UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire: Master

THÈME

LES ESPACES DE BESOV HOMOGENES REALISES

ET LA COMPSITION

Rédige Par:

1) BERRA Khouloud

Dirigé par:

M. MOUSSAI

Remerciments

Je tiens à remercier en premier lieu, mon dieu qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail .

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire .

Je tiens à remercier Prof M. MOUSSAI, directeur de mon mémoire, pour sa disponibilté et ses conseils judicieux tout au long de ce travail .

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et mes soeures qui m'ont toujours encouragé .

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, aussi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire .

Notations

• $C^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\ \ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \partial^\alpha f$ existe et continue, tq $|\alpha| \leq m, \forall m \in \mathbb{N}\}$.

• $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $D'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $D(\mathbb{R}^n)$ appelé espaces des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

• S : l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, sur $\mathbb{R}^n$.

• S' : l'espace des distributions tempérées .

• $\mathbb{Z}^-$: la droite gauche de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

• $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ g(y)dy$ est le produit de convolution des fonctions f et g des fonctions à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

• Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(x)dx.$$

et sa transformation de Fourier inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) f(x)dx.$$

• ∂f est le dérivée de la fonction f .

• $c, C, C', ...$désigneront des constantes strictements positives qui peuvent changer leurs valeurs d'une ligne à une autre.

• $S_m := \left\{ f \in S; \widehat{f}^{(j)}(0) = 0; j = 0, 1, ..., m-1, \text{avec } m = 1, 2, ..., \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \right\}$ donc si $m = \infty$, on note $S_\infty := \left\{ f \in S; \widehat{f}^{(\alpha)}(0) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}$

• $\wp_m$: polynôme de degré strictement inférieur à m (inférieur ou égal à $m-1$).

• $\wp_\infty$: le sous-espace de $S'(\mathbb{R}^n)$ de tout les polynômes sur $\mathbb{R}^n$.

• S'_m : l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes $\wp_m$.

• S'_∞ : l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes $\wp_\infty$.

• $[f]$: la classe d'équivalence d'une distribution $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ modulo $\wp_\infty(\mathbb{R}^n)$.

• $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$,intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, le support de f est $supp\ f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

• $L^p(\Omega) = \{ \ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, mesurable tel que $\int\limits_{\Omega} |f \ |^p \, d\mu < \infty\}$ muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ .$$

• Inégalité de Young : $\forall \ p, q, r \in [1, \infty]$ tel que : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \ .$$

• Inégalité de Hölder : Si $1 \leq p \leq \infty$, q est le conjugué de p $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, alors $\forall \ f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ on a : $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \ .$$

pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est sera Cauchy-Schwartz .

Table des matières

Introduction **1**

1 Espaces de Besov **2**

1.1 La décomposition de Littlewood-Paley 2

1.2 L'espace de Besov homogène 4

1.3 L'espace de Besov non homogène 6

1.4 Quelques notions 6

2 Espaces de Besov homogènes réalisés **11**

2.1 Généralités sur les réalisations 11

2.2 Réalisation de l'espace de Besov homogène 12

2.3 Propriétés de la réalisation 14

3 Quelques propriétés **19**

3.1 Injections 1

3.2 Inégalité de Hardy 24

4 Application à la composition **25**

4.1 La composition des espaces de Besov 25

4.2 Un cas particulier 27

4.2.1 La composition des espaces de Sobolev 27

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'etude des espaces de Besov homogènes, en particulier, on cherche à rendre ces espaces dans les distributions tempérées, car ils sont définis modulo les polynômes .

Le premier chapitre de ce mémoire est un rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes, leurs normes, en plus quelques théorèmes, notions qui lui donne plus importence, plus particularité parmi les autres espaces dans l'analyse fonctionnelle.

Dans le second chapitre, on cherche à réaliser les espaces homogènes, cela signifie choisir dans chaque classe d'équivalence (modulo les polynôme) un représentant et un seul de façon cohérent i.e linéaire et continue, nous avons aussi quelques propriétés comme l'invariance par translation et dilatation .

Dans le troisième chapitre nous donnons des propriétés comme les inclusions, les injections qui concernent les espaces de Besov.

Dans le dernier chapitre on applique la composition sur les espaces de Besov comme une partie d'application de ce mémoire .

Chapitre 1

Espaces de Besov

Nous rappelons quelques notions, quelques définitions nécessaires pour la suite, en particulier la décomposition de Littlewood-Paley, les espaces de Besov homogènes et non homogènes. Nous rappelons aussi quelques propriétés principales qui concernent les espaces de Besov .

1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\varrho \in S(\mathbb{R}^n)$, telles que :

i) $supp\ \varrho \subset \{\xi : |\xi| \leq \frac{3}{2}\}$

ii) $0 \leq \varrho \leq 1$

iii) $\begin{cases} \varrho(\xi) = 1 & , \text{si } |\xi| \leq 1 \\ \varrho(\xi) = 0 & , \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Soit γ la fonction indéfiniment différentiable, paire et positive, dont le support soit un compact de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, telles que :

i) $\gamma(\xi) = \varrho(\xi) - \varrho(2\xi)$

ii) $supp\ \gamma \subseteq \{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\}$

Pour obtenir aux deux expressions de la décomposition de Littlewood-Paley, on va calculer :

$$(a) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) \qquad , \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

et

$$(b) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) \quad , \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

(a) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} \gamma(2^{-j}\xi) &= \sum_{j=0}^{m} \left[\varrho(2^{-j}\xi) - \varrho(2^{-j+1}\xi)\right] \\ &= \varrho(2^{-m}\xi) - \varrho(2\xi) \end{aligned}$$

Comme ϱ est continue, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m} \gamma(2^{-j}\xi) \\ &= 1 - \varrho(2\xi) \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\varrho(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1 \qquad , \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1.1}$$

cette dernière formule est appellé non homogène .

(b) $\forall \ l, m \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-l}^{m} \gamma(2^{-j}\xi) &= \sum_{j=-l}^{m} \left[\varrho(2^{-j}\xi) - \varrho(2^{-j+1}\xi)\right] \\ &= \varrho(2^{-m}\xi) - \varrho(2^{l+1}\xi) \end{aligned}$$

Pareil, comme ϱ est continue, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\gamma(2^{-j}\xi) &= \lim_{m\to\infty,l\to\infty}\sum_{j=-l}^{m}\gamma(2^{-j}\xi)\\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty}\varrho(2^{-m}\xi)-\lim_{l\longrightarrow\infty}\varrho(2^{l+1}\xi)\\ &= 1\end{aligned}$$

Car ϱ est à support compact, donc $\varrho(\infty)=0$,

Alors

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\gamma(2^{-j}\xi)=1 \qquad ,\forall\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \tag{1.1.2}$$

cette dernière formule est appellé la décomposition d'unité homogène .

1.2 L'espace de Besov homogène

D'après la décomposition de Littlewood-Paley nous avons trouvé la formule 1.1.2

On multipliant 1.1.2 par $\widehat{f}$, il vient :

$$\widehat{f}(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Par la transformée de Fourier inverse, on a :

$$f(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-j}.)\right)*f(\xi)$$

Définition 1.2.1 *Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on définit l'opérateur de convolution $\Delta_k f$ par :*

$$\begin{aligned}\Delta_k f\,:S'(\mathbb{R}^n)&\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)\\ f&\longmapsto\ \Delta_k f\end{aligned}$$

tel que

$$\widehat{\Delta_k f}(\xi):=\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-k}\xi)\widehat{f}(\xi),\qquad\forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.2.1 *un calcul simple donne :*

$$\Delta_k f(x) = \left(2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k.)\right) * f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.2 *Soient $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov homogène $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que :*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ksq}\, \|\Delta_k f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{1.2.2}$$

$\dot{B}^{s}_{p,q}$ muni de la norme $\|.\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}}$ est un espace de Banach .

Remarque 1.2.2 *Il est important de noter que $\forall v \in \wp_\infty$, ona $\|v\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}} = 0$, ceci car*

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_k v}(\xi) &= \gamma(2^{-k}\xi) \sum_\alpha a_\alpha \delta^{(\alpha)}_{\xi=0} \\
&= \gamma(0) \sum_\alpha a_\alpha \delta^{(\alpha)}_{\xi=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.3 *Si on remplace la partition 1.1.2 par une partition continue, c-à-d*

$$\int_0^\infty \phi_t(\xi)\frac{dt}{t} = 1$$

où $\phi \in D(\mathbb{R}^n \backslash 0)$, alors on obtient une norme équivalente dans $\dot{B}^{s}_{p,q}$, à savoir le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *Soit $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}$ ssi*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}} := \left(\int_0^\infty \frac{1}{t^{sq}} \left\|\mathcal{F}^{-1}\phi_t * f\right\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{1.2.3}$$

tel que $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t}),\ t > 0$.

Preuve. (voir [1]) ■

1.3 L'espace de Besov non homogène

D'après la décomposition de Littlewood-Paley non homogène 1.1.1, on a :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\varrho * f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-j}.) * f(x)$$

Définition 1.3.1 *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur de convolution $S_j f$ par :*

$$\begin{aligned} S_j f : S'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto S_j f \end{aligned}$$

tel que

$$\widehat{S_j f}(\xi) := \varrho(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad ,\forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.3.1 *un calcul simple donne :*

$$S_j f(x) = \left(2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\varrho(2^j.)\right) * f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3.1}$$

Définition 1.3.2 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, l'espace de Besov usuel (non homogène), on le note par $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{skq} \|\Delta_k f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} + \|S_0 f\|_p . \tag{1.3.2}$$

Comme le théorème 1.2.3, on peut obtenir une somme continue équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, mais nous remarquons que l'aurons pas besoin par la suite de ce travail .

1.4 Quelques notions

i) S_j et Δ_k sont des applications linéaires (i.e : $\Delta_k(f + \lambda g) = \Delta_k(f) + \lambda\Delta_k(g)$

$S_j(f + \lambda g) = S_j(f) + \lambda S_j(g)$. $\forall\ f, g \in S'$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$).

ii) $f \in S'(\mathbb{R}^n) : f = S_j f + \sum_{k \geq j+1} \Delta_k f$, $j \in \mathbb{Z}$.

iii) $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n) : f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k f$.

Nous avons aussi les deux résultats suivants :

Théorème 1.4.1 *Soit* $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta_k f\|_p \le c.2^{kN},\ \forall k \in \mathbb{Z}^-. \tag{1.4.1}$$

Théorème 1.4.2 *Soit* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta_k f\|_p + \|S_0 f\|_p \le c.2^{-kN},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.4.1

a) Soit $f(x) = \delta$ (la mesure de Dirac)

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k \delta\|_p &= 2^{kn}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{kn-k\frac{n}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C.2^{kn(1-\frac{1}{p})}, \text{(si on pose } C = \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma(y)\right\|_p)
\end{aligned}$$

Comme

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{sk}\|\Delta_k\delta\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = C.\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{k(s+n(1-\frac{1}{p}))q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Alors
$\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $s < n(\frac{1}{p}-1)$ et

$$\|\delta\|_{B^{n(\frac{1}{p}-1)}_{p,q}} = C.\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{k(s+n(1-\frac{1}{p}))q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

b) $vp\frac{1}{x} \in B^s_{p,q}$

Preuve. (voir [6]) ■

Théorème 1.4.3 ***(Triebel 1983):*** *Si on change* ϱ *par* $\widetilde{\varrho}$, *avec* $\widetilde{\varrho}$ *de même type que* ϱ, *c-à-d :* $\widetilde{\varrho} \in D(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \widetilde{\varrho} \leq 1$, $\widetilde{\varrho}(\xi) = 1$, *pour* $|\xi| \leq 1$, *paire , les normes obtenues notées* $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}^{(\widetilde{\varrho})}$ *et* $\|f\|_{B^s_{p,q}}^{(\widetilde{\varrho})}$ *sont équivalentes respectivmentes aux* $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}^{(\varrho)}$ *et* $\|f\|_{B^s_{p,q}}^{(\varrho)}$.

Remarque 1.4.1 $\exists\ \alpha, \beta > 0$ *tel que:*

$$\begin{aligned}
\alpha \|f\|_{B^s_{p,q}}^{(\rho)} &\leq \|f\|_{B^s_{p,q}}^{(\widetilde{\rho})} \leq \beta \|f\|_{B^s_{p,q}}^{(\rho)} \\
\alpha \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}^{(\rho)} &\leq \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}^{(\widetilde{\rho})} \leq \beta \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}^{(\rho)}
\end{aligned}$$

Preuve. (voir [8]) ■

Théorème 1.4.4 ***(Bernstein):*** *Soient* $0 \leq p \leq r$, $R > 0$, $\exists\ c > 0$, $\forall\ f \in S'(\mathbb{R}^n)$, *telle que* $supp\widehat{f} \subset \{\xi : |\xi| \leq R\}$, *alors*

$$\|f\|_r \leq c.R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|f\|_p$$

et

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_r \leq c.R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|} \|f\|_p, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{1.4.2}$$

Preuve. Soit $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$, $supp\widehat{f} \subset \{\xi : |\xi| \leq R\}$, on pose $(\theta = \varrho)$, $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$, $\theta(\xi) = 1$, $\forall \xi : |\xi| \leq 1$, on pose aussi $\theta(\frac{\xi}{R}) = 1 : \left|\frac{\xi}{R}\right| \leq 1$, c-à-d $|\xi| \leq R$,

Comme

$$\mathcal{F}^{-1}(\theta(\frac{\xi}{R}))(x) = R^n \mathcal{F}^{-1}\theta(Rx)$$

il vient alors

$$f(x) = (R^n \mathcal{F}^{-1}\theta(R.) * f)(x)$$

d'après l'inégalité de Young on a :

$$\|f\|_r \leq \left\|R^n \mathcal{F}^{-1}\theta(R.)\right\|_q \|f\|_p$$

tel que : $1 \leq p, q \leq r$ et $\frac{1}{r}+1= \frac{1}{q}+\frac{1}{p}$

On pose :

$$\begin{aligned} A &= R^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}^{-1}\theta(Rx) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= R^{n-\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}^{-1}\theta(y) \right|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c.R^{n-\frac{n}{q}} \qquad (\text{ tq } c = \left\| \mathcal{F}^{-1}\theta \right\|_q) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|f\|_r &\leq c.R^{n(1-\frac{1}{q})} \|f\|_p \\ &\leq c.R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|f\|_p \end{aligned}$$

et par le même façon du démonstration (puisque $(f * g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} * g, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$) on obtient :

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_r \leq c.R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|} \|f\|_p$$

■

Théorème 1.4.5 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, +\infty]$. Si $f \in B^s_{p,q}$ alors, $f^{(\alpha)} \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}$ et*

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}} \leq C. \|f\|_{B^s_{p,q}}$$

Preuve. D'après le théorème de **Bernstein**, en posant $R = 2^k$, on a :

$$\left\| (\Delta_k f)^{(\alpha)} \right\|_r \leq C.2^{k[n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|]} \|\Delta_k f\|_p \,, \quad \text{avec } r \geq p$$

$$\left\| (S_0 f)^{(\alpha)} \right\|_r \leq C'. \left(\frac{3}{2} \right)^{|\alpha|} \|S_0 f\|_p \tag{1.4.3}$$

si $r = p$:

$$2^{k(s-|\alpha|)} \left\| (\Delta_k f)^{(\alpha)} \right\|_r \leq C.2^{sk} \|\Delta_k f\|_p \,.$$

Ce qui donne

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{(s-|\alpha|)k}\left\|(\Delta_k f)^{(\alpha)}\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C.\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{sk}\left\|\Delta_k f\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.4.4}$$

après l'addition de 1.4.3 et 1.4.4 on obtient le résultat du théorème, c-à-d $f^{(\alpha)} \in B_{p,q}^{s-|\alpha|}$ et

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{B_{p,q}^{s-|\alpha|}} \leq C\left\|f\right\|_{B_{p,q}^{s}}$$

■

Remarque 1.4.2 *L'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder si $p = q = \infty$, noté C^s tel que $B_{\infty,\infty}^s = C^s$ (il en est de même, pour le cas homogène). L'espace de Hölder a une norme suivante :*

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^s} &= \|f\|_{B_{\infty,\infty}^s} = \sup_{k\geq 1}\left(2^{sk}\|\Delta_k f\|_\infty\right) + \|S_0 f\|_\infty \\ \|f\|_{\dot{C}^s} &= \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^s} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{sk}\|\Delta_k f\|_\infty\right) \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Remarque 1.4.3 *Dans le cas òu $s \in]0,1[$, l'espace de Hölder possède une norme suivante :*

$$\|f\|_{C^s} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}.$$

et si $s \in \mathbb{R}^+ \diagdown \mathbb{N}$ on a :

$$\|f\|_{C^s} = \|f\|_\infty + \sum_{|\alpha|\leq[s]}\sup_{x\neq y}\frac{\left|f(x)^{(\alpha)}-f(y)^{(\alpha)}\right|}{|x-y|^{s-[s]}}$$

Chapitre 2

Espaces de Besov homogènes réalisés

Ce chapitre est consacré par les espaces de Besov homogènes, en commençant par une généralité sur les réalisations, en particulier la réalisation de Besov homogène, nous donnons aussi quelques propriétés importantes des réalisations dans l'espace de Lizorkin-Triebel .

2.1 Généralités sur les réalisations

Soit E un sous-espace de S', muni d'une structure d'espace de Banach, telle que l'injection canonique $E \longrightarrow S'$ soit continue. On appellera réalisation de E une application linéaire continue

$$\begin{array}{ccc} \sigma & : & E \longrightarrow S' \\ u & \longmapsto & \sigma(u) \end{array}$$

telleque, pour tout $u \in E$, $[\sigma(u)] = u$. Le sous-espace $\sigma(E) \subset S'$ sera appelé une réalisation de E. σ étant une bijection de E sur $\sigma(E)$, l'espace $\sigma(E)$ est muni par la norme de E, est donc un espace de Banach de distributions tempérées.

Proposition 2.1.1 *(voir [1]) Soit*

$$\sigma_0 : E \longrightarrow S$$

une réalisation, d'image E_0. Pour toute autre réalisation

$$\sigma : E \longrightarrow S'$$

il existe une suite finie $(\pi_\alpha)_{|\alpha|\leq N}, \alpha \in \mathbb{N}^n$, de formes linéaires continues sur E_0, telles que, en posant

$$\pi(f)(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} \pi_\alpha(f)x^\alpha$$

on ait

$$(\sigma \circ \sigma_0^{-1})(f) = f + \pi(f)(\forall f \in E_0)$$

Réciproquement, la donnée de $\pi(f)$ détermine une réalisation σ de E, à savoir

$$\sigma(u) = \sigma_0(f) + \pi(\sigma_0(u))$$

Cette proposition est dû à G. Bourdaud, voir [1] pour une démonstration complète.

2.2 Réalisation de l'espace de Besov homogène

Définition 2.2.1 *Une réalisation modulo $\wp_m(\mathbb{R}^n)$ de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue*

$$\sigma : \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)/\wp_m(\mathbb{R}^n) \tag{2.2.1}$$

$$f \longmapsto \sigma(f)$$

telle que $[\sigma(f)] = f$, pour tout $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, et on le note $\dot{\widetilde{B}}^s_{p,q} := \sigma(\dot{B}^s_{p,q})$, avec $\dot{\widetilde{B}}^s_{p,q}$ est l'espace réalisé de Besov. Une telle réalisation est un isomorphisme linéaire de $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

sur son image, de sorte que $\sigma\left(\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ devient un espace de Banach si on le munit de la norme :

$$\|\sigma(f)\| := \|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.2.2}$$

Théorème 2.2.1 *(voir [3])Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, si $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}$ alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f$ converge dans $S'(\mathbb{R}^n)$, D'après la définition de la réalisation de Besov, on a*

$$\sigma(f) = u \tag{2.2.3}$$

est une réalisation ($[u] = f$) et $u \in \tilde{\dot{B}}^{s}_{p,q}$, donc

$$\sigma(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f. \tag{2.2.4}$$

Remarque 2.2.1 *Si on a σ une réalisation de $\dot{B}^{s}_{p,q}$, alors toutes les réalisations s'obtiennent*

$$\sigma(u) = \sigma_0(u) + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \mathcal{L}_\alpha(u)x^\alpha$$

tel que $\mathcal{L}_\alpha(u)$ est constante.

Remarque 2.2.2 *Si $f \in S'(\mathbb{R}^n)/\wp_\infty(\mathbb{R}^n)$ et si la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f$ converge dans $S'(\mathbb{R}^n)/\wp_m(\mathbb{R}^n)$, on pose*

$$\sigma_m := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \in S'(\mathbb{R}^n)/\wp_m(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 2.2.1 *(voir [3]) On définit l'entier $\mu = \mu(s, p, q, n)$ comme suit :*

$$\mu := \begin{cases} \max \left([s - \frac{n}{p}], -1\right), & \text{si } q > 1 \text{ ou } s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ s - \frac{n}{p} - 1, & \text{si } q = 1 \text{ et } s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors $\sigma_\mu(f)$ est défini pour tout $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. L'application σ_μ ainsi définie est une réalisation de $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ modulo $\wp_\mu(\mathbb{R}^n)$ qui commute avec les translations et avec les dilatations. cette proposition est dû encore à G. Bourdaud, pour sa démonstration voir [9].

2.3 Propriétés de la réalisation

Théorème 2.3.1 *Si* $u \in \dot{B}^{s}_{p,q}$*, il existe un unique élément* $f \in \sigma(\dot{B}^{s}_{p,q})$*, tel que* $[f] = u$ *et l'application* $\sigma(u) = f$ *commute avec* τ_a *et* $\hbar_\lambda$ *c.à.d:*

$$\begin{aligned} \tau_a \circ \sigma &= \sigma \circ \tau_a, \forall a \in \mathbb{R}^n. \\ &\quad et \\ \hbar_\lambda \circ \sigma &= \sigma \circ \hbar_\lambda, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Preuve. • Soit $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} (\tau_a \circ \sigma(f))(x) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \tau_a(\Delta_j f(x)) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f(x-a) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j y) f(x-a-y)dy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j y)\tau_a(f)(x-y)dy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(\tau_a f(x)) \\ &= \sigma(\tau_a f)(x) \\ &= (\sigma \circ \tau_a)(f)(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\tau_a \circ \sigma = \sigma \circ \tau_a$$

• On peut remplacer γ par ψ une fonction dans $D(\mathbb{R}^n \backslash 0)$,d'après le théorème 1.2.3 qui donne l'équivalence des normes dans les espaces de Besov homogènes,

$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_k f(x) \sim \int_0^\infty (\mathcal{F}^{-1}\psi_t * f)\frac{dt}{t}$ tels que :

$$\begin{cases} t \sim 2^{-j} \\ j \in \mathbb{Z} \\ t \in [0, \infty] \end{cases}$$

donc

$$\sigma(f) = \widetilde{\sigma}(f)$$

telle que :

$$\widetilde{\sigma}(f) = \int_0^\infty (\mathcal{F}^{-1}\psi_t * f)\frac{dt}{t} \qquad ,\psi_t(x) = \frac{1}{t^n}\psi(\frac{x}{t}),\ t > 0.$$

alors

$$\begin{aligned} (\hbar_\lambda \circ \sigma(f))(x) &= (\sigma(f))(\frac{x}{\lambda}) \\ &= (\widetilde{\sigma}(f))(\frac{x}{\lambda}) \\ &= \int_0^\infty (\mathcal{F}^{-1}\psi_t * f)(\frac{x}{\lambda})\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\psi_t(y) f(\frac{x}{\lambda} - y) dy \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

on pose $\lambda y = z$, $\lambda^n dy = dz$,donc

$$(\hbar_\lambda \circ \sigma(f))(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\mathcal{F}^{-1}\psi(\frac{z}{\lambda t}) f(\frac{1}{\lambda}(x - z))\frac{dz}{\lambda^n}\frac{dt}{t}$$

on pose $\lambda t = v$

$$\begin{aligned}(\hbar_\lambda \circ \sigma(f))(x) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{v^n} \mathcal{F}^{-1}\psi(\frac{z}{v})(\hbar_\lambda f)(x-z)dz\frac{dv}{v} \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}^{-1}\psi_v * (\hbar_\lambda f)(x)\frac{dv}{v} \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}^{-1}\psi_t * (\hbar_\lambda f)(x)\frac{dt}{t} \\ &= (\widetilde{\sigma}(\hbar_\lambda f))(x) \\ &= ((\widetilde{\sigma} \circ \hbar_\lambda)(f))(x).\end{aligned}$$

■

Définition 2.3.1 *On dit qu'une distribution tempérée $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 à l'infini si on a :*

$$\lim_{\lambda \to 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

dans $S'(\mathbb{R}^n)$, c-à-d

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\langle f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right), \varphi \right\rangle = 0,\ \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

L'ensemble des telles distributions est notée $\widetilde{C_0}(\mathbb{R}^n)$.

$1-$ $f \in S'(\mathbb{R}), f \in \widetilde{C_0}(\mathbb{R}^n)$ car :

$$\begin{aligned}|< f, \varphi >| &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \\ &\overset{(Cauchy-Schwartz)}{\leq} \|f\|_2 \|\varphi\|_2\end{aligned}$$

d'autre part:

$$\begin{aligned}|<\hbar_t f,\varphi>| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(\frac{x}{t})\varphi(x)dx\right| \\ &\overset{(Cauchy-Schwartz)}{\leq} \|\varphi\|_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(\frac{x}{t})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

on pose $x = ty$

$$\begin{aligned}|<\hbar_t f,\varphi>| &\leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2 .t^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \\ \text{quand } t &\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

$2-$ $\partial f \in \widetilde{C_0}(\mathbb{R})$ car :

$$|<\hbar_\lambda \partial f,\varphi>| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial f(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx\right|$$

on pose $x = \lambda y$, $dx = \lambda^n dy$

$$\begin{aligned}|<\hbar_\lambda \partial f,\varphi>| &= \lambda^n \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial f(y)\varphi(\lambda y)dy\right| \\ &= \lambda^n |<\partial f,\varphi(\lambda.)>| \\ &= \left|(-\lambda)^{n+1} <f,\partial\varphi(\lambda.)>\right| \\ &= \left|(-\lambda)^{n+1}\right| \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial\varphi(\lambda x)dx\right|\end{aligned}$$

si on pose $\lambda x = y$, $dx = \frac{dy}{\lambda^n}$

$$|<h_\lambda \partial f,\varphi>| = |(-\lambda)| \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\frac{y}{\lambda})\partial\varphi(y)dy\right|$$

$$\overset{(H\ddot{o}lder)}{\leq} \lambda \|f\|_\infty \|\partial\varphi\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{, quand } \lambda \longrightarrow 0.$$

Proposition 2.3.1 *(voir [5]) On suppose que les paramètres s, p, q satisfont les conditions suivantes : $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1 + (1/p)$, et $1 \leq q \leq \infty$, ou $s = 1 + (1/p)$ et $q = 1$. Soit $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des distributions tempérées f telles que :*

$$[f] \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \partial_j f \in \widetilde{C_0}(\mathbb{R}^n) \qquad ,\text{pour } j = 1, ..., n$$

Tout élément de $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ admet un représentant dans $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, unique à l'addition près d'une constante. L'espace $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sera muni de la semi-norme $\|.\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on considère $g \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors une suite $(g_k)_{k\geq 1}$ dans $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, et une suite numérique $(a_k)_{k\geq 1}$ telles que :*

(i) $\|g_k\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}} \leq c \|g\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}}$
(ii) $g_k + a_k \longrightarrow g$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg:

D'après l'inégalité de Hölder, pour toute fonction u à valeurs réelles,

$$\|u\|_r \leq \|u\|_q^{\theta} \|u\|_s^{1-\theta} \tag{2.3.2}$$

où $\theta \in [0, 1]$ et r, q, s sont des nombres réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$.
Comme une résultat concerne des espaces de Besov de cette inégalité :

$$\|f\|_{\frac{p}{\theta}} \leq \|f\|_{\infty}^{1-\theta} \|f\|_p^{\theta}$$

alors, on obtient :

$$\|f\|_{B^{\theta s}_{\frac{p}{\theta},\frac{q}{\theta}}} \leq c. \|f\|^{\theta}_{B^{s}_{p,q}} \|f\|^{1-\theta}_{B^{0}_{\infty,\infty}}$$

Chapitre 3

Quelques propriétés

Dans ce chapitre on va donner quelques propriétés importantes comme les injections, les inclusions, qui concernent les deux chapitres précédentes .

3.1 Injections

Définition 3.1.1 *On dit que $A \hookrightarrow B$ une injection continue si:*

i) $x \in A \Rightarrow x \in B$ $(A \subset B)$

ii) l'application $id : A \to B, x \mapsto x$, est continue .

Théorème 3.1.1 *Dans tout les propriétés suivantes ,il en est le même pour le cas homogène*

- $0 < p \leq r \leq \infty$:

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow B^t_{r,m} \qquad , \text{ si } t < s - \frac{n}{p} + \frac{n}{r}, q \leq m. \tag{3.1.1}$$

- $r > p$,

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow B^t_{r,m} \qquad , \text{si } t = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{r}, \text{ et } 0 < q \leq 1$$

- $0 < p \leq r \leq \infty$, si $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ (ou $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ et $0 \leq q \leq 1$), alors

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow L_r$$

- Si $s > \frac{n}{p}$, (ou $s = \frac{n}{p}$ et $0 < q \leq 1$), alors

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty .$$

- Si $s > 0$, (ou $s = 0$ et $0 < q \leq 1$), donc

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow L_p.$$

Théorème 3.1.2

- $0 < p, q, r \leq \infty$, si $s_1 > s_2$, alors

$$B^{s_1}_{p,q} \hookrightarrow B^{s_2}_{p,q} \tag{3.1.2}$$

- $q_2 > q_1$, si $p \leq r$ et $t \leq s - \frac{n}{p} + \frac{n}{r}$ alors

$$B^s_{p,q_1} \hookrightarrow B^t_{p,q_2}$$

Remarque 3.1.1 *Tout ces théorèmes sont démontré dans [7] et [8], ici quelques démonstrations :*

Preuve. • $0 < p \leq r \leq \infty$, si $t < s - \frac{n}{p} + \frac{n}{r}$

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow B^t_{r,m}$$

si on pose $R = 2^k$ dans le théorème de **Bernstein :**

$$\begin{aligned} \|\Delta_k f\|_r &\leq C.2^{kn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|\Delta_k f\|_p \\ 2^{tk} \|\Delta_k f\|_r &\leq C.2^{sk} \|\Delta_k f\|_p .2^{k(t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \end{aligned}$$

et comme : $\forall a_k, b_k \geq 0$,

$$a_k.b_k \leq b_k. \left(\sum_{k\geq 1}^{\infty} (a_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

donc

$$2^{tk}\left\|\Delta_k f\right\|_r \ \leq C.2^{k(t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r})}.\left(\sum_{j\geq 1}^{\infty}\left(2^{sj}\left\|\Delta_j f\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.3}$$

et

$$\left\|S_0 f\right\|_r \leq C_0\left\|S_0 f\right\|_p \tag{3.1.4}$$

la somme de 3.1.3 et 3.1.4 nous donne :

$$\begin{aligned} 2^{tk}.\left\|\Delta_k f\right\|_r+\left\|S_0 f\right\|_r &\leq C'.2^{k(t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r})}\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \\ \left\|S_0 f\right\|_r+\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{tk}\left\|\Delta_k f\right\|_r\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} &\leq C'.\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k(t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r})}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \end{aligned}$$

on pose

$$C=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(2^{k(t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r})}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

alors

$$\left\|f\right\|_{B^t_{r,m}} \leq C'.C\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}}$$

pour C converge , $t-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{r}<0$, donc $t<s-\frac{n}{p}+\frac{n}{r}$.

• $0<p\leq r\leq\infty$: (on particulier le cas de $r\geq 1$), si $s>\frac{n}{p}-\frac{n}{r}$

$$B^s_{p,q}\hookrightarrow L_r$$

$$\begin{aligned} \left\|f\right\|_r &= \left\|S_0 f+\sum_{k\geq 1}\Delta_k f\right\|_r \\ &\overset{(\|.\|_r \text{ est une norme })}{\leq} \left\|S_0 f\right\|_r+\sum_{k\geq 1}\left\|\Delta_k f\right\|_r \\ &\overset{(Bernstein)}{\leq} c\left(\left\|S_0 f\right\|_p+\sum_{k\geq 1}2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})}\left\|\Delta_k f\right\|_p\right) \end{aligned}$$

on pose

$$C' = \sum_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \left\|\Delta_k f\right\|_p$$

$$= \sum_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)}.2^{ks} \left\|\Delta_k f\right\|_p$$

$$\leq \quad \sum_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)} \left(\sum_{j\geq 1} \left(2^{js} \left\|\Delta_j f\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)} \left\|f\right\|_{B^s_{p,q}}$$

donc

$$\|f\|_r \leq \sum_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)} \left\|f\right\|_{B^s_{p,q}}$$

et

$\sum\limits_{k\geq 1} 2^{k(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)}$ est converge si $\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s<0$, alors $s>\frac{n}{p}-\frac{n}{r}$, d'òu

$$B^s_{p,q} \hookrightarrow L_r$$

- $0<p,q,r\leq\infty$, si $s_1>s_2, q\leq r$, alors

$$B^{s_1}_{p,q} \hookrightarrow B^{s_2}_{p,r}$$

Soit $f \in B^{s_1}_{p,q}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{s_2}_{p,r}} &= \left(\sum_{k\geq 0} 2^{s_2.kr} \left\|\Delta_k f\right\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\sum_{k\geq 0} 2^{(s_2-s_1)kr} \left(2^{s_1 k} \left\|\Delta_k f\right\|_p\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(L_q\subset L_r)}{\leq} \left(\sum_{k\geq 0} 2^{(s_2-s_1)kr} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{s_1.jq} \left\|\Delta_k f\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}.r}\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

donc

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p,r}} \leq \left(\sum_{k\geq 0} 2^{(s_2-s_1)kr} \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{B^{s_1}_{p,q}} ,$$

pour $\left(\sum_{k\geq 0} 2^{(s_2-s_1)kr} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$, il faut $s_2 - s_1 < 0$, c.à.d $s_2 < s_1$ ■

Théorème 3.1.3 $\forall \lambda > 0, \forall\ f \in\ \dot{B}^{s}_{p,q}$:

$$\|f(\lambda.)\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}} = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}}$$

Preuve. (voir [4]) ■

Proposition 3.1.1 *Les espaces de Besov jouissent de propriétés analogues aux espaces de Lizorkin–Triebel, Voici quelques propriétés supplémentaires :*

- $\dot{F}^{s}_{p,p} = \dot{B}^{s}_{p,p}$
- $\dot{B}^{s}_{p,\min(p,q)} \hookrightarrow \dot{F}^{s}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s}_{p,\max(p,q)}$

(le même pour le cas homogène)

Proposition 3.1.2 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. Soit f une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et si $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ au sens des distributions tempérées, alors $f \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c.\sup_{k\geq 1} \|f_k\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

(i) $B^s_{p,q}$ est un Banach pour $p, q \in [1, \infty]$.

(ii) $B^s_{p,q} = C^s$ pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

(iii) $B^s_{2,2} = H^s$ l'espace de Sobolev .

(iv) $B^s_{p,2} =$ l'espace de Bessel .

3.2 Inégalité de Hardy

On considère une fonction ψ définissant une analyse de Littlewood-Paley :
$\widehat{\psi}$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, est portée par la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$.
L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est alors le sous-espace de $S'(\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{js} |\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 3.2.1 *Pour $s > 0$, $s-\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$, l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ admet une et une seule réalisation σ invariante par dilatations, i.e. vérifiant :*

$$\sigma(u(\lambda x)) = \sigma(u)(\lambda x), \forall \lambda > 0, \forall u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.1}$$

La réalisation de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est alors notée $\dot{H}^s_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$.

Les fonctions des espaces réalisés vérifient une inégalité de type Hardy. Cette inégalité est importante et permet notamment d'obtenir des résultats sur la localisation des espaces. On a en effet la

Proposition 3.2.2 *Soit $s \geq 0$, $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction f de l'espace $\dot{H}^s_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}} dx \leq C \|f\|^2_{\dot{H}^s}$$

Chapitre 4

Application à la composition

Dans ce chapitre on va etudier le cas de la composition de Besov, comme une cas particulière la composition de Sobolev, dans la partie des applications dans ce travail .

4.1 La composition des espaces de Besov

Définition 4.1.1 *Pour $p \in]1, +\infty[$, on désigne par $u_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions boréliennes*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telles que :

$$\|f\|_{u_p}^p := \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \sup_{|h| \leq t} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \infty$$

On dit qu'une fonction continue f appartient à $U_p^1(\mathbb{R})$ s'il existe une fonction borélienne bornée $h \in u_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$f(x) - f(0) := \int_0^x h(t)dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.1}$$

On munit $U_p^1(\mathbb{R})$ de la semi-norme :

$$\|f\|_{U_p^1} := \inf\left\{\sup_{\mathbb{R}} |h| + \|h\|_{u_p}\right\}$$

la borne inférieure étant étendue aux fonctions h qui vérifient (4.1.1).

Théorème 4.1.1 *(voir [2]) Soient s, p et q trois réels tels que $1 < p < \infty, 1 < s < 1 + \frac{1}{p}$ et $1 \leq q \leq \infty$. Toute fonction f lipschitzienne, nulle à l'origine et appartenant à $\dot{B}_{p,\infty}^{1+\frac{1}{p}}$ envoie par composition à gauche $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. En revanche il était tout aussi clair qu'une inégalité du type :*

$$\|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^{1+(\frac{1}{p})}} \leq c(f)\, \|g\|_{B_{p,1}^{1+\frac{1}{p}}} \tag{4.1.2}$$

redonnerait gratuitement , par interpolation non linéaire, l'estimation :

$$\|f \circ g\|_{B_{p,q}^s} \leq c(f)\, \|g\|_{B_{p,q}^s} \tag{4.1.3}$$

dans la plage $0 < s < 1 + (1/p)$

Théorème 4.1.2 *(voir [4])Soient $1 \leq p < \infty$, $q \in [1, \infty]$ et $0 < s < 1 + (1/p)$. Si $f \in U_p^1(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, alors T_f envoie $B_{p,1}^{1+(\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^{1+(\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^n)$ et $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui même .*

De plus il existe des constantes $c > 0$ telles que :

$$\|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^{1+(\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^n)} \leq c\, \|f\|_{U_p^1}\, \|g\|_{B_{p,1}^{1+(\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^n)} \quad ,\forall g \in B_{p,1}^{1+(\frac{1}{p})}(\mathbb{R}^n)$$

$$\|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{U_p^1}\, \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \quad ,\forall g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 4.1.3 *(voir [4]) Soient $1 \leq p < \infty$, $q \in [1, +\infty], 0 < s < 1+(1/p)$ et $f \in U_p^1(\mathbb{R})$*

(i) Pour tout $g \in \dot{B}_{p,1}^{1+(1/p)}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$[f \circ g] \in \dot{B}_{p,\infty}^{1+(1/p)}(\mathbb{R}^n)$$

$\partial_j(f \circ g) \in \widetilde{C_0}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $j = 1, ..., n$, et

$$\|f \circ g\|_{\dot{B}^{1+(1/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{U^1_p}\,\|g\|_{\dot{B}^{1+(1/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.1.4}$$

(ii) Pour tout $g \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$f \circ g \in \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|f \circ g\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{U^1_p}\,\|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{4.1.5}$$

Preuve. la démonstration est basée sur les axes suivants :

- $B^s_{p,q} = \dot{B}^{s}_{p,q} \cap L_p \qquad ,s > 0$
- $\|f(\lambda.)\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-\frac{n}{p}}\,\|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$
- Approximation par le lemme de Fatou dont nous le rappellons :

  Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, alors

$$\int_{\Omega} \underline{\lim}\ f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

■

4.2 Un cas particulier

4.2.1 La composition des espaces de Sobolev

Dans les espaces de Sobolev fractionnaires $W^s_p, 0 < s < 1 + (1/p)$. Ces espaces partagent la propriété d'admettre un calcul fonctionnel sous-linéaire, au sens òu il existe des fonctions non affines

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telles que l'on ait, pour une certaine constante c et toute fonction $g \in W^s_p$,

$$\|f \circ g\| \leq c\,\|g\| \tag{4.2.1}$$

la norme étant celle de W_p^s . En revanche, dès qu'on a $s > 1+(1/p)$, la condition (4.2.1) entraîne que f est une fonction affine. La propriété (4.2.1) est satisfaite par une classe naturelle de fonctions f, que nous définissons maintenant.

Définition 4.2.1 *On appelle $BH(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur la droite réelle dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure bornée.*

Théorème 4.2.1 *(voir [4]) Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $0 < s < 1+(1/p)$. Toute fonction $f \in BH(\mathbb{R})$, telle que $f(0)=0$, opère sur $W_p^s(\mathbb{R})$ par composition à gauche, de plus il existe une constante $c = c(s,p,n) > 0$ telle que*

$$\|f \circ g\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{BH}\,\|g\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} \quad ,\forall g \in W_p^s(\mathbb{R}^n) \tag{4.2.2}$$

Remarque 4.2.1 • *Peut-on définir U_p^1 dans les cas limites $p=1$ et $p=+\infty$? , Il est bien connu que la condition*

$$\sup_{h\neq 0}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)| < \infty$$

est équivalente au fait que f' est une mesure bornée. Dès lors il est naturel de poser $U_1^1(\mathbb{R}) := BH(\mathbb{R})$, Quant à $U_\infty^1(\mathbb{R})$, c'est simplement l'ensemble des fonctions lipschitziennes.

• Dans le théorème (4.2.2), il est possible de remplacer $BH(\mathbb{R})$ par $U_p^1(\mathbb{R})$, à condition toute fois de se limiter au cas òu W_p^s est un espace de Besov .

Bibliographie

[1] G. Bourdaud. *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov.* Univ. Paris **7**, 2009 .

[2] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, W. Sickel. *Superposition operators and functions of bounded p-variation.* Rev. Mat. Iberoamer. **22** (2006), 455-485 .

[3] G. Bourdaud. *Réalisations des espaces de Besov homogènes.* Arkiv Mat. **26** (1988), 41-54 .

[4] G. Bourdaud. *Realization of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Math. Nachr. **286** (2013), 476-491 .

[5] G. Bourdaud, Y. Meyer. *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes.* Rev. Mat. Iberoamer. **22** (2006), 725-746.

[6] M. Moussai. *Realization of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and an application topointwise multipliers.* Ana. App. **13**, 149-183 (2015) .

[7] T. Runst, W. Sickel. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations.* De Gruyter, Berlin, 1996 .

[8] H. Triebel. *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser, Basel, 1983 .