



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équation aux dérivées partielles et applications

Thème

Application de degré topologique sur un problème elliptique non-Linéaire

Présentée par :

Mlle DJERIOU Bochra

Membres du jury :

A. SENGOUGA	MCA ,	Université de M'sila	Président.
B. BOUGHERARA	MCA ,	Université de M'sila	Encadreur.
A. MOKHTARI	MCB ,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur **Brahim Bougherara** pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury **A. Sengouga, A. Mokhtari**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercie vivement messieurs **A. Saadi**, le chef de département de mathématiques.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes sœurs et frères pour leur soutien tout au long de mes études.

Merci

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire :

- N Un entier supérieur ou égal à 1.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Ouvert .
- $\bar{\Omega}$ La fermeture de Ω .
- $\partial\Omega$ La frontière de Ω .
- $dist$ Distance .
- $B(x, r)$ La boule ouverte de centre x et de rayon r .
- $\bar{B}(x, r)$ La boule fermé de centre x et de rayon r .
- Id L'application identité.
- $det(.)$ Déterminant.
- $X \setminus A$ Complémentaires de A à X (A est un sous ensemble quelconque de X).
- $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^1
- $*f'(x)$ La différentielle de f en x .
- $*f|_{\Omega \cap F}$ Restriction de l'application f sur $\Omega \cap F$.
- $L^p(\Omega)$ $\{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ $\{u \in L^p(\Omega), D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m\}, 1 \leq p \leq \infty, m \in \mathbb{N}^N$.
- $C(\bar{\Omega})$ Espace de fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.
- $C^k(\Omega)$ Espace de fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).
- $C^k(\bar{\Omega})$ Espace de fonctions u de $C^k(\Omega)$ telles que pour chaque multi indice $\alpha, |\alpha| \leq k$, l'application $x \in \Omega \longmapsto D^{\alpha}u(x)$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$.
- $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\bar{\Omega})$.
- $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ $\left\{ u \in C(\bar{\Omega}), \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty \right\}$ avec $0 < \alpha < 1$.
- $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ $\{u \in C^k(\bar{\Omega}); D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \forall j, |j| \leq k\}$.

Table des matières

Introduction	2
1 Degrés topologiques	3
1.1 Le degré topologique de Brouwer	3
1.1.1 Définition de degré topologique de Brouwer	3
1.1.2 Quelques propriétés	4
1.2 Le degré topologique de Leray-Schauder	8
1.2.1 Préliminaire	8
1.2.2 Définition de degré topologique de Leray-Schauder	9
1.2.3 Quelques propriétés	10
1.2.4 Construction du degré de Leray-Schauder	10
1.3 Théorèmes de point fixe	15
2 Estimation a priori	17
2.1 Préliminaire	17
2.2 Estimation a priori : Méthode de Gidas-Spruck	19
3 Existence de la solution du problème via le degré topologique	26
3.1 Préliminaire	26
3.2 Existence de la solution	27
Bibliographie	34

Introduction

Les équations aux dérivées partielles font partie important des modèles mathématiques pour interpréter les phénomènes physique et biologiques, par exemple, dans l'étude des fluides non Newtoniens et dans les phénomènes de couche limite pour des fluides visqueux... etc. Par conséquent, les EDP représentent un champ d'étude très vaste, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier l'équation elliptique non linéaire, posés sur un domaine borné Ω dans $\mathbb{R}^n$; avec les conditions de Dirichlet homogènes. Ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on donne une introduction aux degré topologique de Brouwer et de Leray-Schauder, on commence par donner la notion et la définition de degré en dimension finie (degré de Brouwer) ainsi toutes les propriétés utiles et indispensable dans cette étude, et ensuite, on généralise cette définition de degré au dimension infinie (degré de Leray-Schauder). On donne aussi des applications simples et immédiats de degré à savoir : le point fixe de Brouwer et de Schauder.

Dans le deuxième chapitre, on démontre des estimation a priori pour les solutions éventuelles de ce types des problèmes elliptiques non linéaires :

$$\begin{cases} Lu = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

via la méthode de blow-up de Gidas-spruck [2] qui est basée sur le raisonnement par l'absurde et la réduction du problème ci-dessus à un problème de Sturm-Liouville qui n'admet que la solution triviale. Ces estimation sont utilisés pour appliquer le degré topologique de Leray-Schauder pour démontrer l'existence de la solution.

Dans le dernier chapitre, on démontre l'existence d'une solution forte et non triviale du problème ci-dessus, en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder.

DEGRÉS TOPOLOGIQUES

Soient $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application au moins continue et soit l'équation

$$f(x) = y. \quad (1.1)$$

Est-ce qu'on peut assurer qu'il existe une solution à (1.1) ?

C'est très simple dans le cas où f est linéaire, on calcule le déterminant s'il est non nul, il existe une solution et même une seule à (1.1), pour tout $y \in \mathbb{R}^N$.

Mais dans le cas où f est non linéaire c'est pas de la même simplicité. On estime développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle de déterminant pour les applications linéaires. On appelle cet outil le degré, qui assure par sa non nullité que (1.1) a au moins une solution stable. Le degré dépendra de f , y et de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1.1).

Les degrés topologiques les plus connus sont de Brouwer pour les espaces de dimension finie, et de Leray-Schauder pour la dimension infinie.

1.1 Le degré topologique de Brouwer

1.1.1 Définition de degré topologique de Brouwer

Notation. Soit $N \geq 1$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, On considère l'ensemble suivante :

$$\mathcal{A} = \{(f, \Omega, y) | f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ est une application continue, } y \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Théorème 1.1. (Voir[8]) Il existe une et une seule application $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **Normalisation :** Si $y \in \Omega$ alors $d(\text{Id}, \Omega, y) = 1$.
2. **Additivité :** Si $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

3. **Invariance par homotopie :** Si $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont continues et, pour tout $t \in [0, 1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors

$$d(h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1, \cdot), \Omega, y(1)).$$

Définition 1.1. L'application d définie dans le théorème 1.1 est appelé le degré topologique de Brouwer.

1.1.2 Quelques propriétés

Proposition 1.1. Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution $x \in \Omega$.
2. $\forall z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z)$.
3. Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega} (|g - f|) + |y - z| < r$, alors
$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z).$$
4. $d(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.
5. $\forall z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Preuve.

1. On montre que

$$d(f, \Omega, y) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega : f(x) = y.$$

Par contraposée, il est équivalente de montrer que :

$$\forall x \in \Omega : f(x) \neq y \Rightarrow d(f, \Omega, y) = 0.$$

On a $y \notin f(\Omega)$ et on a déjà par l'hypothèse $y \notin f(\partial\Omega)$.

donc $y \notin f(\overline{\Omega})$ avec $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Considérons alors $\Omega_1 = \Omega_2 = \phi$, disjoints et inclus dans Ω .

On a $y \notin f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)) = f(\overline{\Omega} \setminus (\phi \cup \phi))$.

Donc par la propriété d'additivité on a :

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \phi, y) + d(f, \phi, y)$$

Pour $\Omega = \phi$ on a $y \notin f(\bar{\phi} \setminus (\phi \cup \phi))$, d'après l'additivité du degré on a

$$d(f, \phi, y) = d(f, \phi, y) + d(f, \phi, y)$$

Donc

$$d(f, \phi, y) = 0.$$

on en déduit que

$$d(f, \Omega, y) = 0.$$

2. On montre que

$$\forall z \in \mathbb{R}^N, d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z).$$

On considère les homotopies h et y entre (f, y) et $(f - z, y - z)$ définies par

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \bar{\Omega} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = (1 - t)f(x) + t(f(x) - z). \\ y : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto y(t) = (1 - t)y + t(y - z). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega), \forall t \in [0, 1]$.

Par l'absurde, on suppose que

$$\exists t \in [0, 1], \exists x \in \partial\Omega : y(t) = h(t, x)$$

Donc

$$(1 - t)y + t(y - z) = (1 - t)f(x) + t(f(x) - z)$$

ce qui donne $y = f(x)$, $x \in \partial\Omega$, contradiction(car $y \in f(\partial\Omega)$).

Donc d'après l'invariance par homotopie on a le résultat.

3. On considère les homotopies h et y entre (f, y) et (g, z) définies par :

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \bar{\Omega} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x). \\ y : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto y(t) = (1 - t)y + tz. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega), \forall t \in]0, 1[$.

Par l'absurde : on suppose que

$$\exists t \in]0, 1[, \exists x \in \partial\Omega : y(t) = h(t, x)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
y(t) = h(t, x) &\Leftrightarrow (1-t)y + tz = (1-t)f(x) + tg(x) \\
&\Leftrightarrow y - f(x) = t[(g(x) - f(x)) + (y - z)] \\
&\Rightarrow |y - f(x)| \leq t[|g(x) - f(x)| + |y - z|] \\
&\Rightarrow |y - f(x)| \leq tr \quad (\text{car } |g(x) - f(x)| + |y - z| < r) \\
&\Rightarrow |y - f(x)| < r \quad (\text{car } t < 1).
\end{aligned}$$

mais $(|y - f(x)| > \inf_{x \in \partial\Omega} |y - f(x)| = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) = r)$, contradiction avec l'hypothèse $\sup_{\partial\Omega} (|g - f|) + |y - z| < r$.

Alors d'après l'invariance par homotopie

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z).$$

4. On montre que $d(f, \Omega, y)$ est constant sur tout composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

On pose :

$$\begin{aligned}
H : \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
y &\longmapsto H(y) = d(f, \Omega, y).
\end{aligned}$$

D'après la propriété 3), pour $r > 0$ assez petit on a

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, z) \quad \text{pour tout } y, z \text{ tel que } |y - z| < r$$

D'où on a

$$H(y) = H(z), \forall y, z \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega) \text{ avec } |y - z| < r$$

Donc H est continue. Comme $\mathbb{Z}$ est un espace discrète (avec la topologie induite de $\mathbb{R}$) alors H est constante sur tout composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. Ce que prouve la propriété 4).

5. On montre que

$$\forall z \in \mathbb{R}^N, d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y).$$

Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et notons $T_{f, \Omega, y}(z) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$. Comme $\partial(z + \Omega) = z + \partial\Omega$, il est clair que $y \notin f(\partial(z + \Omega) - z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ et que $T_{f, \Omega, y}$ est donc définie sur $\mathbb{R}^N$.

Nous allons montrer que $T_{f, \Omega, y}$ est localement constante; comme $\mathbb{R}^N$ est connexe, cela impliquera que $T_{f, \Omega, y}$ est constante sur $\mathbb{R}^N$ et cela prouvera donc 5). Comme $T_{f, \Omega, y}(z_0 + z) = T_{f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}(z)$, il suffit de montrer que $T_{f, \Omega, y}$ est constante au voisinage de 0 pour tout $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ pour en déduire qu'elle est constante au voisinage de tout point z_0 de $\mathbb{R}^N$ (en utilisant la constance au voisinage de 0 de $T_{f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}$).

Soit $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > s\}$, ouvert inclus dans Ω . Comme $y \notin f(\partial\Omega)$, il existe $s > 0$ tel que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$. Comme $\Omega_s \supset \Omega_{2s}$, on a aussi $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_s)$ et par additivité du degré avec les ouverts Ω_s et ϕ disjoints inclus dans Ω , et puisque $d(f, \phi, y) = 0$, on en déduit

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_s, y). \quad (1.2)$$

Par ailleurs, dès que $z \in B(0, s)$, on a $\Omega_s \subset z + \Omega$ et $y \notin f((\overline{z + \Omega} \setminus \Omega_s) - z)$ (car $(\overline{z + \Omega} \setminus \Omega_s) - z = \overline{\Omega} \setminus (\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$ et $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$); l'additivité du degré donne donc aussi

$$d(f(\cdot - z), z + \Omega, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y) \text{ pour } |z| < s. \quad (1.3)$$

Fixons $z \in B(0, s)$ et considérons l'homotopie $h(t, x) = f(x - tz)$ sur $\overline{\Omega}_s$ entre f et $f(\cdot - z)$ (pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\overline{\Omega}_s - tz \subset \overline{\Omega}$ et h est donc bien définie). Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega_s$, on a $\text{dist}(x, \partial\Omega) = s$, ce qui assure que $\text{dist}(x - tz, \partial\Omega) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s$; on en déduit que $x - tz \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$, et donc que $y \neq f(x - tz)$, c'est à dire $y \notin h(t, \partial\Omega_s)$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'invariance par homotopie donne donc

$$d(f, \Omega_s, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y)$$

ceci pour tout $z \in B(0, s)$, ce qui permet de conclure grâce (1.2) et (1.3).

Proposition 1.2. *On a*

- Si $A \in \mathcal{M}_n$ alors

$$d(A, B(0, \delta), 0) = \text{sgn}(\det(A)), \text{ où } \delta > 0 \text{ est assez petit.}$$

- Si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$ alors

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f'(z), B(0, \delta), 0), \text{ où } \delta > 0 \text{ est assez petit.}$$

- Si $f \in C(\overline{\Omega})^N$ alors

$$d(f, \Omega, y) = d^\infty(g, \Omega, y), \text{ où } g \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$$

$$\text{telle que } \sup_{\overline{\Omega}} |g - f| < r \text{ avec } r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

(voir [8])

1.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

1.2.1 Préliminaire

Nous souhaitons maintenant construire un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permette d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, a au moins une solution x .

On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même pas toute application linéaire!).

Exemple 1.1. Considérons $E = l^\infty = \{(x_n)_{n \geq 1} \text{ des suites bornées} \}$ et

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow E \\ x = (x_1, x_2, \dots) &\longmapsto S(x) = (0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

Soit $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \longrightarrow E$ l'homotopie entre Id et S tel que

$$h(t, x) = tx + (1 - t)S(x) = (tx_1, tx_2 + (1 - t)x_1, \dots)$$

$$\forall t \in [0, 1]; h(t, x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx_1 = 0 \\ tx_2 + (1 - t)x_1 = 0 \\ \vdots \\ tx_n + (1 - t)x_{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$

donc la seule solution de $h(t, x) = 0$ est la suite nulle .

s'il existe un degré pour tous les applications continues sur E . Alors

$$1 = d(Id, B(0, 1), 0) = d(S, B(0, 1), 0)$$

il suffit de montrer que : $d(S, B(0, 1), 0) = d(S, B(0, 1), z)$

On a

$$\|z\| < r = \text{dist}(0, S(\partial B(0, 1))) = \text{dist}(0, \partial B(0, 1)) = 1$$

Alors d'après l'invariance par homotopie du degré d'où

$$d(S, B(0, 1), z) = 1 \neq 0, \forall z \in E \text{ proche de } 0$$

c'est à dire pour tout z proche de 0 on a $S(x) = z$ ce qui est faux car

$z = (\varepsilon, 0, 0, \dots), \varepsilon \neq 0$ alors $S(x) \neq z$.

1.2.2 Définition de degré topologique de Leray-Schauder

Le degré topologique en dimension infinie ne peut pas donc être défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même : il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique ; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte

Définition 1.2. Soit K et E deux espaces des Banach et A un fermé de K . Une application $f : A \longrightarrow E$ est dite compacte si :

1. f est continue .
2. Pour tout $R > 0$, $f(A \cap \overline{B}(0, R))$ est relativement compact dans E . De manière équivalent : Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ bornée dans A , on peut extraire un sous-suite de $(f(x_n))_{n \geq 1}$, qui converge dans E .

Notation. Soit E un Banach et Ω est un ouvert borné de E , $y \in E$, On considère l'ensemble suivante :

$$\mathcal{A}_c = \{ (Id - f, \Omega, y) | f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ est une application compacte , } y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \} .$$

Théorème 1.2. (Voir[8]) Il existe une application unique $d : \mathcal{A}_c \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que

1. **Normalisation :** Si $y \in \Omega$ alors $d(Id, \Omega, y) = 1$.
2. **Additivité :** Si $y \in E$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est compacte et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y).$$

3. **Invariance par homotopie :** Si $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow E$ est compacte, et $y : [0, 1] \rightarrow E$ est continue et , $\forall t \in [0, 1]$, $y(t) \notin (Id - h(t, .))(\partial\Omega)$, alors

$$d(Id - h(0, .), \Omega, y(0)) = d(Id - h(1, .), \Omega, y(1)).$$

Définition 1.3. L'application d défini dans le théorème 1.2 est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.

1.2.3 Quelques propriétés

Lemme 1.1. Soient K et E des espaces de Banach et A un fermé de K . Si $f : A \longrightarrow E$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors $(Id - f)(X)$ est fermé.

Preuve.

Si $y_n = x_n - f(x_n)$ est une suite de $(Id - f)(X)$ qui converge vers un y , alors comme $(x_n)_{n \geq 1} \in X$ est borné on peut extraire de $(f(x_n))_{n \geq 1}$ une suite qui converge;

cela montre que $x_n = y_n + f(x_n)$ converge vers un $x \in X$ (X est fermé) et par continuité que

$$y = x - f(x) \in (Id - f)(X).$$

Proposition 1.3. Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ alors l'équation $x - f(x) = y$ admet au moins une solution $x \in \Omega$.
2. $\forall z \in \mathbb{R}^N, d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f - z, \Omega, y - z)$.
3. Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$ et $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ compacte et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega} (\|g - f\|) + \|y - z\| < r$, alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - g, \Omega, z).$$
4. $d(Id - f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $E \setminus (Id - f)(\partial\Omega)$.
5. $\forall z \in E, d(Id - f, \Omega, y) = d((Id - f)(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Preuve. La preuve est de la même manière de celle de la proposition 1.1.

1.2.4 Construction du degré de Leray-Schauder

Dans cette section, on démontre le théorème 1.2. Par construction le degré topologique $\mathbf{d}$.

La preuve se décompose en deux étapes :

Étape 1. Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans la parti précédente, le degré topologique de Brouwer a été construit sur $\mathbb{R}^N$ (i.e. pour des applications définies sur des parties de $\mathbb{R}^N$). Dans la suite, nous allons avoir besoin, pour tout espace vectoriel F normé de dimension finie, d'un degré topologique d_F sur F .

L'idée est très simple : comme F est de dimension finie, disons N , il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow F$. Soit Ω est un ouvert borné de F et $y \in F$. En définissant l'ensemble suivante :

$$\mathcal{A}_F = \{(f, \Omega, y) | f : \overline{\Omega} \longrightarrow F \text{ est continue, } y \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Proposition 1.4. Pour tout $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_F$ on a

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in \mathcal{A}$$

Preuve.

• On a

$$\begin{aligned} \varphi : \varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^N &\longrightarrow \overline{\Omega} \subset F \\ f : \overline{\Omega} \subset F &\longrightarrow F \\ \varphi^{-1} : F &\longrightarrow \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

• Soit $x \in \partial\Omega \subset F$, alors $\exists t \in \partial\varphi^{-1}(\Omega) : x = \varphi(t)$. Alors

$$\begin{aligned} y \neq f(x) &\Leftrightarrow y \neq f(\varphi(t)), \forall t \in \varphi^{-1}(\partial\Omega) \\ &\Leftrightarrow y \neq f(\varphi(t)), \forall t \in \partial(\varphi^{-1}(\Omega)) \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \neq \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(t), \forall t \in \partial\varphi^{-1}(\Omega) \end{aligned}$$

Alors

$$y \notin f(\partial\Omega) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) \notin \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(\partial\varphi^{-1}(\Omega)).$$

Alors

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.4. Le degré de Brouwer sur F est définie par :

$$d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)).$$

Où "d" est degré de Brouwer dans $\mathbb{R}^N$. Alors d_F vérifie les propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie.

Proposition 1.5. Le degré de Brouwer d_F ne dépend pas du choix de φ .

Preuve.

On a par définition :

$$d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \quad (1.4)$$

On démontre que d_F ne dépend pas de choix de φ .

Il suffit de montrer que d_F est unique.

Soit $\tilde{d}_F$ une autre degré sur F . On pose $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$, $U = \varphi^{-1}(\Omega)$, $z = \varphi^{-1}(y)$.

On a donc

$$d_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) = d(g, U, z) \quad (1.5)$$

Alors comme ci-dessus :

$$\tilde{d}(g, U, z) = \tilde{d}_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) \quad (1.6)$$

définit un degré topologique sur $\mathbb{R}^N$. Grâce à l'unicité de degré de Brouwer d , on obtient :

$$\tilde{d}(g, U, z) = d(g, U, z)$$

D'où, par (1.5) et (1.6)

$$\tilde{d}_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) = d_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z))$$

Donc

$$\tilde{d}_F(f, \Omega, y) = d_F(f, \Omega, y)$$

Donc d_F ne dépend pas de choix de φ et d_F a forcément l'écriture (1.4).

Proposition 1.6. Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G . Soit Ω un ouvert borné de G , $y \in F$ et $f : \bar{\Omega} \rightarrow F$ une application continue telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Alors

$$d_G(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - f|_{\Omega \cap F}, \Omega \cap F, y).$$

Étape 2. Du degré de Brouwer au degré de Leray-Schauder

La raison pour laquelle on est capable de construire un degré pour les perturbations compactes de l'identité est que les applications compactes s'approchent bien par des applications "de rangs finies" (pour les quelles on a déjà un degré).

Définition 1.5. Soient K et E des espaces de Banach et A un fermé de K . Une application $f : A \rightarrow E$ est de rang fini si :

1. f est continue.
2. $f(A)$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Proposition 1.7. Soient K et E des espaces de Banach et A un fermé borné dans K . Si $f : A \rightarrow E$ est une application compacte alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : A \rightarrow E$ de rang fini tel que $\sup_A \|g - f\| \leq \varepsilon$.

Nous pouvons maintenant construire le degré de Leray-Schauder, à partir du degré de Brouwer. Nous connaissons le degré sur une certaine classe I d'applications (celles définies sur un espace de dimension finie et à valeurs dans ce même espace); pour définir le degré pour une application "générale" (i.e perturbation compacte de l'identité en ce qui nous concerne), nous allons simplement dire qu'il est égal au degré de n'importe quelle application de I proche de notre application "générale", en montrant que cette définition est cohérente (c'est à dire que deux applications de I proches de notre application "générale" ont même degré).

Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$. $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$ car :

on a par l'hypothèse :

$$y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \text{ c'est à dire } y \neq x - f(x), \forall x \in \partial\Omega$$

par l'absurde

$$r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) = 0 \Rightarrow y \in \overline{(Id - f)(\partial\Omega)}$$

d'après lemme 1.1

$$y \in \overline{(Id - f)(\partial\Omega)} = (Id - f)(\partial\Omega)$$

$$\text{mais } y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$$

contradiction.

Soit $g : \overline{\Omega} \rightarrow E$ une application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r$ (voir la proposition 1.7); il clair que $y \notin (Id - g)(\partial\Omega)$ car :

$$y \notin (Id - g)(\partial\Omega) \text{ c'est à dire } y \neq x - g(x), \forall x \in \partial\Omega$$

Par l'absurde : on suppose que

$$\exists x \in \partial\Omega : y = x - g(x)$$

on a donc

$$\begin{aligned} y = x - g(x) &\Leftrightarrow y = x - f(x) + f(x) - g(x) \\ &\Leftrightarrow y - (x - f(x)) = f(x) - g(x) \\ &\Leftrightarrow y - (Id - f)(x) = f(x) - g(x) \\ &\Rightarrow \|y - (Id - f)(x)\| = \|f(x) - g(x)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|y - (Id - f)(x)\| &\geq \inf_{x \in \partial\Omega} \|y - (Id - f)(x)\| \\ &= \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) \\ &= r \end{aligned}$$

et on a

$$\|f(x) - g(x)\| < r$$

contradiction .

Notons F un espace de dimension finie qui contient l'image de g et y telle que

$$\begin{aligned} g : \bar{\Omega} \subset F &\longrightarrow F \\ g|_{\bar{\Omega} \cap F} : \bar{\Omega} \cap F \subset F &\longrightarrow F \end{aligned}$$

par définition on a :

$$d(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - g|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, y)$$

Il suffit de montrer que cette définition est cohérent(ne dépend pas du choix de g).

Soit $j : \bar{\Omega} \longrightarrow F_1$ une autre application de rang fini tel que $\|f - j\| < r$, et F_1 un autre espace de dimension finie.

On pose $G = F_1 + F$, ($F \subset G$, $F_1 \subset G$) , la proposition 1.3 permet de voir que

$$d_F(Id - g|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, y) = d_G(Id - g|_{\bar{\Omega} \cap G}, \Omega \cap G, y)$$

$$d_{F_1}(Id - j|_{\bar{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, y) = d_G(Id - j|_{\bar{\Omega} \cap G}, \Omega \cap G, y)$$

On montre que

$$d_G(Id - g|_{\bar{\Omega} \cap G}, \Omega \cap G, y) = d_G(Id - j|_{\bar{\Omega} \cap G}, \Omega \cap G, y)$$

On construit maintenant dans G l'homotopie entre $Id - g|_{\bar{\Omega} \cap G}$ et $Id - j|_{\bar{\Omega} \cap G}$ définie par

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \cap G &\longrightarrow G \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = t(Id - g|_{\bar{\Omega} \cap G})(x) + (1 - t)(Id - j|_{\bar{\Omega} \cap G})(x). \end{aligned}$$

On montre que

$$y \notin h(t, \partial(\Omega \cap G)), \forall t \in [0, 1]$$

Par l'absurde : on suppose que

$$\exists t \in [0, 1], \exists x \in \partial(\Omega \cap G) : y = h(t, x)$$

$$\begin{aligned} y - h(t, x) &= y - [t(x - g|_{\bar{\Omega} \cap G}(x)) - (x - f(x))] + (1 - t)[(x - j|_{\bar{\Omega} \cap G}(x)) - (x - f(x))] - (x - f(x)) \\ &= \underbrace{y - (x - f(x))}_{>r} - \underbrace{[t(f(x) - g|_{\bar{\Omega} \cap G}(x)) + (1 - t)(f(x) - j|_{\bar{\Omega} \cap G}(x))]}_{\leq r} \\ &> r - r = 0 \end{aligned}$$

Alors d'après l'invariance par homotopie de d_G on a

$$d_G(Id - g|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y) = d_G(Id - j|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y)$$

Finalement, le degré de Leray-Schauder sur $\mathcal{A}_c$ est donc défini ainsi :

$$d(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - g|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$$

où $g : \overline{\Omega} \rightarrow E$ est n'importe quelle application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r$, avec $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega))$, et F est un sous-espace de E de dimension finie qui contient y et l'image de g

1.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 1.3. (point fixe de Brouwer)(Voir[8]) Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ est continue. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 1.4. (point fixe de Schauder)(Voir[8]) Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ est compacte. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.

Preuve. (Théorèmes 1.3 et 1.4)

On va montrer l'existence de la solution de $f(x) = x$ sur $\overline{B}$:

- S'il existe un point fixe sur ∂B , alors il n'y a rien à prouver.
- Si non, on suppose que $f(x) \neq x, \forall x \in \partial B$

Soient $h(t, x) = x - tf(x), \forall (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B(0, 1)}$ et $y(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$.

On montre que $y(t) \notin h(t, \partial B(0, 1)), \forall t \in]0, 1[$.

Par l'absurde : on suppose que

$$\exists t \in]0, 1[, \exists x \in \partial B(0, 1) : y(t) = h(t, x)$$

On a donc

$$\begin{aligned} h(t, x) = 0 &\Leftrightarrow x - tf(x) = 0, t < 1 \\ &\Leftrightarrow x = tf(x) \\ &\Rightarrow |x| = t|f(x)| \\ &\Rightarrow 1 \leq t \text{ (car } |x| = 1 \text{ et } |f(x)| \leq 1). \\ &\text{mais } t < 1 \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

Alors $h(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial B(0, 1)$.

D'après l'invariance par homotopie du degré de Brouwer

$$d(h(0, \cdot), B(0, 1), y(0)) = d(h(1, \cdot), B(0, 1), y(1)).$$

c'est à dire $1 = d(Id, B(0, 1), 0) = d(Id - f, B(0, 1), 0)$.

Donc

$$d(Id - f, B(0, 1), 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \overline{B(0, 1)} : f(x) - x = 0.$$

Alors

$$\exists x \in \overline{B(0, 1)} : f(x) = x.$$



ESTIMATION A PRIORI

2.1 Préliminaire

Nous intéressons à un problème d'EDP elliptique non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} Lu = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnu $u := u(x)$; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. L est l'opérateur elliptique linéaire sous forme de divergence définie par

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))_{x_i} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}. \quad (2.2)$$

où a_{ij} et b_j sont des fonctions définies sur Ω et les a_{ij} satisfont par ailleurs la condition ellipticité

$$\lambda \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda, \quad |\xi| = 1, \quad x \in \overline{\Omega} \quad (2.3)$$

avec des constantes positives $\lambda \leq \Lambda$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1. (Solution faible)

On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est un solution faible du problème (2.1) si

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))v_{x_i} dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}v dx = \int_{\Omega} f(u)v dx$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

On donne quelque résultat utile dans ce chapitre concernant les problèmes elliptiques :

Définition 2.2. On dit que Ω est de classe C^1 si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un couple (U, φ) (une carte locale) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x et $\varphi \in C^1(\overline{U})$ un difféomorphisme de U dans la boule unité B_1 tel que :

1. $\varphi^{-1} \in C^1(\overline{B_1})$,

$$2. \varphi(\partial\Omega \cap U) = B_0,$$

$$3. \varphi(\Omega \cap U) = B_+.$$

avec

$$B_0 = \{(x', 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1\}$$

et

$$B_+ = \{(x', x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1, |x_n| < 1\}$$

On a besoin de ce résultat concernant les injection de Sobolev.

Théorème 2.1. Soit $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors

- i) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$,
- ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$ (mais pas pour $q = +\infty$ si $p > 1$),
- iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Dans ce dernier cas, si $k - \frac{n}{p} > 0$ n'est pas un entier, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\overline{\Omega})$ où $l = \left[k - \frac{n}{p} \right]$ et $\beta = k - \frac{n}{p} - l$ sont respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de $k - \frac{n}{p}$. Toutes ces injections sont continues.

La partie **iii)** du théorème est aussi connue sous le nom de **Théorème de Morrey**.

On a besoin de ces théorèmes concernant la régularité elliptique.

Théorème 2.2. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de (2.1) avec $f \in L^q(\Omega)$, $q \geq 2$, et $a_{ij}, b_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega$ est de classe C^2 . Alors $u \in W^{2,q}(\Omega)$ et on a

$$\|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)})$$

Théorème 2.3. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de (2.1) avec $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $a_{ij}, b_j \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega$ est de classe $C^{2,\alpha}$. Alors $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et on a

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})})$$

Théorème 2.4. (d'Ascoli-Arzelà)

Soient E, F deux espaces métriques tels que E est compact et soit A une partie de $C(E, F)$. Alors A est relativement compact si seulement si :

1. $A(x) := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$

2. A est équicontinue c'est à dire :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \forall f \in A, \forall y \in E : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Théorème 2.5. Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une solution positive de classe $C^2(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{dans } B(0, R) \\ u = 0 & \text{sur } |x| = R \end{cases}$$

Ici f est de classe C^1 . Alors u est radialement symétrique et

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ pour } 0 < r < R$$

Le point intéressant est que le résultat est valable quel que soit f . Notons que $f(u) \geq 0$ pour tout u , implique que toute solution non triviale est automatiquement positive en Ω .

2.2 Estimation a priori : Méthode de Gidas-Spruck

Dans cette section, on présente la méthode de Gidas-Spruck qui démontre les estimations a priori de la solution. Ces estimations sont utilisées pour appliquer le degré topologique de Leray-Schauder pour démontrer l'existence de la solution. On donne alors le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.6. (Voir[2]) Soit u une solution faible positive du problème (2.1) appartenant à l'espace $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Supposons que :

- $a_{ij}(x)$ sont continus sur $\overline{\Omega}$, $b_j(x)$ bornés sur $\overline{\Omega}$
- $f(x, u)$ continue sur $x \in \overline{\Omega}$, et pour quelque $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t^\alpha} = h(x) \tag{2.4}$$

uniformément en $x \in \overline{\Omega}$. Ici h est continu et strictement positif en $\overline{\Omega}$. Alors

$$\exists C > 0 : u(x) \leq C, \text{ pour tout } x \in \Omega$$

(où C dépend de f, α et Ω , mais pas de u).

Pour la preuve du théorème ci-dessus, on a besoin de théorèmes suivants :

Théorème 2.7. (Voir[2]) Soit u une solution de classe C^2 non négative de

$$\Delta u + u^\alpha = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, n > 2 \quad (2.5)$$

avec $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$. Alors $u \equiv 0$.

Preuve. voir[1]

Théorème 2.8. (Voir[2]) Soit $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Supposons que $u(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n) \cap C^0(\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\})$ est une solution non négative de

$$\Delta u + u^\alpha = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^n \quad (2.6)$$

$$u = 0 \text{ sur } x_n = 0 \quad (2.7)$$

avec $1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}$. Alors $u \equiv 0$.

On est prêt maintenant pour démontrer le théorème 2.6.

Preuve.(Méthode de Below-up, voir B. Gidas, J. Spruck [2])

Nous réduisons la preuve du théorème 2.6 aux théorèmes 2.7 et 2.8 : Supposons que le théorème 2.6 est faux. Il existe alors une suite de solutions $u^k(x)$ de (2.1) et une suite de points $P_k \in \Omega$ tels que

$$M_k = \sup_{x \in \Omega} u^k(x) = u^k(P_k) \longrightarrow +\infty \text{ quand } k \longrightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Nous pouvons supposer $P_k \longrightarrow P \in \bar{\Omega}$ quand $k \longrightarrow +\infty$. La preuve se décompose en deux cas selon $P \in \Omega$, ou $P \in \partial\Omega$.

Cas 1 : $P \in \Omega$. Dans ce cas , nous montrerons que le théorème 2.6 est réduit au théorème 2.7. Soit $d = \text{dist}(P, \partial\Omega)$, et $B_R(a)$ la boule de rayon R et de centre $a \in \mathbb{R}^n$. Soit λ_k une suite de nombres positifs (à définir ci-dessous) et $y = \frac{x - P_k}{\lambda_k}$. On définit la fonction d'échelle ("blow up") suivante

$$v^k(y) = \lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} u^k(x). \quad (2.9)$$

On choisit λ_k tel que

$$\lambda_k^{\frac{2}{\alpha-1}} M_k = 1. \quad (2.10)$$

Comme $M_k \longrightarrow +\infty$, on a $\lambda_k \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$. Pour des k assez grand, $v^k(y)$ est bien défini dans $B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)$, et on a

$$\sup_{y \in B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)} v^k(y) = v^k(0) = 1. \quad (2.11)$$

De plus, $v^k(y)$ satisfait en $B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)$

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}^k(y) v_{x_j}^k(y))_{x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_k b_j^k(y) v_{x_j}^k(y) + \lambda_k^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} f(\lambda_k y + P_k, \lambda_k^{-\frac{2}{\alpha-1}} v^k(y)) = 0 \quad (2.12)$$

où $a_{ij}^k(y) = a^{ij}(\lambda_k y + P_k)$, $b_j^k(y) = b_j(\lambda_k y + P_k)$. On note que les coefficients $a_{ij}^k(y)$, $b_j^k(y)$ sont uniformément bornés en k . Par hypothèse (2.4)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} f(\lambda_k y + P_k, \lambda_k^{-\frac{2}{\alpha-1}} v^k(y)) - h(\lambda_k y + P_k)(v^k(y))^\alpha| = 0. \quad (2.13)$$

(Il suffit pour vérifier cela de prendre $x = \lambda_k y + P_k$, et $t = \lambda_k^{-2/\alpha-1} v^k(y) \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$).

Par conséquent, pour tout R tel que $B_R(0) \subset B_{\frac{d}{\lambda_k}}(0)$ nous pouvons, Il est facile de vérifier que $\lambda_k^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} f(\lambda_k y + P_k, \lambda_k^{-\frac{2}{\alpha-1}} v^k(y))$ est borné indépendamment de k , et donc par les estimations donnée par la théorie de la régularité elliptique (Voir théorème 2.2), on peut trouver des estimations uniformes pour $\|v^k\|_{W^{2,p}(B_R(0))}$, pour tout $p \geq 1$. En choisissant $p > n$, on obtient par le théorème de Morrey (voir Théorème 2.1, (iii)) que $\|v^k\|_{C^{1,\beta}(B_R(0))}$ avec $0 < \beta < 1$, est également uniformément bornée. On en déduit, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà 2.4, qu'il existe une sous-suite (k_j) telle que $v^{k_j} \rightarrow v$ dans $C^{1,\beta}(B_R(0))$, (Grâce à l'injection compacte $C^{1,\beta} \hookrightarrow_c C^{1,\beta'}$ avec $0 < \beta' < \beta < 1$). Par conséquent

$$v(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(0) = 1$$

En outre, on fait tendre k_j vers ∞ , on a

$$a^{\ell m}(\lambda_{k_j} y + P_{k_j}) \rightarrow a^{\ell m}(P) \quad (2.14)$$

$$\lambda_{k_j} b_\ell(\lambda_{k_j} y + P_{k_j}) \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

$$h(\lambda_{k_j} y + P_{k_j}) \rightarrow h(P) \quad (2.16)$$

En passant à la limite dans (2.12), on obtient que v est une solution faible de

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P) \frac{\partial^2 v(y)}{\partial x_i \partial x_j} + h(P) v^\alpha(y) = 0 \\ v(0) = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Comme $R < \frac{d}{\lambda_k} \rightarrow \infty$, alors on peut supposer que $R > 0$ est quelconque, et donc v est bien défini sur $\mathbb{R}^n$ tout entier et $v^{k_j} \rightarrow v$ dans $C^{1,\beta}$, $p > n$, sur tout sous-ensembles compact. L'équation de (2.17) est réduite à l'équation (2.5), en effectuant une rotation et un permutations des

coordonnées comme suivant : En remplaçant d'abord y par x . Posons $A = (a_{ij}(P))$, grâce à la condition (2.3), A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1} = (a^{ij}(P))$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $a^{ij} = a^{ji}$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit B une matrice non singulière avec transpose B^T de sorte que

$$BA^{-1}B^T = \Lambda^{-1}.$$

On pose

$$y = Bx$$

et

$$z_j = \sqrt{\lambda_j} y_j.$$

Un calcul simple montre que (2.17) est réduit à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_i} + h(P)v^\alpha(z) = 0. \quad (2.18)$$

Ceci est réduit à (2.5) par un changement des coordonnées. Par le théorème 2.7, on a $v \equiv 0$, une contradiction, puisque $v(0) = 1$.

Ceci termine notre réduction dans le **cas 1**.

Cas 2 : $P \in \partial\Omega$. Dans ce cas, notre procédure de réduction conduit soit au théorème 2.7, soit au théorème 2.8. Sans perte de généralité, comme Ω est de classe C^1 , on peut supposer qu'au voisinage de $P \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ est contenu dans l'hyperplan $x_n = 0$ (voir la définition 2.2) On définit v^k, λ^k comme dans le cas 1. Soit d_k la distance de P_k à $\partial\Omega$ (donc $d_k = P_k \cdot e_n$). Notez que pour k assez grands, v^k est bien défini dans $B_{\frac{\delta}{\lambda_k}}(0) \cap \left\{ y_n > -\frac{d_k}{\lambda_k} \right\}$, pour certains $\delta > 0$, et satisfait (2.12), et on a aussi

$$\sup v^k(y) = v^k(0) = 1. \quad (2.19)$$

Tout d'abord, nous affirmons que $\frac{d_k}{\lambda_k} \geq C_1 > 0$ pour une constante uniforme C_1 . Pour voir cela, on note que puisque a_{ij} sont continus, b_j et v^k bornés, on a d'après la régularité elliptique (voir Théorème 2.3) $|\nabla v^k|$ est uniformément borné. En particulier v^k est uniformément

Lipschitzienne et on a

$$\left| v^k(0) - v^k(0', -\frac{d_k}{\lambda_k}) \right| \leq C \frac{d_k}{\lambda_k}.$$

Donc

$$1 \leq C \frac{d_k}{\lambda_k}.$$

D'où $\frac{d_k}{\lambda_k}$ est uniformément minoré par une constante strictement positive. Si $\frac{d_k}{\lambda_k}$ n'est pas uniformément majoré, alors pour une sous-suite $k_j \rightarrow +\infty$, $\frac{d_{k_j}}{\lambda_{k_j}} \rightarrow +\infty$, et v^{k_j} est bien défini dans $B_{\frac{d_{k_j}}{\lambda_{k_j}}}(0)$, avec $v^{k_j}(0) = 1$. En les même argument de cas 1, nous arrivons à une contradiction. Ainsi nous pouvons supposer que $\frac{d_k}{\lambda_k}$ borné uniformément, et (en allant à une sous-suite si nécessaire) $\frac{d_k}{\lambda_k} \rightarrow s$ avec $s > 0$. En répétant les arguments de compacité comme dans le cas 1, on conclut qu'il existe une sous-suite de v^k converge vers v dans $C^{1,\beta}$ qui est une solution de

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(P) \frac{\partial^2 v(y)}{\partial x_i \partial x_j} + h(P) v^\alpha(y) = 0 \quad (2.20)$$

dans le demi-espace $y_n > -s$. Comme précédemment, on a $v(0) = 1$. Comme $v^k = 0$ sur $\partial\Omega$, alors on a

$$v(y) = 0 \text{ sur } y_n = -s. \quad (2.21)$$

Par un changement linéaire de coordonnées (similaire à celui que nous avons fait pour passer de (2.17) à (2.18)) et une permutation, nous nous retrouvons avec la situation du théorème 2.8. Par ce théorème, on conclut $v \equiv 0$, ce qui contredit avec $v(0) = 1$. Ceci termine la réduction dans le cas 2. Ainsi dans tous les cas, en supposant que $u(x)$ n'est pas uniformément borné, i.e. (2.8) se produit, nous avons atteint une contradiction. Ceci complète la preuve de théorème 2.6.

On donne maintenant la preuve du théorème 2.8

Preuve.

Tout d'abord, on montre que $u(x)$ ne dépend que de x_n . Dans cette section on utilise la notation $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Pour deux points $x, \bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$ à vérifier $x_n = \bar{x}_n$, on choisit l'origine pour être le point $((\frac{x+\bar{x}}{2})', 0)$. On va montrer que $u(x) = u(\bar{x})$. Pour cela nous effectuons le changement de variable suivant

$$y = \frac{x + e_n}{|x + e_n|^2}, \quad x_n \geq 0 \quad (2.22)$$

et on définit

$$w(y) = |x + e_n|^{n-2} u(x) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u(x). \quad (2.23)$$

Remarquons que le demi-espace $x_n \geq 0$ s'envoie vers la boule $|y - \frac{1}{2}e_n| \leq \frac{1}{2}$, la frontière $x_n = 0$ s'envoie vers sphère $|y - \frac{1}{2}e_n| = \frac{1}{2}$, et le point $x = \infty$ s'envoie vers $y = 0$. La fonction $w(y)$ satisfait

$$\Delta w + |y|^{-(n-2)(\frac{n+2}{n-2}-\alpha)} w^\alpha(y) = 0 \text{ dans } |y - \frac{1}{2}e_n| < \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

et, par (2.23) et (2.7), $w(y) = 0$ sur $|y - \frac{1}{2}e_n| = \frac{1}{2}$ sauf éventuellement en $y = 0$ où $w(y)$ peut être singulier. En utilisant la méthode de moving plane comme dans [3], on va montrer que $w(y)$ est axisymétrique autour de l'axe y_n , i.e. $w = w(|y'|, y_n)$.

Il suffit de montrer que pour une direction perpendiculaire à l'axe y_n , $w(y)$ est symétrique par rapport à cette direction. Puisque notre équation (2.24) est invariante par rotation autour de l'axe y_n , il suffit de le montrer pour une seule direction, disons la direction y_1 .

Puisque $\alpha < \frac{n+2}{n-2}$, le coefficient

$$|y|^{-(n-2)(\frac{n+2}{n-2}-\alpha)}$$

est décroissante par rapport y_1 (en fait dans n'importe quelle direction orthogonale à l'axe y_n). Ceci avec le fait que $w(y) = 0$ sur $|y - \frac{1}{2}e_n| = \frac{1}{2}, y \neq 0$ nous permet d'appliquer la procédure de moving plane le long de la direction y_1 (le comportement de $w(y)$ à $y = 0$ n'est pas pertinent pour l'application de cette procédure dans des directions perpendiculaires à l'axe y_n). Comme dans le théorème 2.5, on conclut que $w = w(|y'|, y_n)$. Puisque $u(x) = |x + e_n|^{-n+2} w(y)$, et y dépend de x par (2.22), on conclut que $u := u(|x'|, x_n)$. Ainsi $u(x) = u(\bar{x})$, pour $x_n = \bar{x}_n$. En d'autres termes, puisque notre choix d'origine était assez arbitraire, on conclure $u = u(x_n)$. Nous avons donc réduit la preuve du théorème 2.8 à un problème unidimensionnel.

Pour compléter la preuve il suffit de montrer que si u est une solution non négative de

$$\begin{cases} u''(t) + u^\alpha(t) = 0, & t > 0 \\ u(0) = 0, & u \geq 0 \end{cases}$$

alors $u \equiv 0$.

On a $u'' = -u^\alpha \leq 0$. Donc u' est décroissante.

On va montre que $u \equiv 0$.

On distingue trois cas :

1. Si $u'(t) \leq 0, \forall t > 0$. Alors

u est décroissante et donc $u(t) \leq u(0) = 0, \forall t > 0$ comme $u \geq 0$, on en déduit que $u \equiv 0$

2. Si $u'(t) \geq 0, \forall t > 0$. Alors

ou bien $u \equiv 0$ ou bien $\exists t_1 > 0$ tel que $u(t_1) > 0$

dans ce dernier cas, on a d'après le développement de Taylor

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) + \int_{t_1}^t (t - s)u''(s)ds \\ &= u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) - \int_{t_1}^t (t - s)u^\alpha(s)ds. \end{aligned}$$

pour $t > t_1$, on a

$$\begin{cases} u^\alpha(s) \geq u^\alpha(t_1), & s \geq t_1 \text{ (car } u \text{ est croissante)} \\ (t - s) < t - t_1 \end{cases}$$

D'où, on a

$$0 < u(t_1) \leq u(t) \leq u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) - \frac{1}{2}(t - t_1)^2 u^\alpha(t_1) \quad (2.25)$$

D'où

$$0 < \frac{1}{2}(t - t_1)^2 u^\alpha(t_1) \leq (t - t_1)u'(t_1)$$

Donc

$$0 < u^\alpha(t_1) \leq \frac{2u'(t_1)}{(t - t_1)} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

contradiction. Donc $u \equiv 0$.

3. Si $\exists t_1, t_2 > 0$ tel que $u'(t_1) < 0$ et $u'(t_2) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaire, $\exists t_0$ tel que $u'(t_0) = 0$

en remplaçant t_1 par t_0 dans (2.25), on obtient :

$$u(t) \leq u(t_0) - \frac{1}{2}(t - t_0)^2 u^\alpha(t_0) \quad (2.26)$$

comme u' est décroissant alors $u'(t) > u'(t_0) = 0, \forall 0 \leq t < t_0$

D'où $u(0) = 0 < u(t_0)$ et on obtient en passant à la limite dans (2.26) que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -\infty$

d'où $\exists t > 0 : u(t) < 0$, contradiction car $u \geq 0$ on a donc $u \equiv 0$. Ceci complète la preuve de théorème.

EXISTENCE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME VIA LE DEGRÉ TOPOLOGIQUE

3.1 Préliminaire

Avant d'annoncer le résultat principale de ce chapitre concernant l'existence de la solution, on donne quelques résultats préliminaires bien connus sur les problèmes aux limites elliptiques et la compacité.

Théorème 3.1. (*Première fonction propre de $-\Delta$*) Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable des valeurs propres et fonctions propres (λ_n, φ_n) avec $\lambda_n \rightarrow +\infty$ et $\lambda_1 = \inf_n \lambda_n > 0$ et il existe une fonction propre $\varphi_1 > 0$ dans Ω associée à λ_1 et on a $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. φ_1 s'appelle la première fonction propre de laplacien sur Ω .

On a besoin de ces théorèmes concernant le principe de maximum et la régularité elliptique.

Théorème 3.2. (*Principe de maximum faible*) Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où L est l'opérateur elliptique linéaire sous forme de divergence définie par :

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))_{x_i} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}.$$

Alors $u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$.

Théorème 3.3. (*Principe de maximum forte*) Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où L est l'opérateur elliptique linéaire sous forme de divergence définie par :

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))_{x_i} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}.$$

Alors ou bien $u \equiv 0$ ou bien $u > 0$ dans Ω .

Théorème 3.4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et régulier, $f \in C(\overline{\Omega})$ une fonction bornée, u est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec $0 < \alpha < 1$, et on a

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \leq c$$

où $c > 0$ ne dépend que de $\|f\|_{L^\infty}$ et Ω .

3.2 Existence de la solution

Nous nous intéressons ici à l'existence d'une solution positive du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

On va appliquer la théorie de degré topologique de Leray-Schauder développé dans le chapitre 1.

En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 3.5. (Voir[5]) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \geq \lambda_1 \quad (3.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t^\sigma} = 0, \text{ avec } \begin{cases} \sigma = \frac{N+2}{N-2} & \text{si } N > 2 \\ \sigma < +\infty & \text{si } N = 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1, f(0) = 0 \quad (3.4)$$

Alors le problème (3.1) admet une solution positive $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Considérons les espaces de Banach suivantes :

$$H = C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\overline{\Omega}) ; \quad E = C(\overline{\Omega})$$

où C_0 est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ qui s'annulent sur la frontière de Ω . On muni ces espaces par les normes suivantes (respectivement)

$$\|u\|_H = \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad , \quad \|u\|_E = \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$$

On considère l'opérateur T défini par :

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow H \\ v &\longmapsto T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v)). \end{aligned}$$

Il est claire que si $u = T(v)$ alors :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(v) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et d'après la régularité elliptique $u \in H$ (voir théorème 3.4). On a le résultat préliminaire suivant :

Proposition 3.1. *Supposons que $f \in C(\mathbb{R})$. Alors l'opérateur*

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v)). \end{aligned}$$

est compact.

Preuve.

Soit $(v_n)_n$ une suite bornée de E , c'est à dire :

$$\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c, (c \text{ ne dépend pas de } n)$$

Comme f est continue alors, il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\|f(v_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c', \forall n \in \mathbb{N}$$

posons $u_n = T(v_n) = (-\Delta)^{-1}(f(v_n))$ alors par définition de T , on a

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f(v_n) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après la théorie de la régularité elliptique Théorème 3.4, la suite $(u_n)_n$ est borné dans H . C'est à dire

$$\exists c_1 = C(c', c) : \|u_n\|_H \leq c_1$$

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà 2.4, on a l'injection compacte suivante

$$H = C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow_c C(\overline{\Omega}) = E$$

alors on peut extraire une sous-suite notée encore par $(u_n)_n$ telle que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ dans } E$$

c'est à dire

$$T(v_n) \longrightarrow u \text{ dans } E$$

d'où T est compact.

Il est clair que une solution u du problème (3.1) est un point fixe de T . C'est à dire

$$u = T(u) \iff \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc il suffit de montrer que T admet un point fixe .

Posons $C = C(\overline{\Omega})^+ = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u \geq 0\}$

Il est clair que C est un sous-ensemble fermé de $E = C(\overline{\Omega})$.

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue alors $T(C) \subset C$*

Preuve.

Soit $v \in C$ alors $v \geq 0$. D'où

$$f(v) \geq 0 \tag{3.5}$$

Comme $v \in C(\overline{\Omega})$ alors $|v(x)| \leq c_1$. D'où

$$|f(v)| \leq c_2 \tag{3.6}$$

d'où, en posant $u = T(v)$

On a

$$-\Delta u = f(v) \geq 0$$

D'après le principe de maximum (Théorème 3.2) $u \geq 0$ et d'après la théorie de la régularité elliptique (Théorème 3.4) : $u \in C^2(\overline{\Omega})$

D'où :

$$u = T(v) \in C.$$

Ce qui fini la preuve.

Soit $r, R > 0$ tels que $r < R$. Posons $U_1 = B_r \cap \overset{\circ}{C}$, $U_2 = (B_R \setminus B_r) \cap \overset{\circ}{C}$, $U = B_R \cap \overset{\circ}{C}$. Où

$$\overset{\circ}{C} = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u > 0\}$$

On va montrer que :

$$d(id - T, U_2, 0) = -1$$

$$d(id - T, U_1, 0) = 1$$

$$d(id - T, U, 0) = 0$$

et par conséquent : l'équation $u = T(u)$ admet au moins une solution dans U_2 qui est donc strictement positive.

Maintenant on 'est prêt à démontrer le théorème 3.5.

Preuve.

Posons $B_R = \{u \in E : \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < R\}$, avec $R > 0$ assez grand à choisir.

On commence à montrer que

$$d(id - T, U, 0) = 0$$

Il suffit de montrer que

$$d(id - T, U, 0) = d(id - (T + c_0\varphi_1), U, 0) = 0, \text{ où } c_0 \text{ est assez grand}$$

Il s'agit de montrer que $u \neq Tu + c_0\varphi_1, \forall u \in \overline{U}$.

Soit $u \in \overline{U}$

$$u = Tu + c_0\varphi_1 \tag{3.7}$$

$$(3.7) \iff (u - c_0\varphi_1) = Tu = (-\Delta)^{-1}(f(u))$$

$$\iff -\Delta(u - c_0\varphi_1) = f(u)$$

$$\iff -\Delta u - c_0\lambda_1\varphi_1 = f(u) \tag{3.8}$$

Multiplions par φ_1 et intégrons par partie

$$(3.8) \iff \int u(-\Delta\varphi_1) - c_0\lambda_1 \int \varphi_1^2 = \int f(u)\varphi_1$$

$$\iff c_0\lambda_1 \int \varphi_1^2 = \int (-f(u) + \lambda_1 u)\varphi_1 \tag{3.9}$$

D'après (3.2),

$$\exists A > 0 : \frac{f(u)}{u} > \lambda_1 \text{ pour } u > A$$

d'où

$$\lambda_1 u \leq f(u) \text{ pour } u > A$$

et on a

$$\lambda_1 u \leq \lambda_1 A = M \text{ pour } u < A$$

D'où

$$\lambda_1 u \leq f(u) + M$$

Donc

$$\begin{aligned} (3.9) \implies c_0 \lambda_1 \int \varphi_1^2 &\leq M \int \varphi_1 \\ \implies c_0 &\leq \frac{M \int \varphi_1}{\lambda_1 \int \varphi_1^2} = \bar{c} \end{aligned}$$

Si on choisit $c_0 = 2\bar{c}$ alors cela contredit avec l'équation précédent et par conséquent

$$u \neq Tu + c_0 \varphi_1 \text{ avec } c_0 = 2\bar{c} \text{ (si non } c_0 < \bar{c})$$

Donc

$$d(id - (T + c_0 \varphi_1), U, 0) = 0$$

Montrons maintenant que

$$d(id - T, U, 0) = d(id - (T + c_0 \varphi_1), U, 0)$$

Par homotopie : on pose

$$h(t, u) = Tu + tc_0 \varphi_1$$

on a $h(0, u) = Tu$ et $h(1, u) = Tu + c_0 \varphi_1$

On montrer que $u \neq h(t, u), \forall u \in \partial U$

On a

$$\partial U = \partial B_R \cap \overset{\circ}{C} = \{u \in C(\bar{\Omega})^+, \|u\|_{L^\infty} = R\}$$

Soit $u \in \partial U : \|u\|_{L^\infty} = R$ tel que :

$$u = h(t, u) = Tu + tc_0 \varphi_1$$

D'où

$$-\Delta u = f(u) + tc_0 \lambda_1 \varphi_1 = g(u)$$

On a

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^\infty} &= \|f(u) + tc_0\lambda_1\varphi_1\|_{L^\infty} \\ &\leq \|f(u)\|_{L^\infty} + c_0\lambda_1\|\varphi_1\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

D'après les estimations a priori (Théorème 2.6)

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c.$$

Si on choisit donc $R = 2c > c$ alors $\|u\|_{L^\infty} < R$ d'où $u \notin \partial U$

D'où

$$u \neq Tu + tc_0\varphi_1, \forall \|u\| = R, \forall t \in [0, 1]$$

Donc

$$d(id - T, U, 0) = d(id - (T + c_0\varphi_1), U, 0) = 0$$

Il reste à montrer que $d(id - T, U_1, 0) = 1$

Par homotopie : on pose

$$h(t, u) = tTu$$

On montre que $u \neq h(t, u), \forall u \in \partial U_1$

avec

$$\partial U_1 = \partial B_r \cap \mathring{C} = \{u \in C(\bar{\Omega})^+, \|u\|_{L^\infty} = r\}$$

$$\begin{aligned}u = tTu &\iff -\Delta u = tf(u) \\ &\implies \int (-\Delta u)\varphi_1 = t \int f(u)\varphi_1 \\ &\implies \lambda_1 \int u\varphi_1 = t \int f(u)\varphi_1\end{aligned}$$

D'après (3.4),

$$\exists r > 0 : \frac{f(u)}{u} < \lambda_1, \forall \|u\|_{L^\infty} \leq r$$

D'où

$$\lambda_1 \int u\varphi_1 < t \int \lambda_1 u\varphi_1 < \lambda_1 \int u\varphi_1$$

Contradiction car $u \in \partial U_1$ et donc $\|u\| \neq 0$.

donc si $\|u\|_{L^\infty} = r : u \neq tTu$

Donc

$$d(id - T, U_1, 0) = d(id, U_1, 0) = 1$$

D'autre part, on a par définition

$$\bar{U} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \text{ et } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

D'où, d'après la propriété d'additivité de degré topologique, on a

$$\begin{aligned} d(id - T, U, 0) &= d(id - T, U_1, 0) + d(id - T, U_2, 0) \\ 0 &= 1 + d(id - T, U_2, 0) \end{aligned}$$

D'où

$$d(id - T, U_2, 0) = -1 \neq 0.$$

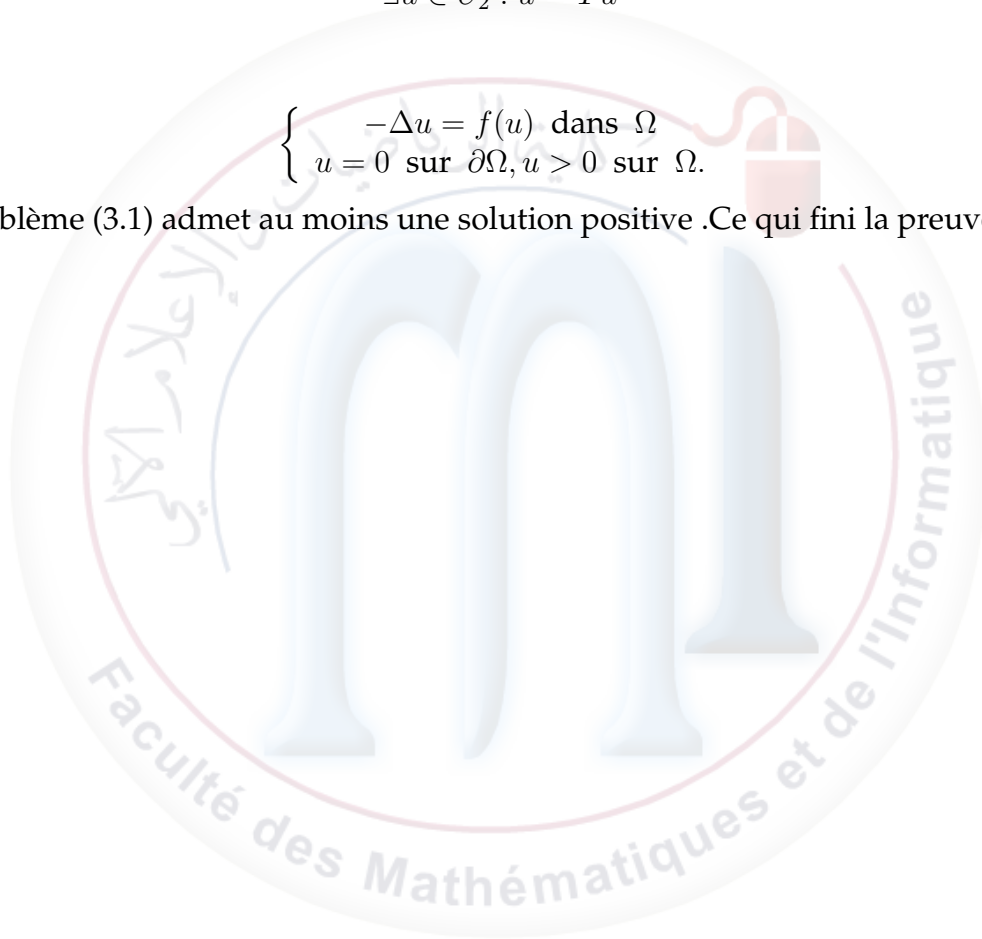
D'après la propriété 1) de proposition 1.3, concernant le degré de Leray-Schauder, on a :

$$\exists u \in U_2 : u = Tu$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, u > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Donc le problème (3.1) admet au moins une solution positive .Ce qui fini la preuve .



Bibliographie

- [1] B.GIDAS and J.SPRUCK, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Commun. Pure and Appl. Math. **34**(1981), 525-598
- [2] B.GIDAS and J.SPRUCK, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. in PDE. **6**(1981), 883-901
- [3] B.GIDAS, Y.M. NI and L.NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys. **68**(1979), 209-243.
- [4] C.B.MORREY, Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [5] D.G.DE FIEGUEIREDO, P. L. LIONS and R. D. NUSSBAUM, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear equations*, J. Math. Pures Appl. **61**(1982), 41-63
- [6] D.GILBARG and N. S.TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [7] H.BREZIS, *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [8] JÉRÔME DRONIOU. *Degrés topologiques et applications*, 2006.
- [9] Lawrence C.EVANS, *Partial differential equations*, 2010.
- [10] Le Dret. HERVÉ, *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

Résumé

L'objet de ce mémoire est d'étudier le problème elliptique non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} Lu = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où L est un opérateur elliptique linéaire sous-forme de divergence définie par

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))_{x_i} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}.$$

($L = -\Delta$ si $a_{ij} = \delta_{ij}$ et $b_j = 0$).

On s'intéresse à la question d'existence de la solution de ce problème en utilisant la méthode de degré topologique. D'abord, on démontre des estimations a priori de la solution via la méthode de blow-up qui est basée sur la raisonnement par l'absurde. ce qui nous permet d'appliquer le degré topologique de Leray-Schauder pour démontrer l'existence de la solution.

Mots clés : Degré topologique de Brouwer et de Leray-Schauder, estimations a priori, principe du maximum, problèmes elliptiques non-linéaires, première fonction propre de laplacien.

Abstract

The object of this memory is to study the following non-linear elliptical problem :

$$\begin{cases} Lu = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where L is a linear elliptical operator in the form of divergence defined by

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j}(x))_{x_i} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}.$$

($L = -\Delta$ if $a_{ij} = \delta_{ij}$ and $b_j = 0$).

We are interested in the question of the existence of the solution to this problem using the topological degree methods. First, we prove a priori estimates of the solution via the blow-up method which is based on reasoning by the absurd. which allows us to apply the topological degree of Leray-Schauder to prove the existence of the solution.

Keywords :Topological degree of Brouwer and Leray-Schauder, a priori estimates, maximum principle, nonlinear elliptical problems, first proper function of Laplacian.