UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

Athmane ABDALLAOUI

Sujet

ESPACES FONCTIONNELS DE TYPE DE BESOV

Dirigé par :

Mr. D.Drihem

Promotion: 2010/2011

Résumé

Nous intéressons ici aux quelques propriétés principaux des espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$, qu'ils concernent quelques inclusions entre ces espaces et aussi les espaces de Besov et Treibel-Lizorkin, puis on donne quelques normes équivalentes pour l'espace $B^{s,\tau}_{p,q}$ par la fonction maximale de Peetre, finalement on donne une caractérisation par différence finies pour ces espaces.

Tous ces résultats sont des généralisations des résultats classiques connus dans les espaces de Besov.

Mots clés: L'espace $B^{s,\tau}_{p,q}$, l'espace de Besov, l'espace de Triebel-Lizorkin, fonction maximale de Peetre.

Table des matières

Introduction

L'idée de définir l'espace $B_{p,q}^{s,\tau}$ est présenté par G. Bourdaud dans son livre [1], où il démontre que toute fonction $f \in L_{\mathrm{loc}}^2$ est dans l'espace BMO (Bounded Mean Oscillation) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} |f(x)| \, dx < \infty$$

et

$$\sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|} \sum_{j \geq J} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_j \mathcal{F} f \right) \mid L^2 (B_J) \right\|^2 < \infty,$$

où le sup est sur tout $J \in \mathbb{Z}$ et toute boules B_J de $\mathbb{R}^n$ et $\left\{ \Psi, \varphi_j \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité.

Le but de mon mémoire est d'étudie les propriétés principaux de l'espace $B_{p,q}^{s,\tau}$. Ce espace à été étudié auparavant par El Baraka en 2006. Pour $\tau = 0$ ce espace coincide avec l'espace de Besov $B_{p,q}^{s}$ qui à été etudié en détaille par H.Triebel.

Le mémoire se divise en quatre chapitres.

Dans le première chapitre on donne quelques rappeles sur les espaces de Lebesgue et quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Dans le deuxième chapitre on donne la définition et les propriétés des espaces $B_{p,q}^{s,\tau}$. Plus précisement on demontre les injections de Sobolev. Dans les espaces de Besov les injections de Sobolev

$$B_{t,q_1}^{r} \hookrightarrow B_{p,q}^{s}$$

avec $0 < t < p < \infty, s < r, r - n/t = s - n/p$, sont basés sur l'inégalité de Plancherel-polya-Nikol'skij. Puisque la norme dans les espaces $B_{p,q}^{s,\tau}$ est localisée (les intégrales sur des boules), alors on utilise une modification convenable pour démontrer les injections de Sobolev dans ces espaces, puis on donne quelques inclusions entre ces espaces et les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin. En particulier pour $\tau \geq 1/p$, $0 < p, q < \infty$ et $s, \sigma \in \mathbb{R}$, on a

$$B^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow B^{\sigma}_{1,\infty}.$$

Dans le troisième chapitre on donne une caractérisation par la fonction maximale de Peetre pour ces espaces.

Dans le quatrième chapitre on donne une caractérisation par différence finies pour ces espaces.

Bibliographie

[1] G. Bourdaud, *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*, Publ. Math. Univ. Paris. VII, 23, 1987.

[2] S. Campanato, *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 17 (1963), 175-188.

[3] S. Campanato, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. 18 (1964), 137-160.

[4] D. Drihem, *Some embeddings and equivalent norms of the* $\mathcal{L}^{\lambda,s}_{p,q}$ *spaces*, Func. Appro 41 (1), (2009), 15-40.

[5] D. Drihem, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces by differences. Preprint*, 2011.

[6] A. El Baraka, *An embedding theorem for Campanato spaces*, Electron. J. Diff. Eqns. 2002 (2002), N. 66, 1-17.

[7] A. El Baraka, *Littlewood-Paley characterization for Campanato spaces*, J. Funct. Spaces. Appl. 4 (2) (2006), 193-220.

[8] T. Runst et W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations.* De Gruyter, Berlin 1996.

[9] W. Sickel, D. Yang, W. Yuan, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2005, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[10] J.-O. Strömberg et A. Torchinsky, *Weighted Hardy spaces*, Lecture Notes in Math. 1381, Springer, Berlin, 1989.

[11] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[12] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhäuser, Basel, 1992.

[13] H. Triebel, *Theory of Function Spaces III*, Birkhäuser, Basel, 2006..

[14] D. Yang et W. Yuan, *A new class of function spaces connecting Triebel–Lizorkin spaces and Q spaces,* Journal of Functional Analysis 255 (2008), 2760–2809.

[15] D. Yang, W. Yuan, *New Besov-type spaces and Triebel-Lizorkin-type spaces including Q spaces. Math. Z* 265 (2010), 451–480.