# Table des matières

## 0.1 Notations générales

$p^*$ : le conjugué de $p$, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

$X^*$ : espace dual de $X$.

$x \otimes y$ : tenseur d'ordre 1.

$X \otimes Y$ : le produit tensoriel algébrique de $X$ et $Y$.

$X \widehat{\otimes}_\pi Y$ : le produit tensoriel projectif de $X$ et $Y$.

$X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ le produit tensoriel injectif de $X$ et $Y$.

$l_p^n(X)$ : l'espace de suites finies fortement $p$-sommables.

$l_p^{n,w}(X)$ : l'espace de suites finies faiblement $p$-sommables.

$T^*$ : l'opérateur adjoint de $T$.

$\widetilde{T}$ : linéarisation de l'opérateur multilinéaire $T$.

$\mathcal{B}(X; Y)$ : l'espace des opérateurs linéaires bornés.

$\mathcal{L}(X \times Y; Z)$ : l'espace des opérateurs bilinéaires bornés.

$\mathcal{L}(X \times Y)$ : l'espace des formes bilinéaires bornées.

$\mathcal{B}_I(X \times Y)$ : l'espace des formes bilinéaires intégrales.

$B_X$ : boule unité de l'espace $X$.

# Introduction

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. On définit le produit tensoriel algébrique $X \otimes Y$ de $X$ et $Y$ comme étant l'espace vectoriel engendré par les tenseurs d'ordre 1 $x \otimes y$ où $x \otimes y$ peut être vu comme une forme linéaire sur l'espace des formes bilinéaires $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K})$ telle que

$$x \otimes y(T) = T(x, y),$$

pour tout $T \in \mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K})$. Un autre regard peut être donné à cet élément $x \otimes y$. Il s'agit d'une forme bilinéaire sur l'espace $X^* \times Y^*$, en effet soit $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ alors

$$x \otimes y\left(x^*, y^*\right) = x^*\left(x\right) y^*\left(y\right).$$

Sur l'espace vectoriel $X \otimes Y$, on peut toujours définir des normes, s'appellent normes tensorielles, qui lui font un espace de Banach. Historiquement, Grothendieck en 1956 a défini plusieurs normes tensorielles en montrant que toutes ces normes vérifient l'inégalité suivante

$$\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$$

où $\varepsilon$ est la norme tensorielle injective (la plus petite norme tensorielle) et $\pi$ est la norme tensorielle projective (la plus grande norme tensorielle). Depuis sa célèbre monographie, beaucoup de chercheurs sont intéressés au produit tensoriel des espaces de Banach ainsi que aux normes tensorielles que nous pouvons munir cet espace. Partons de la représentation suivante, on comprend l'importance du produit tensoriel : si nous avons un idéal des opérateurs linéaire $\mathcal{I}(X, Y)$ on s'intéresse parfois de le représenter en utilisant le produit tensoriel, autrement dit on cherche une norme tensorielle $\alpha$ telle l'espace $X \otimes Y$ muni de cette norme vérifie

$$\mathcal{I}(X, Y^*) = X \otimes_\alpha Y.$$

Donc le produit tensoriel joue un rôle important dans la représentation des idéaux d'opérateurs linéaires. Même étude peut être considérer pour d'autre classes d'opérateurs à savoir les opérateurs multilinéaires et les polynômes homogène de degré $m$. Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on va faire une étude approfondie sur le produit tensoriel des espaces de Banach.

Le présent mémoire s'articule autour de trois chapitre.

Dans le premier chapitre on discutera la structure vectorielle du produit tensoriel de deux espaces de Banach. La relation entre un opérateur bilinéaire et sa linéarisation sera l'objet d'une partie considérable de ce chapitre. En fait, certains auteurs déclarent que le but principal d'étudier le produit tensoriel des espaces de Banach est de linéariser les opérateurs bilinéaires, c'est dire on identifier l'espace des opérateurs bilinéaires à un espace d'opérateurs linéaires définies sur le produit tensoriel.

Le deuxième chapitre a pour but d'étudier le produit tensoriel projective. On va munir l'espace $X \otimes Y$ de la norme suivante

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \right\},$$

où l'infimum est porté sur toutes les répresentations possibles de $u$. Certaines propriétés importantes seront dévoilées au cours de ce chapitre. Citons par exemple la coïncidence entre l'espace des formes bilinéaires avec le dual du produit tensoriel projective dont on fera intervenir les opérateurs linéarisés pour établir cette identification.
Le troisième chapitre est consacré à étudier le produit tensoriel injective, c'est l'espace vectoriel $X \otimes Y$ muni de la norme suivante

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \right| : x^* \in X^*, y^* \in Y^* \right\},$$

où le supremum est porté sur toutes les répresentations possibles de $u$. Cette norme est la plus petite norme tensorielle. De plus, le dual de l'espace $X \otimes Y$ muni de cette norme coïncide avec l'espace des opérateurs linéaires intégraux.

# Chapitre 1

# Structure vectorielle de produit tensoriel de deux espaces de Banach

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on commencera par exposer la définition d'un espace de Banach et de Hilbert en donnant certaines exemples. Ensuite, on étudiera les aplications linéaire bornées ainsi que les applications bilinéaires bornées. Le reste de ce chapitre est consacré à étudier la structure algébrique d'un produit tensoriel.

## 1.2 Espaces de Banach et de Hilbert

Dans la suite, $\mathbb{K}$ représente le corps de nombre réel $\mathbb{R}$ ou bien celle de nombre complexe $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels sont toujours supposés des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

**Espace de Banach**. Soit $X$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur $X$ l'application

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+,$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

$(i)$ $\forall x \in X : ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$(ii)$ $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$

$(iii)$ $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

**Remarque 1.1.** A une norme on peut toujours associe une distance $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ définie comme suite :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un espace vectoriel muni d'une norme sera appelé espace vectoriel normé. Un espace vectoriel normé $X$ est dit de Banach, si tout suite de Cauchy dans $X$ est convergente dans $X$. C'est à dire, un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de la norme.

**Proposition 1.2.**

1) Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.

2) Tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

**Exemple 1.3.** *Les espaces de suites $\ell_p$.* Dans l'nanlyse fonctionnelle les espaces $\ell_p$ jouent un rôle indisponsable et forment un exemple simple et facile des espaces de Banach. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'ensemble $\ell_p$ par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définie $\ell_\infty$ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

On définit les opérations algébrique sur ces ensembles par :

a) Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $x + x' = (x_n + x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $\lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors, $\ell_p$ devient un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On munit les espaces $\ell_p$ de la norme suivante

$$\begin{cases} 1 \leq p < \infty : \|(x_n)\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ p = +\infty : \|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \end{cases}$$

Avec cette définition de la norme, on énnoce le résultat suivant :

**Théorème 1.4.** *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $\ell_p$ muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach.*

**Proposition 1.5.** *Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nous avons les inclusions suivantes*

$$\ell_1 \subset ... \subset \ell_p \subset \ell_q \subset ... \subset \ell_\infty.$$

**Espace de Hilbert**. Soit $H$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur $H$ est une application $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ telle que
$(i)$ $\forall x \in H$ : l'application $y \in H \longmapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire.
$(ii)$ $\forall y \in H$ : l'application $x \in H \longmapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire.

**Remarque 1.6.** Pour toute distance sur $H$ on peut associe une norme de la façon suivante

$$\forall x \in H : \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelera espace préhilbertien. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.

**Exemple 1.7.** L'espace $\ell_2$ est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$\forall x, y \in \ell_2 : \langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

## 1.3 Applications linéaires bornées

Soient $X, Y$ deux espaces normés et $u : X \to Y$ une application. Elle est linéaire si
1) $\forall x, y \in X : u(x+y) = u(x) + u(y)$.
2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Un opérateur linéaire $u : X \to Y$ est dit continue (borné) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues. On munit l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ de la norme des opérateurs suivante

$$\|u\| = \sup_{x\in B_X} \|u(x)\|,$$

où $B_X$ est la boule unité fermée de $X$. Si $Y$ est espace de Banach, l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ devient alors un espace de Banach.

**Dual topologique**. Soit $X$ un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note $X^*$, l'espace de Banach des formes linéaires continues sur $X$, i.e.,

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

**Exemple 1.8.** *Soit* $1 < p < +\infty$. *On a*

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$$

*avec $p^*$ est le conjugué de $p$, i.e.,* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$.

**Proposition 1.9**. *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et $u : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. L'image* $\operatorname{Im}(u)$ *est fermée si et seulement si il existe $C>0$ tel que*

$$\|u(x)\| \geq Cd(x, \ker(u)), \textit{ pour tout } x \in X.$$

*En particulier, dans le cas où $u$ est injective, l'image de $u$ est fermée si et seulement si*

$$\|u(x)\| \geq C\|x\|, \textit{ pour tout } x \in X.$$

**Preuve**. Commençons par le cas où $u$ est injective. Si l'image de $u$ est fermée, alors c'est un espace de Banach (lorsqu'on la munit de la norme de $Y$). Comme $u$ est un isomorphisme sur son image, c'est un isomorphisme de Banach, donc

$$u^{-1} : \operatorname{Im}(u) \to X,$$

est continue, c'est à dire qu'il existe $A>0$ tel que

$$\left\|u^{-1}(y)\right\| \leq A\|y\|,$$

et, en appliquant ceci à $y=u(x)$ on obtient

$$\frac{\|x\|}{A} \leq \|u(x)\|, \text{ pour tout } x \in X$$

Réciproquement, l'inégalité

$$\|u(x)\| \geq C\|x\|$$

implique que $u$ est engendre un homéomorphisme entre les espaces vecrtoriels topologiques $X$ et $\operatorname{Im}(u)$ (muni de la norme de $Y$). Comme $X$ est complet, $\operatorname{Im}(u)$ l'est donc aussi, il est donc fermé dans $Y$. Dans le cas général, on factorise $u$ par son noyau,

$$u : X \xrightarrow{\pi} X_{/\ker(u)} \xrightarrow{g} Y$$

Comme $g$ est injective, on a démontré que l'image de $g$ (qui est aussi l'image de $u$) est fermée si et seulement si

$$\|g(y)\| \geq C\|y\|_{X_{/\ker(u)}}, \forall y \in X_{/\ker(u)}$$

ce qui est équivalent à

$$\|u(x)\| = \|g \circ \pi(x)\| \geq C\|\pi(x)\|_{X_{/\ker(u)}} = Cd(x, \ker(u)), \forall x \in X. \quad \blacksquare$$

**Corollaire 1.10**. *Si $u : X \to Y$ est un opérateur linéaire isométrique ($\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x$ de $X$), alors $\mathrm{Im}(u) = u(X)$ est fermée dans $Y$. On dit dans ce cas que $X$ se plonge isométriquement dans $Y$.*

## 1.4 L'espace des opérateures bilinéaires

Soient $X, Y$ et $Z$ trois espaces de Banach. Une application $T : X \times Y \to Z$ est dite bilinéaire si il est linéaire par rapport à chaque composante. On note $L(X \times Y; Z)$ l'ensemble de toutes les applications bilinéaires définies de $X \times Y$ dans $Z$. On définit les opérations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x, y) &= T_1(x, y) + T_2(x, y) \\ (\alpha T)(x, y) &= \alpha T(x, y), \end{aligned}$$

ce qui donne à $L(X \times Y; Z)$ une structure d'espace vectoriel. Un opérateur bilinéaire $T : X \times Y \to Z$ est dit borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\| .$$

On note $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues. Si $Z = \mathbb{K}$ on notera $\mathcal{L}(X \times Y; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X \times Y)$ l'espace de formes bilinéaires sur $X \times Y$. On munit l'espace $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$ de la norme suivante

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|T(x, y)\| ,$$

Si $Y$ est espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$ devient un espace de Banach.

**Proposition 1.11.** *Les conditions suivantes sont équivalentes ;*

$(i)$ $T$ *est continu ;*

$(ii)$ $T$ *est continu au point* $(0, ..., 0)$ ;

$(iii)$ *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|T(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\| \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y. \tag{1.1}$$

Il est facile de voir que

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|T(x, y)\| = \inf \{C, \text{ satisfait } (1.1)\} .$$

## 1.5 Produit tensoriel algébrique

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. On définit $x \otimes y$ comme étant une forme linéaire sur l'espace de formes bilinéaires $\mathcal{L}(X \times Y)$ comme suite

$$\forall T \in \mathcal{L}(X \times Y) : x \otimes y(T) = \langle T, x \otimes y \rangle = T(x, y).$$

On note $X \otimes Y$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. L'espace $X \otimes Y$ s'appelle espace de produit tensoriel algébrique de $X$ et $Y$. On peut repésenter cet espace sous la forme suivante

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, y_i \in Y \right\}.$$

D'après la définition de $X \otimes Y$ nous avons

$$X \otimes Y \subset \mathcal{L}\left(X \times Y\right)^* .$$

Nous allons voir certaines propriétés des éléménts de $X \otimes Y$, commençons par établir la relation entre les opérations $+$ et $\otimes$.

**Proposition 1.12.** *Pour tous $x, x_1, x_2 \in X$ et $y, y_1, y_2 \in Y$ nous avons :*
$(i)$ $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.
$(ii)$ $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y$
$(iii)$ $\lambda(x \otimes y) = \lambda(x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
$(iv)$ $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$.

**Preuve**. On va voir seulement $(i)$ , les autres sont immédiates. Soit $T \in \mathcal{L}\left(X \times Y\right)$ alors

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2) \otimes y(T) &= T(x_1 + x_2, y) \\
&= T(x_1, y) + T(x_2, y) \\
&= x_1 \otimes y\,(T) + x_2 \otimes y\,(T) \\
&= \left(x_1 \otimes y + x_2 \otimes y\right)(T)\,,
\end{aligned}$$

alors $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.

La proposition suivante explique qu'est ce qu'un élément nul dans l'espace $X \otimes Y$.

**Proposition 1.13.** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. Pour tout $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

$(i)$ $u = 0$.

$(ii)$ $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y^*(y_i) = 0$ *pour tout* $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$.

$(iii)$ $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y_i = 0$ *pour tout* $x^* \in X^*$.

$(iv)$ $\sum_{i=1}^{n} y^*(y_i)x_i = 0$ *pour tout* $y^* \in Y^*$.

**Preuve**. $(i) \Rightarrow (ii)$ : Supposons que $u = 0$. Alors, pour tout $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ on a

$$u(T) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = 0.$$

Soient $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$, alors l'application

$$x^* \otimes y^* : X \times Y \to K$$

définie par $x^* \otimes y^*(x, y) = x^*(x)\, y^*(y)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(X \times Y)$. C'est à dire

$$u(x^* \otimes y^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y^*(y_i) = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ : Supposons que $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y^*(y_i) = 0$ pour tout $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$. Soit $x^* \in X^*$, alors

$$y^*(\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y_i) = 0 \text{ pour tout } y^* \in Y^*,$$

cela implique que $\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y_i = 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ : Même argement.

$(iv) \Rightarrow (i)$ : Supposons que $\sum_{i=1}^{n} y^*(y_i)x_i = 0$ pour tout $y^* \in Y^*$. Soit $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$.

Soient $E, F$ deux sous espaces vectoriels engendrés par $\{x_1, ..., x_n\}$ et $\{y_1, ..., y_n\}$ respectivement. On note $B$ la restriction de $T$ à $E \times F$. On peut représenter $B$ sous la forme suivante

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)\, \psi_j(y),$$

où $\varphi_j \in E^*$ et $\psi_j \in F^*$. Par le théorème de Hahn Banach, on extend les formes linéaires $\varphi_j$ et $\psi_j$ en tout $X$ et $Y$ respectivement. Alors,

$$\begin{aligned}
u(T) &= \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_i)\, \psi_j(y_i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \psi_j \left( \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i)\, y_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \psi_j(0) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $u(T) = 0$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ alors $u = 0$. ■

## 1.6 Produit tensoriel et linéarisation

Le but principal de produit tensoriel est de linéariser un opérateur bilinéaire. Autrement dit à tout opérateur bilinéaire on associe un opérateur linéaire définie sur le produit tensoriel $X \otimes Y$. Dans ce paragraphe on considère un opérateur bilinéaire $T : X \times Y \to Z$ à laquelle on associe un opérateur linéaire $\widetilde{T} : X \otimes Y \to Z$ qui s'appelle linéarisation de $T$. Cela nous permettra d'identifier l'espace des opérateurs bilinéaires $L(X \times Y; Z)$ à celle des opérateurs linéaires $L(X \otimes Y; Z)$. Soit maintenant $T \in L(X \times Y; Z)$ un opérateur bilinéaire. Alors, on associe à $T$ un opérateur linéaire $\widetilde{T}$ définie sur le produit tensoriel $X \otimes Y$ par

$$\widetilde{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i),$$

avec $u=\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. L'opérateut $\widetilde{T}$ s'appelle linéarisation de $T$. Il est bien défini d'après le résultat suivant :

**Proposition 1.14**. *Soit $T : X \times Y \to Z$ un opérateur bilinéaire. Sa linéarisation $\widetilde{T}$ : $X \otimes Y \to Z$ est un opérateur linéaire bien définie.*

**Preuve**. Pour que la forme linéaire $\widetilde{T}$ soit bien définie il faut et il suffit que pour tout $u = 0$ on a $\widetilde{T}(u) = 0$. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$. Soit $z^* \in Z^*$ la composée $z^* \circ T$ est forme bilinéaire sur $X \times Y$. Donc

$$
\begin{aligned}
z^*\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i)\right) &= \sum_{i=1}^{n} z^* \circ T(x_i, y_i) \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, z^* \circ T \right\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}(u) &= \widetilde{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) = 0,
\end{aligned}
$$

alors $\widetilde{T}$ est bien définie. ■

Notons que la linéarisation d'un opérateur bilinéaire est unique. La correspondence donc $T \longleftrightarrow \widetilde{T}$ établi un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(X \times Y; Z)$ et $\mathcal{L}(X \otimes Y; Z)$. On peut illustrer cette situation par le diagramme suivant

$$
\begin{array}{ccc}
X \times Y & \stackrel{T}{\to} & Z \\
i \downarrow & \nearrow \widetilde{T} & \\
X \otimes Y & &
\end{array}
$$

avec $i$ est un bilinéaire (canonique) définie par

$$i\left(x,y\right) = x\otimes y.$$

**Théorème 1.15**. *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach. Alors $X\otimes Y$ et $Y\otimes X$ sont isomorphes.*

**Preuve**. Tout d'abord on définie le tronsposé d'un élément de $X\otimes Y$, soit $u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$, son tronsposé est donné par

$$\begin{aligned} u^t &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right)^t \\ &= \sum_{i=1}^{n}y_i\otimes x_i\in Y\otimes X. \end{aligned}$$

Par conséquent, on établi cette identification via l'application suivante

$$\begin{aligned} \Psi: \quad X\otimes Y &\rightarrow Y\otimes X \\ u &\mapsto u^t \end{aligned}$$

l'application $\Psi$ est bien linéaire isomorphisme. ■

## 1.7 Tenseurs comme formes bilinéaires

Nous avons vu que tout élément $x\otimes y$ de $X\otimes Y$ peut être interpréter comme une forme linéaire sur l'espace $L\left(X\times Y\right)$. En revanche, il existe d'autre manière d'exprimer les éléments de $X\otimes Y$, ce qui nous allons présenter dans la suite. Soient $x\in X, y\in Y$, on redéfinie le tenseur $B_{x,y}=x\otimes y: X^*\times Y^*\rightarrow\mathbb{K}$ comme suit

$$B_{x,y}\left(x^*,y^*\right)=x\otimes y\left(x^*,y^*\right)=x^*\left(x\right)y^*\left(y\right).$$

En fait, il est clair que $x \otimes y$ se comporte comme une forme bilinéaire sur $X^* \times Y^*$. Dans ce cas là, l'espace $X \otimes Y$ se plonge dans $L(X^* \times Y^*)$. En effet, l'application suivante

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & X \otimes Y & \rightarrow & L(X^* \times Y^*) \\ & u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i. & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} B_{x_i, y_i} \end{array}$$

est linéaire et injective.

**Proposition 1.16**. *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. L'application $\Phi$ définie cidessus est linéaire et injective.*

**Preuve**. Il est clair que $\Phi$ est linéaire, on va vérifier l'injectivité. Soit $u, u' \in X \otimes Y$ tels que $\Phi(u) = \Phi(u')$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} B_{x_i, y_i} = \sum_{j=1}^{m} B_{x'_j, y'_j}.$$

Soit $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} B_{x_i, y_i}(x^*, y^*) = \sum_{j=1}^{m} B_{x'_j, y'_j}(x^*, y^*),$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y^*(y_i) &= \sum_{j=1}^{m} x^*(x'_i)\, y^*(y'_i) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y^*(y_i) - \sum_{j=1}^{m} x^*(x'_i)\, y^*(y'_i) = 0 \end{aligned}$$

cela est pour tout $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$. D'après la Proposition 1.13, l'élément

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i - \sum_{j=1}^{m} x'_i \otimes y'_i = 0 \Rightarrow u = u'. \quad \blacksquare$$

# Chapitre 2

# Produit tensoriel projective

## 2.1 Introduction

A partir de ce chapitre, on essayera de munir l'espace vectoriel $X \otimes Y$ des normes, appelée normes tensorielles. On commence par la norme projective qui considère comme la plus grande normes tensorielles. Certaines identifications peuvent être formées au moyen de cette norme à savoir le dual du produit tensoriel projective $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$ avec l'espace des formes bilinéaires continues sur l'espace $X \times Y$.

## 2.2 Définition d'une nome projective

Soit $\alpha$ une norme sur l'espace vectoriel $X \otimes Y$. La norme $\alpha$ est dite raisonnable si pour tout élément élémentaire $x \otimes y$ on a

$$\alpha \left( x \otimes y \right) = \left\| x \right\| \left\| y \right\| . \tag{2.1}$$

Soit $\alpha$ une norme sur raisonnable définie sur $X \otimes Y$. De la formule (2.1) on peut conclure que pour tout élément $u \in X \otimes Y$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ on a

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \right\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de $u$.

**Définition 2.1**. Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. Dans le but de définir la plus grande norme tensorielle, de la formule (2.2) on va considérer l'application suivante : $\pi : X \otimes Y \to \mathbb{R}_+$

$$\forall u \in X \otimes Y : \pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \right\}, \tag{2.3}$$

où l'infimum est porté sur toutes les représentations de $u$.

**Proposition 2.2**. *L'application $\pi$ est une norme tensorielle raisonnable sur l'espace $X \otimes Y$. Elle s'appelle norme projective.*

**Notation 2.3.** On note $X \otimes_\pi Y$ l'espace vectoriel $X \otimes Y$ muni de la norme projective $\pi$. Généralement cet espace n'est pas complet sauf si $X$ et $Y$ sont de dimension fini. On complète donc l'espace $X \otimes_\pi Y$ afin d'avoir un espace de Banach, on le note $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ qui sera appelé *produit tensoriel projectif.*

Avant le résultat qui suit, on a besoin du lemme suivant. Pour plus de détaille sur la démonstration de ce lemme veuillez consulter [15, Proposition 2.8] .

**Lemme 2.4**. *Soient $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe une représentation de $u$ de la* *forme* $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ *telle que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon.$$

**Théorème 2.5**. *Pour tout* $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$ *nous avons*

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \right\}$$

*où l'infimum est porté sur toutes les représentations de* $u$ *de la forme* $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$.

**Preuve**. Soit $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$. Soit $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ une représentation infinie. Tout d'abord nous avons

$$\pi(u) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\|,$$

alors, en prenant l'infimum sur toutes les représentations infinies de $u$ on trouve

$$\pi(u) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \right\}.$$

Pour la deuxième inégalité, soit $\varepsilon > 0$, d'après le lemme précédent il existe une représentation de $u$ de la forme $u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon.$$

En prenant l'infimum puis en fait $\varepsilon$ tend vers 0 on trouve

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| \right\} \leq \pi(u). \quad \blacksquare$$

## 2.3 Dual du produit tensoriel projectif

Soient $X, Y$ et $Z$ trois espaces de Banach. On note $X \otimes Y$ le produit tensoriel algébrique de $X, Y$ et $X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ son produit tensoriel projectif i.e. ; le complété de $X \otimes Y$ pour la norme projective. Si $X = Y$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_{\pi}^{2}X$. Soit $T : X \times Y \to Z$, à $T$ on associe la linéarisation $\widetilde{T}$, $\widetilde{T} : X\widehat{\otimes}_{\pi}Y \to Z$ définie par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i, y_i\right). \tag{2.4}$$

**Remarque 2.6**. Dans la formule (2.4) on a utilisé une représentation finie de $u$ malgré que l'espace de Banach $X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ contient probablement d'autre représentation infinie de $u$. La continuité de $\widetilde{T}$ sur l'espace $X \otimes Y$ et la densité de $X \otimes Y$ dans $X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ permettons de redéfinir la formule en utilisant les représentations infinies.

**Proposition 2.7**. *L'opérateur linéaire $\widetilde{T}$ est bien défini, unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.*

**Prouve**. Soient $u_1, u_2 \in X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ tels que $u_1 = u_2$ et

$$u_1 = \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i, u_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i' \otimes y_i'$$

Alors

$$\begin{aligned} z^*\left(\widetilde{T}\left(0\right)\right) &= z^*(\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{l} x_i \otimes y_i)) = z^*(\sum_{i=1}^{n} T\left(x_i, y_i\right)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} z^* \circ T\left(x_i, y_i\right) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, z^* \circ T \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

donc $z^*\left(\widetilde{T}\left(0\right)\right) = 0$ pour tout $z^* \in Z^*$ d'où $\widetilde{T}\left(0\right) = 0$. De plus, $\widetilde{T}$ est unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| =$

$\|T\|$. En effet, soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, on a

$$\left\|\widetilde{T}(u)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i)\right\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|,$$

comme $u$ est arbitraire, $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\| \|v\|_{\pi}$. Donc, $\widetilde{T}$ est borné et $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|$. D'autre part, $\|T\| \leq \left\|\widetilde{T}\right\|$ car

$$\|T(x, y)\| = \left\|\widetilde{T}(x \otimes y)\right\| \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \|x\| \|y\|.$$

Soit maintenant $\widetilde{B}$ un autre opérateur linéarisé de $T$ ; pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on a

$$\widetilde{B}(x \otimes y) = T(x, y) = \widetilde{T}(x \otimes y).$$

Par linéarité, $\widetilde{B}, \widetilde{T}$ sont identiques sur $X \otimes Y$ et enfin, par densité, ils sont identiques sur $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$. ■

Comme conséquence de ce qui précède on a le résultat suivant.

**Théorème 2.8**. *Nous avons l'identification isométrique suivante*

$$\mathcal{L}(X \times Y; Z) = \mathcal{B}\left(X \widehat{\otimes}_{\pi} Y; Z\right),$$

*via l'application*

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & \mathcal{L}(X \times Y; Z) & \to & \mathcal{B}\left(X \widehat{\otimes}_{\pi} Y; Z\right) \\ & & T & \mapsto & \Phi(T) = \widetilde{T} \end{array}$$

**Cas particulier.** Le dual de $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$ s'identifie à l'espace des formes bilinéaires bornées

$$\left(X \widehat{\otimes}_{\pi} Y\right)^{*} = \mathcal{L}(X \times Y). \qquad (2.5)$$

Cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective

$$\|u\|_\pi = \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : T \in B_{\mathcal{L}(X\times Y)}\right\}. \tag{2.6}$$

**Remarque 2.8.** Dans le cas linéaire, $\mathcal{B}(X; Y^*)$ s'identifie à $\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\right)^*$ ; ici, d'après (2.5), on a l'identification isométrique

$$\left(X\widehat{\otimes}_\pi Y\widehat{\otimes}_\pi Z\right)^* = \mathcal{L}(X\times Y; Z^*).$$

**Proposition 2.9**. *Soient $W$ et $Z$ deux sous espaces de $X$ et $Y$ respectivement. Alors, $W\widehat{\otimes}_\pi Z$ est un sous espace fermé de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ si et seulement si toute forme bilinéaire bornée sur $W\times Z$ se prolonge à une forme bilinéaire bornée sur $X\times Y$ avec la même norme.*

**Preuve.** Supposons que $W\widehat{\otimes}_\pi Z$ est un sous espace de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Soit $A : W\times Z \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Sa linéarisation $\widetilde{A} : W\widehat{\otimes}_\pi Z \to \mathbb{K}$ peut s'étend en une forme linéaire $u$ définie sur espace $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tout entier. Alors, par le Théorème 2.8, il existe une forme bilinéaire unique $T$ définie sur $X\times Y$ telle que

$$\widetilde{T} = u,$$

alors $T$ est exactement l'extension de $A$ sur l'espace $X\times Y$, en effet, pour tout $w\in W$ et $z\in Z$ on a

$$\begin{aligned} A(w,z) &= \widetilde{A}(w\otimes z) \\ &= u(w\otimes z) \\ &= \widetilde{T}(w\otimes z) = T(w,z). \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\|A\| = \left\|\widetilde{A}\right\| = \|u\| = \left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|\,.$$

Inversement, supposons que toute forme bilinéaire bornée sur $W \times Z$ se prolonge à une forme bilinéaire bornée sur $X \times Y$ avec la même norme. Montrons que

$$\|u\|_{W\widehat{\otimes}_\pi Z} = \|u\|_{X\widehat{\otimes}_\pi Y}$$

En effet, d'après la formule (2.6), on a

$$\|u\|_{X\widehat{\otimes}_\pi Y} = \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : T \in B_{\mathcal{L}(X\times Y)}\right\},$$

comme $B_{\mathcal{L}(X\times Y)} \subset B_{\mathcal{L}(W\times Z)}$, on trouve

$$\|u\|_{X\widehat{\otimes}_\pi Y} \leq \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : T \in B_{\mathcal{L}(W\times Z)}\right\} = \|u\|_{W\widehat{\otimes}_\pi Z}\,.$$

D'autre par,

$$\|u\|_{W\widehat{\otimes}_\pi Z} = \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : T \in B_{\mathcal{L}(W\times Z)}\right\}$$

par l'hypothèse toute forme bilinéaire $T \in B_{\mathcal{L}(W\times Z)}$ s'étend en une forme bilinéaire dans $B_{\mathcal{L}(X\times Y)}$ de même norme. C'est à dire

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W\widehat{\otimes}_\pi Z} &= \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : T \in B_{\mathcal{L}(W\times Z)}\right\} \\
&= \sup\left\{|\langle u, T\rangle| : \tilde{T} \in B_{\mathcal{L}(X\times Y)} \text{ et } \tilde{T} = T \text{ sur } W \times Z\right\} \\
&\leq \|u\|_{X\widehat{\otimes}_\pi Y}\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Si on fixe le deuxième espace, on peut annoncer le résultat suivant.

**Corollaire 2.10**. *Soit $W$ est un sous espace de $X$. Then $W\widehat{\otimes}_\pi Y$ est un sous espace fermé de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ si et seulement si si tout opérateur de $W$ dans $Y^*$ se prolonge à un opérateur de la même norme de $X$ dans $Y^*$.*

**Théorème 2.11**. *Chaque forme bilinéaire bornée sur $X \times Y$ présente un prolongement à une forme bilinéaire sur $X^{**} \times Y^{**}$ avec la même norme.*

**Preuve**. Soit $T$ est une forme bilinéaire bornée sur $X \times Y$ et soit $S$ est l'opérateur associé de $X$ dans $Y^*$ , de sorte que

$$T(x, y) = \langle y, S(x) \rangle$$

pour chaque $x \in X$, $y \in Y$. Considérons la forme bilinéaire bornée $B$ sur $X^{**} \times Y^{**}$.donné par

$$B(x^{**}, y^{**}) = \langle S^*(y^{**}), x^{**} \rangle,$$

où $S^* : Y^{**} \longrightarrow X^*$ est l'adjoint de $S$. Si $x \in X$ et $y \in Y$ alors

$$B(x, y) = \langle y, S(x) \rangle = T(x, y),$$

et alors, $B$ est un prolongement de $T$. De plus,

$$||T|| = ||S|| = ||S^*|| = ||B||. \quad \blacksquare$$

**Corollaire 2.12**. *$X \widehat{\otimes}_\pi Y$ est un sous espace de $X^{**} \widehat{\otimes}_\pi Y^{**}$.*

## 2.4 Produit tensoriel des opérateurs

Dans ce paragraphe on étudie le produit tensoriel des opérateurs linéaires. Soient $S \in \mathcal{B}(X, W)$ et $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$, on définit le produit tensoriel de $S$ et $T$ par

$$S \otimes T : X \otimes Y \longrightarrow W \otimes Z$$

tel que

$$S \otimes T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y),$$

pour tout $x \in X$, $y \in Y$. On munit les deux espaces $X \otimes Y, W \otimes Z$ de leurs normes projectives nous avons :

**Proposition 2.13**. *Le produit tensoriel $S \otimes_\pi T$ de $S$ et $T$ définie par*

$$S \otimes_\pi T : X \widehat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow W \widehat{\otimes}_\pi Z$$

*est borné et nous avons $||S \otimes_\pi T| = ||S||||T||$.*

**Preuve** : Soit $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ alors,

$$\pi\left(\left(S \otimes_\pi T\right)(u)\right) = \pi(\sum_{i=1}^{n} S\left(x_i\right) \otimes T\left(y_i\right)) \leq ||S||||T|| \sum_{i=1}^{n} ||x_i||||y_i||,$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de $u$ on trouve

$$\pi\left(\left(S \otimes_\pi T\right)(u)\right) \leq ||S||||T||\pi(u).$$

On en déduit que $S \otimes_\pi T$ est borné et nous avons

$$||S \otimes_\pi T|| \leq ||S||||T||.$$

D'autre part,

$$\|S \otimes_\pi T(x \otimes y)\| = \|S\left(x\right) \otimes T\left(y\right)\| = \|S\left(x\right)\| \left\|T\left(y\right)\right\|,$$

alors

$$\|S\left(x\right)\| \left\|T\left(y\right)\right\| \leq \|S \otimes T\| \|x\| \|y\| \Rightarrow \frac{\|S\left(x\right)\|}{\|x\|} \frac{\|T\left(y\right)\|}{\|y\|} \leq \|S \otimes T\|,$$

en prenant le supremum sur les $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on trouve

$$\|S\| \, \|T\| \leq \|S \otimes_\pi T\|$$

donc, nous avons $||S \otimes_\pi T|| = ||S||||T||$. $\blacksquare$

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach . Soit $W$ un sous espace de $X$ alors

$$\pi(u; X \otimes Y) \leq \pi(u; W \otimes Y).$$

**Proposition 2.14**. Soient $E, F$ deux sous espaces fermés de $X, Y$ respectivement. Alors, $E \otimes F$ induite par la norme projective $\pi_{E,F}$. Si $E$ et $F$ sont complets par des projection d'une norme alors, $E \otimes_\pi F$ est une sous-espace de $X \otimes_\pi Y$ et qui est aussi complet par une projection d'une norme.

**Proposition 2.15.** *Soient $Q : W \longrightarrow X$ et $R : Z \longrightarrow Y$ sont des opérateurs quotient, alors*

$$Q \otimes_\pi R : W \widehat{\otimes}_\pi Z \longrightarrow X \widehat{\otimes}_\pi Y$$

*est un opérateur quotient.*

**Preuve.** Il suffit de montre que : $Q \otimes_\pi R : W \otimes_\pi Z \longrightarrow X \otimes_\pi Y$ est un opérateur de quotient $Q \otimes R$ est surjective. Soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes_\pi Y$ il existe $w_i \in W$ et $z_i \in Z$ tel que : $Q(w_i) = x_i$ , $R(z_i) = y_i$ pour chaque $i$. Alors,

$$\begin{aligned} Q \otimes R(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i) &= \sum_{i=1}^{n} Q(w_i) \otimes R(z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \end{aligned}$$

donc $Q \otimes R$ est surjective. Soit $u \in X \otimes_\pi Y$ si $Q \otimes R(v) = u$ alors

$$\pi(u) \leq ||Q||||R||\pi(v) = \pi(v)$$

donné $\varepsilon > 0$ , choisissons

$$\sum_{i=1}^{n} ||x_i||||y_i|| \leq \pi(u) + \varepsilon.$$

Maintenant pour chaque $i$ choisir $w_i \in W$ et $z_i \in Z$ tel que :

$$Q(w_i) = x_i, R(z_i) = y_i$$

et

$$||w_i|| \leq (1 + 2^{-n})||x_i||; ||z_i|| \leq (1 + 2^{-n})||y_i||$$

alors,

$$Q \otimes R(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i) = u$$

et en utilisant le fait que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq \exp(\sum_{i=1}^{n} |a_i|),$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \pi(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i) &\leq e^{4\varepsilon}(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||||y_i||) \\ &\leq e^{4\varepsilon}(\pi(u) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Puisque cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, alors

$$\pi(u) = \inf\{\pi(v) : v \in W \otimes_\pi Z, Q \otimes R(v) = u\}$$

## 2.5 Le produit tensoriel projectif $\ell_1 \widehat{\otimes}_\pi X$ :

Soit $X$ est un espace de Banach. Dans cette section on va étudier le produit tensoriel $\ell_1 \otimes X$ où $\ell_1$ est l'espace de toutes les suites réelles absoluement sommables. L'espace $\ell_1 \otimes X$ peut s'identifier à celle des suites à valeur dans $X$, c'est à dire on verra que

$$\ell_1 \otimes X = \ell_1 (X),$$

où $\ell_1 (X)$ est un espace de Banach définie par

$$\ell_1 (X) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \right\},$$

avec sa norme est donnée par

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ et $x \in X$, on note $a \otimes x$ le tenseur élémentaire $a \otimes x$ correspond à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x$. Nous avons $a \otimes x$ appartient à l'espace $\ell_1(X)$, en effet

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n x\| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_n|) \|x\| < \infty.$$

**Proposition 2.16**. Il existe une application linéaire

$$J : \ell_1 \otimes X \longrightarrow \ell_1(X),$$

satisfaisant : $J(a \otimes x) = (a_n x)_n$.

**Proposition 2.17**. Soit $X$ est un espace de Banach et soit $Y$ est un sous-espace fermé de $X$, alors $\ell_1(I)\widehat{\otimes}_\pi Y$ est un sous-espace de $\ell_1(I)\widehat{\otimes}_\pi X$.

**Proposition 2.18.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, soit $u \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe des suites bornée $(x_n), (y_n)$ sur $X, Y$ respictivement tel que : la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ converge vers $u$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| ||y_n|| < \pi(u) + \varepsilon.$$

# Chapitre 3

# Produit tensoriel injective

## 3.1 Introduction

La norme injective est la plus petite norme tensorielle qu'on peut munir l'espace $X \otimes Y$. Sa définition simple lui fait comme une norme importante et son utilisation ramène beaucoups de propriétés et applications intéressantes. L'identification célèbre entre l'espace des formes bilinéaires intégrales et son dual sera étudie en détaille dans ce chapitre. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à étudier l'espace $C(K)\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X$, on verra qu'il s'identifie à $C(K,X)$, l'espace des fonctions continues sur $K$ à valeurs dans $X$.

## 3.2 Construction de la norme tensoreille injective

Notons que les éléments du produit tensoriel $X \otimes Y$ peuvent être vu comme des formes bilinéaires sur l'espace $X^* \times Y^*$. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ une représentation quelconque de $u$, alors la forme bilinéaire associée est donnée par

$$B_u(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y^*(y_i)\,.$$

On constate donc que $X\otimes Y$ se plonge canoniquement dans l'espace des formes bilinéaires $\mathcal{L}\left(X^{*}\times Y^{*}\right)$. On définit donc la *norme injective* sur $X\otimes Y$ comme étant la norme induite par ce polongement. Autrement dit, on voit tout élément de $X\otimes Y$ comme une forme bilinéaire de $\mathcal{L}\left(X^{*}\times Y^{*}\right)$ puis on calcul sa norme correspondante. En effet, soit $u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\in X\otimes Y$, sa norme dans $\mathcal{L}\left(X^{*}\times Y^{*}\right)$ est

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}(X^{*}\times Y^{*})} &= \sup_{x^{*}\in B_{X^{*}},y^{*}\in B_{Y^{*}}}\left|B_u\left(x^{*},y^{*}\right)\right| \\ &= \sup_{x^{*}\in B_{X^{*}},y^{*}\in B_{Y^{*}}}\left|\sum_{i=1}^{n}x^{*}\left(x_i\right)y^{*}\left(y_i\right)\right|,\end{aligned}$$

**Définition 3.1**. On définit la norme injective de $u$ par

$$\varepsilon\left(u\right)=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}x^{*}\left(x_i\right)y^{*}\left(y_i\right)\right|,x^{*}\in B_{X^{*}},y^{*}\in B_{Y^{*}}\right\}.$$

**Remarque 3.2**. La norme injective est une norme induite de celle de l'espace des formes bilinéaires, c'est à dire elle vérifie toutes les hypothèses des normes classiques.

**Notation**. On note $X\otimes_{\varepsilon}Y$ le produit tensoriel $X\otimes Y$ muni de la norme injective. Le complété de $X\otimes_{\varepsilon}Y$ pour cette norme sera noté $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$, qui appelé le *produit tensoriel injective* de $X$ et $Y$.

Nous avons maintenant quelques propriétés élémentaires de la norme injective.

**Proposition 3.3**. *Soient $X$, $Y$ deux espaces de Banach, alors :*

*$(a)$ Pour tout $u$ de $X\otimes Y$ on a $\varepsilon(u)\leq\pi(u)$.*

*$(b)$ $\varepsilon(x\otimes y)=\|x\|\,\|y\|$ pour chaque $x\in X$, $y\in Y$.*

*$(c)$ Si $x^{*}\in X^{*}$, $y^{*}\in Y^{*}$, alors $x^{*}\otimes y^{*}$ est une forme linéaire bornée sur $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$ et*

$$\left\|x^{*}\otimes y^{*}\right\|=\left\|x^{*}\right\|\left\|y^{*}\right\|.$$

**Preuve**. $(a)$ Soit $u \in X \otimes Y$, nous avons

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) \, y^*(y_i) \right| \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| ,
\end{aligned}$$

en prenant l'infimum sur toutes les représentations de $u$, on trouve

$$\varepsilon(u) \leq \pi(u) .$$

$(b)$ Nous avons

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x \otimes y) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} |x^*(x) \, y^*(y)| \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |y^*(y)| \\
&= \|x\| \, \|y\| .
\end{aligned}$$

$(c)$ Soient $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, l'action de $x^* \otimes y^*$ sur un élément $u \in X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ est donnée par

$$x^* \otimes y^*(u) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) \, y^*(y_i) .$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned}
\|x^* \otimes y^*\| &= \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} |x^* \otimes y^*(u)| \\
&= \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) \, y^*(y_i) \right| \\
&\leq \|x^*\| \, \|y^*\| \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x^*}{\|x^*\|}(x_i) \, \frac{y^*}{\|y^*\|}(y_i) \right| \\
&\leq \|x^*\| \, \|y^*\| \sup_{\varepsilon(u) \leq 1} \varepsilon(u) = \|x^*\| \, \|y^*\| .
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|x^*\| \|y^*\| &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |x^*(x) y^*(y)| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&\leq \sup_{\varepsilon(u)=1} |x^* \otimes y^*(u)| = \|x^* \otimes y^*\| . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 3.3 Plongement isométrique

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. Identifier $X$ à $Y$ ou à une copie de $Y$ permettra de comprendre la structure algébrique et topologique de $X$ et aussi de transmettre beaucoups de propriétés à partir de celle de l'eapace $Y$. Dans cette partie, on va mettre l'accent sur quelques résultats d'identifications de l'espace de produit injective $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ avce certains espaces de Banach. D'abord, puisque $X \otimes_\varepsilon Y$ est un sous espace normé de $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$, l'espace $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ peut être considérer comme un sous espace fermé de $\mathcal{L}(X^* \times Y^*)$. Nous exposons donc le résultat suivant.

**Proposition 3.4**. *L'espace $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ peut être vu comme un sous espace fermé de $\mathcal{B}(X^*; Y)$ ou encore de $\mathcal{B}(Y^*; X)$. Dans un cas particulier, l'espace $X^*\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ et $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y^*$ sont des sous espaces fermés de $\mathcal{B}(X; Y)$.*

**Preuve**. On définit l'application suivante

$$\begin{array}{rccc}
\Phi : & X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y & \to & \mathcal{B}(X^*; Y) \\
& u & \mapsto & \Phi(u)
\end{array}$$

où $\Phi(u) : X^* \to Y$ est définie par

$$\Phi(u)(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i,$$

avec $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ est une représentation quelconque de $u$. Montrons tout d'abord que $\Phi$ est isométrique. En effet, soient $u \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|\Phi(u)(x^*)\|_Y \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y_i \right\|_Y \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}} \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y^*(y_i) \right| = \varepsilon(u).
\end{aligned}$$

Alors, $\Phi$ est isométrique et par conséquent (Corollaire 1.10 ) $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ est un sous espace fermé de $\mathcal{B}(X^*; Y)$. Un argument similaire pour les autres plongement isométrique. ■

On conclut immédiatement de cette Proposition que la norme injective possède deux autres écritures équivalentes. En effet, soit $u \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$, si on voit $u$ comme étant un opérateur linéaire borné de $X^*$ dans $Y$ ou de $Y^*$ dans $X$, on peut donner sa norme par

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|\Phi(u)(x^*)\|_Y = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)\, y_i \right\|_Y \\
&= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|\Phi(u)(x^*)\|_X = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i y^*(y_i) \right\|_X .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

**Corollaire 3.5**. *Nous avons quelques plongements isométriques du produit tensoriel injective.*

(1) $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \subset \mathcal{L}(X^* \times Y^*), \mathcal{B}(X^*, Y)$, *ou* $\mathcal{B}(Y^*, X)$.

(2) $X^*\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \subset \mathcal{L}(X \times Y^*), \mathcal{B}(X, Y)$, *ou* $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$.

(3) $X^*\widehat{\otimes}_\varepsilon Y^* \subset \mathcal{L}(X \times Y), \mathcal{B}(X, Y^*)$, *ou* $\mathcal{B}(Y, X^*)$.

## 3.4 L'espace dual de $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$

Etant donné que la norme injective est plus petite que la norme projective, par (2.5) on conclut que toute forme linéaire bornée sur $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$ peut considérer comme linéarisation d'une forme bilinéaire borné unique sur $X \times Y$. Nous allons dans ce paragraphe essayer de caracteriser les formes linéaires de $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$. Revenous à la définition de la norme injective d'un élément $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ de $X \otimes Y$

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y^*(y_i) \right| : x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*} \right\}.$$

Dans cette formule, nous pouvons penser de $u$ comme étant une fonction continue sur $B_{X^*} \times B_{Y^*}$, où $B_{X^*}$ et $B_{Y^*}$ sont munis de leurs topologie $*$-faible. En effet, soit $u \in X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$ alors

$$\begin{array}{rlcl} u: & B_{X^*} \times B_{Y^*} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & (x^*, y^*) & \longmapsto & u(x^*, y^*) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^*(x_i)y^*(y_i) \end{array},$$

dans ce cas on a

$$\|u\| = \varepsilon(u).$$

Ca nous conduit à conclure que $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$ se plonge isométriquement dans l'espace de fonctions continues $C(B_{X^*} \times B_{Y^*})$.

Nous rappelons ici le théorème de représentation de Riesz pour une forme linéaire définie sur $C(K)$ avec $K$ est un espace topologique compact.

**Théorème 3.6**. (*Représentation de Riesz*) *Soit $K$ un espace topologique compact muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_K$. Pour toute forme linéaire positive $u$ sur $C(K)$, il existe une* *unique mesure positive* $\mu$ *sur* $(K, \mathcal{B}_K)$ *telle que*

$$\forall f \in C(K) : u(f) = \int_K f(t)\, d\mu(t).$$

**Remarque 3.7**. Le théorème de Han-Banach nous permet de considérer une forme linéaire bornée sur $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ comme une forme linéaire bornée sur l'espace de fonctions continues $C(B_{X^*} \times B_{Y^*})$. Alors, le théorème de représentation de Riesz montre aussi que l'action de cette forme est donnée par l'integration en respectant une mesure appropriée. Pour voir comment cela fonctionne, supposons que $T$ est une forme bilinéaire borné sur $X \times Y$ dont la linéairisation $\widetilde{T}$ est bornée pour la norme injective. Alors, $\widetilde{T}$ se prolonge à une forme linéaire bornée sur $C(B_{X^*} \times B_{Y^*})$ avec même norme. Par la représentation de Riesz, il existe une mesure régulière de Borel $\mu$ sur $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ telle que

$$\widetilde{T}(u) = \int_{B_{X^*} \times B_{Y^*}} u(x^*, y^*) d\mu(x^*, y^*), \tag{3.2}$$

pour tout $u \in X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$, et $\left\| \widetilde{T} \right\| = \inf \|\mu\|$.

**Cas particulier**. Si nous prenons $u$ comme tenseur élémentaire, nous voyons que

$$T(x, y) = \widetilde{T}(x \otimes y) = \int_{B_{X^*} \times B_{Y^*}} x^*(x) y^*(y) d\mu(x^*, y^*), \tag{3.3}$$

pour chaque $x \in X, y \in Y$.

**Résultat inverse** : Si $\mu$ est une mesure régulière de Borel sur $B_{X^*} \times B_{Y^*}$, nous pouvons définir une forme linéaire bornée sur $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ par (3.2) et la forme bilinéaire correspondante $T$ satisfait (3.3). De plus, par un simple calcul on montre que,

$$\left\| \widetilde{T} \right\| \leq \|\mu\|.$$

Nous avons obtenu une discription complète de l'espace dual de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$. Notre conclusion est résumée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.8**. *Soit $T$ une forme bilinéaire sur $X \times Y$. Alors, sa linéarisation $\widetilde{T}$ est bornée sur $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ si et seulement si il existe une mésure régulière de Borel $\mu$ sur l'espace compact $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ tel que*

$$T(x, y) = \int\limits_{B_{X^*}\times B_{Y^*}} x^*(x)y^*(y)d\mu(x^*, y^*),$$

*pour chaque $x \in X, y \in Y$. De plus, la norme de $T$ est donné par*

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \inf \|\mu\| .$$

**Forme bilinéaire intégrale.** Soient $X, Y$ deux espaces de Banach et $T$ une forme bilinéaire définie sur $X \times Y$. On dit que $T$ est *intégrale* si sa linéairisation $\widetilde{T}$ est bornée sur le produit tensoriel injective $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$. On note $\mathcal{B}_I(X \times Y)$ l'espace de Banach de toutes les formes bilinéaires intégrales sur $X \times Y$ avec la norme suivante :

$$\|T\|_I = \left\|\widetilde{T}\right\|_{\left(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y\right)^*} = \inf \|\mu\| .$$

**Théorème 3.9**. *L'espace de Banach des formes bilinéaires intégrales coïncide avce le dual du produit tensoriel injective. C'est à dire nous avons*

$$(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)^* = \mathcal{B}_I(X \times Y) \text{ isométriquement.}$$

**Preuve**. On pose l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{B}_I(X \times Y) & \to & (X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y)^* \\ & T & \mapsto & \Psi(T) \end{array}$$

où

$$\Psi(T)(u) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i).$$

Montrons que $\Psi$ est isomrphisme ismétrique. Soit $T \in \mathcal{B}_I(X \times Y)$, alors

$$\begin{aligned} \|\Psi(T)\| &= \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}} |\Psi(T)(u)| \\ &= \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}} \left| \sum_{i=1}^{n} T(x_i, y_i) \right| \\ &= \sup_{u \in B_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}} \left| \widetilde{T}(u) \right| \\ &= \|T\|_I . \end{aligned}$$

Alors, $\Psi$ est isométrique. Il reste donc de vérifier que $\Psi$ est surjective. Soit $B \in (X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y)^*$, d'après (2.5) $B$ est une forme linéarisée d'une unique forme bilinéaire sur $X \times Y$, soit $T_B$. C'est à dire

$$\widetilde{T_B} = B.$$

Comme $B$ est borné por la norme injective, $T_B \in \mathcal{B}_I(X \times Y)$. Montrons maintenant que $\Psi(T_B) = B$. En effet,

$$\begin{aligned} \Psi(T_B)(u) &= \sum_{i=1}^{n} T_B(x_i, y_i) \\ &= \widetilde{T_B}(u) = B(u), \end{aligned}$$

alors $\Psi$ est surjective et par conséquent que on a l'identification souhaitée. ■

**Proposition 3.10.** *Si $T$ est une forme bilinéaire intégrale sur $X \times Y$ et $u : W \longrightarrow X$,*

*$v : Z \longrightarrow Y$ sont des des opérateurs alors, la forme bilinéaire $A$ définit sur $W \times Z$ par*

$$A(w, z) = T(u(w), v(z)),$$

*est intégrale et*

$$\|A\|_I \leq \|T\|_I \|u\| \|v\| .$$

**Preuve.** La linéarisation de $A = T(u, v)$ est

$$\widetilde{A} = \widetilde{T} \circ u \otimes v : W \otimes Z \to \mathbb{K}$$

comme $T$ est intégrale l'opérateur $\widetilde{T}$ est borné sur $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$, alors on conclut que $\widetilde{T} \circ u \otimes v$ est borné sur $W \widehat{\otimes}_\varepsilon Z$, alors $A = T(u, v)$ est intégrale. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|A\|_I &= \left\|\widetilde{A}\right\| = \left\|\widetilde{T} \circ u \otimes v\right\| \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \|u\| \|v\| \\ &\leq \|T\|_I \|u\| \|v\| . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.5 Le produit tensoriel injective des opérateurs

**Proposition 3.11**. *Soient $g : X \longrightarrow W$ et $h : Y \longrightarrow Z$ des opérateurs bornés. Alors, il existe un opérateur unique $g \otimes_\varepsilon h : X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y \longrightarrow W \widehat{\otimes}_\varepsilon Z$ tel que*

$$(g \otimes_\varepsilon h)(x \otimes y) = g(x) \otimes h(y),$$

*pour chaque $x \in X$; $y \in Y$. De plus,*

$$\|g \otimes_\varepsilon h\| = \|g\| \|h\| .$$

**Preuve**. Soit $g \otimes_\varepsilon h : X \otimes Y \longrightarrow W \otimes Z$ un opérateur de produit tensoriel, si $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon(g \otimes h(u)) &= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} w^* g\left(x_i\right) z^*\left(h\left(y_i\right)\right)\right| : w^* \in B_{W^*}, z^* \in B_{Z^*}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \left(g^* \circ x^*\right)\left(x_i\right)\left(h^* \circ y^*\right)\left(y_i\right)\right| : x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}\right\} \\
&\leq \|g^*\| \|h^*\| \varepsilon(u) \\
&= \|g\| \|h\| \varepsilon(u)
\end{aligned}$$

Donc $g \otimes h$ est bornée pour la norme injective, et on a

$$\|g \otimes h\|_I \leq \|g\| \|h\| . \quad \blacksquare$$

## 3.6 $C(K)$ et le produit tensoriel injective

Nous étudions maintenant le produit tensoriel injective avec l'espace $C(K)$ des fonction continue sur un espace topologique compact $K$. Nous allons montrer que le produit tensoriel injective $C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon X$ peut être identifier à l'espace de Banach $C(K, X)$ des fonctions continues de $K$ dans $X$, où la norme sur cet espace est donnée par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} \|f(t)\| .$$

Avant d'exposer le résultat principal de cette partie, on a besoin de reppeler les définitions suivantes.

**Définition 3.12**. Soit $K$ un espace topologique. On appelle partition de l'unité de $K$, une famille $(g_i)_{i \in I}$ de fonctions continues sur $K$ et à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$, telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(1) Pour tout $t \in K$, il existe un voisinage de $t$ tel que toutes les fonctions $g_i$ soient nulles

sur ce voisinage à l'exception d'un nombre fini d'entre elles ;

(2) Pour tout $t \in K$ :

$$\sum_{i \in I} g_i\left(t\right) = 1.$$

**Définition 3.13.** Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $K$. On appelle *partition de l'unité subordonnée* au recouvrement $(V_i)_{i\in I}$, une partition de l'unité $(g_i)_{i\in I}$ au sens de la définition 1, telle que pour tout $i \in I$, le support de $g_i$ soit inclus dans $V_i$.

**Théorème 3.14.** (*N. Bourbaki*). *Soit $K$ un espace normal. Pour tout recouvrement ouvert localement fini $(V_i)_{i\in I}$ de $K$, il existe une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_i)_{i\in I}$.*

**Remarque 3.15.**

(1) Un recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique $K$ est dit *localement fini* si pour tout $t$ de $K$, il existe un voisinage de $t$ qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $(V_i)_i$. On note que tout recouvrement d'un espace topologique compact est normal.

(2) Un espace topologique $K$ est dit normal s'il est séparé et s'il vérifie de plus l'axiome de séparation suivante : pour tous fermés disjoints $F$ et $G$, il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $F$ soit inclus dans $U$ et $G$ dans $V$.

**Exemple 3.16.**

(1) Tout espace topologique métrisable est normal.

(2) Tout espace compact est normal.

**Théorème 3.17**. *Soit $K$ un espace topolgique compact. Pour tout esapce de Banach $X$ nous avons l'identification suivante*

$$C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon X = C\left(K, X\right),$$

*où $C(K, X)$ est l'espace de Banach des fonctions continues de $K$ dans $X$.*

**Preuve**. On pose l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} J: & C(K)\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X & \rightarrow & C\left(K,X\right) \\ & u & \mapsto & J_u \end{array}$$

où

$$J_u\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)x_i.$$

Montrons que $J$ est isomrphisme isométrique. Soit $u\in C(K)\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X$, alors

$$\begin{aligned} \left\|J_u\right\| &= \sup_{t\in K}\left\|J_u\left(t\right)\right\|_X \\ &= \sup_{t\in K}\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(t)x_i\right\|_X \\ &= \sup_{t\in K}\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(t)x^*\left(x_i\right)\right| \\ &= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left\|\sum_{i=1}^{n}f_ix^*\left(x_i\right)\right\|_{C(K)}, \end{aligned}$$

par la formule (3.1), on obtient

$$\left\|J_u\right\|=\varepsilon\left(u\right).$$

Alors, $J$ est isométrique. Il suffit maintenant de montrer que $J\left(C(K)\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X\right)$ est dense dans $C(K,X)$. Soient $f\in C(K,X)$ et $\varepsilon>0$, on va construire un élément $u$ de $C(K)\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X$ tel que

$$\left\|J_u-f\right\|<\varepsilon.$$

Comme $f\left(K\right)$ est compact, on peut construire une suite finie $\left(W_i\right)_{i=1}^{n}$ telle que

$$W_i=\left\{f\left(t\right):\left\|f(t)-f(t_i)\right\|<\varepsilon\right\},$$

et $(W_i)_{i=1}^n$ recouvert $f(K)$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on pose

$$V_i = \{t \in K : \|f(t) - f(t_i)\| < \varepsilon\},$$

alors les ensembles ouverts $V_1, ..., V_n$ recouverent ausi $K$. D'après le Théorème 3.14, il existe $\{g_1, ..., g_n\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_i)_{i=1}^n$. Ainsi , pour tout $1 \leq i \leq n$ : $g_i \in C(K)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, à support dans $V_i$, et de plus

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(t) = 1 \text{ pour tout } t \in K.$$

On pose maintenant $u = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f(t_i)$, alors

$$\begin{aligned}
\|J_u - f\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(t) f(t_i) - f(t) \right\| \text{ pour tout } t \in K \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(t)(f(t_i) - f(t)) \right\| \text{ pour tout } t \in K \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |g_i(t)| \, \|f(t_i) - f(t)\| \text{ pour tout } t \in K \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} g_i(t) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

donc $||J_u - f|| < \varepsilon$. ■

# Bibliographie


[1] Dahmane ACHOUR *Factorisation des opérateurs sous linéaires et géométrie des espaces de Banach.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2005.

[2] R. M. Aron, C. Hervés and M. Valdivia. *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **52**, 189–204 (1983).

[3] (1980), 257-267.

[4] D. Achour and L. Mezrag. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **327** (1) (2007), 550-563.

[5] A. Acour and K. Saadi. *A polynomial caracterization of Hilbert spaces.* Collect. Math. 61, 3 (2010), 291 – 301

[6] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[7] F. Bombal, M. Fernández and I. Villanueva. *Unconditionally converging multilinear operators.* Math.Nachr. **226**, 5–15 (2001).

[8] H. A. Braunss. *Multi-ideals with special properties,* Blätter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, (1987).

[9] Hïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987

[10] J. M. F. Castillo, R. García and J. A. Jaramillo. *Extension of bilinear forms on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (12), 3647-3656.

[11] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[12] A. Defant, K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland (1993).

[13] K. Floret. *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces,* Note Mat. 17 (1997), 153–188.

[14] A. Grothendieck. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. SaoPaulo **8**, 1–79 (1956).

[15] Raymound A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics. (2001).

[16] Khalil SAADI. *Les opérateurs multi p-sommant et leurs applications.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2010.

[17] Abdelmoumen TIAIBA. *Les opérateurs sous linéaires $L_p$-sommant version commutative et non commutative.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2006.

[18] I. Villanueva. *Integral mappings between Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **279**, 56–70 (2003).

[19] A. C. Zaanen. *Introduction to operator theory in Riesz space.* Springer-Verlag. (1997).