

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

**Sur Les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel localisés
uniformes**

Présenté par :

Bakhti Houriya

Devant le jury :

Mr MOKHTARI Abdelhak

Mr FERAHTIA Nassim

Mr BEN MEDDOUR Mohamed Ourabah

M. C. A, Prof. Univ. de M'sila

M. C. B, Prof. Univ. de M'sila

M. A. A, Prof. Univ. de M'sila

Président

Encadreur

Examineur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah tout puissant de m'avoir patience, la volonté et l'énergie pour achever ce travail .

Je tiens à présenter toute ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur, Dr : *Feraktia Nassim*, pour la confiance et pour son soutien durant la préparation de ce mémoire, c'est un très grand honneur pour moi qu'il ait accepté d'être mon directeur de mémoire.

Je remercie vont également à tous les membres de jury *Mr Mokhtari Adelhak* et *Mr Ben Meddour Mohamed Ourabah*, pour avoir accepté d'en faire partie et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire.

Enfin, et bien que des simples remerciements ne suffisent pas pour exprimer tout ce que je leurs dois, mes remerciements les plus chaleureux à mes parents et à tous les membres de ma famille à tous mes amis sans oublier les membres de promotion de Master Analyse Fonctionnelle 2023. Merci à tous pour votre soutien et votre compréhension sans limite.

Dédicaces

- A mon très cher père : Bakhti Laid

A l'homme de ma vie , mon exemple du père respectueux honnête , éternel source de joie et de bonheur , la flamme de mon cœur , aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour l'estime et j'ai toujours eu pour toi , je t'aime papa et j'implore le tout-puissant pour que dieu t'accueille dans son paradis amen.

- A ma très chère Mère : Bakhti Fatima

Ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

- A mes chères sœurs Sabah, Samia, Maryyada, Asma pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral

- A mes chers frères, Chaabane, Lakhder, Laid pour leur appui et leur encouragement,

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire, Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible, Merci d'être toujours là pour moi.

Table des matières

Notations	5
Introduction générale	7
1 Les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel	9
1.1 Séries de Littlewood-Paley	9
1.2 Espace de Besov et espace de Lizorkin-Triebel	11
1.2.1 Espace de Besov $B_{p,q}^s$	11
1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$	12
1.3 La relation entre $F_{p,q}^s$ et $B_{p,q}^s$	12
1.4 Quelques inégalités classiques	14
1.5 Espace de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	17
1.6 Espaces de Besov non homogènes	18
1.7 Exemple de fonction dans l'espace de Besov	21
2 localisation des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel	22
2.1 Localisation des espaces de distribution	22
2.2 Le problème des multiplicateurs	31
3 les espaces de Besov localisés uniformes	33
3.1 Localisation uniforme	34
3.2 Définition et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-triebel	37
Conclusion générale	42
Bibliographie	43

Notations

- $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov, et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Lizorkin-Triebel.
- $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F.
- $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ sont respectivement les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel localisés uniformes.
- $(E)_{\ell^p}$ désigne l'espace localisé en norme ℓ^p , $1 \leq p \leq +\infty$.
- E_{lu} désigne l'espace localisé uniforme.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .
- $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ est le produit de convolution des fonctions f et g .
- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, le support de f est noté par $supp f$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est appelé aussi l'espace des distributions sur \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz, de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur \mathbb{R}^n , le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors sa transformée de Fourier est :

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi))(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

- p' est l'exposant conjugué de p , $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ où $p \in [1, +\infty]$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^n$ τ_a est l'opérateur de translation défini par $\tau_a f(\cdot) = f(\cdot - a)$.

- $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur \mathbb{R}^n telle que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- ℓ^q est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$.

Introduction générale

Comme il est connu précédemment que tout espace normé de fonctions sur \mathbb{R}^n , on peut associer sur cet espace sa version localisée uniforme et on note par E_{lu} , i.e., on a la relation suivante

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi).f\|_E < \infty,$$

avec τ_a désigne l'opérateur de translation, et φ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et non identiquement nulle.

Les espaces localisés uniformes jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle [10], comme il est connu si nous avons un espace E d'algèbre de Banach, alors on a $M(E) = E_{lu}$. On peut utiliser aussi la localisation uniforme d'un espace fonctionnel pour caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur cet espace, par exemple Allaoui et Bourdaud [9] ont démontré si une fonction opère sur l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$, alors sa dérivée appartient localement-uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Dans ce mémoire, on étudie la localisation en norme ℓ^p , $p \in [1, +\infty]$, sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, où on montre que l'espace de Besov n'est pas localisable en norme ℓ^p si $p \neq q$, en particulier, $B_{p,p}^s$ est localisable en norme ℓ^p , où ℓ^p est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^p} < \infty$, par contre on montre que l'espace de Lizorkin-Triebel est localisable en norme ℓ^p . Aussi, on étudie la localisation uniforme sur l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$ et l'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres

- Dans le premier chapitre, on va étudier quelques notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques résultats qu'on va utiliser dans la suite.

- Dans le deuxième chapitre , on va étudier la localisation d'un espace de distribution, en particulier on étudie la localisation en norme ℓ^p de l'espace de Besov et de Lizorkin-Triebel.
- Dans le troisième chapitre, on va étudier la localisation uniforme sur l'espace de Besov et l'espace de Lizorkin-Triebel, où nous allons étudié une caractérisation concrète sur ces espaces, i.e., ces espaces sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ pour $s > 0$.

Finalement , des conclusions générales et des perceptives sont tirées.

LES ESPACES DE BESOV ET LES ESPACES DE LIZORKIN-TRIEBEL

Dans ce chapitre, on va étudier quelques notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques résultats qu'on va utiliser dans la suite.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Dans cette section, on va rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- (i) $\text{supp } \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$,
- (ii) $\phi(\xi) \geq 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$,
- (iii) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)$, on obtient une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}.$$

Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) est appelé la partition de l'unité. A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolutions

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{cases} (\widehat{\Delta_k f})(\xi) = \phi(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) & , k \geq 1 \\ (\widehat{\varphi_k f})(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi) & , j \geq 0 \end{cases}$$

avec la notation $\Delta_0 = Q_0$.

Ecrivons la relation (1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors

$$\varphi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par \hat{f} , donc

$$\varphi(2^{-j}\xi)\hat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f}. \quad (1.2)$$

Pour $j=0$, on obtient

$$\varphi(\xi)\hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f},$$

i.e,

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f.$$

Et alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f.$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur (1.2), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f,$$

alors

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f,$$

donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f.$$

Définition 1.1. [12] Soit $f \in \mathcal{S}'$ et $a > 0$. On définit les opérateurs maximaux associés aux Δ_k et Q_k par

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a} \quad \text{et} \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a}.$$

Définition 1.2. [11] Soient A_1 et A_2 deux espaces de Banach. On dit que A_1 est s'injecte dans A_2 et on écrit $A_1 \hookrightarrow A_2$, si pour toute fonction f appartenant à A_1 , on a f appartenant à A_2 . De plus

il existe $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{A_2} \leq c\|f\|_{A_1}.$$

Définition 1.3. [4] Soit $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel. On dit que $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si $E_{p,q}^s \cdot E_{p,q}^s \hookrightarrow E_{p,q}^s$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute f et g appartenant à $E_{p,q}^s$ on a

$$\|f \cdot g\|_{E_{p,q}^s} \leq c\|f\|_{E_{p,q}^s}\|g\|_{E_{p,q}^s}.$$

Proposition 1.1. [4] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre.

$$(ii) \begin{cases} 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty \text{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \text{ou} \\ 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq 1 \text{ et } s = \frac{n}{p}. \end{cases}$$

Proposition 1.2. [4] Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si et seulement si

$$\begin{cases} 0 < p < q \leq \infty \text{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \text{ou} \\ 0 < q \leq p < \infty \text{ et } s > \frac{n(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})}{2}. \end{cases}$$

1.2 Espace de Besov et espace de Lizorkin-Triebel

Pour toute les définitions, les propositions et les propriétés de $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ de ce paragraphe, on peut consulter les livres de Triebel [12] et [13], on pourra aussi voir le livre de T. Runst et W. Sickel [11].

1.2.1 Espace de Besov $B_{p,q}^s$

Définition 1.4. [11] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. L'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} (\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty & \text{pour } q \neq \infty \\ \sup_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p) < +\infty & \text{pour } q = \infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Proposition 1.3. (i) $B_{\infty,\infty}^s = \mathcal{C}^s$ si $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$

(ii) $B_{p,q}^s$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$)

(iii) $B_{p,q_0}^{s+\epsilon} \hookrightarrow B_{p,q_1}^s$ si $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) Soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, alors

$$B_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p_1,q_1}^{s_1} \text{ avec } (0 < p_0 < p_1 \leq \infty)$$

1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$

Définition 1.5. [11] Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \|(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|)^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < +\infty & \text{pour } q \neq \infty \\ \|\sup_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|)\|_p < +\infty & \text{pour } q = \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.1. Dans la formule (1.3) (resp. (1.4)) on peut remplacer Δ_j par $\Delta_j^{*,a}$ avec $a > \frac{n}{p}$ (resp. $a > \frac{n}{\min(p,q)}$), et on obtient ainsi une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (resp. $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$).

Proposition 1.4. (i) $F_{p,q}^s$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$)

(ii) $F_{p,2}^0 = L^p$ et $F_{p,2}^s = H_p^s$ pour $1 < p < \infty$

(iii) $F_{p,q_0}^{s+\epsilon} \hookrightarrow F_{p,q_1}^s$ si $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) Soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, alors

$$F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p_1,q_1}^{s_1} \text{ avec } (0 < p_0 < q_1 \leq \infty)$$

1.3 La relation entre $F_{p,q}^s$ et $B_{p,q}^s$

Nous allons énoncer quelques inclusions entre $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$, où les démonstrations se trouvent dans le livre de Runst et Sickel [11].

Lemme 1.1. (i) soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, alors

$$B_{p,\min(p,q)}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s.$$

(ii) soient $0 < p < p_1 \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,p}^{s_1}.$$

En plus si $0 < u \leq p \leq v \leq \infty$ et $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$B_{p_0,u}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,v}^{s_1}.$$

Définition 1.6. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$ alors l'espace $L^P(\ell^{s,q})$ est

$$L^P(\ell^{s,q}) = \{\{f_k\} \subset \mathcal{S}' / \text{supp} \widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\}\},$$

où

$$\|\{f_k\}\|_{L^P(\ell^{s,q})} = \|\{2^{ks} f_k\}\|_{L^P(\ell^q)} = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_P < \infty.$$

Définition 1.7. soient $s \in \mathbb{R}$ $0 < p, q \leq \infty$, alors l'espace $\ell^{s,q}(L^p)$ est

$$\ell^{s,q}(L^p) = \{\{f_k\} \subset \mathcal{S}' : \text{supp} \widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\}\},$$

où

$$\|\{f_k\}\|_{\ell^{s,q}(L^p)} = \|\{2^{ks} f_k\}\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Séries convergentes dans $F_{p,q}^s$ et $B_{p,q}^s$

Cette section est consacré à des estimations du type de Yamazaki [14].

Proposition 1.5. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $r > 1$

(i) Il existe $c > 0$ telle que

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|f_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \sup_{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1} \|\theta^{(\alpha)}\|_{\infty} \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.5)$$

pour toute fonction $\theta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma$ et tout suite de distributions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie $\widehat{f_j}(\xi) = \theta(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi)$ avec $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Il existe $c > 0$, telle que

$$\left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|f_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.6)$$

pour tout suite de fonction $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $\text{supp} \mathcal{F} f_j \subset \{\xi : \gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j\}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$

(iii) Pour tout $a > 1$ il existe $c > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \quad (1.7)$$

pour toute suite de fonctions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $\text{supp } \mathcal{F}f_j \subset \{\xi : a^{-1}2^j \leq |\xi| \leq a2^j\}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Preuve. Voir [4]. □

1.4 Quelques inégalités classiques

Dans ce paragraphe, on va donner quelques estimations (Young, Hölder, Bernstein, Minkowski) comme outils de la suite de notre travail.

Théorème 1.1. (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec

$1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Propriétés 1.1. (Inégalité de Minkowski) Pour tout $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, et X un élément dans $\ell^p(\ell^q)$, alors on a

$$\|X\|_{\ell^q(\ell^p)} \leq \|X\|_{\ell^p(\ell^q)}.$$

Théorème 1.2. [6] (Riesz-Thorin) Soient (X, \mathcal{M}, μ) et (Y, \mathcal{M}', ν) deux espaces mesurés.

$p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ avec $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$. On suppose que T est un opérateur qui envoie de $L^{p_0}(X, \mu)$ dans $L^{q_0}(Y, \nu)$ et de $L^{p_1}(X, \mu)$ dans $L^{q_1}(Y, \nu)$ tel que, pour toute fonction simple f on a

$$\|Tf\|_{q_0} \leq c_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \|Tf\|_{q_1} \leq c_1 \|f\|_{p_1}.$$

Alors T envoie de $L^p = (L^{p_0}, L^{p_1})_\theta$ dans $L^q = (L^{q_0}, L^{q_1})_\theta$ tels que

$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$, ($0 < \theta < 1$). De plus

$$\|Tf\|_q \leq c_0^\theta c_1^{1-\theta} \|f\|_p.$$

Théorème 1.3. (Inégalité de Young) Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Alors, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve. Fixons $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et considérons l'opérateur $T_f = f \star g$, on a

$$T_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

i.e.,

$$|T_f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |g(x-y)| |f(y)|^{\frac{1}{q'}} dy.$$

Donc

$$\|T_f\|_q \leq \|g\|_q \|f\|_1,$$

de plus, par Hölder on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.$$

Finalement, $T : L^1 \rightarrow L^q$ et $T : L^{q'} \rightarrow L^\infty$, par interpolation on obtient alors

$$T : L^p \rightarrow L^r \text{ avec } \frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}, \quad \theta \in]0, 1[.$$

et

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Théorème 1.4. (Inégalité de Bernstein) Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ telle que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$, on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$.

On pose $\varphi_R(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{R})$ telle que $\varphi_R(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$, alors on a

$$\hat{f}(\xi) = \varphi_R(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \text{et} \quad f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1} \varphi_R)^{(\alpha)} \star f.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|(\mathcal{F}^{-1} \varphi_R)^{(\alpha)}\|_r \|f\|_p, \text{ avec } 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1} \varphi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n (\mathcal{F}^{-1} \varphi)^{(\alpha)}(Rx),$$

donc

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r,$$

i.e.,

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p, \text{ avec } c = \|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r.$$

□

Lemme 1.2. soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$, alors pour toute suite réelle positive $\{\epsilon_k\} \in \ell^q$, on a

$$\left\| a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j \right\|_{\ell^q} + \left\| a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^j \epsilon_j \right\|_{\ell^q} \leq c \|\epsilon_k\|_{\ell^q},$$

avec

$$\left(c = 2 \left(1 - a^{\min(1,q)} \right)^{\frac{-1}{\min(1,q)}} \right)$$

Preuve. Le cas $1 \leq q \leq \infty$, on pose

$$\eta_k = a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j, \quad \eta'_k = a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^j \epsilon_j,$$

donc

$$\begin{aligned} \eta_k &= a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j \\ &= \sum_{j=0}^k a^{(k-j)\frac{1}{q}} \epsilon_j a^{(k-j)\frac{1}{q'}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\eta_k^q \leq \left(\sum_{j=0}^k a^{(k-j)} \epsilon_j^q \right) \left(\sum_{j=0}^k a^{(k-j)} \right)^{\frac{q}{q'}},$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^N \eta_k^q \leq \left(\sum_{i=0}^N a^i \right)^{\frac{q}{q'}} \left(\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=j}^{k=N} a^{(k-j)} \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left(\sum_{i \geq 0} \epsilon_j^q \right)$$

donc

$$\|\eta_k\|_{\ell_q} \leq \frac{1}{1-a} \|\epsilon_j\|_{\ell_q}.$$

De même pour η'_k

Pour le cas $0 < q < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^N \eta_k^q \leq \left(\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=0}^{k=N} a^{(k-j)q} \right).$$

Donc

$$\|\eta_k\|_{\ell_q} \leq \left(\frac{1}{1-a^q} \right)^{\frac{1}{q}} \|\epsilon_j\|_{\ell_q}.$$

□

1.5 Espace de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

On va définir l'espace de Besov homogène et nous allons donner quelques caractéristiques principales de cet espace.

Définition 1.8. [5] Soient $s \in \mathbb{R}$ $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, l'espace de Besov homogène noté $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des toutes les fonctions $f \in \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Remarque 1.2. Si $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $q = \infty$ on a

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_p < \infty$$

Quelques propriétés

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $\left(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}\right)$ est un espace de Banach .
(ii) $\dot{B}_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$, si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
(iii) $\dot{B}_{2,2}^m(\mathbb{R}^n) = \dot{W}^m(\mathbb{R}^n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Propriétés 1.2. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$, alors :

$$\mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 1.6. On a :

1. Soient $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, telle que $s_1 < s_2$, $1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, pour $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, on a

$$\dot{B}_{p_1,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2,q}^{s_2}(\mathbb{R}^n).$$

2. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors :

$$\dot{B}_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p,q_2}^s(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [7]. □

Proposition 1.7. Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$, telles que pour tout $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

1.6 Espaces de Besov non homogènes

L'objectif de ce paragraphe , est faire présenté la définition de l'espace de Besov non homogène par le résultat de la proposition suivante :

Proposition 1.8. Pour $s > 0$, l'espace de Besov non homogène $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, telles que $[f] \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve. Soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.8)$$

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

On a $f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f$, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left\| \sum_{j \geq 0} \Delta_j f \right\|_p \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \|\Delta_j f\|_p \\ &\leq \sum_{j \geq 0} 2^{js} \|\Delta_j f\|_p 2^{-js} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\sum_{j \geq 0} 2^{js} \|\Delta_j f\|_p 2^{-js} \leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-jsq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

Par conséquent

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.9)$$

car $\left(\sum_{j \geq 0} 2^{-jsq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$ converge si $s > 0$

Pour $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j < 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

En utilisant l'inégalité $\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 \|f\|_p$, on obtient

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j < 0} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c \|f\|_p \left(\sum_{j < 0} 2^{jsq} \right)^{\frac{1}{q}}$$

par l'inégalité (1.9) nous avons

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c \|f\|_p \left(\sum_{j < 0} 2^{jsq} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + c_2 c_1 c \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

puisque $\left(\sum_{j \geq 0} 2^{jsq} \right)^{\frac{1}{q}}$ converge, si $s > 0$

Par conséquent

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c' \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.10)$$

En addition l'inégalité (1.9) avec l'inégalité (1.10) nous trouvons

$$\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c'' \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.11)$$

Et par l'inégalité (1.8) et l'inégalité (1.11), on obtient

$$\frac{1}{c''} \left(\|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \right) \leq \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

Alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \simeq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

□

Remarque 1.3. Si $s > 0$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach de distribution tempérées pour la norme

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

1.7 Exemple de fonction dans l'espace de Besov

Dans cette section, on va donner un exemple de fonction dans l'espace de Besov

Exemple 1.1. $f(x) = vp(\frac{1}{x})$ (la valeur principal de $\frac{1}{x}$).

On a

$$\widehat{f}(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}\xi$$

et

$$\operatorname{supp}\widehat{\Delta_j f} \subset \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

D'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2). \quad (1.12)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{\Delta_j f}\|_2, \quad (\text{Plancherel}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{f}\|_2 \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}}, \end{aligned}$$

Car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Alors l'équation (1.12) devient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1 - \frac{1}{p})}, \quad c = c_1 c_2,$$

d'où

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s + \frac{1}{p'})}.$$

La série $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s + \frac{1}{p'})q}$, $1 \leq q \leq +\infty$ converge si $s < -\frac{1}{p'}$, ce qui donne $f(x) = vp(\frac{1}{x}) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans les deux cas suivants

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{p'} & 2 \leq p \leq +\infty, \quad q = +\infty. \\ s < -\frac{1}{p'} & 2 \leq p \leq +\infty, \quad 1 \leq q \leq +\infty. \end{cases}$$

LOCALISATION DES ESPACES DE BESOV ET LIZORKIN-TRIEBEL

Dans ce chapitre, on va étudier la localisation d'un espace de distribution, en particulier on étudie la localisation en norme ℓ^p de l'espace de Besov et l'espace de Lizorkin-Triebel .

Définition 2.1. [9] Un espace de Banach de distribution (en abrégé :E.B.D.), dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complété $\| \cdot \|_E$, telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue .

Définition 2.2. [2] Soit E un espace de Banach de distribution (E.B.D) .

on dit que E est isométriquement Invariant par translation si , pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur de translation

$$\tau_a f(x) = f(x - a),$$

est une isométrie de E sur lui - même .

pour $v \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{D}$, on pose

$$P_v(f) = \sum_{|\alpha| \leq v} \int_{\mathbb{R}^n} | f^{(\alpha)}(x) | dx.$$

La topologie de l'espace de Fréchet $\mathcal{D}(K)$, où K est un compact de \mathbb{R}^n , peut être définie à l'aide de la famille de normes $(P_v)_{v \in \mathbb{N}}$.

2.1 Localisation des espaces de distribution

Soit E un espace de Banach de distribution. Nous ferons sur l'espace E les hypothèses suivantes :

- (1) Invariance par translation, si on note τ_x l'opérateur donnée par $\tau_x f(t) = f(x - t)$, alors τ_x est une isométrie de E .

(2) Invariance par localisation ; pour tout $f \in E$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi f \in E$.

Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et considérons les localisées $f_x = \tau_x \varphi \cdot f$, il résulte immédiatement des hypothèses 1 et 2 que famille $(f_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ est bornée dans E .

Il se pose alors le problème inverse ; reconstituer la norme de f à partir des normes des f_x .

On considère pour cela la classe \mathcal{A} des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - k) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.1. [2] Soient $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{D}$, sous les hypothèses de la proposition, la fonction $x \mapsto \|\tau_x g \cdot f\|_{M(E)}$ est à décroissance rapide quand $|x| \rightarrow +\infty$.

Proposition 2.2. [2] Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour une distribution u les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) Il existe un réseau \mathcal{R}_0 et une fonction g_0 adaptée à \mathcal{R}_0 telle que

$$(\|\tau_r g_0 \cdot u\|_E)_{r \in \mathcal{R}_0} \in \ell^p$$

(ii) Pour tout réseau \mathcal{R} et toute $g \in \mathcal{S}$ on a

$$(\|\tau_r g \cdot u\|_E)_{r \in \mathcal{R}} \in \ell^p$$

Preuve. L'implication (i) \Rightarrow (ii) repose sur le lemme suivant : □

Lemme 2.1. Soit $(u_r)_{r \in \mathcal{R}}$, une famille d'éléments de E , portés respectivement par les boules $|x - r| \leq \varrho$, où ϱ une nombre positif donné. Alors $u = \sum_{r \in \mathcal{R}} u_r$ vérifie l'estimation

$$\|(\|\tau_s g \cdot u\|)_{s \in \mathcal{R}}\|_{\ell^p} \leq C \|(\|u_r\|_E)_{r \in \mathcal{R}}\|_{\ell^p},$$

où C ne dépend que de ϱ et de g .

Le lemme admis, il suffit d'écrire

$$u = \sum_{r \in \mathcal{R}_0} \tau_r g_0 \cdot u,$$

pour obtenir la Proposition 2.2

Preuve du Lemme. Soit $\chi \in \mathcal{D}$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \varrho$, alors $u_r = \tau_r \chi \cdot u_r$ de sorte que

$$\begin{aligned} \|\tau_s g \cdot u\|_E &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}_0} \|\tau_s g \cdot \tau_r \chi\|_{M(E)} \|u_r\|_E \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}_0} \|g \cdot \tau_{s-r} \chi\|_{M(E)} \|u_r\|_E \end{aligned}$$

et l'estimation ℓ^p s'obtient en combinant l'inégalité de Young et la Proposition (2.1) \square

Définition 2.3. [2] Soit E un espace de Banach de distribution, on dit que l'espace E est localisable en norme ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty$), s'il existe $\varphi \in \mathcal{A}$ et une constante $c \geq 1$ telle que

$$c^{-1} \|f\|_E \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_E.$$

i.e, $E = (E)_{\ell^p}$, désignons par $(E)_{\ell^p}$ l'espace des distributions u telles que

$$\|u\|_{(E)_{\ell^p}} = \|(\|\tau_k \varphi \cdot u\|_E)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p} < \infty. \quad (2.1)$$

Dans le cas où $p = +\infty$, l'expression (2.1) s'écrit sous la forme

$$\|u\|_{(E)_{\ell^\infty}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot u\|_E < \infty.$$

$(E)_{\ell^p}$ est un espace de Banach de distribution, qui d'après la Proposition 2.1, ne dépend ni du choix du réseau particulier \mathbb{Z}^n , ni de la fonction φ adaptée au réseau.

On peut remplacer au besoin φ par une fonction $\theta \in \mathcal{S}$, convenablement choisie.

Proposition 2.3. [2] Soit \mathcal{S} est l'espace de Schwartz, si la fonction $\theta \in \mathcal{S}$ ne s'annule pas sur le support de φ , alors on a

$$\|u\|_{(E)_{\ell^p}} \sim \|(\|\tau_k \theta \cdot u\|_E)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p}$$

Preuve. La minoration de $\|u\|_{(E)_{\ell^p}}$ résulte de la Proposition 2.1 ((i) \Rightarrow (ii))

Dans l'autre sens, on observe que $\varphi = g\theta$, où $g \in \mathcal{D}$.

D'où

$$\begin{aligned} \|\tau_k \varphi \cdot u\|_E &\leq \| \tau_k g \cdot \tau_k \theta \cdot u \|_E \\ &\leq \|g\|_{M(E)} \|\tau_k \theta \cdot u\|_E \end{aligned}$$

\square

Proposition 2.4. [2] Soit N un entier naturel supérieur à s et $\lambda, \mu \in \mathcal{S}$, telles que

(i) $\mu(\xi) \neq 0$, pour $|\xi| \leq 3$,

(ii) $\lambda(\xi) \neq 0$, pour $1 \leq |\xi| \leq 3$ et $\lambda^{(\alpha)}(0) = 0$ pour $|\alpha| < N$.

En désignant par L_j ($j \geq 1$) les opérateurs de symboles respectifs $\lambda(2^{-j}\xi)$ et par L_0 l'opérateur de symbole $\mu(\xi)$, alors on a

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} \sim \|(2^{js} \|L_j u\|_p)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\ell^q}.$$

Preuve. Voir [2]. □

Théorème 2.1. [2] Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace L^p est localisable en norme ℓ^p .

Preuve. Il s'agit de montrer que l'opérateur $T_\varphi : f \mapsto (\tau_k \varphi \cdot f)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est un isomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

On introduit pour cela l'opérateur

$$S_\psi((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \psi \cdot f_k,$$

qui pour un choix convenable de $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sera un inverse à droite de T_φ .

Puisque φ est à support compact, il existe $c = c(\varphi) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\varphi(x - k)| \leq c,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|T_f\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_k \varphi(x)| |f(x)| dx \\ &\leq c \|f\|_1. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|T_f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x - k) f(x) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz-Thorin (1.2), alors on a l'opérateur T_φ est continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

i.e.,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p. \quad (2.2)$$

La continuité de S_ψ de $L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'obtient de la même manière, on a

$$\begin{aligned} \|S_\psi((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n})\|_1 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \psi \cdot f_k\|_1 \leq \|\psi\|_\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_1 \\ &= \|\psi\|_\infty \|(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\|S_\psi((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n})\|_\infty \leq (\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_\infty) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(x - k)| \right).$$

où φ et ψ sont des fonction à support compact quelconques .

Maintenant , on suppose que $\varphi \in \mathcal{A}$ et on choisit ψ de façon que $\psi = 1$ sur le support se φ , alors on a

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \varphi \cdot f \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \psi \cdot \tau_k \varphi \cdot f \\ &= S_\psi((\tau_k \varphi \cdot f)_{k \in \mathbb{Z}^n}), \end{aligned}$$

et la continuité de S_ψ de $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ donne

$$\|f\|_p \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

De les deux inégalités (2.2) et (2.3) , on obtient que l'espace L^p est localisable en norme ℓ^p \square

Théorème 2.2. [2] Soient $p, q \in [1, +\infty]$ $s \in \mathbb{R}$. On a

$$(i) B_{p,q}^s \hookrightarrow (B_{p,q}^s)_{\ell^p}, \text{ pour } p \geq q,$$

$$(ii) (B_{p,q}^s)_{\ell^p} \hookrightarrow B_{p,q}^s, \text{ pour } p \leq q$$

En particulier , $B_{p,p}^s$ est localisable en norme ℓ^p .

Preuve. Voir [2]. \square

Théorème 2.3. [8] Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$. $B_{p,q}^s$ et $(B_{p,q}^s)_{\ell^r}$ sont respectivement les espaces de Besov localisés .Alors

$$(i) B_{p,q}^s \hookrightarrow (B_{p,q}^s)_{\ell^r}, \text{ pour } r \geq \max(p, q),$$

$$(ii) (B_{p,q}^s)_{\ell^r} \hookrightarrow B_{p,q}^s, \text{ pour } r \leq \min(p, q).$$

En particulier , $B_{p,p}^s$ est localisable en norme ℓ^p

Preuve. (i) On montre que

$$\|u\|_{(B_{p,q}^s)_{\ell^r}} \leq c \|u\|_{B_{p,q}^s} \text{ pour } c > 0.$$

Nous avons d'après Proposition 1.5

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \tau_k \theta \cdot \Delta_j u \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où , $\|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \leq c \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p^q \right)^{\frac{r}{q}}$. Donc on a

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

i.e,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\|(2^{sj} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)} \right) \quad (2.4)$$

puisque , $r \geq \max(p, q)$, implique que $q \leq r$. Alors d'après l'inégalité de Minkowski on a

$$\|(2^{sj} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)} \leq c \|(2^{sj} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}.$$

Donc , nous pouvons voir que l'inégalité (2.4) devient comme suit

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \|(2^{sj} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}.$$

i.e,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_p^r \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Donc ,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} (\|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_{\ell^r(L^p)})^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.5)$$

Nous avons aussi, $r \geq \max(p, q)$ implique que $p \leq r$ i.e, $\ell^p \hookrightarrow \ell^r$, alors on a $\ell^p(L^p) \hookrightarrow \ell^r(L^p)$.

i.e.,

$$\|(\tau_k \theta \Delta_j \cdot u)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(L^p)} \leq c \|(\tau_k \theta \cdot \Delta_j u)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p(L^p)}.$$

Donc, Nous pouvons voir que l'inégalité (2.5) devient comme suit

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} (\|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_{\ell^p(L^p)})^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Puis que L^p est localisable en norme ℓ^p , alors on a $\|\tau_k \theta \cdot \Delta_j u\|_{\ell^p(L^p)} \sim \|\Delta_j u\|_p$. Donc ,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \theta \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq c \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{sjq} \|\Delta_j u\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|u\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

D'où , $B_{p,q}^s \hookrightarrow (B_{p,q}^s)^{\ell^r}$.

(ii) On montre que

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|u\|_{(B_{p,q}^s)^{\ell^r}} \text{ pour } c > 0.$$

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ Nous avons

$$\begin{aligned} \|L_j(u)\|_p &= \|L_j(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \varphi \cdot u)\|_p \\ &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} L_j(\tau_k \varphi \cdot u) \right\|_p \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

puisque, $r \leq \min(p, q)$, alors on a $\ell^r \hookrightarrow \ell^p$ i.e,

$$\|(\|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p} \leq c \|(\|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r}.$$

Donc , nous avons

$$\begin{aligned} \|L_j(u)\|_p &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|L_j(u)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p^r \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

i.e

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|L_j(u)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|(\|2^{sj} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}. \quad (2.6)$$

Puis que, $r \leq \min(p, q)$, implique que $r \leq q$, Alors d'après l'inégalité de Minkowski on a

$$\|(\|2^{sj} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p(\ell^r)} \leq c \|(\|2^{sj} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}$$

Donc , nous pouvons voir que l'inégalité (2.6) devient comme suit

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|L_j(u)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|(\|2^{sj} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}.$$

i.e,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|L_j(u)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|L_j(\tau_k \varphi \cdot u)\|_p^q \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot u\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq c \|u\|_{(B_{p,q}^s)^{\ell^r}}. \end{aligned}$$

D'où, $(B_{p,q}^s)^{\ell^r} \hookrightarrow B_{p,q}^s$.

□

Théorème 2.4. [8] Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty[$. $F_{p,q}^s$ et $(F_{p,q}^s)_{\ell^p}$ sont respectivement les espace de Lizorkin-Triebel et les espace de Lizorkin-Triebel localisés. Alors l'espace $F_{p,q}^s$ est localisable en norme ℓ^p . i.e., $F_{p,q}^s = (F_{p,q}^s)_{\ell^p}$.

Preuve. (i) $(F_{p,q}^s)_{\ell^p} \hookrightarrow F_{p,q}^s$

On montre que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{(F_{p,q}^s)_{\ell^p}} \text{ pour } c > 0.$$

De la Définition (1.5) $\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right\|_p^{\frac{1}{q}}$, On pose $\Delta_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \varphi \cdot \Delta_j f$, Cela implique que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 2^{sj} |\tau_k \varphi \Delta_j f|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p.$$

i.e,

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left\| 2^{sj} (\tau_k \varphi \Delta_j f)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^q(\ell^1)} \right\|_p.$$

Puisque, $1 \leq q$. Alors d'après de Minokowski on a

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left\| 2^{sj} (\tau_k \varphi \Delta_j f)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^q(\ell^1)} \right\|_p.$$

$$\leq \left\| \left\| 2^{sj} (\tau_k \varphi \Delta_j f)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^1(\ell^q)} \right\|_p.$$

i.e.,

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\tau_k \varphi \Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p$$

$$\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\tau_k \varphi \Delta_j f|^q \right\|_p^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi f\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où $(F_{p,q}^s)_{\ell^p} \hookrightarrow F_{p,q}^s$

(ii) $F_{p,q}^s \hookrightarrow (F_{p,q}^s)_{\ell^p}$.

Maintenant, on montre que

$$\|f\|_{(F_{p,q}^s)_{\ell^p}} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s} \text{ pour } c > 0.$$

Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi f\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \tau_k \varphi \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \right\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \tau_k \varphi \right\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De la Proposition 1.5, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\Delta_j f \tau_k \varphi|^q \right\|_p^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \tau_k \varphi \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque L^p est localisable en norme ℓ^p , alors on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_{F_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &\leq c \|f\|_{F_{p,q}^s}. \end{aligned}$$

D'où, $F_{p,q}^s \hookrightarrow (F_{p,q}^s)_{\ell^p}$.

□

2.2 Le problème des multiplicateurs

Soit E un espace de Banach de distributions, E aussi est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module isométriquement invariant par translations. On supposera de plus que E contient \mathcal{D} comme sous-espace dense.

L'espace des multiplicateurs de E (noté $M(E)$) est l'ensemble des distributions m pour les quelles il existe $c > 0$ tel que

$$\|mf\|_E \leq c\|f\|_E \quad (\forall f \in \mathcal{D})$$

$M(E)$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|m\|_{M(E)} = \sup\{\|mf\|_E : f \in \mathcal{D}, \|f\|_E \leq 1\}$$

Si on a $E \subset M(E)$, la multiplication, définie initialement sur $\mathcal{D} \times E$, se prolonge par continuité à $E \times E$ et E devient une algèbre de distributions.

Proposition 2.5. *Si E est localisable en norme ℓ^p alors $M(E)$ est localisable en norme ℓ^∞ , si on a de plus $E \subset M(E)$ alors $M(E)$, concide avec $(E)_{\ell^\infty}$.*

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_{M(E)} &\leq \|\tau_k \varphi\|_{M(E)} \|m\|_{M(E)} \\ &\leq \|\varphi\|_{M(E)} \|m\|_{M(E)}, \forall k \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_{M(E)} \leq \|\varphi\|_{M(E)} \|m\|_{M(E)},$$

d'où, $M(E) \subset (M(E))_{\ell^\infty}$.

Inversement, soit $\psi \in \mathcal{D}$ telle que $\psi(x) = 1$ sur le support de φ , on a $\forall \phi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \|m\phi\|_E &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi m \phi\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ car } E = (E)_{\ell^p} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k(\varphi\psi)m\phi\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi m\|_{M(E)}^p \cdot \|\tau_k \psi \phi\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall k \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Alors

$$\|m\phi\|_E \leq c\|\phi\|_E(\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi m\|_{M(E)}).$$

Donc on a $\frac{\|m\phi\|_E}{\|\phi\|_E} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi m\|_{M(E)}, \|\tau_k \varphi\|_{M(E)} \|m\|_{M(E)}, \forall k \in \mathbb{Z}^n$ cela donne

$$\sup_{\phi \neq 0} \frac{\|m\phi\|_E}{\|\phi\|_E} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi m\|_{M(E)}.$$

D'où $(M(E))_{\ell^\infty} \subset M(E)$. On suppose maintenant que $E \subset M(E)$ et On démontre $M(E) = (E)_{\ell^\infty}$.

Soit $m \in E$. d'où $\|m\|_{M(E)} \leq c\|m\|_E$, donc

$$\|\tau_k \varphi \cdot m\|_{M(E)} \leq c\|\tau_k \varphi \cdot m\|_E, \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

D'où

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_{M(E)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_E.$$

i.e, $(E)_{\ell^\infty} \subset (M(E))_{\ell^\infty}$.

Inversement, si $m \in M(E)$ on a

$$\|m\|_{(E)_{\ell^\infty}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_E,$$

donc on a

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot m\|_E &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi\|_E \|m\|_{M(E)} \\ &\leq c\|m\|_{M(E)}. \end{aligned}$$

i.e, $M(E) \subset (M(E))_{\ell^\infty}$. Et nous avons $M(E) = ((M)(E))_{\ell^\infty}$, alors on a

$$(M(E))_{\ell^\infty} \subset (E)_{\ell^\infty}.$$

□

Proposition 2.6. [2] Pour $1 \leq q < p \leq +\infty$ et $s > 0$, $M(B_{p,q}^s)$ est strictement inclus dans $(M(B_{p,q}^s))_{\ell^\infty}$

Preuve. Voir [2].

□

LES ESPACES DE BESOV LOCALISÉS UNIFORMES

Comme il est connu précédemment que tout espace normé de fonction sur \mathbb{R}^n , on peut associer sur cet espace sa version localisée uniforme et on note E_{lu} . i.e , on a la relation suivante

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \| (\tau_a \varphi) f \|_E < \infty,$$

avec τ_a désigne l'opérateur de translation , et φ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et non identiquement nulle . On peut montrer E_{lu} ne dépend pas du choix de la fonction auxiliaire φ (voir Proposition (3.2)) . Les espace localisés uniformes jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle [10], comme il est connu si nous avons un espace E d'algèbre de Banach, alors on a $M(E) = E_{lu}$. On peut utiliser aussi la localisation uniforme d'un espace fonctionnel pour caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur cet espace, par exemple Alaoui et Bourdaud [9] ont démontré si une fonction opéré sur l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$, alors sa dérivée appartient localement -uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Dans ce chapitre, on va étudier la localisation uniforme sur l'espace de Besov et l'espace de Lizorkin-Triebel, où on étudie une caractérisation concrète sur ces espaces , i.e., ces espaces sont décrit sans utiliser une fonction axiliaire φ pour $s > 0$.

Définition 3.1. [3] On dit que f appartient localement uniformément à l'espace E , et on écrit $f \in E_{lu}$, si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

- (a) $(\tau_a \varphi).f \in E \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n),$
- (b) $\exists C_\varphi > 0 \quad \text{telque} \quad \| (\tau_a \varphi).f \|_E \leq C_\varphi \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n).$

Proposition 3.1. Si E est un algèbre , alors

$$M(E) = E_{lu}.$$

Preuve. Soit $g \in M(E)$, on a

$$\begin{aligned} \| (\tau_a \varphi) \cdot g \|_E &\leq \| g \|_{M(E)} \| \tau_a \varphi \|_E \\ &= \| g \|_{M(E)} \| \varphi \|_E = C_\varphi. \end{aligned}$$

D'où, $g \in E_{lu}$.

Inversement, soient $f \in E_{lu}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi\psi = \varphi$, on a

$$\begin{aligned} \| f\varphi \|_E &= \| (f\psi)\varphi \|_E \\ &\leq \| f\psi \|_E \| \varphi \|_E \end{aligned}$$

car, $f\psi = f\tau_0\psi \in E$ et E est une algèbre, de plus

$\| f\psi \|_E = \| f\tau_0\psi \|_E \leq C_\psi$ (par définition),

d'où, $\| f\varphi \|_E \leq C \| \varphi \|_E$, par conséquent $f \in M(E)$. □

3.1 Localisation uniforme

Un E.B.D. est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\| \tau_a f \|_E = \| f \|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. De plus, si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module nous avons la propriété suivante

$$\| \tau_a \varphi \|_{M(E)} = \| \varphi \|_{M(E)}, \forall a \in \mathbb{R}^n \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Proposition 3.2. [1] Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution f appartient localement uniformément à E si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

(i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a \varphi_0)f \in E_0$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et

$$\| f \|_{E_{lu}} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \| (\tau_a \varphi_0)f \|_E < +\infty$$

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\tau_a \varphi)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\| f \|_{E_{lu}} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \| (\tau_a \varphi)f \|_E < +\infty.$$

L'ensemble des distribution ayant ces propriétés est noté E_{lu} , c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module isométriquement invariant par translation pour la norme $\| \cdot \|_{E_{lu}}$.

Preuve. Il est immédiat que $\| \cdot \|_{E_{lu}}$ est une norme invariante par translation, et que E_{lu} est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module. Passons aux propriétés moins évidentes.

Étape 1 Supposons satisfaite la condition (i) et considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit B une boule ouverte où la fonction φ_0 ne s'annule pas. Par compacité, il existe x_1, \dots, x_N dans \mathbb{R}^n tels que

$$\text{supp}\varphi \subset \cup_{j=1}^N (B + x_j).$$

et donc une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\varphi = \psi \left(\sum_{j=1}^N \tau_{x_j} \varphi_0 \right). \quad (3.2)$$

Par la propriété (3.1), il vient alors

$$\| (\tau_a \varphi) f \|_E \leq \sum_{j=1}^N \| (\tau_a \psi) (\tau_{a+x_j} \varphi_0) f \|_E \leq N \| \psi \|_{M(E)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \| (\tau_x \varphi_0) f \|_E,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la propriété (ii)

Étape 2 Considérons de nouveau une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ainsi qu'une fonction ψ telle qu'on ait (3.2). La continuité du plongement $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ implique l'existence d'une constante $c = c(\psi)$ telle que $|\langle g, \psi \rangle| \leq c \| g \|_E$ pour tout $g \in E$. On en déduit que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \sum_{j=1}^N |\langle (\tau_{x_j} \varphi_0) f, \psi \rangle| \leq N c \| f \|_{E_{lu}},$$

ce qui établit la continuité du plongement $E_{lu} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Étape 3 Il reste à établir la complétude de E_{lu} . Soit (f_k) une suite de Cauchy dans E_{lu} . Comme on vient de le voir, (f_k) admet une limite f au sens des distributions. Par ailleurs la suite $((\tau_a \varphi_0) f_k)$ est de Cauchy dans E , elle a donc une limite $u_a \in E$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. Puisque u_a est aussi la limite de $((\tau_a \varphi_0) f_k)$, on a $(\tau_a \varphi_0) f = u_a$. Alors la définition de l'espace E_{lu} implique que $f \in E_{lu}$ et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \| (\tau_a \varphi_0) (f - f_k) \|_E = 0.$$

□

Remarques 3.1. De la proposition ci-dessus, il résulte qu'à équivalence près, la norme de E_{lu} ne dépend pas du choix de la fonction φ_0 .

Définition 3.2. [10] Soit E est un E.B.D. et m un entier positif, l'espace de Sobolev $W^m(E)$

d'ordre m de base E , est l'ensemble des distribution f telles que

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E, \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(E)$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E.$$

Proposition 3.3. *Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a*

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}),$$

avec des normes équivalentes.

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Leibniz de la Proposition (3.2). □

Proposition 3.4. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors une fonction mesurable f sur \mathbb{R}^n appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (3.3)$$

où B une boule ouverte (ou un cube ouvert) dans \mathbb{R}^n . De plus, l'expression ci-dessus est équivalent à la norme $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.

Preuve. \Leftrightarrow Supposons que f a la propriété (3.3). En choisissant la fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ selon la Proposition (3.2) (i.e, positive, non identiquement nulle) à support dans la boule B , alors on a

$$\|(\tau_a \varphi_0)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_0(x-a)|^p |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|(\tau_a \varphi_0)f\|_p = \left(\int_{B+a} |\varphi_0(x-a)|^p |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ car } \text{supp } \varphi_0 \subset B$$

$$\leq \|\varphi_0\|_\infty \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

ce qui implique

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_p \leq \|\varphi_0\|_\infty \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< +\infty$$

cela montre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$

\Rightarrow) Inversement, supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (i.e, $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi)f\|_p < +\infty$).

En choisissant la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de telle sorte que $\varphi(x) = 1$ sur B , alors on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{B+a} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{car } \varphi(x) = 1 \text{ sur } B \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{car } B+a \subset \mathbb{R}^n \\ &\leq \|(\tau_a \varphi)f\|_p, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi)f\|_p \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

i.e, on la propriété (3.3).

□

Remarques 3.2. On a

$$L^\infty(\mathbb{R}^n)_{lu} = L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

3.2 Définition et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-triebel

On considère les puissances successives de l'opérateur Δ_h , définie inductivement par

$$\Delta_h^1 = \Delta_h \quad \text{et} \quad \Delta_h^{\ell+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^\ell \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie aisément la formule suivante

$$\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j f(x + (\ell - j)h) \quad , \ell = 1, 2, \dots$$

• Pour tout $[p \in +\infty]$, tout ensemble borélien A de \mathbb{R}^n , tout fonction mesurable f sur \mathbb{R}^n et tout

$t > 0$, on pose

$$\omega_{p,A}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left(\int_A |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\eta_{p,A}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left(\int_A |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note simplement $\omega_p = \omega_{p, \mathbb{R}^n}$ et $\eta_p = \eta_{p, \mathbb{R}^n}$.

Remarques 3.3. On utilise maintenant la définition de l'espace de Besov et l'espace de Lizorkin-Triebel, où $s \in [0, 1]$, pour plus en détails voir les livres de Triebel [12] et [13].

Définition 3.3. [10] Soient $0 < s < 1, p, q \in [1, +\infty]$. L'espace Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_p(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Définition 3.4. [10] Soient $0 < s < 1, 1 \leq p < \infty$ et $q \in [1, +\infty]$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonction f vérifiant

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 (t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)|^q dh)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty.$$

• Rappelons qu'on obtient les mêmes espaces fonctionnels avec des normes équivalents, en remplaçant dans la définition précédent, l'intégrale \int_0^1 par l'intégrale \int_0^r , où r est n'importe quel réel positif fixé.

Les espaces d'ordre supérieure à 1, sont par définition, les espaces de Sobolev basés sur les espaces d'ordres compris entre 0 et 1.

Définition 3.5. Soient $s > 1$ et m l'entier tel que $m < s \leq m + 1$. Alors $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonction f telle que $f^{(\alpha)} \in E_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \leq m$.

Cet espace est muni de la norme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{E_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)}.$$

Lemme 3.1. Pour tout $q \in [1, +\infty[$ et tout réel α , il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{2}} t^\alpha u(t) \leq c \left(\int_0^1 (t^\alpha u(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour toute fonction positive croissante u sur l'intervalle $]0, 1]$.

Théorème 3.1. [10] Si $0 < s < 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonction f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} < \infty. \quad (3.4)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuve. supposons que \mathbb{B} est la boule unité de \mathbb{R}^n . Soient φ_0 et φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telles que :

- $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, φ_0 est non identiquement nulle et portée par $\mathbb{B}/4$,
- $\varphi_1(x) = 1$ sur $4\mathbb{B}$.

On désignera par $A_j(f)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) les premiers termes respectifs des inégalités (3.4) ,(3.6) , (3.9) (3.10). On voit aussitôt que $\Delta_h((\tau_a \varphi_1)f)(x) = \Delta_h f(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{B} + a$, et tout $|h| \leq 1$. On en déduit aisément que

$$A_j(f) \leq c \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_1)f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

dans chacun des cas □

Preuve du théorème (3.1). On utilise la formule suivante, valable pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et toutes fonction f et g sur \mathbb{R}^n :

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h}g) + f(\Delta_h g). \quad (3.5)$$

soit f une fonction telle que $A_1(f) < \infty$. Par la formule (3.5) , on a , pour tous $a, h \in \mathbb{R}^n$ et $|h| \leq t \leq 1/2$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0)f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + t \|\nabla \varphi_0\|_{\infty} \left(\int_{\mathbb{B}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0)f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{1-s})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}}.$$

En raison de la condition $s < 1$ l'expression ci-dessus est majorée par $c_1 A_1(f)$, pour une certaine condition c_1 . Il vient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 A_1(f). \quad \square$$

Théorème 3.2. [10] $B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} < \infty \quad (3.6)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuve . On posera

$$M_{p,a}(f) := \sup_{0 < t \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{t} \eta_{p,\mathbb{B}+a}(f, t).$$

On dispose des formule suivantes , où $k \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}^n$ et où f et g sont des fonction quelconques

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h}g), \quad (3.7)$$

$$\Delta_h = 2^{-k} \Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h} \quad (3.8)$$

La première est immédiate , la seconde s'obtient facilement par récurrence sur k □

Lemme 3.2. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\omega_{p,\mathbb{B}+a}(f, t) \leq ct \left\{ \left(\int_{2\mathbb{B}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + M_{p,a}(f) |\ln t| \right\},$$

pour tout $0 < t \leq \frac{1}{2}$, tout $a \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction localement intégrable f

Preuve . Le lemme est une variante de l'inégalité classique de Marchaud . On définit l'entier $k \geq 1$ par l'encadrement $2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}$. De la formule(3.8) , on déduit , pour $|h| \leq t$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2^{-k} \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_{2^k h} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_{2^l h} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{-k+1} \left(\int_{2\mathbb{B}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} (2^{l-k} M_{p,a}(f)), \\ &\leq 4t \left(\int_{2\mathbb{B}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\ln 2} t |\ln t| M_{p,a}(f), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme (3.2) . preuve du théorème (3.2)

Soit f une fonction telle que $A_2(f) < \infty$. Par la formule(3.7) , il vient , pour $|h| \leq t \leq \frac{1}{4}$ et $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0)f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_1 t^2 \left(\int_{\mathbb{B}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_2 K \left(\int_{\mathbb{B}+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_p((\tau_a \varphi_0) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq c_3 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + c_3 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} + c_3 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En conséquence

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_4 \left(A_2(f) + \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Grâce au lemme (3.2), on a pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p, \mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq c_5 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \left(\int_0^{\frac{1}{p}} t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} + c_6 M_{p,a}(f) \left(\int_0^{\frac{1}{4}} t^{q-1} |\ln t|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme (3.1) à la fonction croissante $t \rightarrow \eta_{p, \mathbb{B}+a}(f, t)$, on conclut que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_7 A_2(f).$$

□

Théorème 3.3. [10] Si $0 < s < 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonction f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{B}+a)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} < \infty, \quad (3.9)$$

De plus l'expression ci dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$

Preuve. voir [10].

□

Théorème 3.4. [10] $F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonction f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} < \infty \quad (3.10)$$

De plus l'expression ci dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$

Preuve. Voir [10].

□

Conclusions générales et perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié la localisation en norme ℓ^p sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, où $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$ pour les espaces de Besov, et $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ pour les espaces de Lizorkin-Triebel. Aussi, on a étudié la localisation uniforme sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$ pour les espaces de Besov et $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ pour les espaces de Lizorkin-Triebel. On a caractérisé concrètement ces espaces, i.e., ces espaces sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ .

Dans les travaux futurs, nous étudierons la localisation uniforme sur d'autres espaces fonctionnels.

Bibliographie

- [1] S.E. Allaoui. Intégrales singulières, thèse de doctorat, université de batna, algérie, 2011.
- [2] B. Bourdaud. Localisations des espaces de besov. *Studia Math.*, 90 :153–163, 1988.
- [3] G. Bourdaud. *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*. Pub. Math. Univ. Paris 7, 1987.
- [4] N. Ferahtia. Localisations sur les espaces de lizorkin-triebel et composition dans certains espaces de besov localisés uniformes, thèse de doctorat, université de m'sila, algérie, 2021.
- [5] A. Haffaf. Inégalités de hardy dans les espaces de besov. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2017.
- [6] J. Löfström J. Bergh. *Interpolation spaces*. Springer, 1976.
- [7] B. Jawerth. Some observations on besov and triebel-lizorkin spaces. *Math. Scand.*, 40 :94–104, 1977.
- [8] S.E. Allaoui N. Ferahtia. A generalization of a localization property of besov spaces. *Carpathian Math. Publ.*, 10(1) :71–78, 2018.
- [9] G. Bourdaud S.E. Allaoui. Composition dans les espaces de besov critiques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 25 :875–893, 2016.
- [10] G. Bourdaud S.E. Allaoui. Localisation uniforme des espaces de besov et de lizorkin-triebel. *Arch. Math.*, 109 :551–562, 2017.
- [11] W. Sickel T. Runst. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations*. De Gruyter, Berlin, 1996.
- [12] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [13] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II*. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [14] M. Yamazaki. A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, i : Boundeness on spaces of besov type, ii : A symbolic calculus. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, *ibidem*, 33 :131–174, 311–345, 1986.

ملخص: في هذه المذكرة، قمنا بدراسة خاصية المحلية وفق التنظيم ℓ^p على فضاءات بيزوف $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ من أجل $s \in \mathbb{R}$ ، $p, q \in [1, +\infty[$ وفضاءات ليزوركين-تريبيل $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ من أجل $s \in \mathbb{R}$ ، $p \in [1, +\infty[$ ، $q \in [1, +\infty]$.

أيضا، درسنا المحلية المنتظمة على فضاءات بيزوف وفضاءات ليزوركين-تريبيل، أين قمنا بإعطاء خصائص ملموسة لهذا الفضاءات، بمعنى أن هذه الفضاءات يمكن وصفها دون استعمال الدالة المساعدة φ من أجل $s > 0$.

الكلمات المفتاحية: فضاءات بيزوف، فضاءات ليزوركين-تريبيل، المحلية وفق التنظيم ℓ^p ، المحلية المنتظمة.

Dans ce mémoire, on a étudié la localisation en norme ℓ^p sur les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty[$, et les espaces de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$. Aussi, on a étudié la localisation uniforme sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, où on a caractérisé concrètement ces espaces, i.e., ces espaces sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ , pour $s > 0$.

Mots-Clés : Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Localisation en norme ℓ^p , Localisation uniforme.

In this memoir, we have studied the localization in ℓ^p norm on Besov spaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ for $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty[$, and Lizorkin-Triebel spaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ for $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$. Also, we studied the uniform localization on Besov spaces and Lizorkin-Triebel spaces, where we concretely characterized these spaces, i.e., these spaces are described without using an auxiliary function φ , for $s > 0$.

Keywords : Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Localization in ℓ^p norm, Uniform localization.