconvénient* : le principal inconvénient est la distorsion des caractéristiques en hautes fréquences.

III.6.2.5- Transformation homographique ou équivalence de l'intégration :

De la même manière que précédemment, cette méthode consiste à donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue. Dans ce cas, l'approximation réalisée est celle de la « méthode des trapèzes » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \rightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [y_k + y_{k-1}]$$

La transformée en Z de l'équation différentielle discrétisée est :

$$x(z) = x(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_e}{2} [Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1}]$$

Soit :

$$H(z) = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1-z^{-1}]}{[1+z^{-1}]}$$

Soit après une transformation en Z, cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transposition suivante :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1-z^{-1}]}{[1+z^{-1}]} \quad (\text{III.15})$$

La transformation homographique ou par équivalence à l'intégration ou encore appelée transformation bilinéaire est caractérisée par :

- *Domaine d'application* : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données.
- *Avantage* : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

III.7- Synthèse des filtres numériques à impulsion finie :

La convolution intervient dans tous les systèmes de filtrage linéaire et consiste à la modification du signal d'entrée par la caractéristique temporelle du système ou réponse impulsionnelle. Le filtre analogique, étant défini par sa fonction de transfert $H(p)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal de sortie $y(t)$ du filtre soumis au signal d'entrée $x(t)$ est donné par la relation connue :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Dans le cas de filtre à réponse impulsionnelle finie, le filtrage numérique par convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(kT_e) = X_k$ par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(kT_e) = h_k$ du filtre selon la relation (III.4) La réponse impulsionnelle ayant une durée finie, le nombre d'échantillons est limité. Soit N le nombre de valeurs de h_k connues :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x_{k-j} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot h_{k-i} \quad (\text{III.16})$$

Dans beaucoup de réalisations de filtre numérique, le point de départ est la réponse fréquentielle du filtre $H(f)$ donnée par un gabarit. Partant de cette réponse fréquentielle discrétisée $H_e(f)$, il est aisé d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée $h_e(t)$ par transformée de Fourier discrète. La discrétisation de la réponse impulsionnelle a conduit à la périodisation du spectre, soit :

$$H_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f - kF_e)$$

d'où la forme de $h_e(t)$, calculée sur N points, pour conserver la réponse fréquentielle :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{-N/2}^{N/2-1} h_k \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} (T_e \cdot h_k) \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} h'_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

Ainsi les échantillons de la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ sont h'_k . Dans le cas où la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas causale, il est possible de retarder cette réponse

impulsionnelle de $N/2$ points pour rendre le filtre causal :

$$h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_{k-N/2} \cdot \delta(t - kT_e)$$

III.8- Réalisation des filtres numériques :

A partir de l'expression de la transmittance en Z du filtre numérique ou de l'équation de convolution, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre. La réalisation des filtres numériques peut être faite en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants :

- ◆ Additionneur, {symbolisé par Σ }.
- ◆ Multiplieur, {symbolisé par X}.
- ◆ Retard de T_e : échantillon k par rapport à $k-1$, {symbolisé par T}. Cette opération sera réalisée matériellement par des registres à décalage.

III.9- Filtres numériques synthétisés par $H(z)$:

A partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure *directe* (implémentation de l'équation aux différences), structure *canonique* (structure directe avec minimisation des composants) et structure *en éléments simples*.

III.9.1- Structure directe :

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non récursif, une des structures possibles est celle représentée sur le schéma de la Figure (III.7) qui traduit l'équation (III.2).

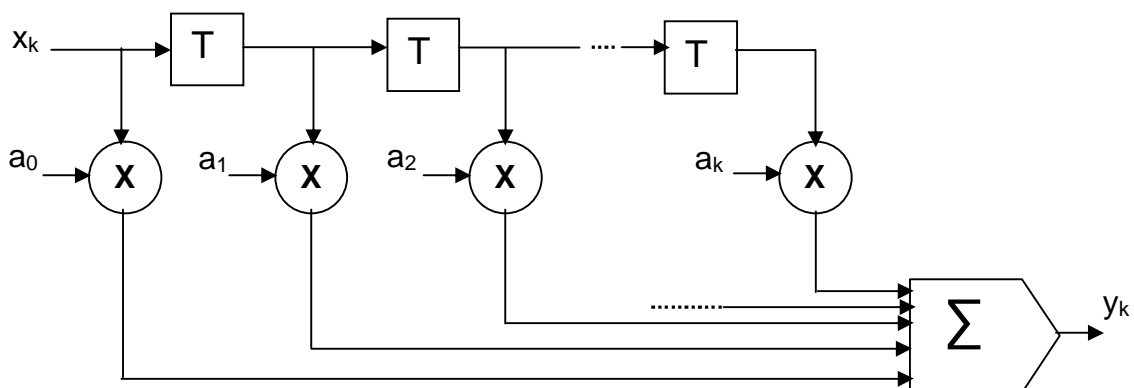


Figure III.7 : Structure directe d'un filtre numérique non-récursif.

De même, la traduction directe de l'expression de $H(z)$ pour un filtre récursif dans le schéma de la Figure (III.8), page suivante, qui traduit l'équation générale (III.1).

III.9.2- Structure canonique :

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \cdot V(z)$$

Avec : $w(z) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j}$ système non récursif

$$V(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}$$

$$Y(z) = \left[\sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \right] \cdot V(z)$$

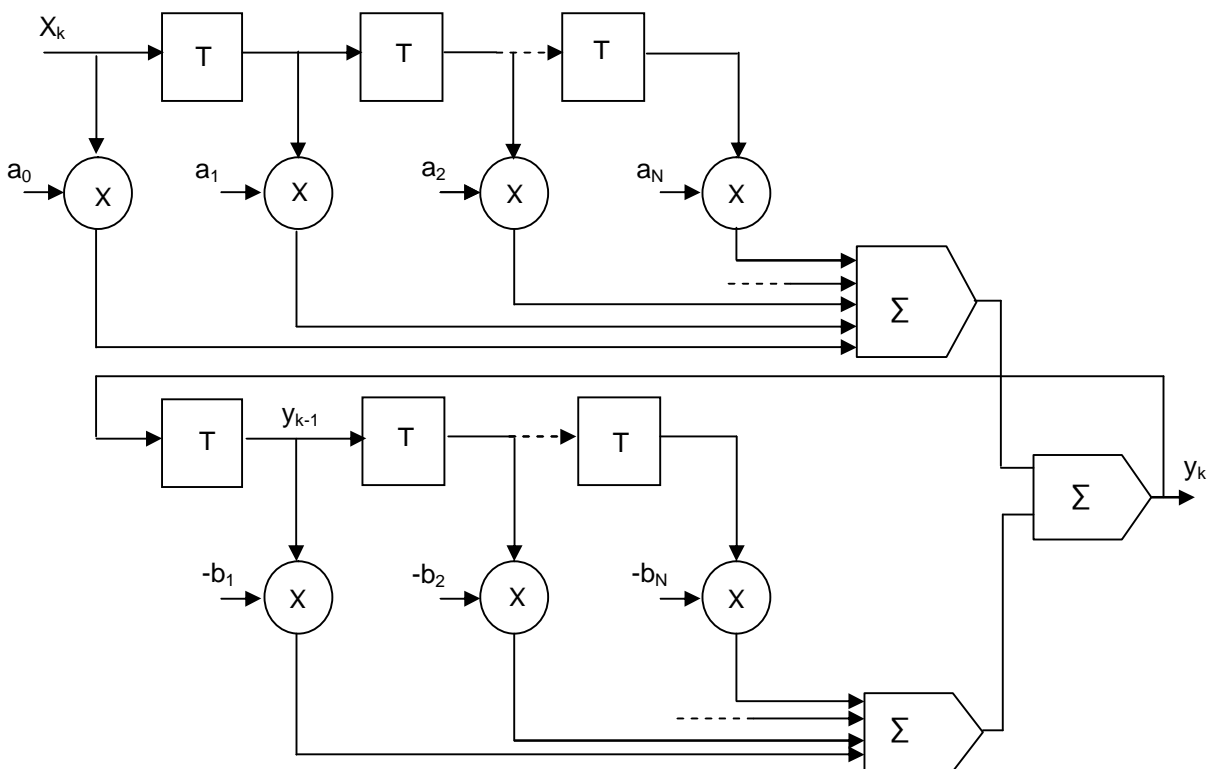


Figure III.8 : Structure directe d'un filtre numérique récursif.

En prenant la transformée en Z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire la structure de ce filtre dans la Figure (III.9) :

$$Y_k = \sum_{j=0}^N a_j \cdot V_{k-j}$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

III.9.3- Structure en composants simples :

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre $H_i(z)$:

Premier ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i \cdot z^{-1}}$$

Second ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} \cdot z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} \cdot z^{-2} + \beta_{i1} \cdot z^{-1} + \beta_{i0}}$$

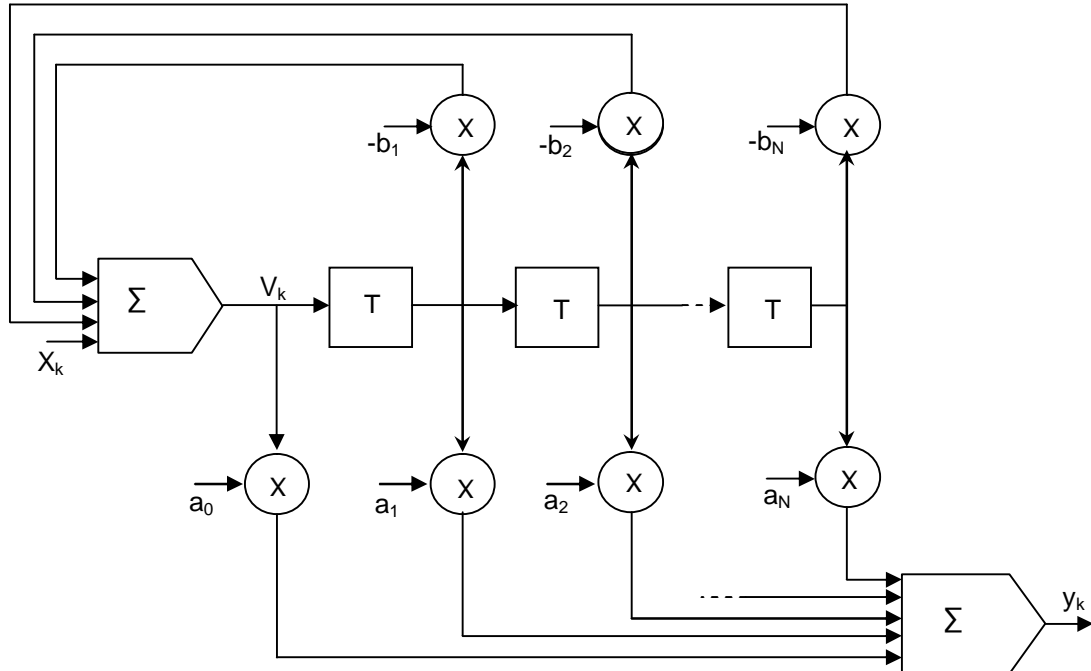


Figure III.9 : Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de

base pour réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments.

La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

- produit de composants simples :

$$H(z) = k_2 \cdot \prod_{i=1}^r H_i(z)$$

- somme de composants simples :

$$H(z) = k_1 + \sum_{i=1}^r H_i(z)$$

Dans le cas d'une écriture sous la forme « produit », nous obtenons une structure série ou dite en cascade Figure (III.10) et dans le cas d'une formulation « somme », nous obtenons une structure parallèle Figure (III.11). Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette adjonction de composants de base n'est réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance.

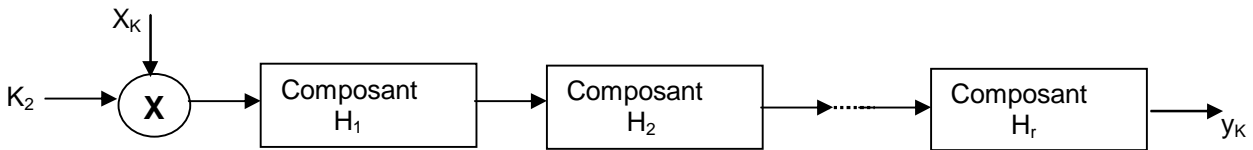


Figure III.10 : Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

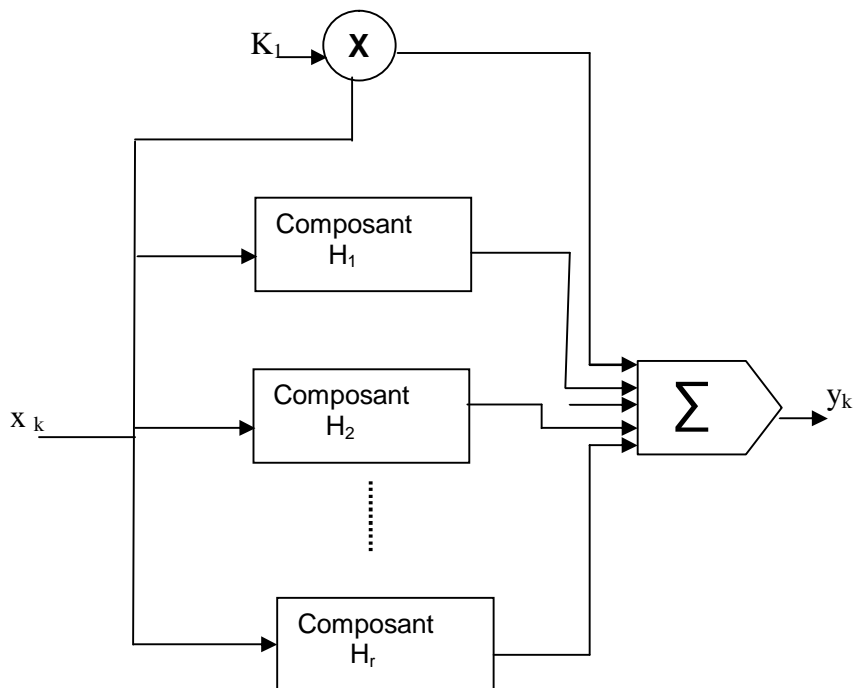


Figure III.11 : Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du

second ordre.

III.10- Filtres numériques basés sur la convolution :

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre.

Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

- structure directe Figure (III.12).
- structure transposée Figure (III.13).

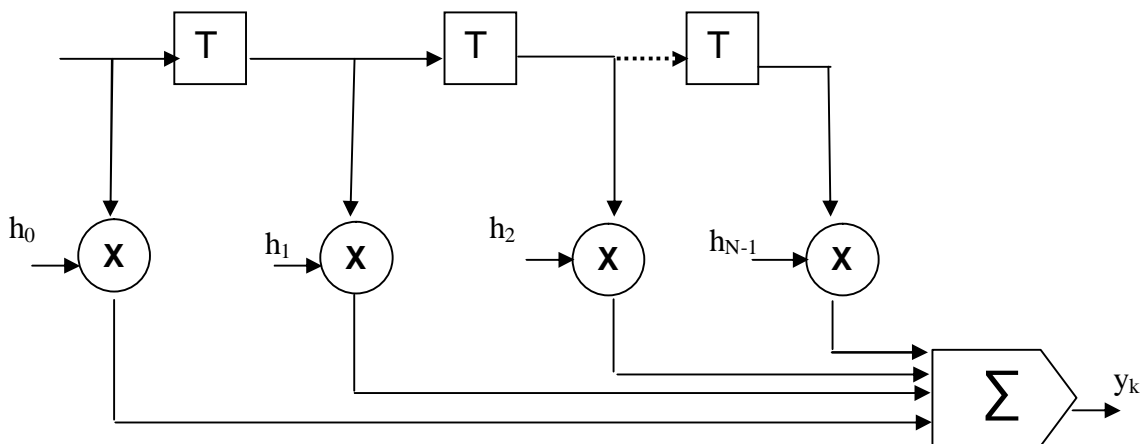


Figure III.12 : Structure directe d'un filtre à convolution.

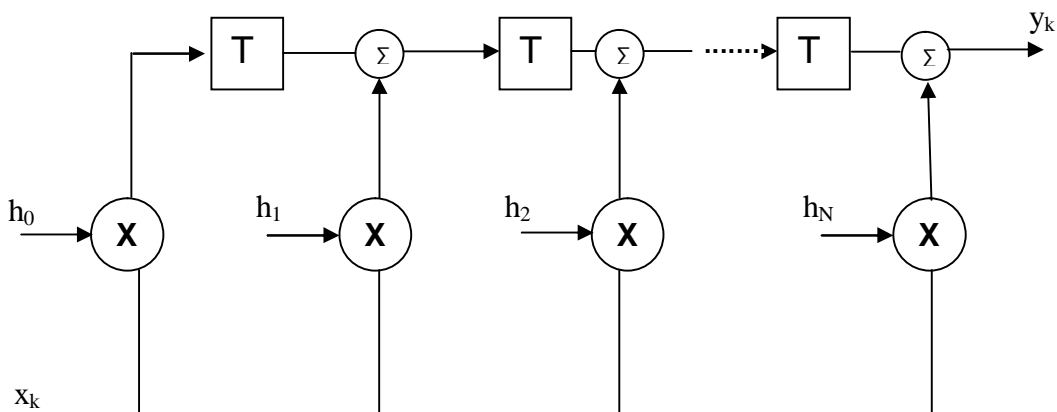


Figure III.13: Structure transposée d'un filtre à convolution.

III.11- Filtres numériques avancés :

Le domaine du filtrage numérique est très vaste car il repose uniquement sur les capacités de calcul des systèmes informatiques. Lorsque les possibilités des filtres classiques, vus précédemment, ne sont pas suffisantes pour un problème donné, il existe des extensions possibles du « filtrage numérique ».

III.11.1- Filtres numériques de la valeur médiane:

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occupée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires. Un de ces traitements non linéaires est le filtre de la valeur médiane : étant donné $2N + 1$ échantillons x_k , la valeur médiane $x_{med,k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{Ordre croissant}} \{x'_k, x'_{k-1}, \dots, x'_{k-2N} ; \text{avec } x'_i \leq x'_{i+1}\}$$

$$\text{D'où : } x_{med,k} = x'_{k-N}$$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe (III.5.2) « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal créneau est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée. Le traitement du signal du deuxième exemple montre aussi que ce filtre modifie moins fortement le signal informatif en conservant en particulier certaines transitions rapides.

De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectue sur $2N+1$ échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N.T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

III.11.2- Filtres numérique multcadence :

Les systèmes étudiés, jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certains applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multcadence). Considérons deux exemples :

- *Filtrage passe-bas* : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible;

- *Modulation* : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée.

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « *décimation* » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « *interpolation* ».

Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité a priori ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, i.e. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

III.12- Comparaison des filtres RIF et RII :

La première question qui se pose pour la méthode de réalisation d'un filtre discrète est celles du choix d'un filtre RIF ou d'un filtre RII. Un grand nombre de facteurs entrent en jeu ici, de sorte qu'il n'est pas toujours clair à l'avance de savoir quel sera le choix final.

Pour prendre une décision bien pesée, il peut par fois être utile de considérer les deux solutions: un filtre RIF et un filtre RII. On évalue alors les deux possibilités pour savoir laquelle donnera la meilleure solution pour une application particulière. Ce sont ici des facteurs très pratique comme la complexité, la consommation d'énergie, la rapidité de calcul, la facilité d'intégration et la disponibilité de certains modules de circuits qui peuvent faire pencher la

balance [18].

Filtre RIF	Filtre RII
<p>1. <i>Fonction de transfert</i></p> <p>Possède seulement des zéros</p>	<p>Possède à la fois des pôles et des zéros</p>
<p>2. <i>Réponse en fréquence</i></p> <p>les méthodes de conception normale sont adaptées aux réponses en fréquence arbitraires; par exemple aux filtres avec plusieurs bandes passantes, aux différentiateurs et aux filtres de caractéristique de fréquence spécifique dans la bande de transition</p>	<p>Les méthodes de conception sont en générale adaptées a la réalisation de filtre passe bas, passe haut, passe bande et coup bande</p>
<p>3. <i>Caractéristique de phase</i></p> <p>- Possibilité d'une phase exactement linéaire - Décaleurs de phase (filtres passe tout) impossible</p>	<p>- En peut seulement approché une phase linéaire; si en utilise pour cela un égalisateur de phase séparé, la complexité du filtre peut s'en resenture de façon notable. La spécification du filtre se rapportent exclusivement à la caractéristique d'amplitude. - Possibilité de filtres passe tout</p>
<p>4. <i>Stabilités</i></p> <p>Filtres toujours stables.</p>	<p>Filtre instable si il y a des pôles a l'extérieur du cercle unité</p>
<p>5. <i>Aide à la conception</i></p> <p>Un ordinateur de taille moyenne est en générale nécessaire pour les procédures itératives de conception de filtres.</p>	<p>Il n'est pas nécessaire d'utiliser un ordinateur plus gros si on utilise les formules de conception "toutes faites" pour les filtres continu, et par exemple la transformation bilinéaire; une calculatrice de poche est alors souvent suffisante</p>
<p>6. <i>Complexité</i></p> <p>Proportionnelles a la longueur de la réponse impulsionnelle.</p>	<p>Pas de la relation directe entre la complexité et la longueur de la réponse</p> <p>Impulsionnelle (infini par définition); on peut réaliser des filtres de selectivité élevée avec un hardware de cmplexité</p>

	relativement basse.
Filtre RIF	Filtre RII
<p>7. <i>Structure</i></p> <p>La structure récursive (rare) et la structure non récursive sont possible toutes les deux; la mieux connu et la structure transversale (non récursive)</p>	<p>Seul la structure récursive et possible; la forme la plus largement utilisée est la connexion en cascade de cellules de premier ordre et du second ordre. La répartition des pôles et des zéros entre et les différentes cellules sont une partie importante de la procédure de conception</p>
<p>8. <i>Sensibilité aux interférences</i></p> <p>L'état initial des cellules mémoire et tout signal interférant de courte durée (par exemple par l'intermédiaire de l'alimentation), peuvent affecter le signal de sortie sur une durée égale a la longueur de la réponse impulsionnelle (ceci ne s'applique que pour des réalisation non récursive).</p>	<p>En principe, l'état initial des cellules mémoire et tout signal interférant de courte durée peuvent affecter le signal de sortie sur une durée infinie.</p>
<p>9. <i>Quantification</i></p> <p>les effets de la quantification, par exemple dans la réalisation d'un filtre numérique, jouent un rôle secondaire. A l'exception de la structure récursive qui nécessite aussi une compensation exacte des pôles et des zéros après quantification.</p>	<p>A cause de la quantification des coefficients de filtre, un rôle peut en principe passer d'une position a l'intérieure du cercle unité a une position a l'extérieure de ce cercle, et par suite engendré l'instabilité.</p> <p>Les effets de la quantification peuvent aussi conduire à des oscillations indésirables telles que des sicles limites et des oscillations de dépassement</p>
<p>10. <i>Filtres adaptatifs</i></p> <p>La structure transversale est très bien adaptée à la réalisation de filtre adaptatif</p>	<p>Les filtres adaptatifs sont surtout basés sur des structures en treillis et en échelle.</p>

III.13- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les principales caractéristiques des filtres numériques et leurs applications.

Après les généralités mathématiques, les principales classifications et structures des filtres numériques sont faite selon la durée finie ou infinie de la réponse impulsionnelle d'un filtre. Ceci se justifie par la différence de, caractéristiques entre ces deux types de système

nécessitant des méthodes de synthèse et de réalisation différentes.

CHAPITRE IV

MODELISATION DES FILTRES

NUMERIQUES RIF

IV.1- Introduction :

Un modèle est une représentation conceptuelle de la nature d'un système que nous ne pouvons qu'observer et mesurer. Un modèle par nature n'est qu'une vue de l'esprit, qui, à l'aide d'équations, de raisonnements mathématiques, et de quelques postulats de base, tente d'expliquer les observations que nous faisons du monde physique. De façon générale, l'étape de modélisation est préalable pour comprendre la nature des signaux et de trouver des représentations efficaces pour la transmission, le stockage et la compression.

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse et de synthèse de filtres numériques. Le passage de l'analogique au numérique est très tributaire de problèmes d'échantillonnage, surtout de quantification des échantillons, faisant souvent perdre au filtre numérique conçu les propriétés du modèle analogique.

Il existe quelques fonctions classiques utilisées comme fonction d'apodisation. On peut les caractériser par deux paramètres. Le premier est la largeur du pic principal de leur transformée de Fourier, qui se traduira par la largeur de la bande de transition au voisinage de la fréquence de coupure. Le deuxième est l'amplitude des lobes de cette transformée, que l'on exprimera, en décibel, comme l'atténuation du premier lobe du gain d'un filtre passe-bas réalisé avec cette fenêtre.

Pour des signaux courts, le filtrage peut être fait par multiplication dans le domaine des fréquences. Il est alors tentant de réaliser un filtrage de type passe-bande par une simple multiplication de la TFD par une porte. On a alors l'illusion d'un filtrage parfait. On constate qu'il n'en est rien si on interpole en fréquence le résultat obtenu. Il convient d'une part d'utiliser l'une des méthodes de synthèse précédentes pour calculer la réponse impulsionnelle, puis d'en faire la TFD et d'autre part de prendre garde à la périodicité du filtrage par TFD. On pourra éventuellement se contenter d'une méthode simple : "arrondir" la porte par un point intermédiaire de valeur 0,5. Cela revient à réaliser une apodisation de Hanning, mais il subsiste une erreur due à la circularité. Cette précaution est applicable également aux méthodes de calcul temps réel utilisant la TFD.

Nous allons étudier dans cette partie de notre mémoire, l'analyse et la synthèse de filtres numériques à réponses impulsionnelles finie à l'aide du logiciel Matlab.

IV.2- Les étapes de résolution :

Les étapes de résolution sont données par l'organigramme suivant :

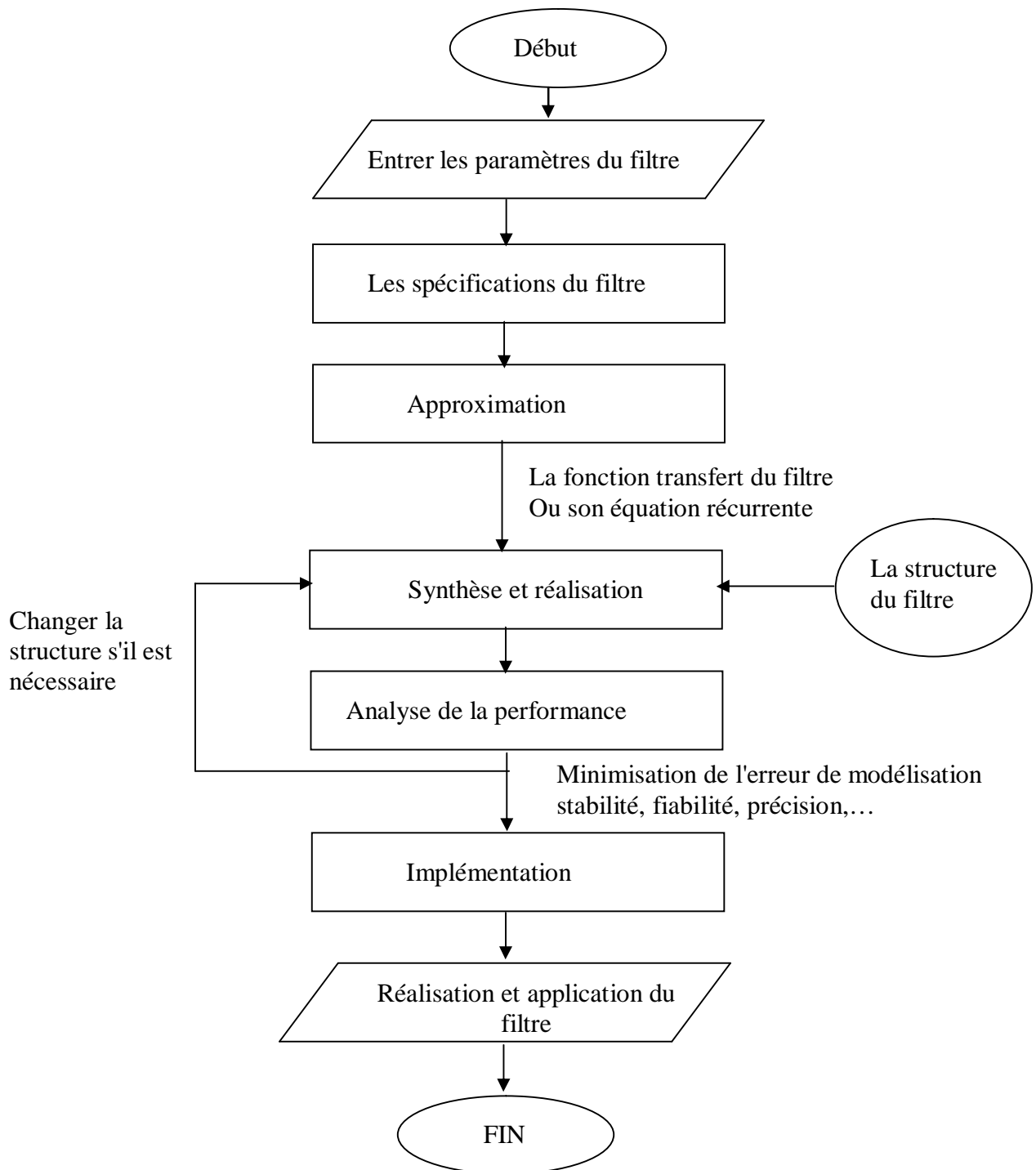


Figure IV.1 : Organigramme général de la résolution numérique du RIF.

IV.3- Les fenêtres principales:

Nous avons utilisé pour notre étude, les fenêtres suivantes :

IV.3.1- Fenêtre rectangulaire :

La méthode la plus naïve pour limiter la durée d'un signal est de le multiplier par une fenêtre rectangulaire possédant N échantillons unités. On obtiendra le signal tronqué $x_N(k)$ en fonction du signal à durée illimitée $x(k)$.

$$x_N(k) = x(k) \text{rect}_N(k) \quad (\text{VI.1})$$

IV.3.1.1- Effet de la limitation de durée :

Au niveau de la transformée de Fourier, le produit de la relation (VI.1) devient un produit de convolution continu.

$$x_N(f) = x(f) * w_R(f) = \int_0^1 x(g) w_R(f-g) dg \quad (\text{IV.2})$$

Où $w_R(f)$ est la transformée de Fourier du signal numérique $\text{rect}_N(k)$.

La TFD peut être définie pour le signal $x_N(k)$ puisqu'il est de durée finie. Les coefficients $X_N(n)$ de cette TFD représentent approximativement les échantillons prélevés sur $X(f)$. Pour étudier la qualité de cette approximation, il faut analyser le produit de convolution de la relation (IV.2).

L'approximation est affectée par la fonction $w_R(f)$ qui est :

$$w_R = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_N(k) e^{-j.2.\pi.f.k} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} e^{-j.2.\pi.f.k} = \frac{\sin(\pi f k)}{\sin(\pi f)} \quad (\text{VI.3})$$

Cette fonction est représentée par la Figure (IV.2).

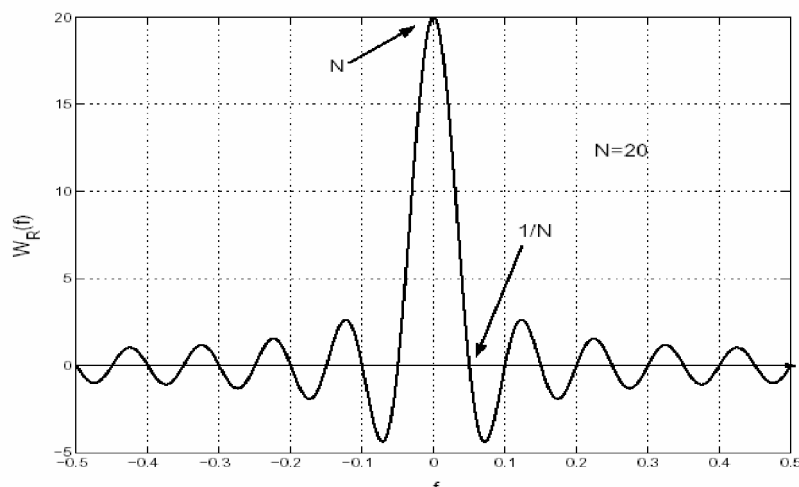


Figure IV.2 : Représentation graphique de la TFD.

IV.3.1.2- Caractérisation des fenêtres spectrales :

Pour ne pas altérer le spectre $x_N(f)$ par rapport à $x(f)$, il faudrait que $w_R(f)$ se rapproche le plus possible d'une distribution de Dirac. La distribution de Dirac étant l'élément neutre du produit de convolution on aurait alors $x_N(f) = x(f)$.

Pour qu'une fonction du type de celle présentée à la Figure (IV.2), il y a deux éléments importants pour se rapprocher de la distribution de Dirac, la finesse du lobe principale et la hauteur des lobes secondaires. En effet, plus la largeur du pic principal est fine, plus la résolution est grande, c'est-à-dire que l'on peut séparer des raies proches Figure (IV.3). Et plus les lobes secondaires sont élevés plus on dégrade la forme du spectre, il peut y avoir apparition de pics fantômes Figure (IV.4).

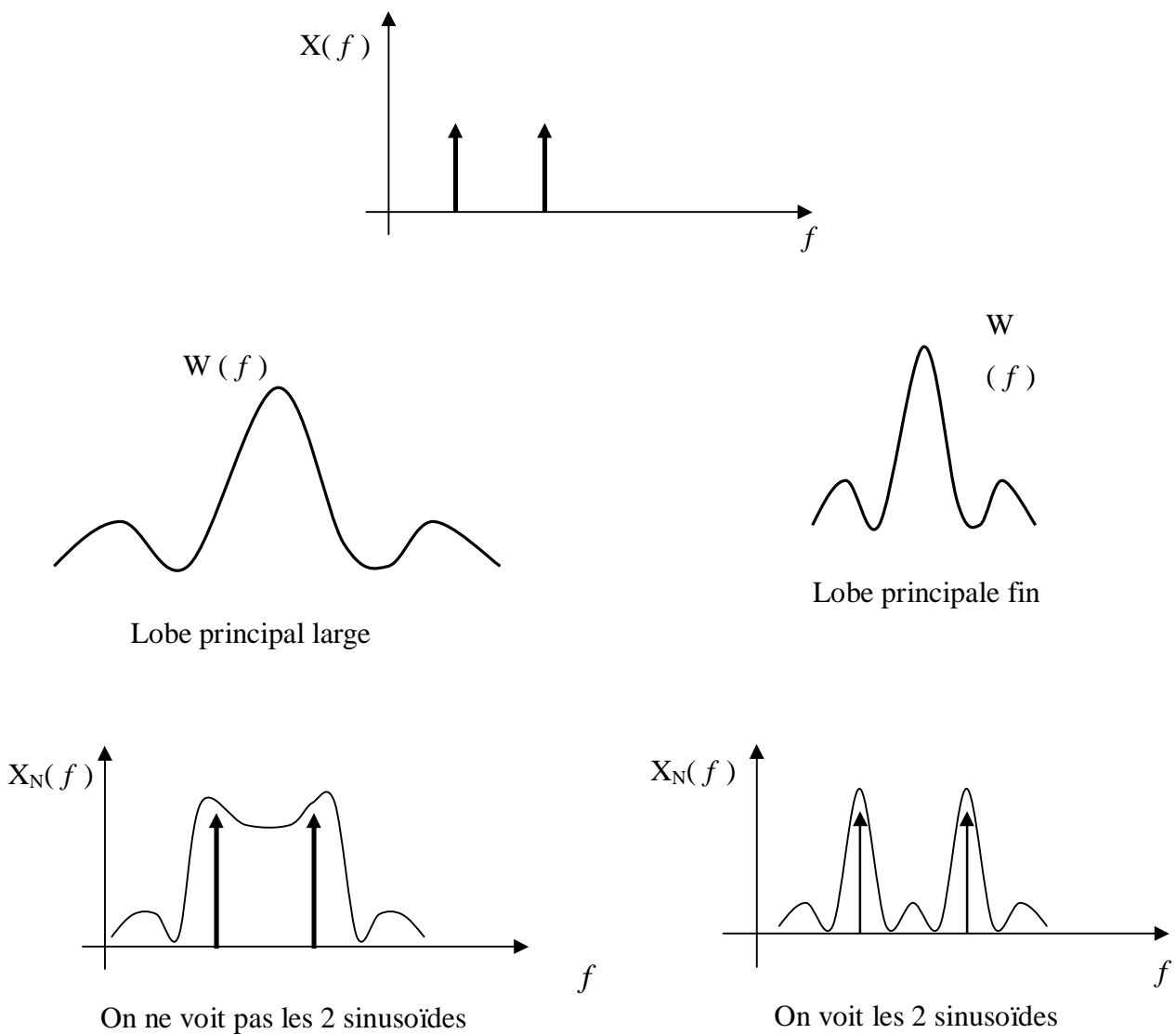


Figure IV.3 : Influence du lobe principale sur la solution.

Pour la fenêtre rectangulaire, on voit à l'aide de la Figure (IV.2) que la finesse du lobe principale peut être réglée par le nombre d'échantillons N . Ainsi, plus on observe le signal longtemps, plus la résolution du spectre augmente ce qui paraît logique. Par contre, λ_R varie très peu en fonction de N ($\lambda_R \approx -13dB$), ce qui signifie qu'une fenêtre rectangulaire apporte toujours une distorsion du spectre. Nous allons dans la suite étudier d'autres fenêtres. Toutefois, afin de les comparer et pour ne pas introduire de facteur multiplicatif d'échelle dans le produit de convolution, l'intégrale de la fenêtre spectrale doit être unité :

$$\int_{-1/2}^{1/2} w(f) df = 1 \quad (IV.4)$$

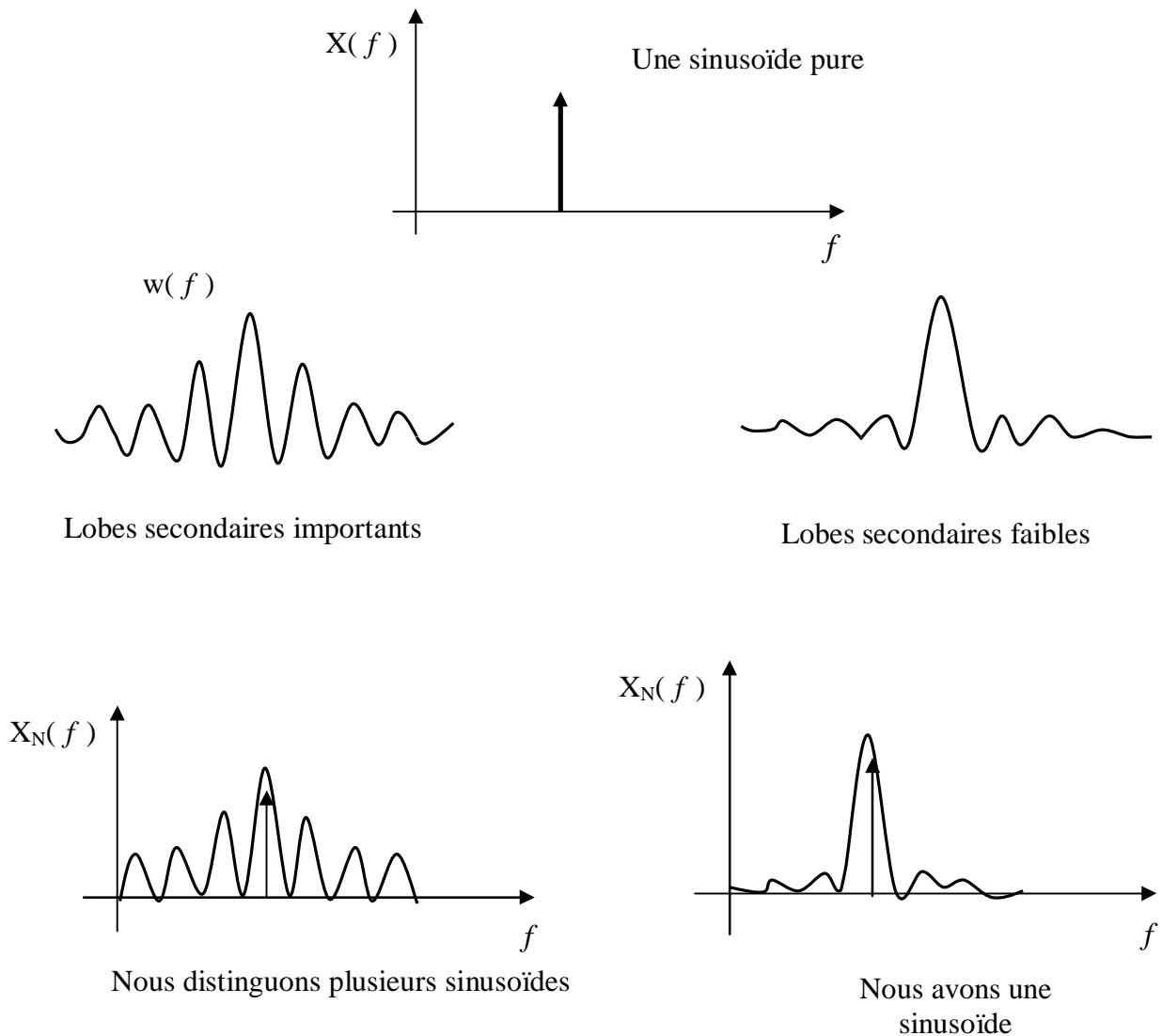


Figure IV.4 : Influence des lobes secondaires sur la réponse du système.

IV.3.2- Fenêtre triangulaire :

La fenêtre spectrale triangulaire est de la forme :

$$w_T(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2|k|}{N} & \text{pour } -N/2 \leq k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout .. ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Pour obtenir la transformée de Fourier de $w_T(k)$ il suffit de se rappeler que la convolution de deux signaux rectangulaires donnent un signal triangulaire Figure (IV.5). Ainsi, on peut exprimer $w_T(k)$ sous la forme :

$$w_T(k) = \frac{2}{N} \text{rect}_{N/2}(k) * \text{rect}_{N/2}(k) \quad (\text{IV.6})$$

Or le produit de convolution se transforme en produit classique dans le domaine de Fourier. Donc la relation (IV.3) devient :

$$w_T(f) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \frac{N}{2})}{\sin(\pi \cdot f)} \right)^2 \quad (\text{IV.7})$$

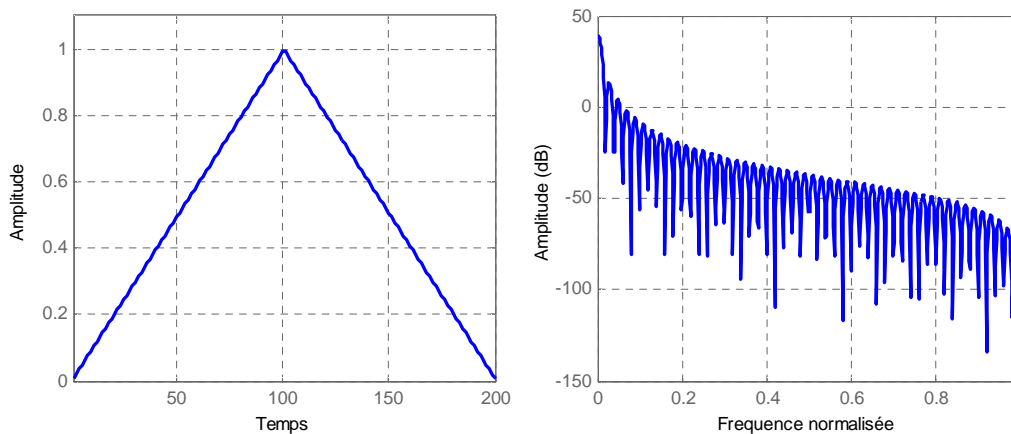


Figure IV.5 : Fenêtre triangulaire.

IV.3.3- Fenêtres de Hamming et de Hanning :

L'étape suivante dans le raffinement de l'atténuation des lobes secondaire par superposition consiste à superposer trois fonctions de la forme $W_R(f)$ décalées les unes par rapport aux autres de $1/2N$ avec un poids de α au centre et un poids $(1-\alpha)/2$ sur les cotés Figure (IV.5). Cela conduit à une fonction du type :

$$w_{HG}(f) = \alpha \frac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)} + \frac{1 - \alpha \sin(\pi.N(f - \frac{1}{N}))}{\sin(\pi(f - \frac{1}{N}))} + \frac{1 - \alpha \sin(\pi.N(f + \frac{1}{N}))}{2 \sin(\pi(f + \frac{1}{N}))} \quad (IV.8)$$

Qui correspond à la transformée de Fourier d'un signal cosinusoidal tronqué par une Fenêtre rectangulaire plus une fenêtre rectangulaire, c'est-à-dire

$$w_{HG}(k) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & \text{pour } -N/2 \leq k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout.. ailleurs} \end{cases} \quad (IV.9)$$

Cette fonction est appelée fonction fenêtre de Hamming généralisée. Selon la valeur de α on obtient trois fenêtres classiques en analyse spectrale

- si $\alpha = 1$ on retrouve la classique fenêtre rectangulaire.
- si $\alpha = 1/2$ on obtient la fenêtre de Hanning $w_{HAN}(k)$ Figure (IV.7).
- si $\alpha = 0,54$ on obtient la fenêtre de Hamming $w_{HAM}(k)$ Figure (IV.6).

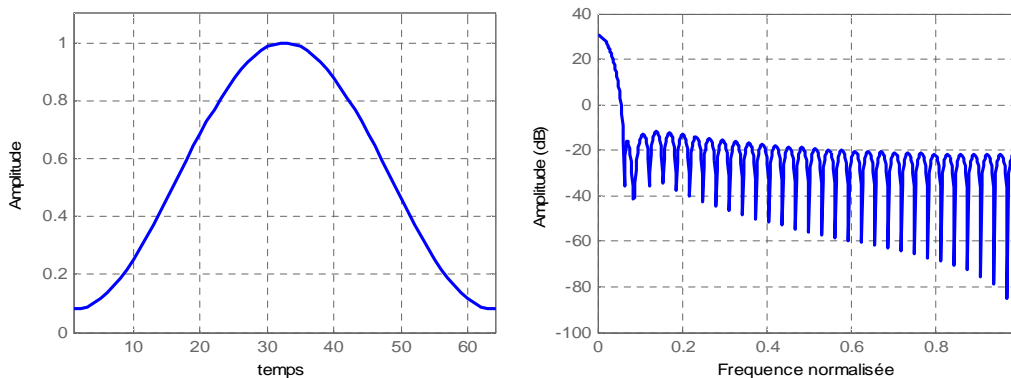


Figure IV.6 : Fenêtre Hamming.

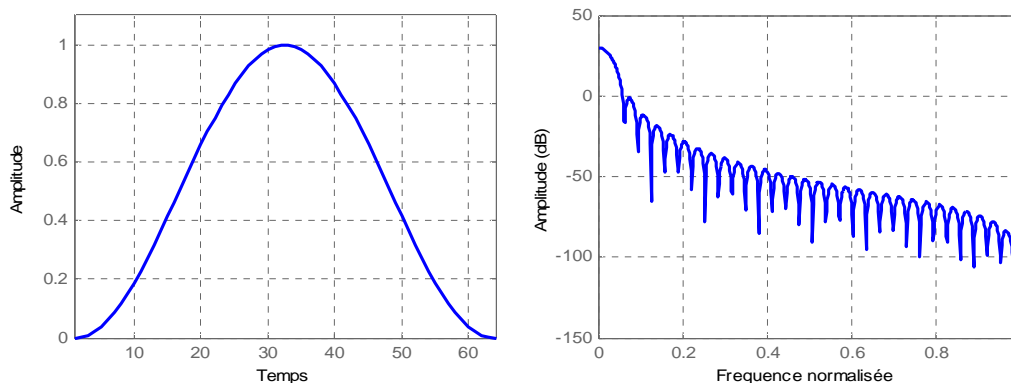


Figure IV.7: Fenêtre de Hanning.

IV.3.4- Fenêtre de Blackman :

Nous avons également généralisé la construction de fenêtre par superposition en cherchant à recouvrir M répliques de la même transformée décalées par pas de $1/N$ avec des poids judicieusement choisis. Pour conserver la symétrie des répliques décalées par rapport à l'origine M qui doit être un nombre impair. Dans le domaine temporel, la forme générale de la fenêtre correspondant à ces M superpositions est la suivante :

$$w_{BG}(k) = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{l=1}^{(M-1)/2} \alpha_l + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) & \text{pour } -N/2 \leq k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout .. ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Les coefficients doivent respecter la relation :

$$a_0 + 2 \sum_{l=1}^{(M-1)/2} a_l = 1 \quad (\text{IV.11})$$

Généralement, ces coefficients sont obtenus par optimisation selon un critère de minimisation d'énergie du signal en dehors d'un intervalle de fréquence donné. Cette fonction $w_{BG}(k)$ est appelée fonction fenêtre de Blackman généralisée. Sa transformée de Fourier est :

$$w_{BG}(f) = a_0 \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} + \sum_{l=1}^{(M-1)/2} a_l \frac{\sin(\pi N (f - \frac{1}{N}))}{\sin(\pi (f - \frac{1}{N}))} + \sum_{l=1}^{(M-1)/2} a_2 \frac{\sin(\pi N (f + \frac{1}{N}))}{\sin(\pi (f + \frac{1}{N}))} \quad (\text{IV.12})$$

Pour $M=1$, on retrouve la fonction fenêtre de Hamming généralisée. La fenêtre particulière $w_B(k)$ obtenue pour $M = 3$ est appelée fenêtre de Blackman Figure (IV.8). Cette dernière est caractérisée par des poids $a_0 = 0.42$, $a_1 = 0.25$ et $a_2 = 0.04$.

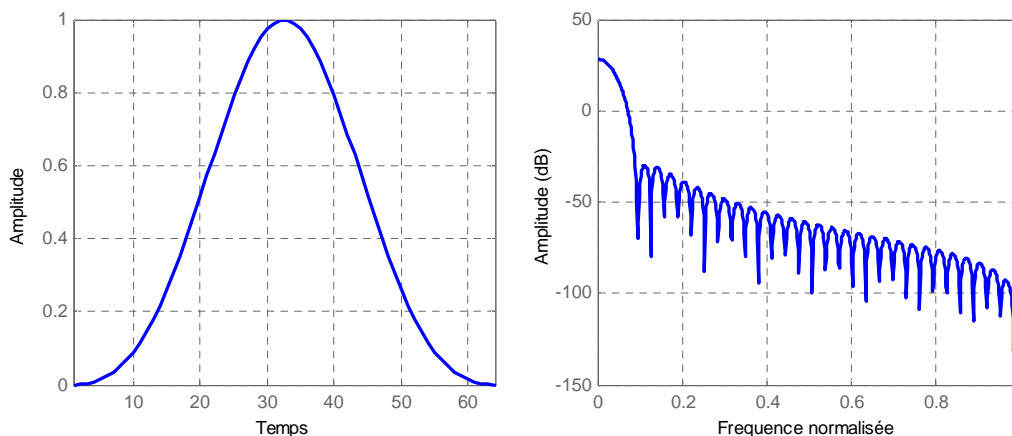


Figure IV.8 : Fenêtre de Blackman.

IV.3.5- Fenêtre de Kaiser :

En 1966, Kaiser a proposé une famille de fenêtres permettant, par l'intermédiaire d'un paramètre β , de spécifier le compromis entre la largeur du pic central et l'amplitude des lobes secondaires. La forme générale de cette fenêtre est la suivante :

$$w_k(k) = \begin{cases} 1 \frac{I_0[\beta \sqrt{N^2 - 4k^2}]}{I_0[\beta N]} & \text{pour } -N/2 \leq k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout. ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV. 13})$$

Où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre zéro. Le produit βN est généralement choisi dans l'intervalle [4-9]. Le calcul analytique de la transformée de Fourier de la fenêtre de Kaiser dépasse le cadre de cette étude. On se basera par conséquent sur la représentation graphique de $W_K(f)$ obtenue par le calcul numérique [24-25].

La fenêtre de Kaiser est représentée dans la Figure (IV.9).

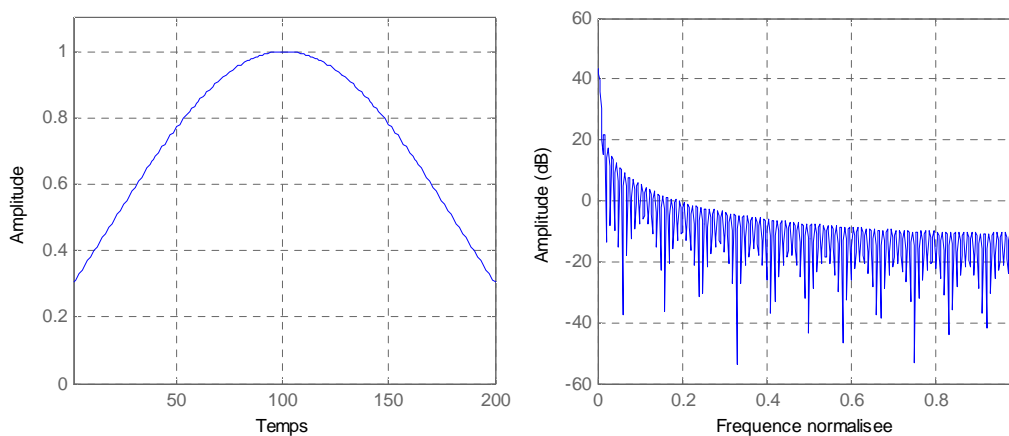


Figure IV.9 : Fenêtre de Kaiser.

IV.4- Synthèses des filtres numériques RIF par la méthode de fenêtrage :

IV.4.1- Présentation de la méthode:

Le passage d'une réponse impulsionnelle de durée infinie à une réponse impulsionnelle de durée finie, peut se faire de manière brute, par une troncature directe des coefficients. Cette troncature est le siège pour la réponse fréquentielle, de perturbations connues sous le nom du phénomène de GIBBS qu'il se traduit par une évolution plus ou moins lente de la réponse fréquentielle autour des discontinuités : on parle de la bandes de transition, et par l'apparition d'oscillations autour de ces même points.

Le phénomène de GIBBS étant très gênant, il serait souhaitable de pouvoir réduire les bandes de transition, réduire les amplitudes des ondulations dans les bandes passantes et augmenter l'atténuation en bande coupée [17].

IV.4.2- Synthèse d'un filtre passe bas :

Soit à synthétiser un filtre passe bas d'ordre 51, de fréquence de coupure normalisée $w_c=0.1$ Figures (IV.10)-(IV.13).

IV.4.2.1- Avec fenêtre rectangulaire :

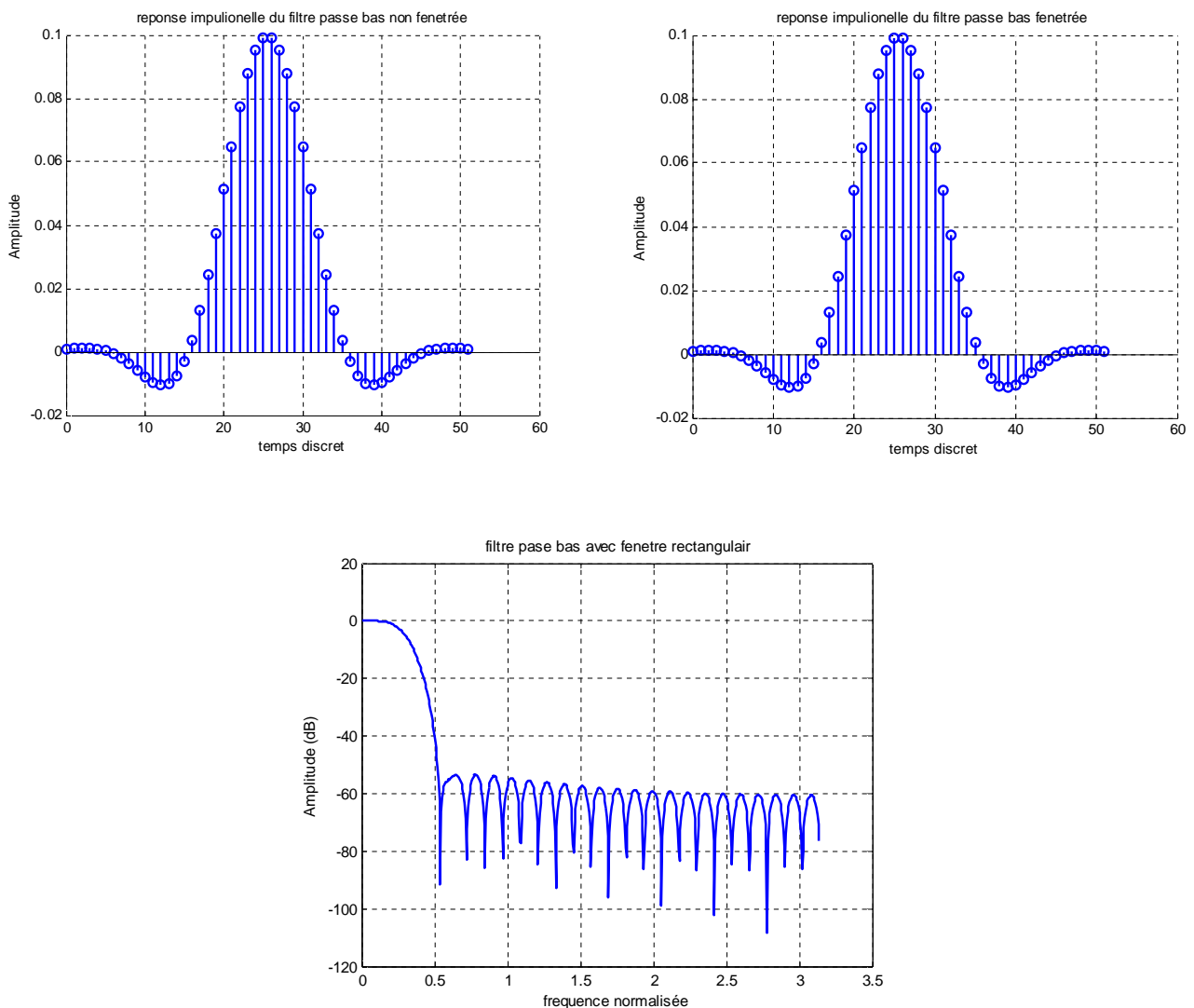


Figure IV.10 : Filtre passe bas avec fenêtre rectangulaire.

IV.4.2.2- Avec fenêtre triangulaire :

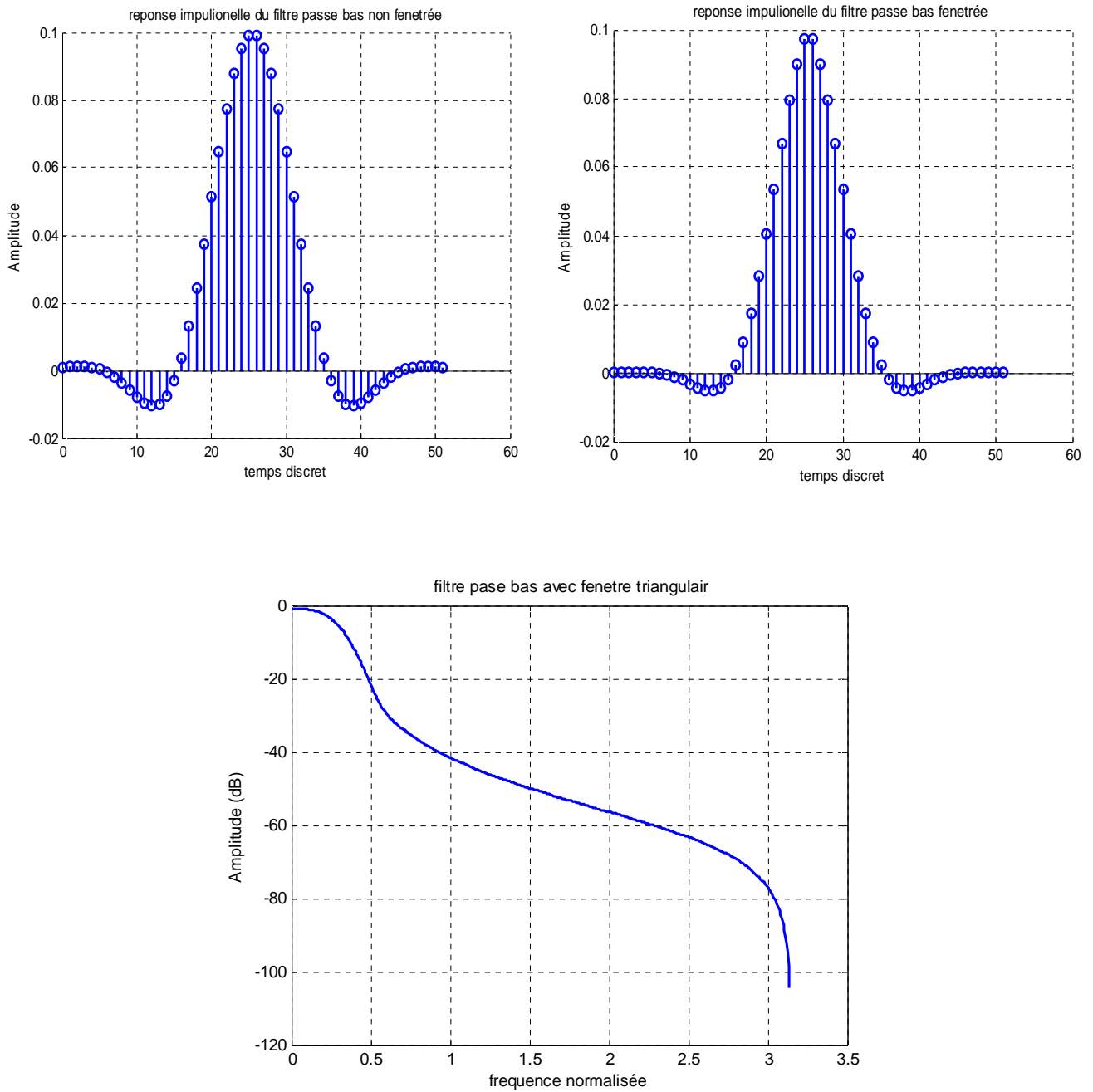


Figure IV.11 : Filtre passe bas avec fenêtre triangulaire.

IV.4.2.3- Avec fenêtre de Hamming :

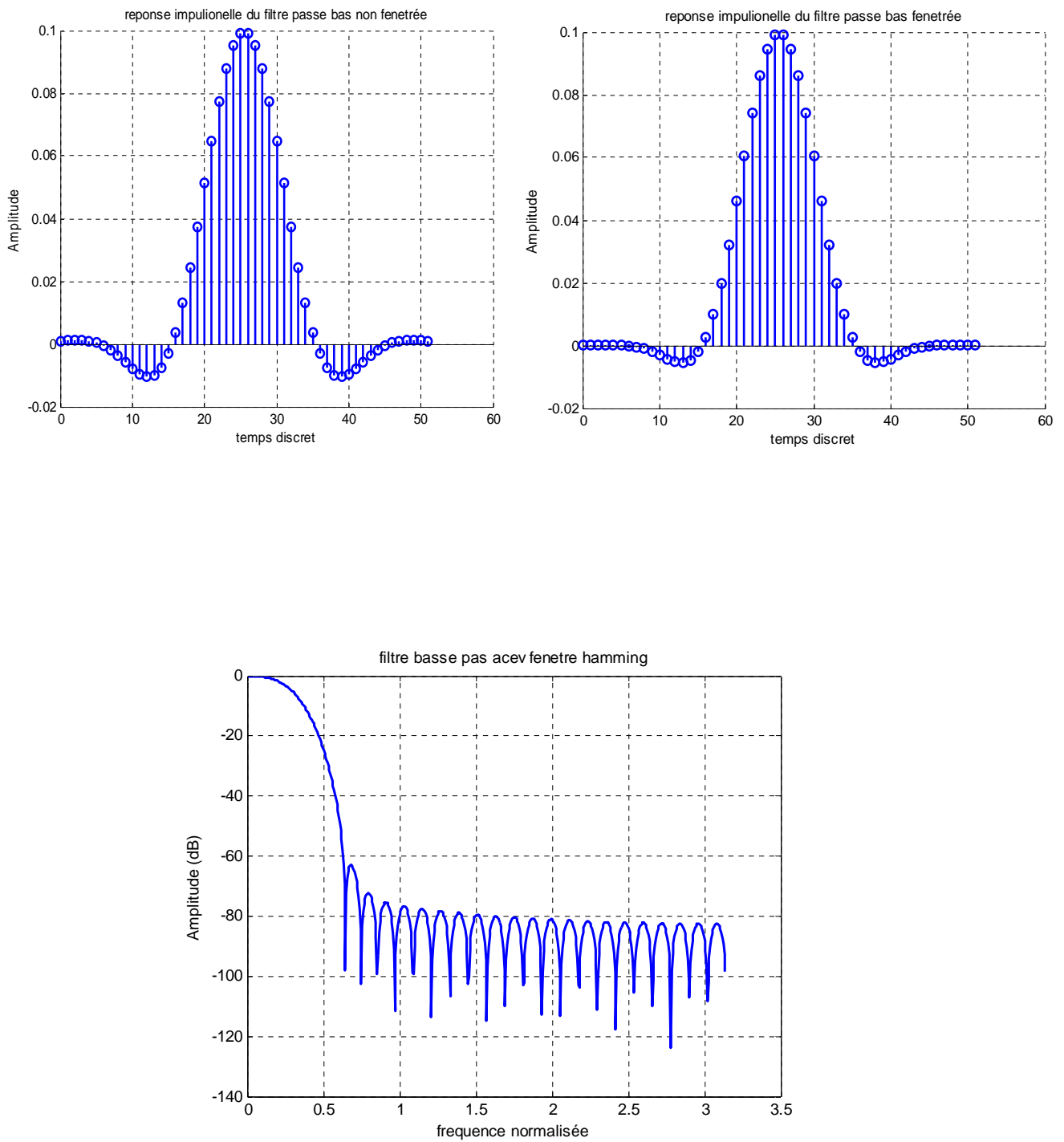


Figure IV.12 : Filtre passe bas avec fenêtre Hamming.

IV.4.2.4- Avec fenêtre Kaiser :

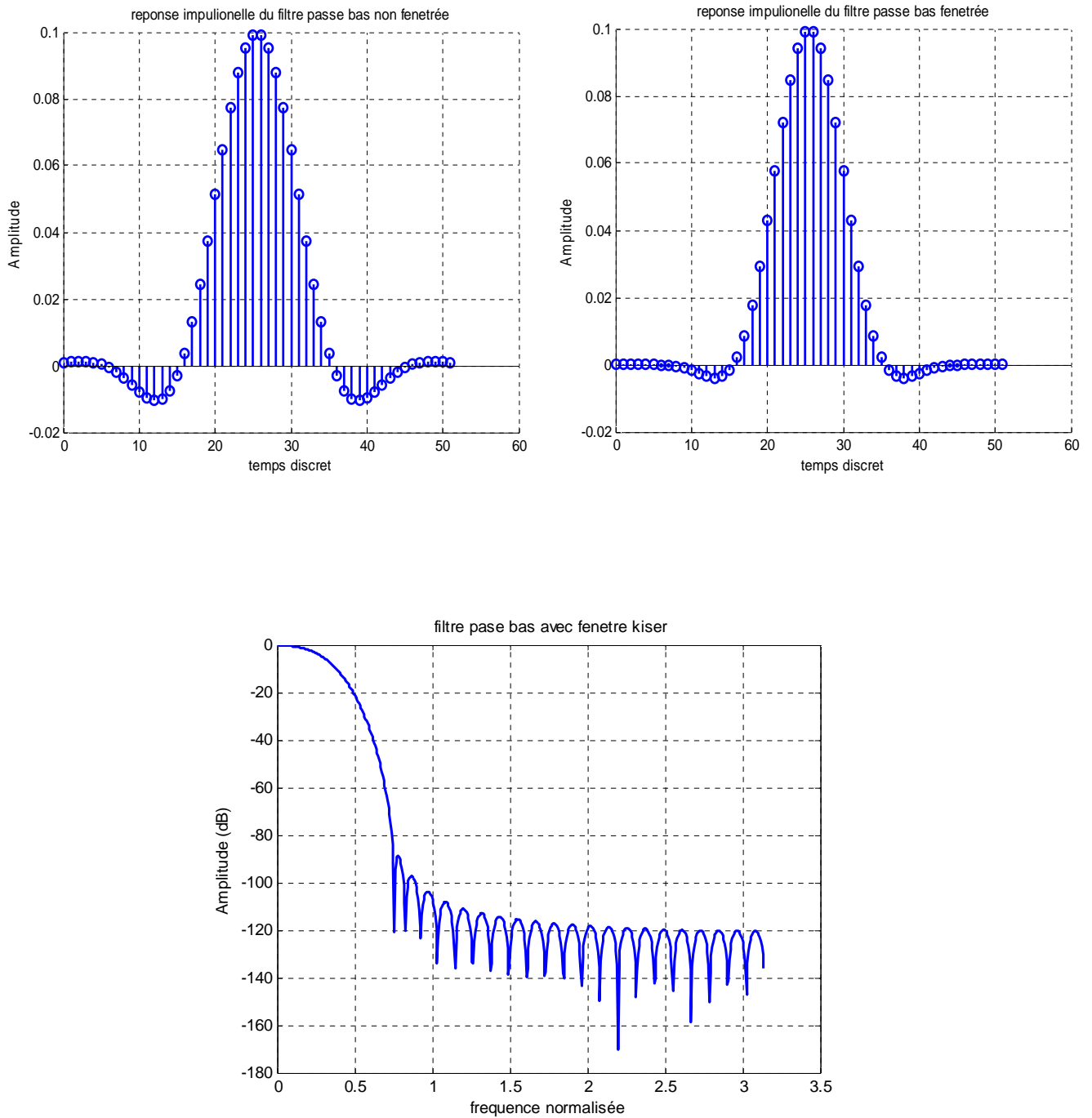


Figure IV.13 : Filtre passe bas avec fenêtre Kaiser.

Nous avons étudié aussi un autre type de filtres numériques RIF, se sont les filtres passe bande. Les résultats de simulation sont représentés dans les Figures (IV.14)-(IV.17).

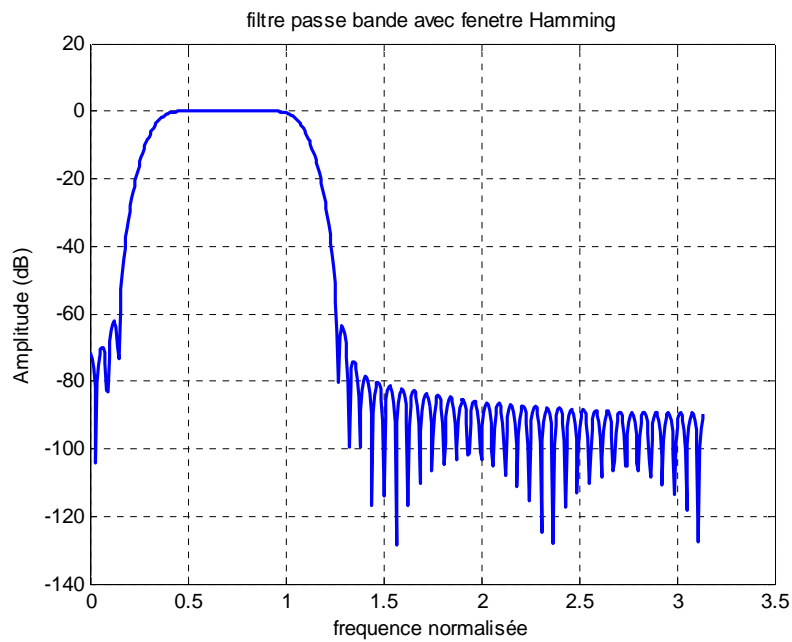


Figure IV.14 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1} = 0.1$ et $w_{c2} = 0.35$ d'ordre $N=100$.

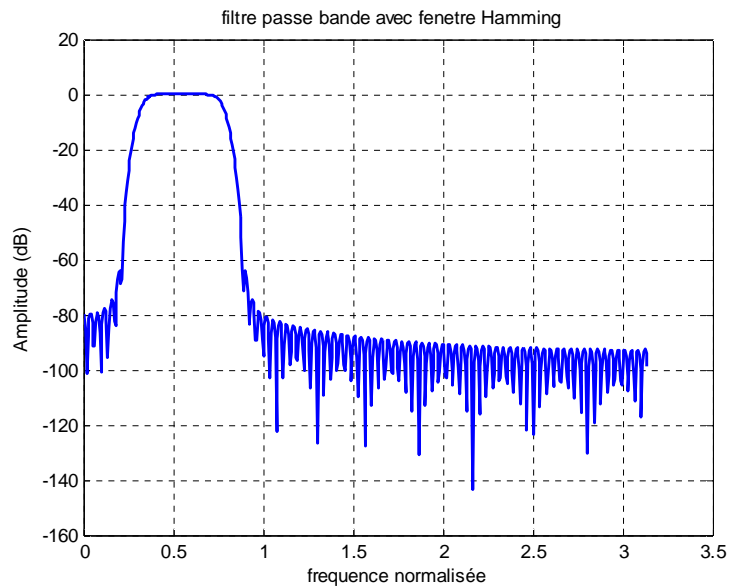


Figure IV.15 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1} = 0.1$ et $w_{c2} = 0.25$ d'ordre $N=167$.

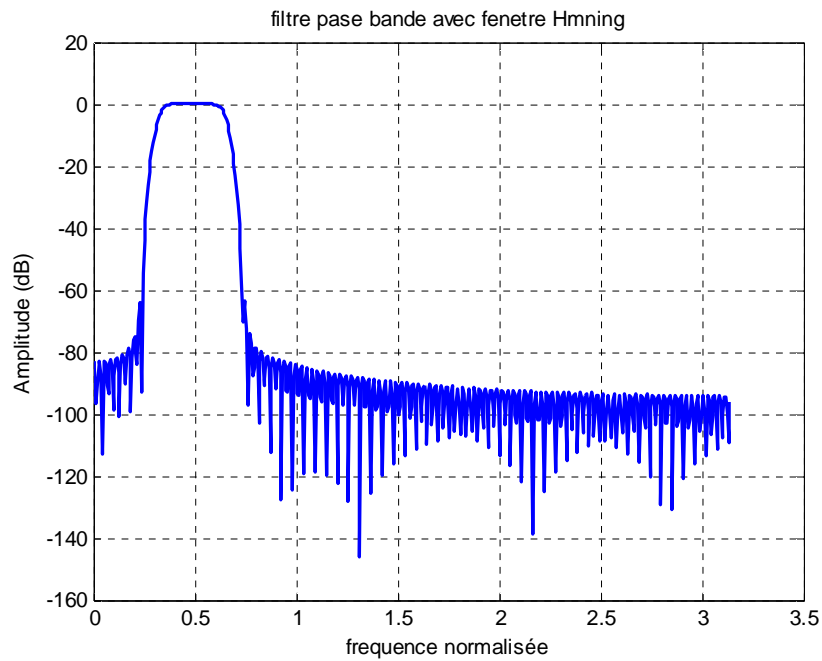


Figure IV.16 : Filtre passe bande limite par Hamming pour fréquence de coupure $w_{c1} = 0.1$ et $w_{c2} = 0.21$ d'ordre $N=228$.

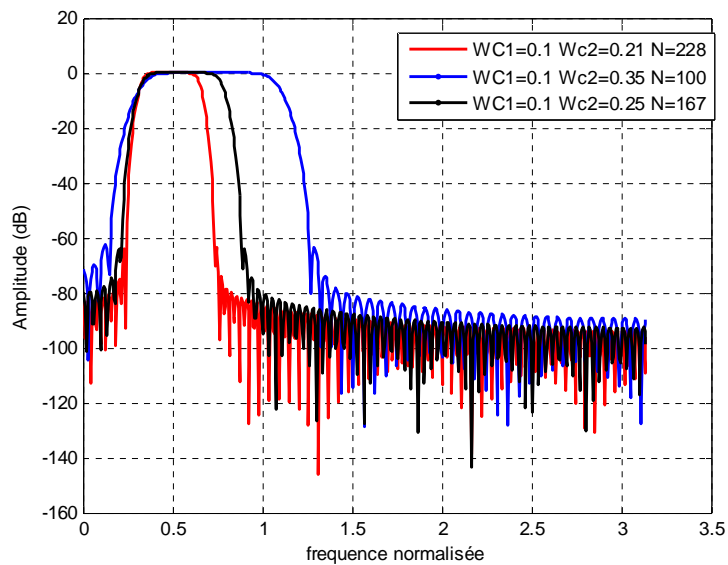


Figure IV.17: Spectre d'amplitude du filtre passe bande limite par Hamming.

IV.4.3- Interprétation des résultats :

Lorsque nous utilisons la fenêtre rectangulaire, le phénomène de GIBBS est très apparent. Quoique la bande de transition soit relativement étroite, l'atténuation en bande coupée est faible, elle est de l'ordre de -53dB.

La fenêtre triangulaire améliore l'atténuation en bande coupée qui est de -59dB (comparativement à la fenêtre rectangulaire), au près d'une bande de transition plus large.

La fenêtre Hamming donne une atténuation en bande coupée de l'ordre de -62dB.

La fenêtre Kaiser utilisée pour $\alpha = 7.87$, donne une bonne atténuation en bande couper (environ -89dB).

IV.5- Méthode de l'échantillonnage en fréquence :

La réponse fréquentielle du filtre désiré est échantillonnée en N points sur le cercle unité. Les coefficients de la réponse impulsionnelle sont déterminés par la transformée de Fourier discrète inverse :

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (\text{IV.14})$$

Où H(k) est la réponse fréquentielle échantillonnée.

La transformation en Z des échantillons h(n) est donnée par :

$$\text{Ou} \quad H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) Z^{-n} \quad (\text{IV.15})$$

$$H(Z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k}}$$

Pour trouver l'approximation du filtre désiré, nous remplaçons Z dans l'équation (IV.15) par e^{jw} , soit :

$$\hat{H}(w) = H(Z) \Big|_{Z = e^{jw}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) . S(w, k) \quad (\text{IV.16})$$

Où :

$$S(w, k) = \pm e^{j\frac{\pi}{N}k} \frac{\sin\left[N\left(\frac{w}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)\right]}{\sin\left[\frac{w}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]} \quad (\text{IV.17})$$

S est appelée fonction d'interpolation. L'erreur d'approximation est nulle aux points donnés par l'échantillonnage, et reste finie ailleurs. Le choix du nombre N se fait selon les contraintes imposées sur le niveau des ondulations et sur la largeur de la bande de transition.

IV.6-Quantification :

Pour pouvoir stocker les paramètres d'un filtre évalués avec une grande précision (celle de l'ordinateur) dans des registres de longueur finie, nous avons recours à la quantification. Cette dernière est une méthode approximative, basée sur le principe de discrétisation des amplitudes en un nombre fini de niveaux. La distance entre deux niveaux successifs définit le pas de la quantification. Pour des réseaux technologiques, nous sommes amenés à décomposer les nombres de la base 10 et de les représenter dans une autre base, le plus souvent la base 2. La quantification dépend du type de représentation des nombres décimaux dans une autre base. Il existe diverses façons d'établir la correspondance entre l'ensemble des amplitudes quantifiées et l'ensemble des nombres qui doivent les représenter. Nous distinguons les cas suivants :

IV.6.1- Quantification par troncature :

Soit un nombre représenté sur un nombre de bits donnés b (signe non compris) en désire stocker dans un registre de longueur $b_1 \leq b$.

La troncature consiste à ignorer les $(b-b_1)$ bits les moins significatifs. Le pas de quantification est égale à 2^{-b_1} .

L'erreur résultant de cette quantification : $E = x - Q(x)$

Ou : $Q(x)$ est la valeur quantifiée de x

Dépend du type de représentation utilisée. En virgule fixe et pour la forme signe est valeur absolue on a :

$$\begin{cases} 0 \leq E \leq 2^{-b_1} - 2^{-b} & \text{pour } x \geq 0 \\ -(2^{-b_1} - 2^{-b}) \leq E \leq 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

IV.6.2- Quantification par l'arrondi :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, l'arrondi consiste à approximer un coefficient par le niveau le plus proche. Pratiquement, ceci revient à ajouter 1 à la position b_1+1 , ensuite réaliser une troncature à b_1 bits. (Avec la convention que la position zéro correspond au bit le plus significatif).

L'erreur d'arrondi est donnée par :

$$-\frac{2^{-b_1}}{2} \leq E \leq +\frac{2^{-b_1}}{2}$$

En conclusion, la quantification revient à faire passer le signal dans un organe.

IV.6.3- Résultats et interprétations :

Pour avoir l'effet de la quantification sur la réponse fréquentielle du filtre Figures (IV18)-(IV20), on prend, un filtre passe bas d'ordre 33, de fréquence de coupure 0,1, limité par la fenêtre triangulaire [17].

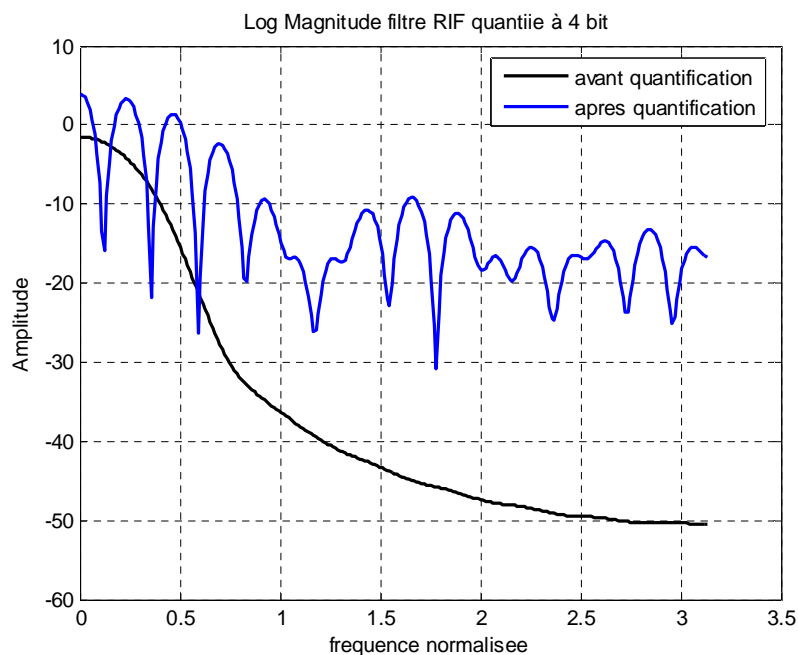


Figure IV.18 : Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mot quantifié sur 4 bits.

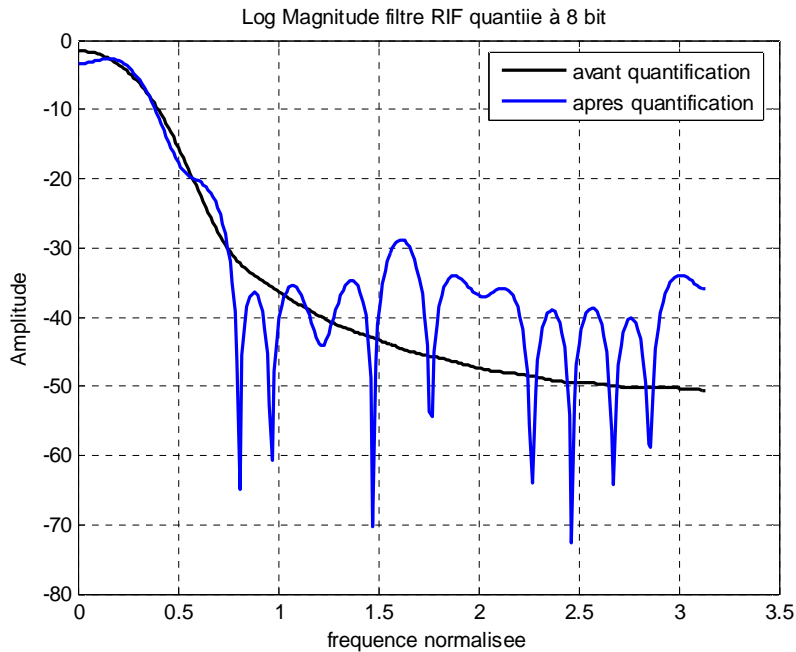


Figure IV.19: Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mots quantifiés sur 8 bits.

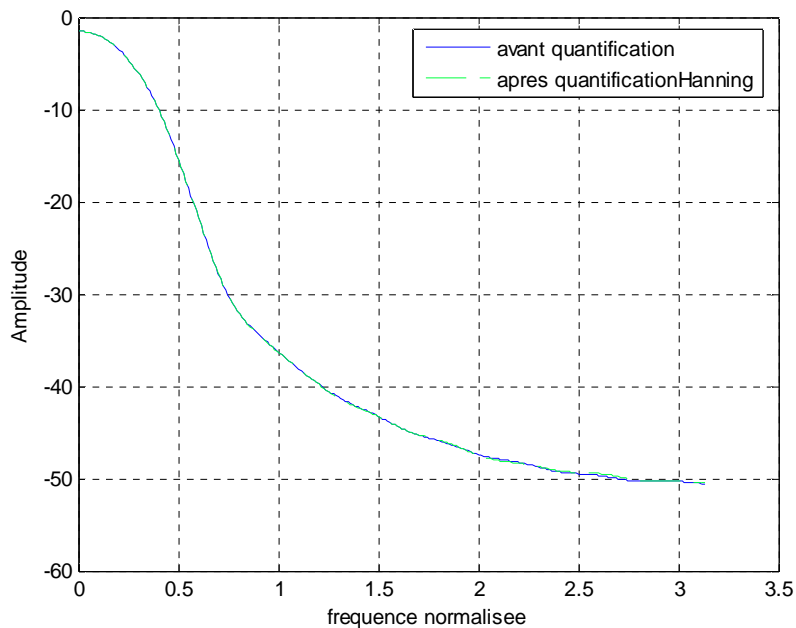


Figure IV.20 : Spectre d'amplitude d'un filtre passe bas avec longueur des mot quantifiés sur 16 bits.

Nous avons noté que pour les différentes longueurs des registres considérés, l'écart maximal se produit au voisinage de la fréquence de coupure du filtre (c'est-à-dire au niveau de la discontinuité) et ne diminue pas automatiquement lorsque le nombre de bits augmente. De

part et d'autre de la discontinuité. L'écart entre les réponses fréquentielles diminue au fur et à mesure que le nombre de bits augmente.

IV.7- Simulation des filtres numériques RIF à phase linéaire :

IV.7.1- Types des signaux appliqués à l'entrée du filtre :

Les signaux d'entrée générés sont Figures (IV.21)-(IV.23).

Un signal X_1 somme de deux sinusoïdes dont l'un des fréquences choisies se trouve à l'intérieur de la bande passante du filtre utilisé et l'autre complètement à l'extérieur.

Ce signal s'exprime comme suite :

$$X_1 = 0.2\sin(2.\pi .f_1.n) + 0.3\sin(2.\pi .f_2.n) \quad \text{Avec } f_1 = 0.05 \quad \text{et} \quad f_2 = 0.25$$

Pour mieux illustrer nos exemples, nous avons opté quelques filtres. Les filtres simulés, dans les exemples suivants sont :

- 1- un filtre passe bas d'ordre 61 de fréquence de coupure normalisée $F_c = 0.1$ qu'on appellera: filtre 1.
- 2- un filtre passe bas d'ordre 21 de même fréquence de coupure que le précédent qu'on appellera : filtre 2.

Ces deux types de filtres ont été synthétisés en leur, appliquant la fenêtre de Kaiser avec $\alpha = 7$.

IV.7.2- Résultats et interprétations :

- **Exemple 1** : il consiste d'appliquer à l'entrée du filtre1, le signal X_1 , somme deux sinusoïdes. Le filtrage s'effectue selon les deux types de structures directe et FFT. Les résultats sont illustrés par les Figures (IV.24)-(IV.25).

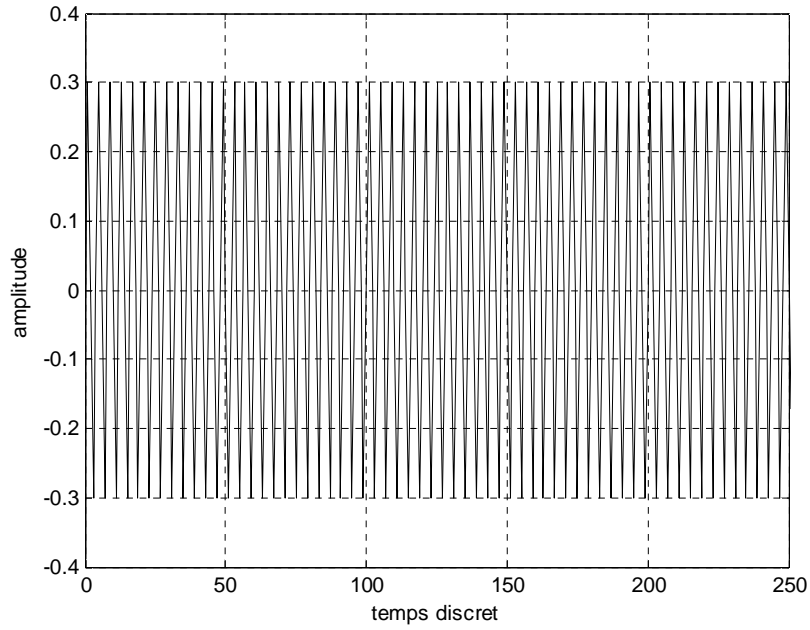


Figure IV.21 : Signal de fréquence normalisée 0.25.

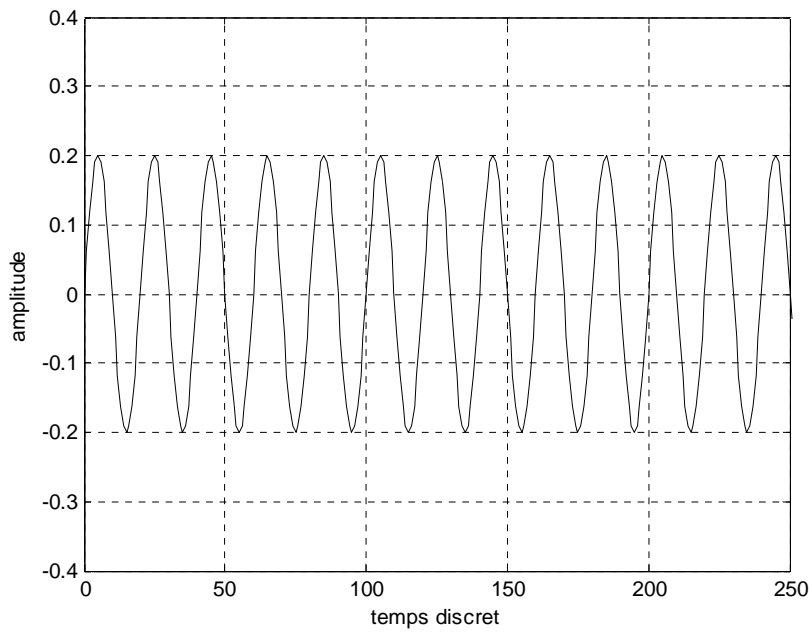


Figure IV.22 : Signal de fréquence normalisée 0.05.

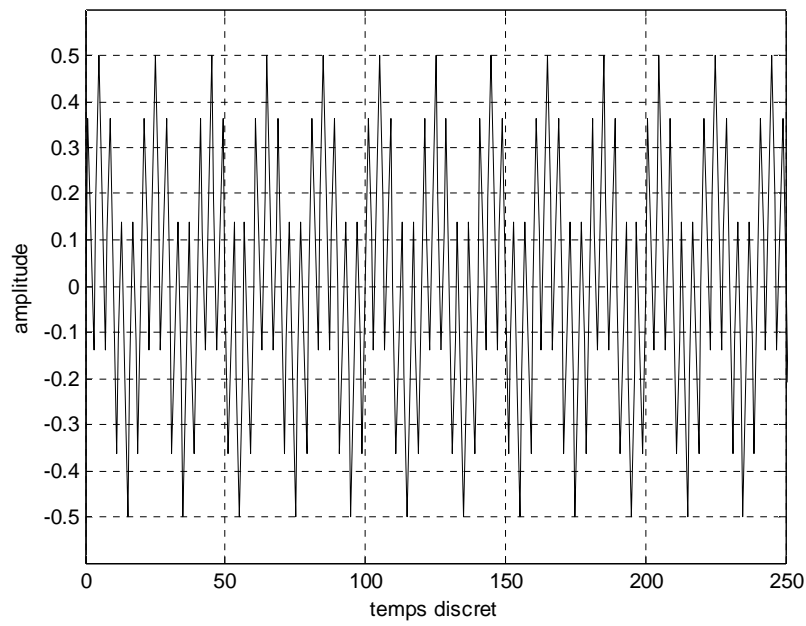


Figure IV.23 : Signal d'entrée de filtre 1.

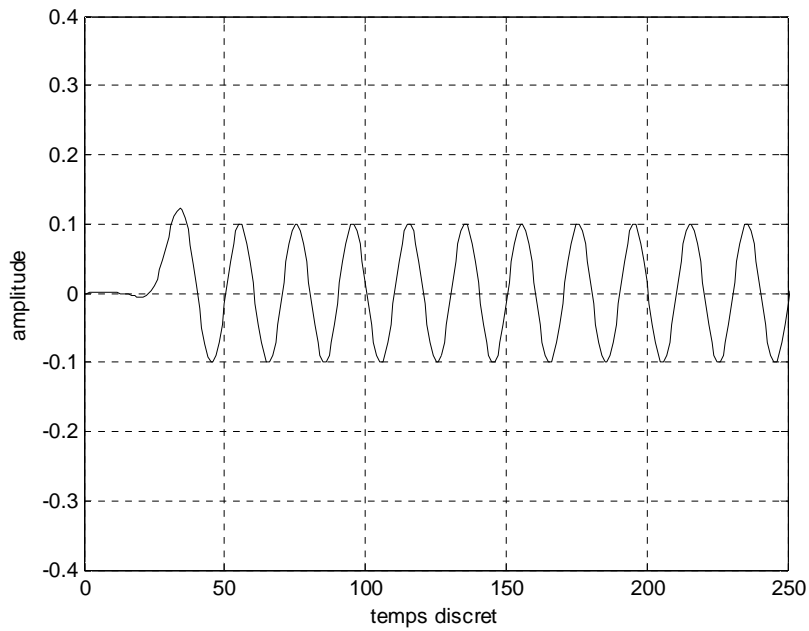


Figure IV.24 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure directe.

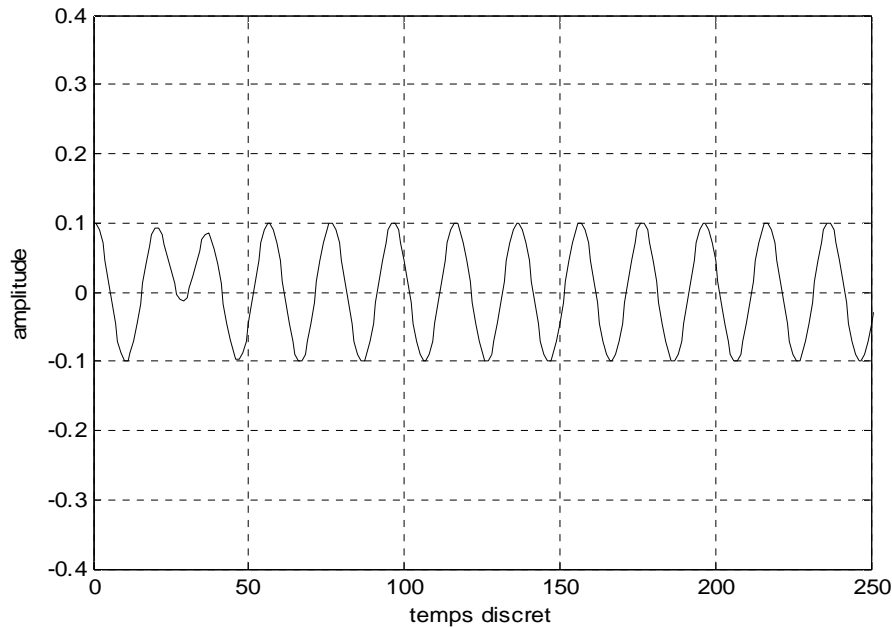


Figure IV.25 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure FFT.

On constate effectivement d'après les Figures (IV.24)-(IV.25) citées, que le filtrage de X_1 est correctement effectuée. La fréquence F_2 se trouvant à l'extérieur de la bande passante de filtre1, a bien été rejetée. Cependant, nous remarquons que le signal de sortie pour les 25 ou 30 premières valeurs est pratiquement nulle. Ceci est très clair dans le cas de la structure directe. Ceci s'explique par le fait que pour tous, les premières termes, la convolution est incomplète, c'est la phase transitoire. Il faudra donc attendre un certain ordre pour avoir le régime permanent et récupérer la sinusoïde de fréquence $F_1 = 0.05$.

- **Exemple 2** : aux entrées des filtres 1 et 2, nous appliquons le signal X_2 , somme de trois sinusoïdes. Le filtrage s'effectue selon les deux types de structures directe et FFT.

Les résultats sont illustrés par les Figures (IV.26)-(IV.33).

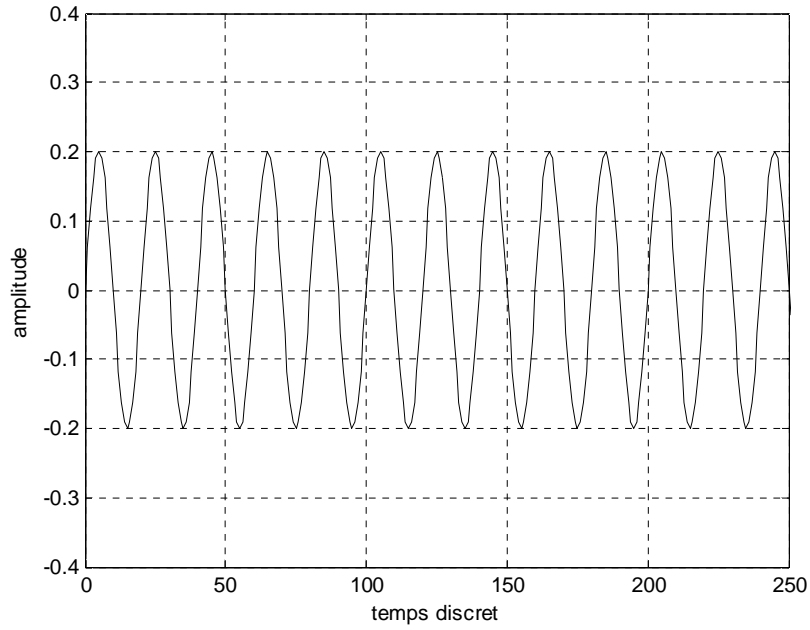


Figure IV.26 : Signal de fréquence normalisée 0.05.

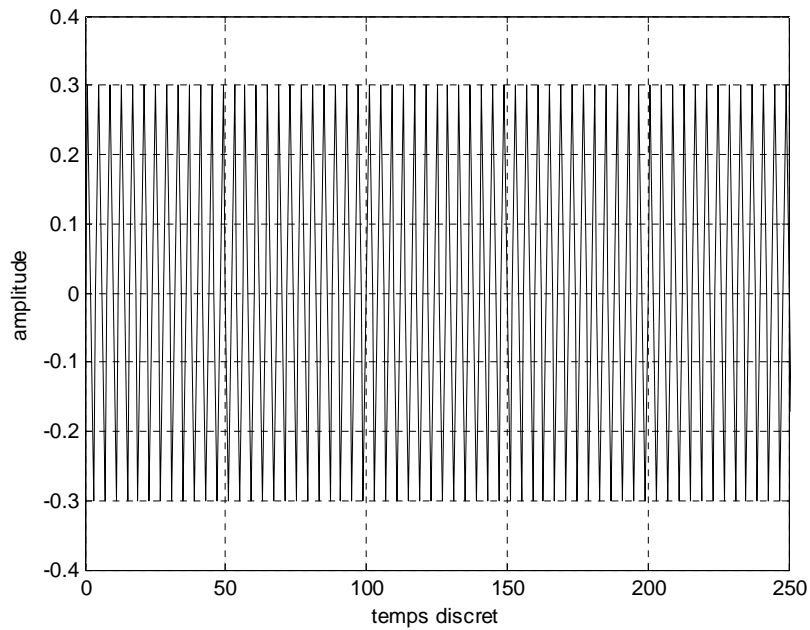


Figure IV.27 : Signal de fréquence normalisée 0.25.

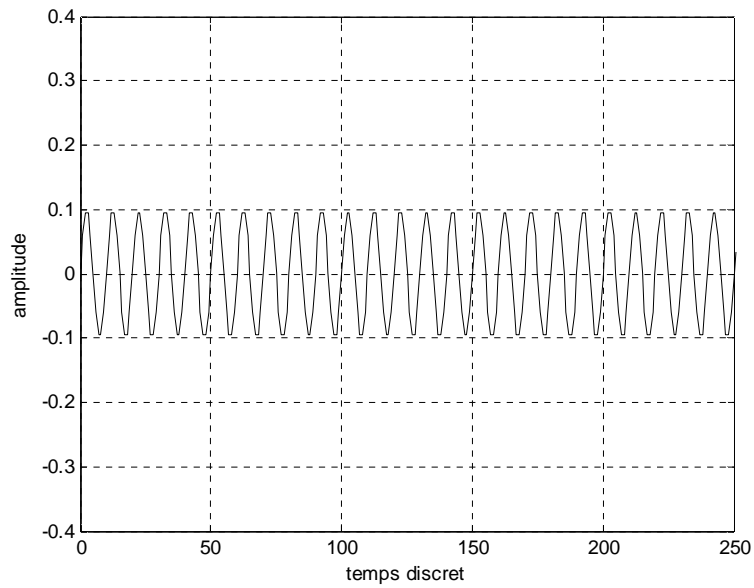


Figure IV.28 : Signal de fréquence normalisée 0.1.

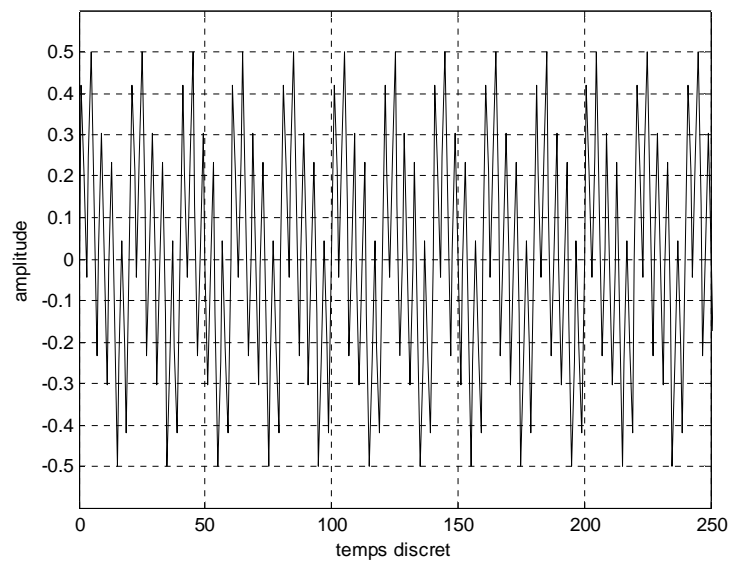


Figure IV.29 : Signal d'entrée du filtre.

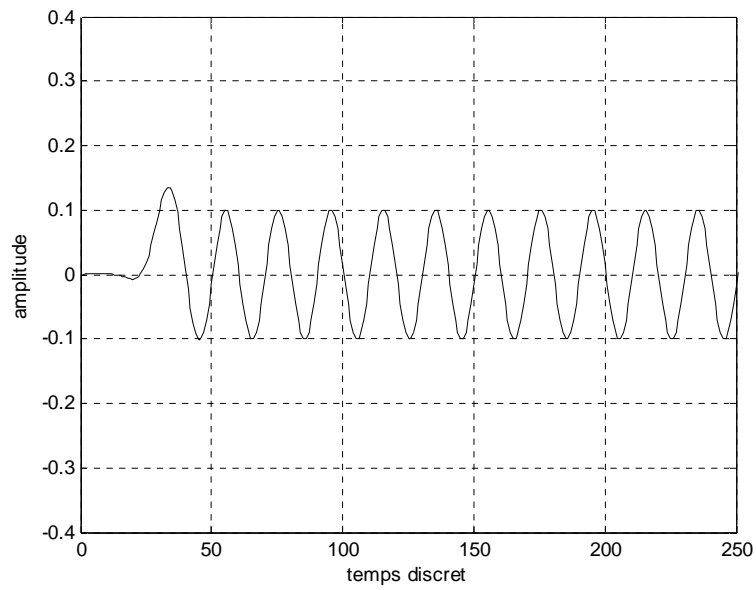


Figure IV.30 : Signal de sortie du filtre 1 selon la structure directe.

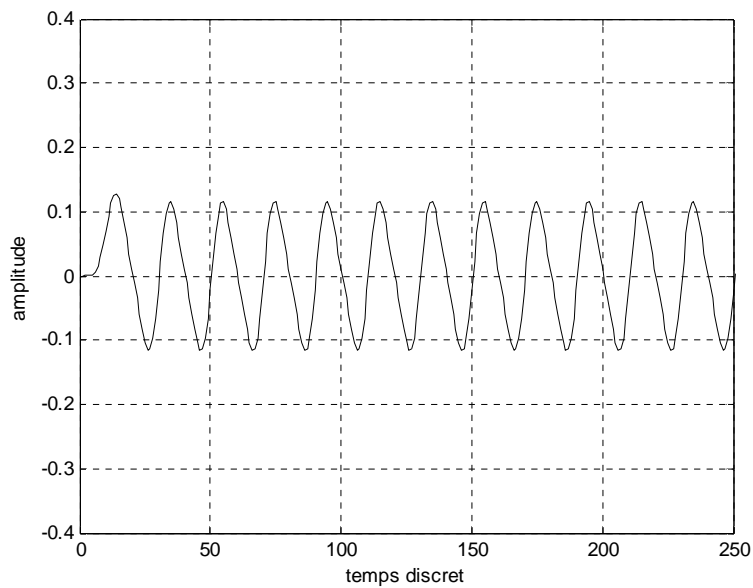


Figure IV.31 : Signal de sortie du filtre 2 selon la structure directe.

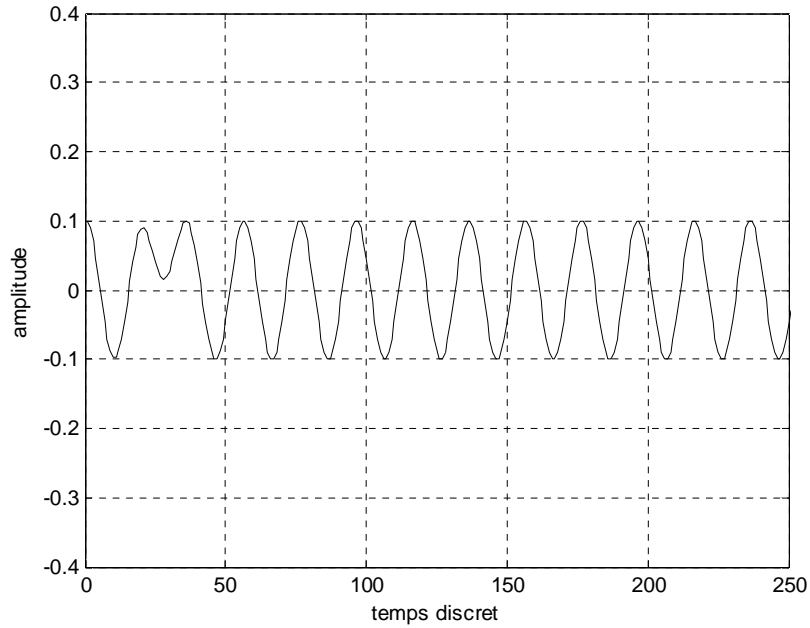


Figure IV.32 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure FFT.

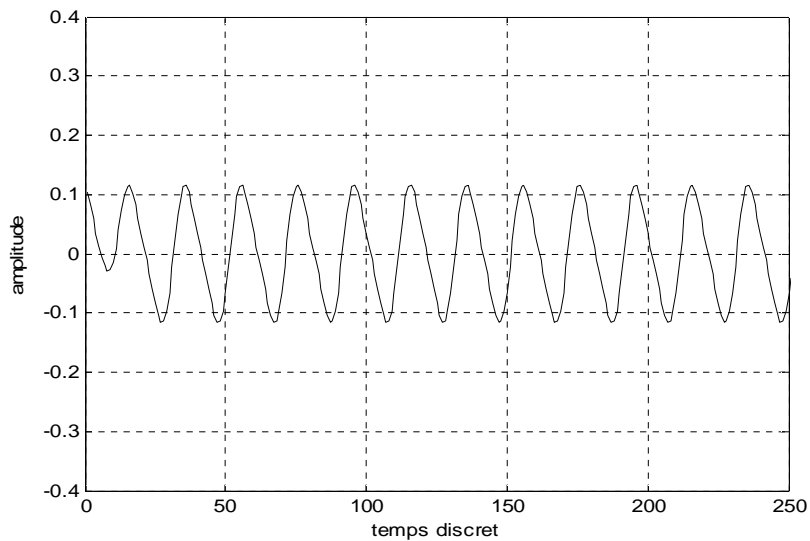


Figure IV.33 : Signal de sortie du filtre 2 selon une structure FFT.

Les figures (IV.30)-(IV.31) pour la forme directe et (IV.32)-(IV.33) pour la forme FFT, montrent que le signal de sortie est quelque peu plus distordu en (IV.33) qu'en (IV.32) et que l'influence de la sinusoïde de fréquence normalisée 0.1 est plus évidente en (IV.33) qu'en (IV.32). Ceci s'explique par le fait de filtre1 d'ordre 61 a une bande de transition beaucoup plus étroite que celle du filtre 2 d'ordre 21, et donc une transition au niveau de la fréquence de coupure de 0.1 beaucoup plus rapide.

- **Exemple 3:** à l'entrée du filtre 1, nous appliquons un bruit :

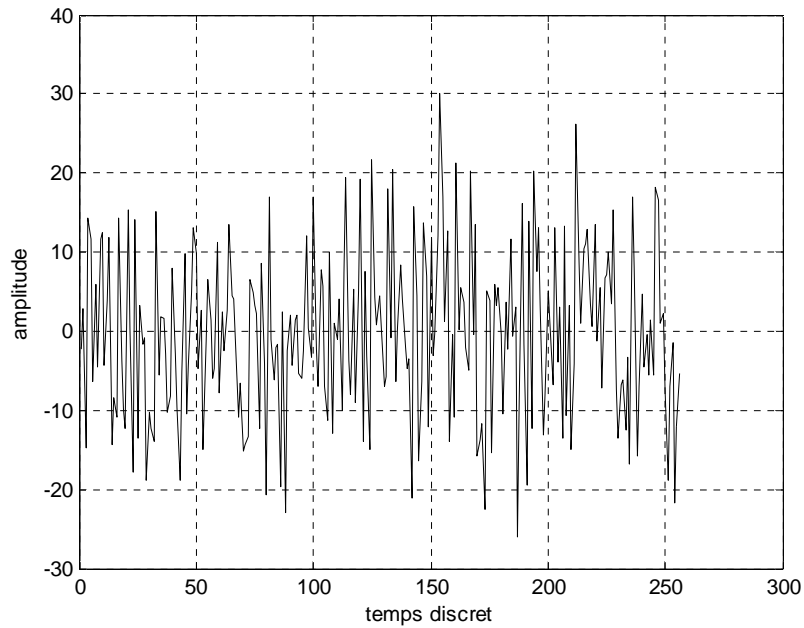


Figure IV.34 : Signal d'entrée du filtre 1.

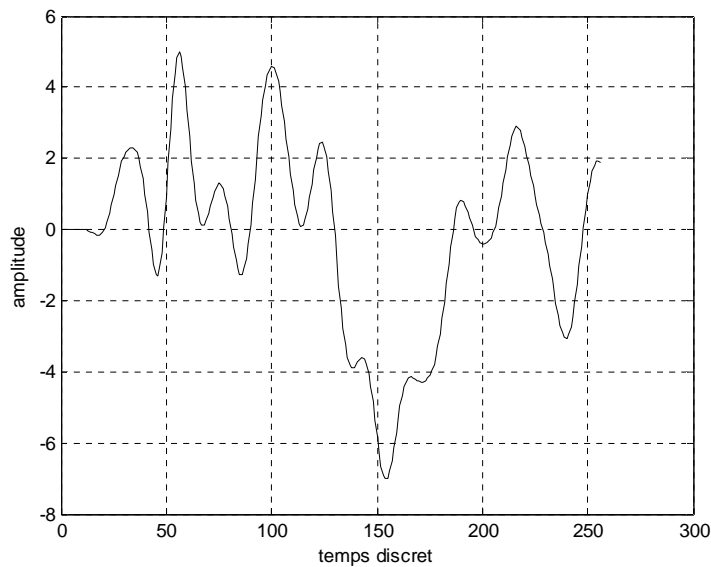


Figure IV.35 : Signal de sortie du filtre 1 selon une structure directe

Le filtrage de bruit effectuée Figures (IV.34)-(IV.35), montre que les fréquences supérieures à la fréquence de coupure du filtre1, ont été éliminées.

IV.8- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode de synthèse des filtres numériques RIF par la méthode de fenêtrage temporelle. Ce concept a été introduit pour étudier, en premier lieu, l'effet de la limitation de la durée de la réponse impulsionnelle d'un filtre sur sa réponse fréquentielle et en second lieu pour minimiser cet effet.

Pour une fenêtre donnée, et à partir d'un certain ordre (assez faible en générale), l'atténuation en bande coupée reste constante, cependant la fréquence des oscillations devient importante lorsque l'ordre N augmente. La bande de transition est inversement proportionnelle à l'ordre N . Parmi ces fenêtres, nous citons la fenêtre de Kaiser. Celle-ci est sans doute celle qui s'adapte à une grande variété de contrainte imposée sur sa réponse fréquentielle. Elle permet d'avoir simultanément une atténuation et une largeur de lobe principale assez faible.

Nous avons introduit le concept de la quantification en l'appliquant aux coefficients d'un filtre en précision infinie (au plus précisément celle de l'ordinateur). Nous avons constaté que cette opération provoque une modification de la réponse fréquentielle du filtre. Cette perturbation est d'autant plus importante que le nombre de bits alloués à chaque coefficient est réduit.

Enfin, nous pouvons dire que la simulation est une étape indispensable avant la mise en œuvre d'un filtre numérique. Cette étape nous permet de corriger toutes anomalies associées avec la précision limitée et de choisir le nombre de bits qui donne un bon compromis entre la qualité de filtre (performances) et son coût.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale :

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification,...), d'analyse et d'interprétation des signaux. Elle fait donc largement appel aux résultats de la théorie de l'information, des statistiques ainsi qu'à de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF) sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps, définis par une équation selon laquelle un nombre de sortie représentant un nombre fini de nombre d'entrée, représentant du signal à filtrer.

Nous avons cherché les coefficients d'un filtre pour répondre à une spécification donnée. Cette spécification peut être, dans certains cas (filtrage adapté à un signal), donnée sous forme d'une réponse impulsionnelle. Si cette réponse est finie, nous avons vu que les échantillons de cette réponse sont les coefficients d'un filtre RIF. Il n'y a donc aucune difficulté.

La spécification peut être donnée sous forme d'un gain en fréquence. Il n'y a alors généralement pas de filtre d'ordre fini qui répond exactement à cette spécification. Il est nécessaire d'accepter un écart à la réponse idéale souhaitée. Cet écart pourrait être spécifié comme un écart quadratique maximum. Cela n'est généralement pas satisfaisant. On préférera donner des bandes de gain dans diverses bandes de fréquences : le gabarit.

Un signal physique ne peut pas être mesuré à chaque instant de façon continue, car il faudrait alors une infinité de points, il est donc nécessaire de procéder à un prélèvement séquentiel sélectif que l'on appelle un échantillon. Mais le problème fondamental est de savoir si l'échantillon représente convenablement le signal initial et d'éliminer dans la mesure du possible les erreurs de mesures. La plupart du temps, un échantillon est bruité, c'est-à-dire entaché d'erreurs, il nous faudra une méthode permettant d'éliminer ces parasites pour cela, nous ferons appel à des techniques de filtrage. Nous nous intéressons dans cette mémoire à l'analyse et la synthèse des filtres numériques par l'application de la transformée de Fourier de l'échantillon.

La transformée de Fourier discrète ou TFD est l'outil permettant d'effectuer le calcul pratique de la TFD à l'étude de ses propriétés fait apparaître quelques différences importantes avec la TFD. En particulier pour les indices des suites temporelles qui y sont traités modulo

N, les notions de précision d'observation spectrale et de résolution en fréquence permettant d'introduire les fenêtres de pondération.

Dans ce travail notre intérêt s'est porté sur l'étude des filtres numériques à impulsion finie, ainsi que leurs applications en commande électrique des systèmes non linéaires. Nous avons utilisé les méthodes de la transformée de Fourier pour calculer les différents paramètres du filtres numériques et nous avons établi une comparaison de leurs performances au moyen des méthodes de synthèse

Lors de cette étude nous avons appliquée la méthode de fenêtrage temporel pour synthétiser des filtres numériques RIF. à phase linéaire. Cette méthode introduit des perturbations dans le spectre d'amplitude du filtre calculé. Celle ci sont connu sous le nom de phénomène de GIBBS et se présentent sous forme de bande de transition au niveau des discontinuités, et d'ondulation autour de ces mêmes points. Pour obtenir un bon filtre il faut pouvoir réduire les bandes de transition et augmenter l'atténuation en bandes d'affaiblissement simultanément

Dans ce sens des fenêtres particulières telles que la fenêtre de Kaiser est assez performante, ce qui n'est pas le cas avec les fenêtres classique qui permettent de faire seulement un compromis entre les deux paramètres. Une fois la synthèse effectuée en précision infinie, nous avons procédé à une quantification des coefficients par l'arrondi ou troncature

Et comme perspective, il est mieux de compléter cette étude par des travaux expérimentaux et de comparer des résultats pour valider notre modèle.

Références bibliographiques :

- [1] P. Destuynder, F. SANTI, Analyse et contrôle numérique du signal, Ellipses, 2002.
- [2] V.J.Mathews, Adaptative polynomial filters, IEEE S.P. Magazine, JULY 1999.
- [3] G.L.Sicuranza, Quadratic filters for signal processing, proceeding of the IEEE, vol. 80, NO.8, August 1992, P.P. 1263-1285.
- [4] D.Chekouche, Y.Toubal, R.E.Bekka, Les limites d'utilisation de la méthode Gadzou dans l'estimation spectrale des signaux transitions, 2ème séminaire national sur l'automatisme et des signaux, SNAS'02, Annaba, octobre 2002.
- [5] R.D.Nowak, B.D.Van Veen, Random and pseudorandom, Inputs for Volterra filter identification, IEEE, trans.sig. vol.42, N0.8, August 1994, P.P. 2124 -2135.
- [6] J.P. Delmas, Eléments de théorie du signal, les signaux déterministes, ellipses, édition marketing S.A, 1995 paris, P.P. 21-232.
- [7] F.Castanie, panorama des méthodes en traitement du signal, INP-ENSEETHT, P.P. 5-33.
- [8] R.E.H.Bekka, Introduction au traitement de signaux , O.P.U,1993,P.P. 2-11
- [9] Y.Goussard, traitement de signaux biomédicaux, cours GBM 6 103, Montréal, 2002.
- [10] J. M. Dilhac, E. Sicard, traitement du signal, INSA, 3ème Mie-IMACS, février 2006, Toulouse.
- [11] R. E. BEKKA, Fondements du traitement du signal, Office des Publication Universitaires –Alger 1998, P.P. 35-85.
- [12] David Savery, Ecole Polytechnique de Monreale Cours ELE3700 Département de Génie électrique Version du 28 mars 2002 .
- [13] H. Egon, M.Marie, P. Porée, Traitement du signal et automatique. Paris, 2000 P.P. 123-131.
- [14] Murat Kunt, Traitement numérique des signaux, presses polytechnique universitaires romandes Lausanne,1999, P.P. 83-180.
- [15] <http://www.irisa.fr/R2D2>,Électronique et Informatique Industrielle15 septembre 2003.
- [16] A.Agatep,Xlinux Spartan-II FIR Filter Solution ,W P 116(V1.0)April 5 2000.

- [17] M. B. Derras, Etude et simulation des filtres numériques RIF ,mémoire de pfd, E.N.P, 1993, P.P.13-98. Electrotechnique, M'sila 2007.
- [18] A.WM.Van Den Enden, N.A.M.Verhoeckx, Traitement Numérique du signal, Dunod, 2003, P.P. 188-269.
- [19] Jemes Broesch, Comprendre Le Traitement Numerique De Signal, Publitrionic pour l'édition française1999.P.P. 53-66 .
- [20] W.P. Salaman, M.S.Solotreff, le filtrage numerique ,Eyrolles, 1982,P.P. 69-110.
- [21] A.Quinquis, le traitement du signal sous matlab, henes science pupliocation, 2000, P.P. 153-228.
- [22] J. Auvray , Filtering in practicle – digital filtering – transverse filters
Techniques de L'ingénieur, Vol. RE1, n° R1105 P.P. R1105.1_R1105.19,2003 .
- [23] Messaoud. Benidir, Théorie et Traitement du signal, Dunod, 2002, P.P.13-85
- [24] Alexandre Rénaux Cours Traitement Numérique Des Signaux, IFIPS /Université Paris Sud Orsay.
- [25] Steven T .Karris, Signils and systems With Matlab Application, orchard puplications, 2003, P.P. 1101-1179.
- [26] John L.SEMMLOW, Biomedical Image processing, Basel, New York, 2004, P.P. 87-123.

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE

OPTION : COMMANDE ELECTRIQUE

Proposé et dirigé par Monsieur : **NOURI Hamou**

Présenté par : **BELKHEIR Tarek**
BERRABAH Ahmed
BOUGUERRA Abderrahmane

Thème :

Modélisation du filtre R.I.F par la transformée de Fourier discrète.

Résumé :

Ce travail du projet de fin d'étude pour le cycle ingénieur, nous a permis de mettre en évidence les propriétés du filtre numérique RIF. De tels filtres ont des propriétés attractives. On peut en calculer qui soient à phase rigoureusement linéaire, c'est-à-dire à déphasage proportionnel à la fréquence. Par ailleurs de tels filtres sont toujours stables lorsqu'ils sont implémentés à l'aide d'une structure non récursive.

Ces filtres trouvent de nombreuses applications en traitement du signal, notamment dans les annulateurs de bruit.

Les filtres numériques fonctionnant suivant le critère de minimisation de l'erreur quadratique en utilisant l'algorithme des moindres carrés moyens ou récursif permettant de réaliser le filtrage adaptatif.

Mots clés :

Signal, Echantillonnage, Transformée de Fourier, Fréquence, Filtrage Numérique.