UNIVERSITE DE M'SILA

Faculte des Mathématique et de l'informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentale

Sujet: La continuité des commutateurs d'intégrale singulière sur l'espace L^p

Par : Hebbache Wafa   Dirigé par : Dr. D.Drihem

10/06/2012

Remerciements

*Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur **D.Drihem** pour m'avoir confié ce sujet de recherche. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Ensuite, je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury à savoir, qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous mes professeurs à la faculté de Mathématiques et de L'informatique.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère

la plus chère à mon cœur Mahdi charaf eddin.

Résumé

Nous définissons ici les opérateurs de Calderón-Zygmund et l'espace des fonctions d'oscillation moyenne bornée et quelque propriétés de cette espace et on a besoin aussi lemmes des préparations tout ça pour étudie la continuité des commutateurs d'intégrale singulière sur l'espace L^p.

Mots clés. Les opérateurs de Calderón-Zygmund, l'espace BMO, fonction maximale de Hardy-Littelwood, Commutateurs.

Table des matières

Introduction

En 1965, Calderón a défini le commutateur pour étude la continuité d'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes est le commutateur définie par :

$$C_{h,\varphi}(f) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right) \frac{f(y)}{x - y} dy,$$

où $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, φ est une fonction lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Il est clair que, si $h(t) = (1 + it)^{-1}$ alors $C_{h,\varphi}(f)$ est l'intégrale de Cauchy sur la courbe $y = \varphi(x)$, si $h = 1$ alors $C_{h,\varphi}(f)$ est la transformée de Hilbert; si $h(t) = t^k$(k est un nombre naturel), alors $C_{h,\varphi}(f)$ est un commutateur de degré k de la transformée de Hilbert sur φ.

En 1976, Coifman, Rochberg et Weiss a étudié la continuité de L^p du commutateur $[b, T_\Omega]$ d'intégral singulière de type de Calderón –Zygmund:

$$[b, T_\Omega](f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x - y)}{|x - y|^n} [b(x) - b(y)] f(y) dy, \tag{A}$$

où Ω satisfait la condition d'homogénéité de degré zéro, en outre Ω une fonction lipschitziennes sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et b est une fonction dans $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Le commutateur défini par (A) est appelé **CRW-type**, et **CRW-type** de commutateur joue un rôle important dans l'étude de la régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre.

Le but de ce mémoire est étudie la continuité du commutateur

$$[T_\Omega, b](f) = bT_\Omega(f) - T_\Omega(bf), \quad \text{où } b \in BMO,$$

oú

$$T_{\Omega}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega\,(x-y)}{|x-y|^{n}} f(y)dy,$$

avec Ω est une fonction convenable.

On divisé le travail en trois parties

Dans la premier partie, on donne quelque rappeles des notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire, comme la fonction maximale de Hardy et littelwood et le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, et nous définirons l'espace BMO et quelques propriétes essentielles de cette espace.

Dans la deuxiéme partie, on étudie dans cet chapitre une classe d'opérateurs d'intégrale singulière introduite par Calderón-Zygmund, généralisant la transformée de Hilbert et les transformées de Riesz.

Dans la troisiéme partie, on étudie la continuité des commutateurs d'intégrale singulière dans l'espace L^{p}.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire.

Nous définirons quelque notion de fonction maximale associée à une fonction localement intégrable, pour obtenir certaines propriétés de diérentiation.Un théorème d'interpolation de Marcinkiewicz concernant les opérateurs sur les espaces $L^1 + L^r$ sera également démontré. et nous définirons l'espace BMO et quelques propriétes essentielles de cette espace.

1.1 Espaces L^p et L^p-faible

Définition 1.1.1 *Soient (X, μ) un espace mesurée et $0 < p \leq \infty$. On pose*

$$L^p(X,\mu) = \{f : X \to C \ \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \ \|f \mid L^p(X,\mu)\| < \infty\}, \text{ avec}$$

$$\|f \mid L^p(X,\mu)\| = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 0 < p < \infty \\ \sup\limits_{x \in X} \operatorname{ess} |f(x)| & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue, on pose $L^p(\mathbb{R}^n, \mu) = L^p$ et $\|f \mid L^p(\mathbb{R}^n, \mu)\| = \|f\|_p$.

Remarque 1.1.1 *Les espaces $L^p(X, \mu)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Définition 1.1.2 *Soient (X, μ) un espace mesurée et $1 \leq p < \infty$ et f est une fonction mesurable de X. La fonction f est dite appartenir à l'espace L^p-faible, s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\mu \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right)^{1/p} \leq C < \infty.$$

L'espace L^p-faible note $L^{p,\infty}(X, \mu)$ est définie par

$$L^{p,\infty}(X, \mu) = \left\{ f \text{ mesurable} : \|f\|_{p,\infty} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu \left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right)^{1/p}.$$

Remarque 1.1.2 *1. Il est facile de vérifier que pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu) \subsetneq L^{p,\infty}(X, \mu)$. On pose $L^{\infty,\infty}(X, \mu) = L^\infty(X, \mu)$.*
2. Inégalité de Hölder. Soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^{p'}(X, \mu)$, avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1(X, \mu)$ et

$$\left\| f \cdot g \mid L^1(X, \mu) \right\| \leq \| f \mid L^p(X, \mu) \| \left\| g \mid L^{p'}(X, \mu) \right\|.$$

1.2 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

Soient (X, μ) est (Y, ν) deux espaces mesurées. Soit T un opérateur definie sur l'espace des fonctions mesurables sur (X, χ, μ) à valeur dans l'espace des fonctions mesurables sur (Y, ν). On dit que T sous-liniéaire si pour toute f, g mesurables et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|, \quad |T(\lambda f)| = |\lambda| \, |T(f)|.$$

Le théorème suivant est dit théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Théorème 1.2.1 *Soient (X, μ) est (Y, ν) deux espaces mesurées et $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Soit T un opérateur sous-liniéaire défini sur $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ à valeur dans l'espace des fonctions mesurables sur (Y, ν). On suppose qu'il esiste deux constantes $C_0, C_1 > 0$ telle que pour tout $\lambda > 0$ et f on a:*

1. $\nu\left(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C_0}{\lambda}\|f\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0}$;

2. $\nu\left(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{p_1,\mu}\right)^{p_1}$, *pour tout* $p_1 < \infty$.

Si $p_1 = \infty$, *on suppose que* $T : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(Y,\nu)$. *Alors* T *est borné sur* $L^p(X,\mu)$ *pour tout* $p_0 < p < p_1$, *c'est à dire qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $f \in L^p(X,\mu)$

$$\left(\int_X |Tf(x)|^p \, d\nu\right)^{1p} \leq C \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1p}.$$

Preuve. voir [1] ■

1.3 Fonction maximale de Hardy-Littelwood

Nous allons commencer à donner la définition de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, qui joue un rôle très important en analyse harmonique.

Définition 1.3.1 *Supposons que* f *est une fonction localement intégrable sur* $\mathbb{R}^n$, *i.e.*$f \in L^1_{loc}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *la fonction maximale de Hardy-littlewood* $\mathcal{M}f$ *est définie par*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)| \, dy, \tag{1.3.1}$$

$\mathcal{M}$ *est aussi appelé l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood.*

Parfois, nous avons besoin d'utiliser les fonctions maximales suivantes. Pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\acute{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| \, dy, \tag{1.3.2}$$

où et ci-dessous $Q(x,r)$ désigne le cube de centre x et avec longueur r. $|E|$ indique la mesure de Lebesgue de l'ensemble E. Plus généralement,

$$\mathcal{M}'' f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy, \tag{1.3.3}$$

lorsque la supremum est pris sur tous les cubes ou boules Q contenant x.

Remarque 1.3.1 *Par (1.3.1)-(1.3.3), Il est facile de voir qu'il existe constantes $C_i(i = 0, 1, 2, 3)$ dépendant que de la dimension n tel que*

$$C_0\mathcal{M}f(x) \leq C_1\acute{\mathcal{M}}f(x) \leq C_2\mathcal{M}" f(x) \leq C_3\mathcal{M}f(x), \tag{1.3.4}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.3.2 *La fonction maximale de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ n'est pas bornée.sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Nous ne considérons le cas $n = 1$. Prenez $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, alors pour tout $x \geq 1$, on a

$$\mathcal{M}f(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy = \frac{1}{2x}.$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \mathcal{M}f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}dx = \infty.$$

Alors la fonction maximale $\mathcal{M}$ n'est pas bornée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.3.3 *La foncion maximale $\mathcal{M}$ est bornée sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on vérifier que $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, on a*

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy &\leq \|f\|_\infty \int_{B(x,r)} dy, \qquad \forall x,\ \forall r > 0 \\ &= |B(x,r)|\, \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

on divise sur $|B(x,r)|$ donc

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \leq \|f\|_\infty.$$

Alors

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{M}f$ est finie presque-partout ;*

(b) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $C = C(n) > 0$ telle que:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

(c) *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p \leq \infty)$, *alors* $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* $C = C(n,p) > 0$ *telle que*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C \|f\|_p .$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

1.4 L'espace BMO

L'espace des fonctions d'oscillation moyenne bornée présenté la premiére fois par **John. F** et **L. Nirenberg** en 1961, dans le cadre des équations aux dériveés partielles. Dans de nombreux problémes d'analyse harmonique, des propriétés sont fausses pour L^∞ mais deviennent vraies à condition de considérer l'espace BMO.

Premièrement, nous introduisons la définition de l'espace des fonctions BMO sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.1 *Soit* f *une fonction localement intégrable définie sur* $\mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx,$$

où on prenant le supremum over dans tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$, *et*

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(y) dy,$$

définir

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{loc} : \|f\|_{BMO} < \infty \right\}$$

est l'espace des fonctions d'oscillation moyenne bornée.

Définition 1.4.2 *Soit* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *L'opérateur de fonction (sharp function)* $M^\sharp f$ *de* f *définie par*

$$M^\sharp f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(y) - f_Q| \, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

où Q *est un cube de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.3 *Soit f est un funcion d'oscillation moyenne bornée. Alors $f \in BMO\,(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $M^\sharp f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Notons $\|f\|_{BMO} = \left\|M^\sharp f\right\|_\infty$, la norme de BMO de f . Notez que

$$\|f\|_{BMO} = 0 \ si \ \ f = constante.$$

Par conséquent, un élément de BMO est en fait une classe équivalente. Plus précisément

$$f = g \ dans \ BMO \Longleftrightarrow f - g = constante.$$

Corollaire 1.4.1 *.*

1. *Les fonctions de BMO sont localement p-intégrable, si $0 < p < \infty$, mais ne doivent pas être localement bornée.*

2. *BMO est un espace de Banach.*

3. *Les moyennes des cubes adjacents sont comparables.*

Remarque 1.4.1 *.Voir [1,6]*

1. *Si $f \in BMO\,(\mathbb{R}^n)$ est $h \in \mathbb{R}^n$ alors $f(\cdot - h)$, la définition de f satisfait que $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$, et*
$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}\,. \tag{1.4.1}$$

2. *Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$, alors $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et*
$$\|f(\lambda\cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}\,. \tag{1.4.2}$$

3. *Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, alors*
$$\|f\|_{BMO} \sim \sup_{Q} \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(x) - a|\, dx.$$

4. *L^∞ est contenu dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{BMO} \leq 2\,\|f\|_{L^\infty}$.*

5. *Supposons qu'il existe un $A > 0$ tel que pour tous cubes Q de $\mathbb{R}^n$, il existe un constante C_Q telle que*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - C_Q| \, dx \leq A.$$

alors $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

Proposition 1.4.1 *Soit f une fonction localement intégrable, on a*

1. $\frac{1}{2} \|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx \leq \|f\|_{BMO}$;

2. $M^\sharp (|f|)(x) \leq 2M^\sharp f(x)$.

Preuve. La seconde inégalité dans (1) est immédiate. Pour prouver la première, note que pour tout a

$$\int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx \leq \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx + \int\limits_Q |a - f_Q| \, dx \leq 2 \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx.$$

Maintenant, divisez les deux côtés par $|Q|$

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx \leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx + \int\limits_Q |a - f_Q| \, dx \leq \frac{2}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx. \quad (1.4.3)$$

Prendre la borne inférieure sur l'ensemble a puis le supremum sur Q.

L'inégalité (2) résulte de (1) (avec $a = |f_Q|$) depuis

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q ||f(x)| - |f_Q|| \, dx \leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx.$$

Donc

$$M^\sharp (|f|)(x) \leq 2M^\sharp f(x).$$

Ce qui termine la preuve. ■

L'inégalité (1) définit une norme équivalente à $\|.\|_{BMO}$, celui qui fournit un moyen de montrer que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, sans utilisant de sa moyenne sur Q. Il suffit de trouver une constante a (qui peut dépendre de Q) telle que

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - a| \, dx \leq C,$$

avec C indépendante de Q.

Il résulte de (2) que si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ alors $|f|$ est aussi en $BMO(\mathbb{R}^n)$. Cependant, l'inverse n'est pas vrai. Cela confirme ce que suggère la définition: être dans BMO n'est pas seulement une question de taille. Il est clair $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$, mais il ya aussi illimitées fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$. L'exemple typique de $\mathbb{R}$ est

$$f(x) = \begin{cases} log\left(\frac{1}{|x|}\right) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mais il est facile de voir que la fonction $sgn(x)f(x) \notin BMO(\mathbb{R}^n)$ même si f est sa valeur absolue.

1.4.1 L'inégalité de John-Nirenberg

Théorème 1.4.1 ***(Inégalité de John-Nirenberg)****. Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Ensuite, il existe deux constantes C_1 et C_2, ne dépendant que de la dimension, tels celle donnée un cube Q dans $\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 |Q| e^{-C_2\lambda / \|f\|_{BMO}}. \tag{1.4.4}$$

Preuve. Voir livre [3]. ■

Corollaire 1.4.2 *Pour tout $p, 1 < p < \infty$,*

$$\|f\|_{*,p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{1/p},$$

est une norme équivalente sur $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Il suffit de prouver que $\|f\|_{*,p} \leq C_p \|f\|_*$ car l'inégalité inverse est immédiate. Par l'inégalité de John-Nirenberg

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \, d\lambda \\ &\leq C_1 |Q| \int_0^\infty p\lambda^{p-1} e^{-C_2\lambda \|f\|_*} d\lambda. \end{aligned}$$

Faire le changement de variables $s = C_2\lambda \|f\|_*$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &\leq C_1 p \left(\frac{\|f\|_*}{C_2}\right)^p \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds \\ &= C_1 p C_2^{-p} \Gamma(p) \|f\|_*^p, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité cherchée. ■

Nous avons immédiatement obtenir le suivant.

Corollaire 1.4.3 *Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout cube Q,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\left|f(x) - f_Q\right|} dx < \infty.$$

Corollaire 1.4.4 *Soit la fonction f supposons qu'il existe deux constantes C_1, C_2 et K telle que pour toute cube Q et $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq C_1 |Q| e^{-C_2\lambda/K},$$

alors $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.4.2 *[5]Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe un constante C_p indépendante de f, ne dépendant que de n et p*

$$C_p^{-1} \|f\|_p \leq \left\|M^\sharp f\right\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

et donc

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow M^\sharp f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Chapitre 2

Intégrale singulière

2.1 Les opérateurs de Calderón-Zygmaund

Les opérateurs d'intégrale singulière apparaissent naturallement dans de nombreux problèmes, notamment d'équations aux dérivées partielles ou de théorie du potensiel. Nous nous bornerons dans cet exposé à étudier une classe d'opérateurs d'intégrale singuliére introduite par Calderon et Zygmund. Les méthodes utilisées pour prouver la continuité sur L^2 de tels opérateurs sont souvent trés proches de celles avec lesquelles on treite d'autres intégrales singulière(comme la transformée de Hilbert le long d'une courbe)

Précisons un peu le type d'opérateur dont nous allons parler par **noyau standard** sur $\mathbb{R}^n$, classiquement un opérateur d'intégral est défini sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par une formule du type

$$T\varphi(x) = \int K(x,y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{2.1.1}$$

On doit imposer à K des conditions pour que cet intégrale existe par exemple, s'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$|K(x,y)| \leq f(x,y), \tag{2.1.2}$$

la fonction K s'appelle le noyou de l'opérateur T. Il existe des noyau qui ne satisfant pas la condition (2.1.2) par exemple $K(x,y) = \Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) \cdot |x-y|^{-n}$. Ou Ω une fonction intégrable sur $\mathbb{S}^{n-1}$ d'intégrale nule alors (2.1.1) doit s'interpéter comme une valeurs principale

$$T\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Définition 2.1.1 *Soit* $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *telle que*

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n}, \forall x \neq 0, B > 0; \tag{2.1.3}$$

$$\int\limits_{r \leq |x| \leq R} K(x)dx = 0, \ \forall \ 0 < r < R < +\infty; \tag{2.1.4}$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, dx \leq B, \forall y \neq 0. \tag{2.1.5}$$

La fonction K *s'appelle le noyau de Calderón-Zygmund.*

Théorème 2.1.1 *Soit* K *un noyau de Calderón-Zygmund pour* $\varepsilon > 0$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$. *On pose* $T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} K(y)f(x-y)dy$. *Alors*

1. $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_P \|f\|_p$, A_p *est indépendant sur* ε *et* f.
2. $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f$ *existe dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *il existe* T *telle que*
$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} K(y)f(x-y)dy.$$
3. $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < +\infty)$.

Remarque 2.1.1 T *s'appelle l'opérateur d'intégrale singulière de Calderón-Zygmund.*

Théorème 2.1.2 ***(décomposition de Calderón-Zygmund de*** $\mathbb{R}^n$***)*** *Supposons que* f *est une fonction intégrable positive sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors pour tout* $\lambda > 0$ *fixé, il existe une suite* $\{Q_j\}$ *de cubes dyadiques disjoints deux à deux (ici par disjoints, nous voulons dire leurs intérieurs sont disjoints), telle que:*

1. $f(x) \leq \lambda \quad \forall x \notin \cup Q_j$ *presque partout;*
2. $\left|\bigcup_j Q_j\right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$;
3. $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} f(x)dx \leq 2^n \lambda$.

Preuve. Pour la preuve , voir [1] ■

Théorème 2.1.3 ***(décomposition de Calderón-Zygmund d'une fonction)*** *Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour tout fixe $\lambda > 0$, il existe une suite $\{Q_j\}$ des cubes dyadique disjoint deux à deux et deux fonctions g, b tels que:*

(i) $f(x) = g(x) + b(x)$;

(ii) $|g(x)| \leq 2^n\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}^n$ *presque partout*;

(iii) $\|g\|_p^p \leq C\lambda^{p-1} \|f\|_1$, *pour tout* $1 < p < \infty$;

(iv) $b(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j$ *presque partout*;

(v) $\int\limits_{Q_j} b(x)dx = 0,\ j = 1, 2, \cdots$.

Preuve. On appliquer la décomposition de Calderón-Zygmund sur $\mathbb{R}^n$ pour f et $\lambda > 0$, on obtient une suite des cubes dyadiques disjoints $\{Q_j\}$, tels que

$$f(x) \leq \lambda \textit{ presque partout } x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j;$$

$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 ;$$

et

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} f(x)dx \leq 2^n\lambda, \text{ pour tout } j = 1, 2, \cdots .$$

Maintenant nous définissons $g(x)$ et $b(x)$ comme suit:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} f(x)dx & \text{si.} \quad x \in Q_j,\ j = 1, 2, \cdots , \end{cases}$$

et

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j \\ f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} f(x)dx & \text{si.} \quad x \in Q_j,\ j = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

On a $f = g + b$. On sait que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_j} b(x)dx &= \int\limits_{Q_j}\left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j} f(y)dy\right)dx \\
&= \int\limits_{Q_j} f(x)dx - \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j} f(y)dy \int\limits_{Q_j} dx \\
&= \int\limits_{Q_j} f(x)dx - \int\limits_{Q_j} f(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Par théorème(2.1.2), on a

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leq \begin{cases} |f(x)| & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int\limits_{Q_j} |f(x)|\, dx & \text{si.} \quad x \in Q_j, j = 1, 2, \cdots . \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j \\ 2^n\lambda & \text{si.} \quad x \in Q_j, j = 1, 2, \cdots . \end{cases} \\
&\leq 2^n\lambda.
\end{aligned}$$

Ce qui montre (ii). Pour (iii), on sait que pour $F = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j$

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \sum_j \int\limits_{Q_j} g(x)^{p-1} g(x)dx + \int\limits_F g(x)^{p-1} g(x)dx \\
&\leq \sum_j (2^n\lambda)^{p-1} \int\limits_{Q_j} g(x)dx + \lambda^{p-1}\int\limits_F g(x)dx \\
&= (2^n\lambda)^{p-1} \sum_j \int\limits_{Q_j} f(x)dx + \lambda^{p-1}\int\limits_F f(x)dx \\
&\leq C\lambda^{p-1} \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

C'est seulement (iii), et la preuve de théorème (2.1.3) est terminé. ■

Démonstration. **(théoréme de Caldéron-Zygmund)**

Etape 1. On démontre que $T_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)$ donc $T_\varepsilon f(x) = K * f(x)$. Il est clair que

$$|K_\varepsilon(x)| = \left|K(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)\right| \leq |K(x)| \leq B\,|x|^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$$

et

$$\begin{aligned}\int\limits_{r\leq|x|\leq R} |K(x)|\,dx &= \int\limits_{r\leq|x|\leq R} \left|K(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)\right| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq R \\ \int\limits_{\max(r,\varepsilon)\leq|x|\leq R} |K(x)|\,dx = 0 & \text{if} \quad \varepsilon < R. \end{cases}\end{aligned}$$

En suite, nous allons montrer que K_ε aussi satisfies (2.1.5).

En effet, pour toute $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $y \neq 0$ et $|x| \geq 2|y|$ on a:

a. Si $x, x-y \in B(0,\varepsilon)$, alors $K_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x-y) = 0$.

b. Si $x, x-y \notin B(0,\varepsilon)$, alors $K_\varepsilon(x) = K(x)$ et $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$, dans ce cas K_ε satisfie (2.1.5).

c. Si $x \notin B(0,\varepsilon)$ et $x-y \in B(0,\varepsilon)$, alors nous avons $|x| \leq |x-y| + |y| < 2\varepsilon$ et $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$.

Par conséquent, nous avons que

$$\int\limits_{|x|\geq2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|\,dx \leq \int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq2\varepsilon} |K_\varepsilon(x)|\,dx \leq CB.$$

Où C est indépendante de ε.

Par la même façon, nous pouvons prouver quand $x \in B(0,\varepsilon)$ et $x-y \notin B(0,\varepsilon)$, K_ε satisfie (2.1.5).

Par le **théorème de Plancherel**, $\|T_\varepsilon f\|_2 = \|K_\varepsilon * f\|_2 = \|\mathcal{F}K_\varepsilon \cdot \mathcal{F}f\|_2$. Si on démontre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}K_\varepsilon(\xi)| \leq CB \tag{2.1.6}$$

alors $\|T_\varepsilon f\|_2 \leq CB\,\|\mathcal{F}f\|_2 = CB\,\|f\|_2$. En fait, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}K_\varepsilon(\xi) &= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x)dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{|x|\leq \frac{a}{|\xi|}} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x)dx + \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x)dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} (I_1 + I_2)\,.\end{aligned}$$

Par la condition $|K(x)| \leq B\,|x|^{-n}, \forall x \neq 0, B > 0$ et $\int\limits_{r\leq|x|\leq R} K(x)dx = 0, \forall\; 0 < r < R < +\infty$ on a:

$$I_1(\xi) = \int\limits_{|x|\leq \frac{a}{|\xi|}} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x)dx - \int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq \frac{a}{|\xi|}} K_\varepsilon(x)dx\ .$$

Ce qui donne

$$|I_1(\xi)| \leq C\,|\xi| \int\limits_{|x|\leq \frac{a}{|\xi|}} |x|\,|K_\varepsilon(x)|\,dx \leq CaB.$$

Considérons maintenant I_2 Prendre $y = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$, donc $e^{(2\pi iy\xi)} = -1$. Ainsi

$$\begin{aligned}I_2 &= \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i(x-y)\xi} K_\varepsilon(x-y)dx \\ &= -\int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x-y)dx \\ &= -\int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x-y)dx + J,\end{aligned}$$

où

$$J = \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x-y)dx - \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi ix\xi} K_\varepsilon(x-y)dx.$$

Nous avons donc

$$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x|\leq R} \left[K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)\right] e^{-2\pi ix\xi} dx + \frac{J}{2}.$$

Que $|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ et $a > 1$, nous avons que

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{\frac{a}{|\xi|}<|x|\leq R} \left[K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)\right] e^{-2\pi i x\xi} dx \right| &\leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \left|K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)\right| dx \\ &\leq CB,\end{aligned}$$

où C, B sont indépendants de ε, ξ.

D'autre part, soit E la différence symétrique des deux ensembles $\left\{x : \frac{a}{|\xi|} < |x| \leq R\right\}$ et $\left\{x : \frac{a}{|\xi|} < |x-y| \leq R\right\}$, puis

$$|J| \leq \int\limits_E |K_\varepsilon(x-y)| \, dx.$$

Notant que $|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ et $a > 1$, il s'ensuit que

$$E \subset \left\{x : \frac{a}{2|\xi|} \leq |x| \leq \frac{2a}{|\xi|}\right\} \bigcup \left\{x : \frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R\right\}.$$

Donc par (2.1.3), implique que

$$|J| \leq \int\limits_{\frac{a}{2|\xi|}\leq|x|\leq\frac{2a}{|\xi|}} |K_\varepsilon(x-y)| \, dx + \int\limits_{\frac{R}{2}\leq|x|\leq 2R} |K_\varepsilon(x-y)| \, dx \leq CB,$$

où C, B sont indépendants de ε, ξ.

Résumez tous au-dessus on obtient (2.1.6), donc $\{T_\varepsilon\}$ est uniformément bornée dans ε sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Etape 2: Maintenant, nous montrons que $T_\varepsilon : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et la limite est indépendante de ε.

Pour chaque $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$, par la décomposition de Calderón-Zygmund d'une fonction (théorème 2.1.3) nous pouvons obtenir une suite des cubes $\{Q_j\}$ et deux fonctions g, b, telle que $f = g + b$ qui satisfont aux propriétés suivantes:

(a) $\|g\|_2^2 \leq C\lambda \|f\|_1, |g(x)| \leq 2^n\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^n$ presque partout;

(b) $\lambda \leq \frac{1}{|Q_j|} \int\limits_{Q_j} |f(x)| \, dx \leq 2^n\lambda, \quad$ pour tout Q_j;

(c) $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$;

(d) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$, supp $b_j \subset Q_j$ est $\|b_j\|_1 \leq 2\int_{Q_j} |f(x)|\, dx$.

Comme $T_\varepsilon f(x) = T_\varepsilon g(x) + T_\varepsilon b(x)$, nous avons que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

la première étape et (a) impliquent que

$$I_1 \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |T_\varepsilon g(x)|^2\, dx \leq \frac{4C}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\, dx \leq \frac{4C}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Pour estimer I_2, soit $Q_j^* = 2\sqrt{n}Q_j$ le cube dont le centre est le même que Q_j et le côté est $2\sqrt{n}$ fois celle de Q_j. Soit $E^* = \bigcup_j Q_j^*$, alors (c) implique que

$$|E^*| \leq \sum_j |Q_j^*| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |E^*| + \left|\left\{x \notin E^* : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Notez que $|T_\varepsilon b(x)| \leq \sum_j |T_\varepsilon b_j(x)|$, il suffit de prouver que

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)|\, dx \leq C \|f\|_1 . \tag{2.1.7}$$

Notons au centre de Q_j par y_j.

Puis par la condition $\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \forall y \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus E^*} |T_\varepsilon b_j(x)|\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*}\int_{Q_j} |K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x-y_j)|\,|b_j(y)|\, dydx \\
&\leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*} |K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x-y_j)|\, dxdy \\
&\leq CB\int_{Q_j} |b_j(y)| \leq 2CB\int_{Q_j} |f(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Qui avec (b) et (c) les rendements (2.1.7). Il s'ensuit que T_ε est d'une faiblesse type $(1,1)$ et sa limite est indépendante de ε ou f.

Etape3 : Maintenant, nous allons montrer que $T_\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < \infty)$. Appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewiz nous savons que $T_\varepsilon : L^p \to L^p$ pour $1 < p < 2, \|T_\varepsilon f\|_p \leq c\,\|f\|_p\ \forall\varepsilon > 0, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

On montre que $T_\varepsilon : L^p \to L^p\,(2 < p < \infty)$. On sait que $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$, on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)f(x-y)dy\overline{g}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x-y)f(y)dy\overline{g}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x-y)\overline{g}(x)dx\right) f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\overline{K_\varepsilon(x-y)}g(x)dxdy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{\tilde{T}_\varepsilon g(y)}f(y)dy.
\end{aligned}$$

Nous laissons $\tilde{T}_\varepsilon$ et être l'opérateur dual de T_ε, puis $\tilde{T}_\varepsilon g(y) = \tilde{K}_\varepsilon * g(y)$, où $\tilde{K}_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(-x)$ pour tout x. On montre que $\tilde{K}$ est un noyau de Calderón-Zygmund on a:

$$\tilde{T}_\varepsilon g(x) = \tilde{K}_\varepsilon * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{K_\varepsilon(x-y)}g(x)dx,$$

alors $\tilde{K}$ verifier les 3 conditions de Calderón-Zygmund.

1. $\left|\tilde{K}_\varepsilon(x)\right| = \left|\bar{K}_\varepsilon(x)\right| = |K(-x)| \leq \frac{B}{|x|^n}$.

2. $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}(x)dx = \int\limits_{r<|x|<R} \overline{K(-x)}dx = \overline{\int\limits_{r<|x|<R} K(-x)dx}$$
$$= \overline{\int\limits_{r<|t|<R} K(t)dt} = 0.$$

3. $$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} \left|\tilde{K}(x-y) - K(x)\right| dx = \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(y-x) - K(-x)| \, dx$$
$$= \int\limits_{|t|\geq 2|-y|} |K(t-(-y)) - K(t)| \, dt \leq B.$$

Alors $\tilde{K}$ est un noyau de Calderón-Zygmund. Clair que $\tilde{K}_\varepsilon$ est satisfait toutes les conditions de K_ε. Ainsi, $\tilde{T}_\varepsilon : L^{p'} \to L^{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Ainsi pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ nous avons que

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon f\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x) g(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{T}_\varepsilon g(x) dx \right| \\
&\leq \|f\|_p \cdot \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1} \left\|\tilde{T}_\varepsilon g\right\|_{p'} \leq A_p \|f\|_p \, .
\end{aligned}$$

A_p est indépendante de f. Ce qui termine la preuve de (i).

En suite, nous allons montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$, Tf existe est la limite de$\{T_\varepsilon f\}$ dans L^p. Supposons d'abord que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, pour tout y $(y \neq 0)$ nous souhaitons obtenir

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \, |y| \, . \tag{2.1.8}$$

En fait, à partir de

$$\frac{d}{dt} f(x-ty) = \langle \nabla f, -y \rangle \langle x - ty \rangle \, ,$$

et par la suit

$$\begin{aligned}
f(x-y)-f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x-ty)dt \\
&= \int_0^1 \langle \nabla f, -y \rangle \langle x-ty \rangle \, dt \\
&= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -\acute{y} \rangle \langle x-s\acute{y} \rangle \, ds,
\end{aligned}$$

où $\acute{y} = \frac{y}{|y|}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -\acute{y} \rangle \langle x-s\acute{y} \rangle \, ds \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_0^{|y|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -\acute{y} \rangle \langle x-s\acute{y} \rangle|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&\leq |y| \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_p .
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons $0 < \eta < \varepsilon$ alors (2.1.8) et (2.1.3) implique que

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leq \int_{\eta < |y| \leq \varepsilon} |K(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\leq C \int_{\eta < |y| \leq \varepsilon} |y| \cdot |K(y)| \, dy \\
&\leq CB_\varepsilon \to 0 \qquad (\text{tant } \eta, \varepsilon \to 0).
\end{aligned}$$

Ceci montre que pour toute fonction f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,$\{T_\varepsilon f\}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc il existe $Tf \in L^p$ telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0.$$

Il suit immédiatement que

$$\|Tf\|_p \leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + \|T_\varepsilon f\|_p \leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + A_p \|f\|_p ,$$

donc

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p \, .$$

Pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\delta > 0$, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f = g + h$ et $\|h\| < \delta$. Ainsi pour toute $0 < \eta < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &= \|T_\eta f - T_\eta g + T_\eta g + T_\varepsilon g - T_\varepsilon g - T_\varepsilon f\|_p \\
\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leq \|T_\eta (f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + \|T_\varepsilon (g-f)\|_p \\
&\leq A_p \|f-g\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + A_p \|g-f\|_p \\
&\to 2A_p \delta, \text{tant } \eta, \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Depuis δ est arbitraire, nous concluons que $\{T_\varepsilon f\}$ est encore une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ il existe donc $Tf \in L^p$, telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|Tf - T_\varepsilon f\|_p = 0 \text{ et } \|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p \, .$$

Ceci termine la preuve du théorème (2.1.1). ■

2.2 Applications

Considérons maintenant une dilatation δ_ε dans $\mathbb{R}^n$. Définir $\delta_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $Tf = K * f$, et T commutent avec la dilatation, i.e $T\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon T$. Puis le noyau. $K(x)$ de T satisfait :

$$K(\varepsilon x) = \varepsilon^{-n} K(x). \tag{2.2.1}$$

La formule (2.2.1) montre que K est homogène de degré $-n$. Ainsi, nous peut réécrire $K(x)$ comme $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ où Ω satisfait la condition homogène de degré zéro i.e

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \tag{2.2.2}$$

dans ce cas, les deux conditions (2.1.3),(2.1.5) et satisfait :

1. $|K(x)| \leq \frac{B}{|x|^n} \Leftrightarrow |\Omega(\acute{x})| \leq B$, pour tout $\acute{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$;

2. $\int\limits_{r<|x|<R} K(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x})d\sigma(\acute{x}) = 0$; où σ est une mesure sur $\mathbb{S}^{n-1}$, induite par la mesure de Lebesgue.

3. La condition (2.1.5) sera changé pour une condition plus forte dini :

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt < \infty,$$

où

$$\omega_\infty(t) = \sup_{\acute{x},\acute{y}\in\mathbb{S}^{n-1},|\acute{x}-\acute{y}|<\delta} |\Omega(\acute{x}) - \Omega(\acute{y})| .$$

La condition (2), est par l'égalité suivante:

$$\int\limits_{r<|x|<R} K(x)dx = \int_r^\infty \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x})d\sigma(\acute{x})\frac{dr}{r} = \log\frac{R}{r}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x})d\sigma(\acute{x}).$$

Remarque 2.2.1 *La condition indiquée ci-dessue est appelée L^∞-Dini condition .*

Théorème 2.2.1 *Supposons que Ω est une fonction homogène de degré 0, borné sur $\mathbb{R}^n$ avec*

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x})d\sigma(\acute{x}) = 0, \tag{2.2.3}$$

et

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\infty(t)}}{t} dt < \infty. \tag{2.2.4}$$

Soit

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy,$$

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$. Alors

(i) *Il existe une constante A_p indépendante de f, ε telle que $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$;*

(ii) *Il existe Tf tels que $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = Tf(x)$ dans L^p norme;*

(iii) $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$.

Preuve. D'après le théorème (2.1.1), on pose $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ telle que:

1. $|\Omega(x)| \leq B \Longrightarrow |K(x)| \leq \frac{B}{|x|^n}$.

2. $\displaystyle\int\limits_{r<|x|<R} K(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x})d\sigma(\acute{x}) = 0.$

Par théoréme de Calderón-Zygmund il suffit de verifier $\displaystyle\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B.$

On a

$$\begin{aligned} K(x-y) - K(x) &= \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n} + \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Quand $|x| \geq 2\,|y|$ avec $0 < \theta < 1$, nous avons que

$$|x - \theta y| \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}\,|x|\,,$$

et

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}\,|x|\,.$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| \leq C\frac{|y|\,|x-\theta y|^{n-1}}{|x-y|^n\,|x|^n} \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}. \tag{2.2.5}$$

On a

$$|I_2| \leq C\,|\Omega(x)|\,\frac{y}{|x|^{n+1}} \leq C\,\|\Omega\|_\infty\,\frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

D'autre part, quand $|x| \geq 2\,|y|$, on verifier que $\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| \leq 2\frac{|y|}{|x|}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| &= \left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x|} - \frac{y}{|x|}\right| \\ &\leq |x-y|\left|\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|}\right| + \left|\frac{y}{|x|}\right| \\ &\leq |x-y|\left|\frac{|x| - |x-y|}{|x-y|\,|x|}\right| + \left|\frac{y}{|x|}\right| \\ &\leq \frac{|y|}{|x|} + \frac{|y|}{|x|} = 2\frac{|y|}{|x|}. \end{aligned}$$

Alors

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leq 2\frac{|y|}{|x|}. \tag{2.2.6}$$

Donc à partir de (2.2.5) et (2.2.6) , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx &\leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|}|I_1|\,dx+\int\limits_{|x|\geq 2|y|}|I_2|\,dx \\
&\leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|}\left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\frac{dx}{|x-y|^n} \\
&\quad +C\left\|\Omega\right\|_\infty|y|\int\limits_{|x|\geq 2|y|}\frac{dx}{|x|^{n+1}} \\
&\leq C\int\limits_{|x|\geq 2|y|}\omega_\infty\left(2\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{dx}{|x|^n}+\acute{C}\left\|\Omega\right\|_\infty \\
&= C\int\limits_{2|y|}^{\infty}\int\limits_{S^{n-1}}\omega_\infty\left(2\frac{|y|}{r}\right)d\sigma(\acute{x})\frac{dr}{r}+\acute{C}\left\|\Omega\right\|_\infty \\
&\leq \acute{C}\int\limits_0^1\frac{\omega_\infty(\delta)}{\delta}d\delta+C\left\|\Omega\right\|_\infty\leq B.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Remarque 2.2.2 *Si* $K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$*, où* Ω *une fonction homogène de degré zéro, alors* T_Ω *défini par*

$$T_\Omega f(x)=v.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)dy, \tag{2.2.7}$$

est aussi appelé un opérateur d'intégrale de noyau singulière homogène.

Les deux théorème (2.1.1) et (2.2.1) montrent que la limite d'opérateur d'intégrale singulière de Calderón-Zygmund de la norme L^p et unique avec un noyau homogène.

Il existe une famille d'opérateur tranquée tel que tous deux des opérateurs de type $(p,p)(1<p<\infty)$, dans la suite nous allons donner une discrimination positive réponse en introduisant l'opérateur maximal d'intégrale singulière, et nous allons montrer que T_Ω est de type faibles (1,1), bornée.

Supposons que T_Ω est un opérateur d'intégrale singulière définie par (2.2.7), où Ω homogène de degré 0, bornée et satisfait (2.2.3) et (2.2.4). Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$, on pose

$$T_\Omega^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_{\Omega,\varepsilon} f(x)|$$

où $T_{\Omega,\varepsilon}$ est définie par

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy, \qquad \varepsilon > 0.$$

Ensuite, nous allons formuler une inégalité ponctuelle des T_Ω^*.

Lemme 2.2.1 ***(Inégalité de Cotlar*** *) Il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, telle que*

$$T_\Omega^* f(x) \leq C_1 \mathcal{M}(T_\Omega f)(x) + C_2 \mathcal{M} f(x), \tag{2.2.8}$$

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, où $\mathcal{M}$ est la fonction maximale de Hardy-Littelwood.

Preuve. Soit $K_\varepsilon(x) = |x|^{-n}\,\Omega(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)$. Choisissez $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive, a support compact et radiale telle que $supp(\varphi) \subset \{x : |x| \leq 1\}$ et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi(|x|)$ est décroissante en $|x|$. On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * \varphi = K * \varphi.$$

Maintenant on pose $\Phi(x) = K * \varphi(x) - K_1(x)$. Comme K est homogène de degré $-n$, nous avons que pour $\varepsilon > 0$

$$\Phi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * K(x) - K_\varepsilon(x), \tag{2.2.9}$$

où

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \text{ et } \ \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Par (2.2.9) pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = K_\varepsilon * f(x) = (\varphi_\varepsilon * K) * f(x) - \Phi_\varepsilon * f(x). \tag{2.2.10}$$

D'autre part, pour chaque $\eta > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\varphi_\varepsilon * K_\eta) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (K_\eta * f)(x) = \varphi_\varepsilon * (T_{\Omega,\eta} f)(x).$$

Supposons $\varphi_\varepsilon \in L^{p'}$. Puis $\varphi_\varepsilon * K_\eta$ converge vers $\varphi_\varepsilon * K$ dans L^p, comme $\eta \to 0$, on trouve que $T_{\Omega,\eta} f$ converge vers $T_\Omega f$ dans L^∞. Ainsi

$$(\varphi_\varepsilon * K) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x).$$

Cette formule avec (2.2.10) implique que

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x) - \Phi_\varepsilon * f(x). \tag{2.2.11}$$

Ensuite, nous allons prouver que peut être dominé Φ par une fonction radiale intégrable quand $|x| < 1$,

$$\Phi(x) = \varphi * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] K(y) dy.$$

Notez que $K(y) = |y|^{-n} \Omega(y)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et supp$\varphi \subset \{x : |x| \leq 1\}$. Est clairement Φ est bornée lorsque $|x| < 1$. En outre, lorsque $1 \leq |x| \leq 2$, Φ est encore bornée. Lorsque $|x| > 2$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) \varphi(y) dy - K(x) \\
&= \int_{|y| \leq 1} [K(x-y) - K(x)] \varphi(y) dy.
\end{aligned}$$

Puisque

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{|x-y|^n} + |\Omega(x)| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right|,$$

la preuve du théorème (2.2.1) implique que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \acute{C} |x|^{-n} \omega_\infty \left(\frac{2}{|x|} \right).$$

Ainsi, lorsque $|x| > 2$, $|\Phi(x)| \leq \acute{C} |x|^{-n} \omega_\infty \left(\frac{2}{|x|} \right)$. Depuis Ω satisfait (2.2.5), on a

$$\Psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\Phi(y)|,$$

doit être intégrable. Nous obtenons qu'il existe $C_1, C_2 > 0$, tels que

$$\begin{aligned} T_\Omega^* f(x) &= \sup_{\varepsilon>0} |T_{\Omega,\varepsilon} f(x)| \\ &\leq \sup_{\varepsilon>0} |\varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x)| + \sup_{\varepsilon>0} |\Phi_\varepsilon * f(x)| \\ &\leq C_1 \mathcal{M}(T_\Omega f)(x) + C_2 \mathcal{M} f(x). \end{aligned}$$

Ceci qui termine la prouve. ■

Remarque 2.2.3 *Puisque $\mathcal{M}$ et T_Ω sont les deux opérateurs de type (p,p), il suit immédiatement que T_Ω^* est de type (p,p).*

Théorème 2.2.2 *Supposons que Ω est une fonction homogène de degré 0, borné, et satisfait 2.2.3 et 2.2.4. Alors $T_\Omega^* : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < \infty)$ et $T_\Omega^* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $T_\Omega^* : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. L'idée de la preuve est la même que celle du théorème (2.1.1). Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$, en utilisant décomposition de Calderón-Zygmund, nous avons $f = g + b$ et une séquence de non-cumul des cubes $\{Q_j\}$. Ainsi

$$|\{x : T_\Omega^* f(x) > \lambda\}| \leq \left|\left\{x : T_\Omega^* g(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|. \tag{2.2.12}$$

Comme $\|g\|_2^2 \leq C\lambda \|f\|_1$ est $T_\Omega^* : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\left|\left\{x : T_\Omega^* g(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq C\lambda^{-2} \|T_\Omega^* g\|_2^2 \leq C\frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

Maintenant désigne le centre de Q_j par y_j et le longueur de sa côté par d_j. Soit $S_j = 2\sqrt{n}Q_j$ est $E = \cup_j S_j$. Ainsi

$$\begin{aligned} |E| &\leq \sum_j |S_j| = \sum_j C_n |Q_j| \\ &\leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\left|\left\{x : T_\Omega^* g(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq |E| + \left|\left\{x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|. \tag{2.2.13}$$

On fixé $x \notin E$ est $\varepsilon > 0$, puis

$$T_{\Omega,\varepsilon}b(x) = \sum_j \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)dy.$$

Nous considérons les trois cas suivants du Q_j :

1. pour tout $y \in Q_j$, $|x-y| < \varepsilon$.
2. Pour tout $y \in Q_j$, $|x-y| > \varepsilon$.
3. Il existe $y \in Q_j$, telle que $|x-y| = \varepsilon$.

pour le premier cas $K_\varepsilon(x-y) = 0$, donc $T_{\Omega,\varepsilon}b(x) = 0$.

Pour le second cas $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$, donc

$$\begin{aligned}
\left| \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy \right| &= \left| \int_{Q_j} \left[K(x-y) - K(x-y_j)\right] b_j(y)dy \right| \\
&\leq \int_{Q_j} \left|K(x-y) - K(x-y_j)\right| \left|b_j(y)\right| dy.
\end{aligned}$$

Quant à la troisième cas, remarquerez que $x \in C_{\mathbb{R}}E \subset S^c_{j,}$, il existe deux constantes C_n et $\acute{C}_n$ seulement en fonction de n tel que $Q_j \subset \overline{B}(x,r)$, où $\overline{B}(x,r)$ est une boule fermée de centre x et de rayon $r = C_n\varepsilon$. Si $y \in Q_j$, on a $|x-y| \geq \acute{C}_n\varepsilon$. Donc pour tout $y \in Q_j$,

$$|K_\varepsilon(x-y)| \leq \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} \leq \|\Omega\|_\infty (\acute{C}_n\varepsilon)^{-n}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy \right| &\leq \int_{Q_j \cap S(x,r)} |K_\varepsilon(x-y)| \, |b(y)| \, dy \\
&\leq \acute{C} \|\Omega\|_\infty \varepsilon^{-n} \int_{S(x,r)} |b(y)| \, dy \\
&\leq \frac{C}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} |b(y)| \, dy.
\end{aligned}$$

Prendre la somme de tous les cubes qui rendements

$$T_{\Omega,\varepsilon}b(x) \leq \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, |b_j(y)| \, dy + \frac{C''}{|S(x,r)|} \int\limits_{S(x,r)} |b(y)| \, dy.$$

Donc

$$T_\Omega^* b(x) \leq \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, |b_j(y)| \, dy + C\mathcal{M}b(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \ \leq \ & \left| \left\{ x \in E^c : \sum_j \int\limits_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)| \, |b(y)| \, dy > \frac{\lambda}{4} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ x \in E^c : C\mathcal{M}b(x) > \frac{\lambda}{4} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Par (2.1.7) et la continuité d'opérateur maximale de Hardy-Littlewood de type (1.1) faibles nous avons

$$\left| \left\{ x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{\acute{C}}{\lambda} \, \|f\|_1$$

Cette inégalité montre que T_Ω^* est un opérateur de type faible (1,1). Ceci qui termine la prouve. ■

Corollaire 2.2.1 *Supposons que Ω satisfait les conditions du théorème (2.2.2). Ensuit pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$, nous avons donc*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = T_\Omega f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leq p < \infty)$, soit

$$\Lambda(f)(x) = \left| \limsup_{\varepsilon \to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) - \liminf_{\varepsilon \to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

puis $\Lambda(f)(x) \leq 2T_{\Omega,\varepsilon}^*(x)$. Pour tout $\delta > 0$, soit $f = g + h$ telle que $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n^\circ})$ et $\|h\|_p < \delta$. Puisque Ω satisfier

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\acute{x}) d\sigma(\acute{x}) = 0,$$

et g est une fonction lisse à support compact, $T_{\Omega,\varepsilon}g$ converge uniformement vere g tant $\varepsilon \to 0$. Donc $\Lambda(g)(x) = 0$. Alors pour tout $1 < p < \infty$,

$$\|\Lambda(f)\|_p \leq \|\Lambda(h)\|_p \leq 2A_p \|h\|_p \leq 2A_p\delta.$$

Depuis δ est arbitraire, il s'ensuit que $\Lambda(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour $1 < p < \infty$.
Ainsi la limite de $T_{\Omega,\varepsilon}f(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}^n$.
Lorsque $p = 1$, pour tout $\lambda > 0$, nous avons aussi

$$|\{x : \Lambda(f)(x) > \lambda\}| \leq \frac{2A}{\lambda} \|h\|_1 \leq \frac{2A\delta}{\lambda}.$$

Nous avons encore $\Lambda(f)(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, la limite de $T_{\Omega,\varepsilon}f(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$

Chapitre 3

Commutateurs d'intégrale singulière

Dans cette chapiter, nous présentons les résultats obtenus sur la continiute des commutateur sur L^p. En 1976, Coifman, Rochberg et Weiss a étudié la bornitude L^p $(1 < p < \infty)$ de commutateur produite par l'opérateur d'intégrale singulière de Calderón-Zygmund T_Ω, et une fonction b où $[b, T_\Omega]$ définie par

$$[b, T_\Omega](f) = bT_\Omega(f) - T_\Omega(bf) \tag{3.0.1}$$

avec $\Omega \in Lip_1(\mathbb{S}^{n-1})$ $(|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq A\,|x' - y'|$, pour tous $x', y' \in \mathbb{S}^{n-1})$ satisfait la condition d'homogénété de degré zéro (2.2.2), et b est une fonction dans $BMO(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Lemmes de préparation

Lemme 3.1.1 *Soit Ω une fonction homogène de degré 0, borné dans $\mathbb{R}^n$ et vérifie (2.2.3) et (2.2.4). puis*

$$M^\sharp\left(T_\Omega f\right)(x) \leq C\left(n, s\right) \quad \left(\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

pour tout $s > 1$, où $\mathcal{M}$ est l'opérateur maximale de Hardy-Littlewood .

Preuve. Pour toute fixe $s > 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$, supposons que Q est un cube contenant x, et soit B une boule de même centre et le rayon de Q.

Soit $f_1 = f\chi_{_{16B}}$ et $f_2 = f\chi_{(16B)^c}$ alors $f = f_1 + f_2$. Par (1.4.3) , nous avons seulement besoin de montrer que

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |T_\Omega f(y) - T_\Omega f_2(x)|\, dy \leq C\left(\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3.1.1}$$

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |T_\Omega f(y) - T_\Omega f_2(x)|\, dy \leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |T_\Omega f_1(y)|\, dy + \frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |T_\Omega f_2(y) - T_\Omega f_2(x)|\, dy$$

et $s > 1$ en appliquer le théorème (2.2.1), nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q}\int\limits_{Q} |T_\Omega f_1(y)|\, dy &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |T_\Omega f_1(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{16B} |f(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \qquad (3.1.2) \\ &\leq C(n,s)\left(\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

D'autre part, soit d le rayon de B, puis

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} |T_\Omega f_2(y) - T_\Omega f_2(x)|\, dy \\ =\ &\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 16B} \left[\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n} - \frac{\Omega(x-z)}{|x-z|^n}\right] f(z)dz \right| dy \\ \leq\ &\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q} \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{2^k d<|x-z|\leq 2^{k+1}d} \left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n} - \frac{\Omega(x-z)}{|x-z|^n}\right| |f(z)|\, dzdy. \qquad (3.1.3) \end{aligned}$$

Notez que $|x-z| \backsim |y-z|$, ainsi

$$\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n} - \frac{\Omega(x-z)}{|x-z|^n}\right| \leq C\left\{|\Omega(x-z)|\,\frac{|x-y|}{|x-z|^{n+1}} + \frac{|\Omega(y-z) - \Omega(x-z)|}{|x-z|^n}\right\}.$$

Est quand $2^k d < |x-z| \leq 2^{k+1}d$,

$$|\Omega(x-z)|\,\frac{|x-y|}{|x-z|^{n+1}} \leq \|\Omega\|_\infty \frac{|x-y|}{|2^k d|^{n+1}}.$$

En outre, lorsque Ω est une fonction homogene de degré 0, on a

$$\begin{aligned} |\Omega(y-z) - \Omega(x-z)| &= \left|\Omega\left(\frac{(y-z)}{|y-z|}\right) - \Omega\left(\frac{(x-z)}{|x-z|}\right)\right| \\ &= \left|\Omega\left(\frac{(x-z)-(x-y)}{|(x-z)-(x-y)|}\right) - \Omega\left(\frac{(x-z)}{|x-z|}\right)\right|. \end{aligned}$$

Notez $|x-z| \geq 2\,|x-y|$, donc (2.2.6) implique que

$$|\Omega(y-z)-\Omega(x-z)| \leq \omega_\infty\left(2\frac{|x-y|}{|x-z|}\right).$$

Comme $\omega_\infty(t)$ est croissante sur t, quand $2^k d < |x-z| \leq 2^{k+1}d$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\frac{|\Omega(y-z)-\Omega(x-z)|}{|x-z|^n} &\leq \frac{1}{(2^k d)^n}\omega_\infty\left(2\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)\\
&\leq \frac{1}{(2^k d)^n}\omega_\infty\left(\frac{d}{2^{k-1}d}\right)\\
&= \frac{1}{(2^k d)^n}\omega_\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^k d<|x-z|\leq 2^{k+1}d}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n}-\frac{\Omega(x-z)}{|x-z|^n}\right||f(z)|\,dzdy\\
\leq\; & C\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^k d<|x-z|\leq 2^{k+1}d}|\Omega(x-z)|\,\frac{|x-y|}{|x-z|^{n+1}}\,|f(z)|\,dz\\
&+C\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^k d<|x-z|\leq 2^{k+1}d}\frac{|\Omega(y-z)-\Omega(x-z)|}{|x-z|^n}\,|f(z)|\,dz\\
\leq\; & C\sum_{k=2}^{\infty}\|\Omega\|_\infty\frac{|x-y|}{(2^k d)^{n+1}}\int\limits_{|x-z|\leq 2^{k+1}d}|f(z)|\,dz\\
&+C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2^k d)^n}\omega_\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}d}\right)\int\limits_{|x-z|\leq 2^{k+1}d}|f(z)|\,dz\\
\leq\; & \acute{C}\mathcal{M}f(x)+C\mathcal{M}f(x)\sum_{k=2}^{\infty}\omega_\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}\omega_\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) &= \frac{1}{\log 2}\sum_{k=2}^{\infty}\omega_\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\int\limits_{\frac{1}{2^{k-1}}}^{\frac{1}{2^{k-2}}}\frac{dt}{t}\\
&\leq \frac{1}{\log 2}\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{k-1}}}^{\frac{1}{2^{k-2}}}\omega_\infty(t)\frac{dt}{t}\\
&\leq \frac{1}{\log 2}\int\limits_0^1\omega_\infty(t)\frac{dt}{t}<\infty.
\end{aligned}$$

Toutes les estimations ci-dessus impliquent que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |T_\Omega f_2(y) - T_\Omega f_2(x)|\, dy \le C\mathcal{M}f(x) \le C\left(\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right)^{\frac{1}{s}},$$

qui se combinant avec (3.1.1) conduit à (3.1.2). ■

Lemme 3.1.2 *Supposons que $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $1 < p < \infty$. Alors pour tout $1 < s < p$, il existe une constante C, indépendante de b et f telle que*

$$M^\sharp\left([b, T_\Omega]f\right)(x) \le C\,\|b\|_{BMO}\left[\left(\mathcal{M}\left(|T_\Omega f|^s\right)(x)\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right)^{\frac{1}{s}}\right], \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1.4)$$

où $\mathcal{M}$ est l'opérateur maximale de Hardy-Littlewood .

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, soit Q un cube contenant x. Pour $y \in Q$, fixé

$$\begin{aligned}
[b, T_\Omega](f)(y) &= (b(y) - b_Q)T_\Omega f(y) - T_\Omega\left((b - b_Q)f\chi_{4\sqrt{n}Q}\right)(y) \\
&\quad - T_\Omega\left((b - b_Q)f\chi_{\left(4\sqrt{n}Q\right)^c}\right)(y) \\
&= a_1(y) - a_2(y) - a_3(y).
\end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité de Hôlder et corrolaire (1.4.2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |a_1(y)|\, dy &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|^{\acute{s}}\, dy\right)^{\frac{1}{\acute{s}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T_\Omega f(y)|^s\, dy\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\le C\,\|b\|_{BMO}\left[\mathcal{M}\left(|T_\Omega f|^s\right)(x)\right]^{\frac{1}{s}}. \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

Prendre $1 < u; q < \infty$ tel que $uq = s$. Ainsi par la continuité de T dans L^q(voir le théorème 2.2.1), nous concluons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |a_2(y)|\, dy &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|T_\Omega\left((b - b_Q)f\chi_{4\sqrt{n}Q}\right)(y)\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{4\sqrt{n}Q} |b(y) - b_Q|^q\,|f(y)|^q\, dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{4\sqrt{n}Q} |b(y) - b_Q|^{q\acute{u}}\, dy\right)^{\frac{1}{q\acute{u}}} \times \left(\frac{1}{|Q|}\int_{4\sqrt{n}Q} |f(y)|^{qu}\, dy\right)^{\frac{1}{qu}} \qquad (3.1.6) \\
&\le C\,\|b\|_{BMO}\left[\mathcal{M}\left(|f|^s\right)(x)\right]^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Maintenant désignent le centre et la longueur côté de Q par x_0 et d, respectivement. Si $y \in Q$; $z \in (4\sqrt{n}Q)^c$, alors $|z-y| \sim |z-x_0| \sim |z-x|$, depuis $\Omega(\acute{x}) \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{S}^{n-1})$, il résulte de (2.2.1) que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n} - \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^n}\right| &\leq |\Omega(y-z)| \left|\frac{1}{|y-z|^n} - \frac{1}{|x_0-z|^n}\right| \\ &\quad + \frac{1}{|x_0-z|^n}\left|\Omega\left(\frac{(y-z)}{|y-z|}\right) - \Omega\left(\frac{(x_0-z)}{|x_0-z|^n}\right)\right| \\ &\leq \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \frac{cd}{|x_0-z|^{n+1}} + \frac{c}{|x_0-z|^n}\frac{2d}{|x_0-z|} \\ &\leq \frac{cd}{|z-x_0|^{n+1}}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Voici la note $|z-y| \geq 2|y-x_0|$. Ainsi, il ressort de (3.1.7) que

$$\begin{aligned}|a_3(y) - a3(x_0)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n/4\sqrt{n}Q} \left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n} - \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^n}\right| |b(z)-b_Q|\,|f(z)|\,dy \\ &\leq Cd\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n/4\sqrt{n}Q} \frac{|b(z)-b_Q|^{\acute{s}}}{|z-x_0|^{n+1}}dz\right)^{\frac{1}{\acute{s}}} \times C\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n/4\sqrt{n}Q} \frac{|f(z)|^s}{|z-x_0|^{n+1}}dz\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C\|b\|_{BMO}\left[\mathcal{M}(|f|^s)(x)\right]^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

3.2 Continuité de $[b, T_\Omega]$

On a le resultas suivant.

Théorème 3.2.1 *Supposons que $\Omega \in Lip_1(\mathbb{S}^{n-1})$ satisfait (2.2.2) et (2.2.3), T_Ω est un opérateur d'intégrale singulier du noyau Ω. Ensuite, les deux énoncés suivants détiennent*

(i) *Si $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, alors $[b, T_\Omega]$ est bornée sur $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$;*

(ii) *Supposons que $1 < p_0 < \infty$ et $b \in \bigcup\limits_{q>1} L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Si $[b, T_\Omega]$ est bornée sur $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ alors $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve.

Lemme 3.2.1 ***(Fefferman-Stein)*** *Soit $1 \leq p_0 < \infty$. Alors pour tout $p_0 \leq p < \infty$, il existe une constante C, indépendante de f, telle que*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C \left\|M^\sharp f\right\|_p, \tag{3.2.1}$$

pour toute fonction f satisfaisant $\mathcal{M}f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$.

pour la preuve voir livre de Stein [2]

En fait, la preuve du théorème (3.2.1) (i) est une conséquence directe du lemme (3.1.2), lemme (3.2.1), le théorème (1.3.1) et (2.2.1), on a donc

$$\begin{aligned}
\|[b, T_\Omega] f\|_p &\leq \|\mathcal{M}([b, T_\Omega] f)\|_p \leq C \left\|M^\sharp([b, T_\Omega] f)\right\|_p \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \left(\|\mathcal{M}(|T_\Omega f|^s)\|_{\frac{p}{s}}^{\frac{1}{s}} + \|\mathcal{M}(|f|^s)\|_{\frac{p}{s}}^{\frac{1}{s}}\right) \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \left(\|T_\Omega f\|_p + \|f\|_p\right) \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Maintenant on fait attention à la démonstration du théorème (3.2.1) (ii).
On peut supposer

$$\|[b, T_\Omega]\|_{L^{p_0} \to L^{p_0}} = 1.$$

Nous tenons à prouver qu'il existe une constante $A = A(p_0, \Omega)$ telle que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| \, dx \leq A. \tag{3.2.2}$$

Par (1.4.1) et (1.4.2), nous avons simplement besoin de prouver 3.2.2 dans le cas $Q = Q_1$, où Q_1 est un cube dont le centre est l'origine à la longueur de sa côté $1 \backslash \sqrt{n}$ parallèle aux coordonnées. Par ailleurs, nous remarquons que $[b - b_{Q_1}, T_\Omega] = [b, T_\Omega]$. Ainsi on peut supposer $b_{Q_1} = 0$.
Maintenant, nous allons

$$\psi(x) = (sgn(b) - c_0)\chi_{Q_1}(x),$$

où

$$c_0 = \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} sgn\,(b(x))\, dx.$$

Puis ψ satisfait les propriétés suivantes:

$$\|\psi\|_\infty \leq 2, \tag{3.2.3}$$

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset Q_1, \tag{3.2.4}$$

$$\int\limits_{Q_1} \psi(x)\, dx = 0, \tag{3.2.5}$$

$$\psi(x) b(x) \geq 0, \tag{3.2.6}$$

$$\frac{1}{|Q_1|} \int \psi(x)\, b(x) dx = \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |b(x)|\, dx := B. \tag{3.2.7}$$

Puisque Ω vérifie (2.2.2) et (2.2.3), il existe $0 < A_1 < 1$, telle que

$$\sigma\left(\left\{\acute{x} \in \mathbb{S}^{n-1} : \Omega(\acute{x}) \geq 2A_1\right\}\right) > 0, \tag{3.2.8}$$

où σ est une mesure de $\mathbb{S}^{n-1}$ induite par la mesure de Lesbesgue. Laisser

$$\Lambda = \left\{\acute{x} \in \mathbb{S}^{n-1} : \Omega(\acute{x}) \geq 2A_1\right\}.$$

Alors Λ est un ensemble fermé. Il est facile de voir que, pour tout $\acute{x} \in \Lambda$ et $\acute{y} \in \mathbb{S}^{n-1}$, quand $|\acute{x} - \acute{y}| < A_1$, nous avons $\Omega(\acute{y}) \geq A_1$. fixé

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > A_2 = \frac{2}{A_1} + 1 \text{ et } \acute{x} \in \Lambda\right\}.$$

Puis, quand $x \in G$ et $y \in Q_1$, nous avons

$$|x - y| > \frac{5}{6}|x|$$

et $|x| > 2|y|$. Ainsi, il implique par (2.2.6) que

$$\left|\frac{x}{|x|} - \frac{x-y}{|x-y|}\right| \leq 2\frac{|y|}{|x|} \leq \frac{2}{|x|} < A_{1.}$$

Comme $\acute{x} \in \Lambda$, nous avons $\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) \geq A_1$. Ainsi, à partir (3.2.6) et (3.2.7) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |T_\Omega(b\psi)(x)| &= \left|\int\limits_{Q_1} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} b(y)\psi(y) dy\right| \\ &\geq A_3 |x|^{-n} B, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

où A_3 dépend de A_1 et n.

D'autre part, lorsque $x \in G$ et $y \in Q_1$, il résulte de la condition de Ω et (2.2.7) qui

$$\left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \right| \leq \acute{A}_4 \frac{1}{|x|^{n+1}}, \tag{3.2.10}$$

où $\acute{A}_4$ ne dépend que de n et Ω. Donc par (3.2.3) , (3.2.5) et (3.2.10) nous concluons que

$$\begin{aligned} |b(x)T_\Omega(\psi)(x)| &\leq |b(x)| \int_{Q_1} \left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} \right| |\psi(y)| \, dy \\ &\leq A_4 |b(x)| |x|^{-(n+1)}, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

où A_4 ne dépend que de n et Ω. Par conséquent, lorsque $x \in G$, à partir de (3.2.9) et (3.2.11), il suit que

$$\begin{aligned} |[b, T_\Omega](\psi)(x)| &\geq |T_\Omega(b\psi)(x)| - |b(x)T_\Omega(\psi)(x)| \\ &\geq A_3 |x|^{-n} B - A_4 |b(x)| |x|^{-(n+1)}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Soit

$$F = \left\{ x \in G : |b(x)| > \left(\frac{BA_3}{2A_4} \right) |x| \text{ et } |x| < B^{\frac{p_0'}{n}} \right\}.$$

Il résulte de (3.2.12) que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{p_0}^{p_0} &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |[b, T_\Omega](\psi)(x)|^{p_0} \, dx \\ &\geq \int_{(G \setminus F) \cap \left\{ |x| < B^{\frac{p_0'}{n}} \right\}} \left(\frac{1}{2} A_3 B |x|^{-n} \right)^{p_0} dx \\ &\geq \int_{\left\{ A_5 \left(|F| + A_2^n \right)^{\frac{1}{n}} < |x| < B^{\frac{p_0'}{n}} \right\} \cap G} \left(\frac{1}{2} A_3 B |x|^{-n} \right)^{p_0} dx \\ &= \left(\frac{A_3 B}{2} \right) \sigma(\Lambda) \int_{A_5 \left(|F| + A_2^n \right)^{\frac{1}{n}}}^{B^{\frac{p_0'}{n}}} t^{-np_0+n-1} dt \\ &= \left(\frac{A_3 B}{2} \right)^{p_0} \frac{\sigma(\Lambda)}{n(1-p_0)} \left[B^{p_0'(1-p_0)} - A_5^{n(1-p_0)} \left(|F| + A_2^n \right)^{1-p_0} \right]. \end{aligned}$$

Donc, il existe A_6 telle que

$$(|F| + A_2^n)^{1-p_0} \leq A_6^{(1-p_0)} B^{p_0'(1-p_0)}.$$

Par conséquent, si

$$B > \left(2A_2^n A_6^{-1}\right)^{\frac{1}{p_0'}},$$

alors

$$|F| \geq A_6 B^{p_0'} - A_2^n \geq \frac{A_6 B^{p_0'}}{2}. \tag{3.2.13}$$

Maintenant, prenez $g(x) = sgn(b(x))\chi_F(x)$. Notons l'opérateur conjugué de T_Ω par $\acute{T}_\Omega$. Pour $x \in Q_1$ on a alors que

$$\left|\left[b, \acute{T}_\Omega\right] g(x)\right| \geq \left|\int_F \frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^n} |b(y)|\, dy\right| - |b(x)| \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^n} g(y) dy\right|. \tag{3.2.14}$$

Comme $y \in F$, nous avons

$$|b(y)| > \left(\frac{BA_3}{2A_4}\right)|y|.$$

Par ailleurs, depuis $x \in Q_1$, en appliquant la même méthode que dans l'estimation de (3.2.9), on sait qu'il existe A_7 telle que

$$\left|\int_F \frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^n} |b(y)|\, dy\right| \geq A_7 \int_F |y|^{-n} \left(\frac{BA_3}{2A_4}\right) |y|\, dy.$$

De (3.2.13) il suit qu'il existe A_8 telle que

$$\left|\int_F \frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^n} |b(y)|\, dy\right| \geq A_8 B^{1+\frac{p_0'}{n}}. \tag{3.2.15}$$

D'autre part, il existe A_9 telle que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^n} g(y) dy\right| &\leq \int_F \frac{|\Omega(y-x)|}{2^n |y|^n} dy \\
&\leq 2^{-n} \int_{A_2 < |y| < B^{\frac{p_0'}{n}}} \frac{dy}{|y|^n} \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n+1})} \\
&\leq A_9 \log B,
\end{aligned}$$

ce qui donne avec (3.2.14) et (3.2.15) que

$$\left|\left[b, \acute{T}_\Omega\right] g(x)\right| \geq A_8 B^{1+\frac{p_0'}{n}} - A_9 \left|b(x)\right| \log B. \tag{3.2.16}$$

Depuis $\left[b, \acute{T}_\Omega\right]$ est l'opérateur conjugué de $[b, T_\Omega]$, nous avons

$$\left\|\left[b, \acute{T}_\Omega\right]\right\|_{L^{p_0'} \longrightarrow L^{p_0'}} = 1.$$

Donc, il suit de la définition de F et (3.2.16) que

$$\begin{aligned}
A_{10} B &\geq \|g\|_{p_0'} \\
&\geq \left\|\left[b, \acute{T}_\Omega\right] g\right\|_{p_0'} \\
&\geq \int\limits_{Q_1} \left[b, \acute{T}_\Omega\right] g(x) dx \qquad (3.2.17)\\
&\geq \int\limits_{Q_1} \left[A_8 B^{1+\frac{p_0'}{n}} - A_9 \left|b(x)\right| \log B\right] dx \\
&= A_8 B^{1+\frac{p_0'}{n}} \left|Q_1\right| - A_9 \left|Q_1\right| B \log B.
\end{aligned}$$

En (3.2.17), il est clair d'avoir $B \leq A(n, \Omega, p_0)$. Donc nous compléter la preuve du théorème (3.2.1) (ii).

Théorème (3.2.1) montre que la commutateur d'opérateur intégrale singuliére T_Ω borné dans L^p (Ω est une fonction lipschitziennes) peut être utilisé pour caractériser les fonctions de BMO. ■

Conclusion

Finalement, nous avons démontre que le commutateur $[b, T_\Omega]$ engendré par l'opérateur de Calderón-Zygmund d'intégrale singulière T_Ω et une fonction $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, est bornée sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < \infty)$.

Par ces résultats on essayé d'étudier la continuité des commutateurs sur certaine espaces fonctionnelle , comme les espaces de Besov.

Bibliographie

[1] Shanzhen Lu,Yong Ding, Dunyan Yan, *Singular Integrals and Related Topics.* Beijing Normal University. China, December, 2006.

[2] Stein, E.M., *Harmonic Analysis*: *real variable methods, orthogonality,and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.

[3] Javier Duoandikoetxea Zuazo, *Fourier Analysis.* Addison-Wesley and Universidad Autónoma . Madrid,1995.

[4] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[5] Der-Chen Chang , Cora Sadosky, Functions of bounded mean oscillation. *Départment of Mathematics*, March 2006, n^o 3, p. 573-601.

[6] Loukas Grafakos, *Modern Fourier Analysis.* University of Missouri. Columbia, June 2008.

[7] Loukas Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* University of Missouri. Columbia, April 2008.

[8] Robert Thai , Lionel Maréchal, Fonctions maximales et intégrales singulières. *Départment of Mathematics*, Juin 2005

[9] Guy David , *Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. USA, 1986.

[10] E. M. Stein. *Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables*, Faculté des sciences 91-orsay, France, Mars 1967.

[11] E. M. Stein, G.Weiss *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.