الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف –بالمسيلة

كلية: العلوم الإنسانية والاجتماعية

قسم: الفلسفة

الموضوع:

مشكلة اللانهائي في الفكر الرياضي

مذكرة مكملة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة

إعداد الطالبة:

- عبد الكبير ربيعة

إشـراف

- د. خشعي عبد النور

أمام لجنة المناقشة:

الرقم	الاسم واللقب	الجامعة	الصفة
01	د لصقع الربيع	جامعة محمد بوضياف– المسيلة	رئيسا
02	د. خشعي عبد النور	جامعة محمد بوضياف– المسيلة	مشرفا ومقررا
03	د. بازة الحاج	جامعة محمد بوضياف– المسيلة	مناقشا

السنة الجامعية (2025/2024)

بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
University Mohamed Boudiaf of M'sila

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
FACULTY OF HUMANITIES AND SOCIAL SCIENCES

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculty of Humanities and Social Sciences
Vice-Deanship of the College for Studies and Student Issues

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
نيابة العمادة للدراسات والمسائل المرتبطة بالطلبة
الرقم: 2025/

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية لإنجاز بحث

انا الممضي (ة) ادناه :

السيد(ة): عبد الكبير بلبسة

الصفة (طالب، استاذ باحث، باحث دائم):

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 206792684

الصادرة بتاريخ : 2021/06/15 عن دائرة : حاسي الفدول

المسجل(ة) بكلية: العلوم الانسانية والاجتماعية قسم: الفلسفة

تخصص: فلسفة عامة تحت رقم التسجيل: 2014044094426

والمكلف بإنجاز اعمال بحث (مذكرة التخرج، مذكرة ماستر، مذكرة ماجستير، اطروحة دكتوراه) .

عنوانها: مشكلة الانساني في الفكر الرياضي

اصرح بشرفي بانني التزم بالمعايير العلمية والمنهجية ومعايير الاخلاقيات المهنية والنزاهة الاكاديمية المطلوبة في انجاز البحث المذكور اعلاه

المسيلة في: 2025/06/01

امضاء المعني (ة):

المرجع: القرار الوزاري رقم: 933 المؤرخ في: 28-07-2016 المحدد للقواعد المتعلقة بالوقاية من السرقات العلمية ومكافحتها.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
University Mohamed Boudiaf of M'sila

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

كلية العلوم الإنسانية والإجتماعية
FACULTY OF HUMANITIES AND SOCIAL SCIENCES

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية
نيابة العمادة للدراسات والمسائل المرتبطة بالطلبة

Faculty of Humanities and Social Sciences
Vice-Deanship of the College for Studies and Student Issues

وثيقة ايداع مذكرة ماستر

الموضوع: مشكلة اللانهائي في الفكر الرياضي

إعداد الطلبة:

1- عبد الكبير ربيحة **رقم التسجيل:** 204044094426

2- .... **رقم التسجيل:** ....

القسم: الفلسفة **الشعبة:** .... **التخصص** فلسفة عامة

إشراف: حنتو عبد النور **الرتبة:** استاذ محاضر أ

أقر بأنني تابعت العمل المذكور أعلاه في جلسات إشرافية طيلة الموسم الجامعي: 2024-2025 وأسمح بإيداعه على مستوى ادارة القسم للمناقشة والتقييم.

موافقة وإمضاء الاستاذ(ة) المشرف(ة):

رئيس فريق الاختصاص

رئيس القسم

د. ارفيس علي

شكر وعرفان

نحمد الله ونشكره الذي ألهمني الصبر والعزيمة على إنجاز هذا العمل

ونتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى الأستاذ الدكتور "خشعي عبد النور"

المشرف على هذا البحث الذي لم يبخل عليّ بنصائحه وتوجيهاته القيمة

ربيعة عبد الكبير

إهداء

إلى كل من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة.

إلى الذي لم يبخل عليّ بأي شيء.

إلى الذي منحني كل ما يمتلك... ولم يأخذ جهداً في تقديم الدعم لي.

إلى الذي وضعني في الأمام ورباني وعلمني الصواب.

إلى أعظم وأعز رجل في الكون " أبــــي الغــالي" دمت لي طوال العمر.

إلى من علمتني الصمود والأمل.

أعظم وأحن إنسانة في الوجود.

إلى أمي الحبيبة أطال الله في عمرها.

وإلى سندي ورفيق دربي زوجي الغالي " المحفوظ"

إلى عزوتي وسندي في الحياة إخوتي وأخواتي.

مقدمة

مقدمة:

تعتبر الرياضـيات العلم الأكثر دقة و الأكثر صـرامة إذ كانت و مازالت العلم الذي تحتدي به سـائر العلوم بغية توخي الدقة و اليقين، لكن رغم هذا تبقى للرياضـيات إشـكالياتها الفلسـفية و الإبسـتمولوجية مثل بقية العلوم و التي أثارت الكثير من النقاش قصد الوصول إلى حلها و من بينها مشكلة اللانهائي و هذا الأخير حير الفكر الإنساني و حلق بعيدا في سماء البحث المعرفي لاعتباره مشكلة عويصة طرحت ثلة من الصعوبات التي اعترضت طريق البحث الفلسفي بصفة عامة و الرياضي خاصة فاشترك في التنقيب عنه الفلاسفة الرياضـيون منذ أمد بعيد فلعب دورا هاما عبر الزمن ونظرا لهذا الاهتمام به برزت أهميته.

فكان مشـكاة اشـتدت ضـياءا كلما تقدم البحث فيه و بوصـلة للحائرين في دروب الحقيقة القابعة وراء كبريات مشـاكل المعرفة الإنسـانية فتغيرت الرؤية حوله وذلك بتطور العلم و لقد برزت بشـكل جلي عندما اعتقد الإنسـان أن الكمية متواصـلة قابلة للقسـمة إلى ما لا نهاية و هذا أنتج ما نسـميه في عصـورنا الحالية المفارقات أو النقائض les paradoxes " وذلك منذ اليونـان لإدراكهم العلمي كحجة و برهان و منذ اكتشـاف "الفيثاغوريين" الأعداد الصـماء إلى اتخاذ" زينون الإيلي " متناقضـات الأعداد اللامتناهية لإثبات بطلان الحركة و الكثرة.

ليسـتمر البحث بشـكل رهيب باكتشـاف" ديكارت" الهندسـة التحليلية و اكتشـاف "ليبنتز" حسـاب التفاضـل والتكامل و ظهور نظرية المجموعات" لجورج كانتور" و غيرها من الحقائق

العلمية و الرياضـية التي كان اللانهائي يسـير في موازاة معها جنبا إلى جنب فالإشكالية التي يعالجها هذا البحث هي فيما تجلت فكرة اللانهائي في الفكر الرياضـي؟ و ما هي أهم امتداداته.

و للإجابة على هذه الإشكالية ومختلف التساؤلات قمنا بتقسيم موضوع البحث إلى ثلاثة فصول:

الفصل الأول أبرزنا فيه تعريف موضوع اللانهائي و بعض المفاهيم المرتبطة به و توضـيح جذور فكرة اللانهائي و تطورها عبر العصـور تحت عنوان جذور فكرة اللانهائي و يليه الفصـل الثاني بعنوان طبيعة اللانهائي و خصـائصـه و أهم اشكالياته و نبرز فيه محاولة البحث عن طبيعة اللانهائي وخصـائصه و صـلا إلى أهم الإشكالات التي طرحها ثم الفصـــل الأخير حول الثورة العلمية في الرياضـــيات والفيزياء و يحتوي على تطور الهندسات من الهندسات الإقليدية إلى الهندسات اللاإقليدية إضافة إلى نظرية المجموعات " جورج كانتور أنموذجاً وصـــولا إلى نظرية الكوانت و أهم تطوراتها واعتمدنا على مناهج لتبسـيط الموضــوع و تشــعباته باعتبار اللانهائي ميراثا طويلا وامتد قرونا من الزمن له الحضور القوي على مسرح الفلسفة.

اعتمدنا المنهج التاريخي بتقصـــي فكرة اللانهائي منذ القديم وصـــولا إلى العصـــر الحديث و المنهج التحليلي و المقارن في تحليل المشـــكلة من خلال نماذج من الباحثين فيها و محاولة إبراز نقاط الاختلاف و التطور فيها و لذلك لم يكن اختيارنا لمشـــكلة اللانهائي مجرد صـــدفة أو عشـــوائية بل له مبررات موضـــوعية و أخرى ذاتية ومن ذلك موقع اللانهائي في الفكر الفلسـفي إضـــافة إلى ذلك انفنا الاقتراب من هذه المشـكلة التي آمن بها الفكر طويلا و التي تضـــرب جذورها في التاريخ لذلك كانت لنا الرغبة في الوصول إلى الفكر المختلف لكل عصر باعتبار المشكلة جامعة لكثير من الفلاسفة.

ومن الأسـباب التي جعلتنا نقوم بالبحث في هذا الميدان هي إلمام و تكوين صـورة شـــاملة للمشـــكلة وتطورها المعاصـــر كما أنه كانت لنا محاولات ســـابقة في البحوث الأكاديمية.

وهذا وقد واجهتنا بعض الصـــعوبات في إنجاز هذا البحث ومنها تشـــعب هذا الموضوع و صعوبة قراءة وشرح النصوص واعتمدنا على مجموعة من المراجع أهمها:

محمد ثابت الفندي في كتابه " **فلســـفة الرياضـــة**" وكتاب صـــلاح محمود عثمان محمد " **الاتصـــال و اللاتناهي بين العلم و الفلســفة**"، وكتاب "**إقليدس بين الفلســفة و المنهج الرياضي**" لكامل كامل محمد عويضة.

الفصل الأول:

جذور فكرة اللانهائي

المبحث الأول: مفهوم اللانهائي.

المبحث الثاني: تطور فكرة اللانهائي عبر العصور

أ.في الفكر القديم.

ب.في الفكر الوسيط.

ج.في الفكر الحديث

المبحث الأول: مفهوم اللانهائي.

"اللانهائية ***Infinité***، ما هو لا متناه"[1] أي أنها صـــــفة، يطلق اللانهائي على معان متباينة بل ومتقابلة.

1.إذ يطلق أولا على ما ليس له حد، أعني نهاية.

2. كما يطلق على ما لا شأن له بالحد إذ يعوز، كل إشارة إلى حد أو نهاية.

3.و اللامتناهي أمر سلبي وناقص.

4. أو هو أمر إيجابي وتام.

5. واللامتناهي، أمر بالقوة فقط، إذ في حال ضرورة لا في حال وجود.

6.أو هو أوجب بالفعل ومعطى كله".[2]

" اللامتناهي *Infini* هو تفيض المتناهي، وهو ما لا حد ولا نهاية له بالفعل، وإن كانت له حدود ممكنة على حين اللامتناهي هو الذي لا حدود له على الإطلاق.

واللامتناهي يكون بحســـب الكيف فإذا كان بحســـب الكم دل على عظم أكبر من كل، عظم ممكن كالعدد اللامتناهي وإذا كان عكس الكيف دل على الصـــــفات التي ينصف بها الموجود الكامل كالصفات الإلهية، فهي لا متناهية".[3]

يجد أرسطو الوجوه التي يقال عليها اللامتناهي وهي:

1."اللامتناهي هو من يمكن الشـــروع فيه، لأنه ليس من شـــأنه أن تظفر به، كما يقال الصوت أنه غير مرئي.

2. اللامتناهي هو ما كان مسلكه لا لآخر له، أو ما كان سلوكه بحث أو مشقة، أو ما كان في نفسه سلوى غير أننا لا نقدر على سلوكه وبلوغ آخره.

---

[1] أندري لالاند: موسوعة لالاند الفلسفية ، ت: خليل أحمد خليل، مجلد2، منشورات عويدات، بيروت، لبنان، ط2، 2001، ص 673.

[2] عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الفلسفية، ج2، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1984، ص 348.

[3] جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج 2، دار الكتاب العالمي بيروت، لبنان، ج2، 1994، ص 271.

3. اللامتناهي هو ما لا نهاية له، إما في الزيادة وإما في القسمة وإما فيهما جميعا".[1]

"واللامتنـاهي الموجود بـالفعـل هو اللامتنـاهي المطلق، وهو مرادف للكمـال أمـا اللامتناهي الموجود بالقوة فهو اللامتناهي النســبي(....)، واللامتناهي في العظم مما هو أكبر من كل مقدار معلوم، وأكثر اســـتعماله في المقادير المتغيرة أو في الأعداد التي لا حد و لا نهاية لزيادتها.

"و اللامتناهي في الصغر ما هو أصغر من كل مقدار أو معلوم، ويطلق على كل مقدار متغير، حده ونهايته الصفر." [2]

المبحث الثاني: تطور فكرة اللانهائي عبر العصور.

لقد واجهت الرياضيات منذ بدايتها الأولى مشكلة اللانهائي كمشكل أساسي فحير فكر الفلاسفة والرياضيين منذ القديم، وطرحت عدة صعوبات فهناك من الفلاسفة من رأى أن اللانهائي هو مبدأ الوجود ثم انتقل هذا المفهوم إلى الفكر الوسـيط وبعدها برز كمفهوم رياضي في العصر الحديث.

أ. الفكر القديم:

"لقد كان ديوفات Diophante الرياضــي الاسكندري (....) أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما إلى كميات أخرى معلومة".[3]

وهي الفكرة التي أثمرت الجبر هذه الطرق الفيثاغورية، وســـبب ذلك هو أن رموز الأعداد والعمليات لم تكن معروفة في حضـــارتي اليونان والإســـكندرية، ما عدا منطق أرسطو الذي استعمل حروف الهجاء للدلالة على حدود القياس وعرف الهنود أيضـا تلك الطريقة وكان براهماجينا *Brama Gupta*، يستعمل الألوان المختلفة رمز للمجهولات.

---

[1] عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الشعبة ع2 (مرجع سابق)، ص 349.

[2] جميل صليبا، المعجم الفلسفي، ص 272، 273.

[3] محمد ثابت القندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت ،ط1، 1969، ص 83،84.

"ولعله من الضروري الإشارة إلى أن ارتباط فكرة اللامتناهي بمفهوم الاتصال يعود إلى الفيلسوف الإغريقي انكسمندريس الذي قال بأن المبدأ الأول للوجود أو المادة الأولى هي اللامتناهي.

حيث وضـــع معنيين لهذا المفهوم وذلك بالقول "من حيث الكيف أي لا معينة ومن حيث الكم لا محدودة، وهي مزيج من الأضــــداد جميعا الحار والبارد والرطب واليابس وغيرها، إلا أن هذه الأضـداد مختلفة متعادلة غير موجودة بالفعل من حيث هي كذلك، ثم انفصــلت بحركة المادة، ومازالت الحركة تنفصــل بعضـــها عن بعض، وتجمع بعضـــها البعض بمقادير متفاوتة، حتى تألفن بهذا الاجتماع والانفصــــال لأجســـام الطبيعة على اختلافها".[1]

وإننا نجد فكرة اللامتناهي عند ديمقريطس، في قوله إن النظرات لا محدودة أو لا متناهية المحدد وإن الفراغ الذي توجد فيه الذرات لا متناه أيضا".[2]

وهنا كان تفسير اللامتناهي ليس تفسير رياضي رغم تطور الهندسة في ذلك الوقت وإهمال علم الحساب بسبب إعاقة من طرف العدد الأصم.

" وإن أزمة العدد الذي لا يخضـــع لعملية الجذر التربيعي في أعداد متناهية قابلة للقراءة كانت من أولى أزمات التفكير الرياضـــــي ورغم جهود الفيثاغورين في إيجاد حلول لهذه الأزمة، وذلك بوضـع أقرب سلسلتين من الأعداد الكسرية إما بالزيادة أو النقصــان للعدد الأصم الذي سيقع بينهما إلا أنهم لم يصلوا إلى حلول قاطعة. [3]

ففكرة اللامتناهي في الرياضــيات ظهرت عند الفثاغوريين " إذ اكتشــفوا ما يعرف بنظرية فيثاغورس القائلة، بأن المربع المنشــأ على الوتر في المثلث القائم الزاوية يســاوي

---

(1) صلاح محمود عثمان: الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، مرجع سابق، ص 17.

(2) عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الفلسفية، المرجع السابق، ص 349.

(3)Hourya sinnaceur : L'infini la recherche.268. Septembre. 1994. P 904

مجموع مربعين المنشأ على الضلعين الآخرين، فإذا فرض أن الضلعين متساويين، وأن طول كل منهما (1سم أو 1متر) فإن طول الوتر هو $\sqrt{2}$ وهو عدد لا نهائي".[(1)]

"فلو افترضنا تبعا للنهج الفيثاغوري أن أي خط هندسي متصل يتألف من نقاط فإن وجود الأعداد اللاقياسية سيظهر على الفور أن كل طول متناه يجب أن يحتوي عددا لا متناهي من النقاط ".[(2)]

" ورغم عدم اهتمام الفيثاغورين بالحساب إلا أن هندستهم كانت خاضعة لكثير من الخصائص العددية فنجد أن النقطة عندهم مجرد وحدة ذات وضع وأي شكل هندسي ابتداء من الخط المستقيم يمكن تصوره وتمثيله مؤلفا من نقاط عديدة فيثير هذا المقصود الذهني مشكلة الاتصال ومشكلة قابلة التقسيم إلى ما لا نهاية".[(3)]

كما يبرز شخص آخر من الفكر اليوناني اهتم كثيرا بالحديث عن فكرة الأعداد الهائلة وهو أرخميدس في كتابه " أعداد الرمل" رغم أن اهتمامه كان فلسفي أكثر من رياضي فهو لم يفكر في نظام عددي يطبق في العمليات الرياضية.

إنما كان همه عدد حبات الرمل التي تكسو هذا الكون وذلك بمعرفة سعة هذا الكون أولا ومن ثمة التخمين في عدد حبات الرمل التي يمكن أن تكسوه ".[(4)]

" فيما بعد يأتي زينون الإيلي وهو تلميذ بارمنيدس مؤيدا لمذهب معلمه ضد الذين سخروا من الفيثاغورين الذين حاولوا أن يبينوا أن العقل بالوحدة يتبع نتائج مضحكة متناقضة له، واعتبروا العالم مؤلفا من أعداد أي من وحدات منفصلة".[(5)]

---

(1) عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 353

(2) Hourya sinnaceur.opcit. P 31.

(3) جورج سارتون: تاريخ العلم، ت: جميل علي، ج2، دار المعارف، القاهرة، ط3، 1978، ص 98.

(4) جورج سارتون: تاريخ العلم، مرجع سابق، ص 114.

(5) محمد جديدي: الفلسفة الإغريقية، الدار العربية للعلوم، ط1، 2009، ص 201.

وفي ذلك أورد زينون مجموعة من الحجج ضـــد الكثرة والحركة معتمد على منهج جديد وهو منهج جدلي بحيث يقوم على البرهان بالخلف ليبين ضـــعف منهج الفيثاغورين ومن هذه الحجج.

1.القسمة الثانية:

" ملخص هذه الحجة يتمثل في أنه لكي يمر جســـم من مكان إلى مكان عليه أن يمر بكل الأجواء الموجودة بين كلا المكانين ومعناه".[1]

إذا قام جســم من نقطة مكانية (أ) كي يصــل إلى النقطة (ب) فإنه للوصــول إلى النقطة (ب) يجب أن يمر أولا بالمنتصــف ولتكن نقطة ثالثة (ج) لكن قبل الوصــول إلى (ج) لا بد من المرور بمنتصف المنتصف وهكذا إلى ما لا نهاية له من النقاط.

2.حجة أخيل والسلحفاة:

" تقول هذه الحجة أن أبطأ العدائين في السباق (العداء الأول) سيضل متقدما عن أســـرع العدائين (العداء الثاني)، وهذا الأخير لا يمكنه اللحاق بالأول الذي يكون قد انتقل من النقطة التي يلتحق بها العداء الثاني إن كان يسـبقه بمســافة ومتقدما عليه، فأخيل لن يلتحق بالسلحفاة وذلك لأنه كي يلحق بها عليه أن يقطع المسافة بينه وبين السلحفاة وقبل قطع المسافة، عليه أن يقطع نصف هذه المسافة وهكذا وما دام المكان منقسم إلى ما لا نهاية فأخيل لن يلحق بالسلحفاة".[2]

3.السهم:

أن الشــيء لا يمكن أن يوجد في مكانين في الوقت نفســه ولهذا فإن السـهم في أية لحظة محدودة من انطلاقه يكون في مكان لا في مكانين وأن يكون في مكان واحد هو أن

---

[1] محمد جديدي المرجع السابق، ص 202.

[2] محمد جديدي: الفلسفة الإغريقية، المرجع سابق، ص 202.

يكون في حالة سكون ومن ثم فهو في كل لحظة وكل آن من طيرانه يكون ساكنا ومن ثم يكون ساكن دائما، أي الحركة مستحيلة".[1]

4.حجة الملعب:

في هذا المثال ثلاث مجموعات مكونة من وحدات مرتبة في الملعب كما يلي:

1/ب^4/ب^3 /ب^2 /ب^1/

2 /ت^1/ت^2/ت^3/ت^4/

3/ث^4/ث^3/ث^2/ث^1/

" لنتصـــــور أن /ب/ ثابتة فان تحركت ت في اتجاه ب بينما تحركت ث في اتجاه ب في نفس اللحظة وهنا نلاحظ أنه لكي تصـل ت إلى ب قد مرت بوحدتين بالنسـبة إلى مجموعة ب هما ب و ب و في نفس الوقت مرت بأربع وحدات".[2]

" ثم يرى أرسطو، أن الاعتقاد في وجود اللامتناهي ينبثق في عدة اعتبارات هي:

1. أن الزمان ليس له بداية و لا نهاية.
2. إمكان انقسام المقادير إلى غير نهاية.
3. لا يمكن دوام الكون والفساد إلا إذا كان مصدرهما لا متناهيا.
4. كل ما هو محدود إنما هو محدود بشيء آخر.
5. فكرنا قادر على عدم نهاية العدد وانقسام المقادير وما هو خارج السماء".[3]

فهل مشكلة اللانهائي: في رأي أرسطو، يقوم على التخيل بين نوعين:

- **اللامتناهي بالقوة:** وهو ما يقربه بالنسـبة لسلسـلة الأعداد، وبالنسـبة إلى سلسـلة النقط على الخط، واللامتناهي بالقوة له صـــورتين - لا متناه بالقوة فيما يتعلق بالقســـمة مثال:

---

(1) وولتر ستيس: تاريخ الفلسفة اليونانية، ت: مجاهد عبد المنعم، دار النشر، بيروت، ط2، 2005، ص 46.

(2) محمد جديدي: الفلسفة الإغريقية، مرجع سابق، ص 204.

(3) عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 350.

قسمة الخط إلى غير نهاية بالقوة، و لا متناه بالقوة فيما يتعلق بالإضافة مثل إضافة عدد إلى عدد آخر إلى ما لا نهاية.

- **اللامتناهي بالفعل:** فينكره أرسطو.

إذن فالروح اليونانية عامة ترى أن المتناهي أعلى قدر من اللامتناهي لأن المتناهي محدود اللامتناهي غير محدود بطبيعته.

ب. في العصر الوسيط

" لكن حينما جاء فيلون اليهودي فقلب الوضـــع وجعل اللامتناهي أعلى مرتبة من المتناهي على أســـاس أن اللامتناهي هو الذي يعم ويشـــمل كل متناه وهو يحتوي على صفات لا حصر لها، المتناهي يشمل صفات محدودة أو نهائية.

إن اللامتناهي عند فيلون هو الذي يمكن حصر صفاته بينما اللامتناهي محصور ولهذا يصـــف فيلون الله بأنه لا متناه لأنه يشـــتمل على كل صـــفاة الكمال، بدرجة لا متناهية".[1]

" وانتقل هذا الرأي إلى الفلسفة المسيحية في العصور الوسطى الأوربية فوصفوا الله بأنه لا متناه و لا نهاية مطلقة، وصفاته هي الأخرى لا متناهية، فقدرته لا تتناهى، وكذلك وعلمه، وهذا اللامتناهي الإلهي، لا متناه بالفعل، وليس بالقوة (....) واللامتناهي لا يوجد في الأجسام المحسوسة.

و لا يوجد لا متناه في المقدار بالفعل، ولا في مخلوق فالامتناهي بالفعل الوحيد هو اللامتناهي الإلهي".[2]

" أما في الفلسـفة الإســلامية، فإننا نجد ابن ســينا في كتاب "النجاة" يكرس أربعة فصـــول الابطال اللامتناهي – فيقرر أنه لا يمكن أن يكون كم متصـــل موجود بالذات

[1] عبد الرحمن بدوي، المرجع السابق: ص 351.

[2] المرجع نفسه، ص 351.

ووضع غير متناه، و لا أيضا عدد مرتب بالذات موجود أيضا غير متناه و لا أيضا عدد مرتب بالذات موجود أيضا غير متناه وأغنى ب مرتب الذات": أن يكون بعضها أقدم من بعض بالطبع في ذاته، ثم يبرهن على أنه لا يتأتى أن يوجد مقدار ذو وضع غير متناه".[1]

" لأنه إنما أن يكون غير متناه من الأطراف كلها، أو غير متناه من طرف (...) أما من القسم الأول فإنما الزمان قد ثبت أنه كذلك و الحركة كذلك لا متناهيان.

أما القسم الثاني فيثبت لنا ضرب من الملائكة والشياطين لا نهائية لها في العدد كما سيلوح لك الحال فيه. وينتهي إلى القول بأن العدد لا يتناهى والحركات لا تتناهى لكن من حيث الوجود بالقوة لا القوة التي تخرج إلى الفعل بل القوة بمعنى أن الأعداد يتأتى أن تتزايد فلا تقف عند نهاية أخيرة ".[2]

أما الغزالي فقد ألمح في كتابه "تهافت الفلاسفة" إلى مسألة اللامتناهي عند الكلام إلى إبطال قول الفلاسفة بقدم العالم، لكن يمكن أن يستخرج من كلامه رأي واضح في موضوع اللامتناهي.

" ففي بداية القرن السابع عشر للميلاد، وضع " الحجاج بن مطر " ترجمة لكتاب الأصول لإقليدس، و في الكتاب العاشر من هذا المؤلف عرف علماء الرياضيات القضية الأساسية الشهيرة التي تقول: " إذا أخذنا مقدارين متفاوتين وإذا طرحنا من المقدار الأخير جزء أكبر من نصفه، وإذا طرحنا من الباقي جزء أكبر من نصفه و إذا تابعنا هذه العملية نفسها تكرارا فستبقى مقدار مما يكون أصغر من المقدار المعطى أساسا".[3]

---

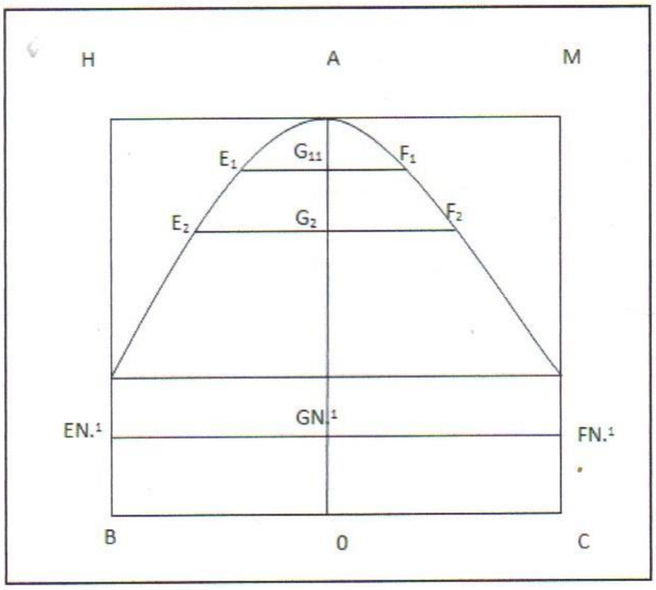
(1) عبد الرحمن بدوي، المرجع السابق ، ص 351-352.

(2) المرجع نفسه: ص 352.

(3) رشدي راشد، ريجيس مورلون: موسوعة تاريخ العلوم العربية، ج 2، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 1997، ص540.

و كان الثابت بن قرة و هو مساعد لبني موسى إسهام كثيف في هذا الفصل ففي حديثه عن صــحيحة الأعداد اللامتناهية، يعتبر الأعداد الصــحيحة الفردية رغم أنها هي الأخرى لا متناهية.

" و لتحديد مســـاحة قطعة من القطع المكافئ يبرهن بطريقة شـــديدة الدقة أن: $\frac{2}{3}$ مساحة هي الحد الأعلى لمساحات المضلعات المذكورة فيتوصل أخيرا إلى البرهنة التي تنص على أن القطع المكافئ لا نهائي".[1]



" و لم يتوقف ثابت بن قرة عند قياس القطع المتكافئة بل طبع مناهج حســـــاب اللامتناهيات في الصغر التي طبقها على أشكال أخرى وخاصة الجسم المكافئ (...) و كذلك يستعيد ابن الهيثم برهان

[1] رشدي راشد، المرجع السابق، ص 540.

حجم المجســـم المكافئ الدوراني، وكذلك البرهان المتعلق بالحجم الذي يولده دوران قطع مكافئ حول خط الترتيب".[(1)]

ج. في العصر الحديث:

" اهتم الرياضيين في العصر الحديث أيضا بفكرة اللانهائي، وذلك بغرض السيطرة على مشــاكل الاتصـــال و ألغاز اللامتناهي ومتاهات الأعداد الصـــماء، لأنها كانت من كبريات المشاكل والأزمات الفلسفية و الرياضية خصوصا، وحملت في ذاتها عمارة غدت الازدهار الخارجي الهائل".[(2)]

" في العصـــــر الحديث نجد في أوروبا "جوردانو برونو" يقرر أن الكون لا متناه و أن الحياة لا متناهية ولا تنفذ أبدا والمكان لا متناه، شــــأنه شـــأن الزمان، ولا تناهيهما، يتناســب مع لانهائية الله، (...) فإن الكون عنده لا متناه و يشـمل بما لا حصــر له من العوالم و بســـبب رأيه هذا في لانهائية الكون حكم عليه ديوان التفتيش البابوى بالإعدام و جاء من بعده ديكارت و دافع عن فكرة لا تناهي الكون، فديكارت يســتخدم وجود تصـــور اللامتناهي في ذهن الإنسان دليلا لإثبات وجود الله ".[(3)]

"ومن بعده جاء ســبنوزا فقرر أنه لا يوجد إلا جوهر واحد (الله أو الطبيعة) و تبعا لذلك فإن الجوهر يجب أن يكون لا متناه سواء في ماهيته و في عدد صفاته (...) و من المحال تصـــــوره قابلا للفلســـفة و القياس ومؤلفا من أجزاء متناهية، و هو لا يتميز من لانهائية الزمان و لا نهائية المكان، إن لا نهائية المكان تعبر عن الماهية اللامتناهية

---

(1) رشدي راشد ريجيس مورلون: موسوعة تاريخ العلوم العربية، مرجع سابق، ص 543.

(2) كامل كامل محمد عويضـة: إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضـي، دار الكتب العلمية، بيروت، ط1، 1994، ص 31. جوردانو برونو (1548 1600)، فيلسـوف ايطالي من مؤلفاته في العملة و المبدأ الواحد في العالم اللامتناهي و في العالم 1574 في الكون اللامتناهي و في العوالم 1591.

(3) عبد الرحمان بدوي: الموسوعة الفلسفية، المرجع السابق، ص.352

للجوهر الإلهي بطرق مباشـــرة، ولا نهائية الزمان تعبر عن التوالي الســـرمدي في الماهية الإلهية واللامتناهي وهو علة ذاته يعرف بذاته أي هو المعقول إلى أقصى درجة".[1]

" وعلى امتداد القرنين السادس عشر و السابع عشر تهاوى شرح منطلق الكليات بالتوازي مع هيمنته مذهب اللاتناهي على الفكر في جميع مجالات الرياضـــيات و الطبيعيات، و الحال أن "ليبنيتز" كان بدرجة لا تقل عن "سبينوزا" نصيرا متحمسا لنظرية اللاتناهي فكل معنى محدد أيا من كان و كل معنى لا يحتوي اللامتناهي هو في اعتقاده مجرد و ناقص، فغير قابل للنفاذ هو وحده الواقعي. [2]

(فإذا انتقلنا إلى كانت وجدناه يتصور اللاتناهي في عرضه لنقائض العقل، فيقرر أن الأشـــياء الموجودة في المكان والزمان ليســت معطاة في مقدار متناه ولا في مقدار لا متناهي، إنما هو ظواهر تتقدم إلى ما هو لامتناه و غير محدود ولهذا لا توجد بداية في الزمان، ولا نهاية وحد في المكان ولا جزء أخير يقبل التجزئة و إن اللامتناهي أكبر من أي محدد والديالكتيك عند هيغل يقتضـــي منه الإقرار بوجود اللامتناهي بالفعل ويميز "هيغل" بين عدة ضروب من اللامتناهي (...) وذلك لأن اللامتناهي الرياضي واللامتناهي في العظم كليهما ليسانفيا للنفي ").[3]

واللامتناهي الذاتي و الموضوعي ليسا كافيين بنفسيهما و إنما يتكاملان إذا اتحدا بواسـطة العقل، و من هنا يميز هيغل بين اللامتناهي الفاسد و اللامتناهي الحقيقي فهو "المطلق" أو الفكرة المطلقة إنه تعيين إيجابي للمتناهي فالروح لا متناه حقيقي.

" أما في العصـــر الحديث أدى كل من جبر "فينت" و هندســة ديكارت إلى تعميم العدد أيضا من جهة أنهما مثلا كل بعد هندسي بعددها، وتعود الرياضيون على أثرهما أن

---

[1] عبد الرحمان بدوي: الموسوعة الفلسفية، المرجع سابق، ص 352.

[2] إميل براوهيه: تاريخ الفلسفة، ت: جورج طرايشي، دار الطليعة، بيروت، ط1، 1983، ص 284.

[3] عبد الرحمان بدوي: المرجع السابق، ص 352،353.

يوحدوا بين العدد و البعد و قد رســـخت بالاســـتعمال هذه العادة في العلم الحديث بعد اكتشــاف حســاب التكامل و التفاضــل (...) فمثلا الهندســي (لوجاندر LEGENDER) يبرهن عام 1823 القضــايا الخاصــة بالمماثلة أو المشــابهة في الهندســة، وذلك بالنظر في الأعداد التي تمثل أبعاد أو بتطبيق نظريات الحساب و الجبر على تلك الأعداد. [1]

" و الرياضـــيين الذين شـــككوا في الوضـــوح الهندســـي لذلك الفرض لما لاحظوا اســتحالة الانتقال من الأعداد إلى الأبعاد انتقال منطقي حرف و بصــفة يقينية لجأووا إلى وضــع مسلمة صــريحة في طب الرياضــة دون برهان عليها تسمى " مسلمة كانتورو ديد كند" تبرر هذا الانتقال. [2]

كما اجتهد الرياضــيين في تقصـــي أنواع الأعداد وفي تكوين ســلســلــة منها محكمة الحلقات في تسلسلها ابتداء من الأعداد الصحيحة من أجل زيادة علمهم التحليلي يقينا من الأبعاد الهندسية.

" وهذا مما أدى إلى التعمق في فكرة الأعداد الصـــماء، لأن العدد الأصـــم الذي لا يتناهى كالدائرة مثلا بدا لهم أنه هو الذي يمثل الأبعاد الهندســـية التي يشـــهد بها الحدس، لأن في العدد الأصـــــم عملية لا تنتهي أي مســـــتقرة، ولقد كانت نتيجة هذا التعمق في الكشـــف عن طبيعة الأعداد الصــــماء أنهم رأوا فيها إحدى نظريتيه الأولى: نظرية الحد: الذي تقف عنده " الســلســلــة اللامتناهية لأعداد صـــماء (نظرية ميراي – فيرســنراس –

جورج فارديناند لود فيغ فليب كانتور، عاش ما بين 1845 و 1918، عالم رياضـــيات ألماني يشـــار إليه انه واضـــع نظرية المجموعات و يعتبر أول من عرف المجموعات اللانهائية والملتصـــــقة ونظريته تلتزم وجود غير متناهي من اللانهائية.

(1) محمد ثابت الفندي: محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، دار المعرفة الجامعية الإسكندرية، (د.ط)، 1996، ص 106.

(2) المرجع نفسه، ص 106.

كانتور) و الثانية نظرية القطع: بين مجموعتين لا متناهيتين من الأعداد الصــماء نظرية (ديدنكد – كرونكر – تانري)". [1]

كمـا تجـد نيوتن يتحـدث عن مكـان و زمـان غير منتهيين كـل ذلـك دون تنـاول اللامتناهي في الكبر مباشـــرة، ولكن ربما كان بولزانو في القرن 19 أول من ركز انتباهه على تمحيص " هذه الفكرة رياضـــيا عندما وضـــع أمام كل عدد من ســـلســـلة الأعداد الصــحيحة (1–2–3...) و هي لا تتوقف بالطبع عند نهاية ما عددا زوجيا من سـلسـلة الأعداد الزوجية المتضمنة في السلسة الأولى (2–4–(6...) و هي بالطبع نصف أعداد السلسلة الأولى".[2]

وبالتالي فإن انشـغال الفلاسـفة و الرياضـيين بمشـكلة اللانهائي والصـعوبات التي يطرحها لا تزال مستمرة و هذا مما يجيل خصـوبة الفكر الإنسـاني وطموحه و تطلعه إلى أبعد من ذلك.

---

[1] محمد ثابت الفندي: محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 107.

[2] محمد ثابت الفندي: محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 113.

الفصل الثاني

حقيقة اللانهائي و إشكالياته

المبحث الأول: طبيعة اللانهائي.

المبحث الثاني: خصائص اللانهائي.

المبحث الثالث: أهم الإشكالات التي آثارها حقل اللانهائي.

المبحث الأول: طبيعة اللانهائي.

حيث بدأ أرسـطو بالتسـاؤل: " هل اللامتناهي موجود أو لا؟ وإن كان موجودا فما هو و كل الفلاسـفة الذين سـبقوا أرسـطو جعلوا من اللامتناهي مبدء للوجود الفيثاغورين جعلوا منه شيئا محسوسا ومثلوه بالعدد، وجعلوه خارج السطح".[1]

" و إنه من المحال أن يوجد شـيء غير متناه مفارقا للأشياء المحسوسة، و يكون قائما بذاته، وذلك أنه إن لم يكن إلا محدود مقدرا و لا عددا، بل كان "لا نهائية" هو حقيقة وجود إلا محدود (...) قد يجب أن يكون غير منقسم، لأن ط هو منقسم يجب أن يكون غير محدود، فليسـت هذه "اللانهاية" هي التي يتصـورها من يثبتون حقيقة اللا محدود، لأن هذا الأخير هو ما لا يمكن أن نقطعه و لا أن تسلكه حتى نهايته. [2]

" و هذا ما يبين عدم جدوى جدال" الفيتاغوريين" الذين يعطون لا نهاية له وجودا مشارا إليه وأيضا يجعلونه منقسما: غير أنه بالرغم من ذلك فإن لا مكان وجود اللا محدود في الرياضيات و في تصور الدائرة و في الأشياء التي ليست مقدرا أصلا"[3] ، و لما كان الجسـم غير المحدود مجالا لا من جهة المعقول، ولا من جهة المحسـوس و لا يمكن أن يكون عددها حتى و لو كان مجردا، غير متناه ذلك أن الأعداد ذاتها و الأشـياء المحدودة كلتيهما أمور محدودة أن تقبل العدد، و إذن إذا كان العدد بالتعريف ما يقبل العدد، و كل أيضـا غير محدود أمكن أن لا يكون اللامحدود غاية أو نهاية وأمكن قطعه وهذا تناقض".[4]

---

[1] عبد الرحمن بدوي: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 348.

[2] أرسطو: الفيزياء السماع الطبيعي، ت: عبد القادر قنيلي، إفريقيا الشرق، المغرب، 1998 ص 85.

[3] المرجع نفسه، ص 86.

[4] أرسطو الفيزياء، السماع الطبيعي، المصدر نفسه، ص 86.

حيث علق أرســـطو على هذه الآراء قائلا: "إنهم لم يخطئوا كلهم في قولهم عن اللامتناهي إنه موجود وإنه مبدأ لأنه كل شـــيء هو إما مبدأ، وإما عن مبدأ وليســـت اللانهاية مبدأ، و ذلك إنه إن كان مبدأ فإنه لا نهاية له، إن كان مبدأ فإنه أيضـــا مبدأ لا متكون و لا فاسد".[1]

(والحل هو أن يقال إن اللامتناهي هو من جهة موجود، و من جهة أخرى هو غير موجود، إنه موجود بالقوة لكنه غير موجود بالفعل، فالمقدار هو بلا نهاية من حيث إمكان القسـمة، لكنه بالفعل لا ينقسـم إلى مالا نهاية فقد حصـل الأمر على أن لا نهاية بالقوة، وليس ينبغي أن نفهم من قولنا " بالقوة" كما تفهم من قولنا إن هذا الشـــيء بالقوة تمثال و نحن نعني أنه سيصير تمثالا، حتى نفهم مثل ذلك في " لا نهاية" أي أنه سيخرج إلى الفعل، و إنما المقصود هو " أن لك أن تأخذ منه دائما بعد شيء، وما تأخذه منه أبدا متناه إلا أنه أبدا غير ما أخذته منه").[2]

وكان يقول انكساغوراس: " إن اللا محدود يجعل نفسه ساكنا بالاعتماد على نفسه، لأنه يشتمل في ذاته على معنى السكون، إذ لا شيء يحيط و يجمعه من طرفيه و يترتب من ذلك أنه ما من شيء بين يوجد إلا وكان اللا محدود مكان طبيعيا له".[3]

حسـب أرسـطو أن هذا القول "فاسـد" وذلك أنه قد يكون الشـيء موجودا من مكان غير مكانه الطبيعي قسرا باضـطرار، إذن لو افترضـنا صـحة القضـية أن العالم لا يتحرك لأن ما يجعل نفسـه سـاكنا بالاعتماد ويتماسـك ينبغي أن تكون غير محرك لكان ما علينا أن نبين لأي ســـبب ليس من شـــأنه أن يتحرك، فإنه ليس يكفي في ذلك أن يقال مع

---

[1] عبد الرحمان بدوي: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 349.

[2] المرجع نفسه، ص 350.

[3] أرسطو: السماع الطبيعي، المصدر السابق، ص 89.

انكساغوراس إنه هذا الحال، فقد يجوز أن يكون هناك جسم آخر لا يتحرك، غير أنه ليس مانع يمنع من أن يكون من شأنه و طبيعته أن يتحرك".[1]

"إلا أن السـؤال يطرح، و هو كيف ينبغي أن نفهم مصـطلح الوجود بالإمكان أننا نأخذه لا في معنى الذي تقول، إن إمكان التمثال يوجد بالقوة في معدن النحاس لأن هذا يقتضي أن معدن النحاس سيصير بالفعل تمثالاً. [2]

وقد ظهر إذن أنه ليس يكون بالفعل جسم لا متناه.

و بهذا فالروح اليونانية تنظر إلى العالم على أنه متناه و ترى أن المتناهي أعلى قدرا من اللامتناهي لأن المتناهي محدود أما اللامتناهي فغير محدود بطبيعته.

فنقول أن مشـكلة اللانهائي قد نشـأت عند الفلاسـفة لأنهم ظنوا ما ينطبق على الأعداد النهائية لابد كذلك أن ينطبق على الأعداد اللانهائية، كأنما يتحتم أن تكون الأعداد كلها من صنف واحد، وكأنما يستحيل أن يكون بينهما اختلاف يجيز لنا أن نقول في بعضها ما لا نقوله في بعضها الآخر".[3]

نعم إن القول بأن الكل وجزءه يمكن أن يتسـاويا في عدد الحدود، قول لا يسـهل قبوله عند الإدراك الفطري السـاذج (...) لأن الحقيقة التي لا مناص في قبولها هي أن الكل و الجزء يتسـاويان في الأعداد اللانهائية إنما يكون محتوما في مجال الأعداد والنهائية وحدها".[4]

المبحث الثاني: خصائص اللانهائي.

وقد أقر الرياضـيون بأن كما توجد الأعداد النهائية خصـائص، كذلك الأعداد اللانهائية لها خصائص الأعداد اللامتناهية والسلاسل اللامتناهية.

---

[1] أرسطو، الفيزياء السماع الطبيعي، المصدر السابق ص 89.

[2] زكي نجيب محمود، بيرتراند راسل، ط2، دار المعارف، مصر، سنة 1919، ص 61.

[3] المرجع نفسه، ص91.

[4] زكي مجيب محمود، بيرتراند راسل، مرجع سابق، ص62.

1. (إنها لا تزيد بالإضافة أو التضعيف، و لا تنتهي بالطرح أو القسمة، فلو استطعنا أن تكتب في صف واحد كل الأعداد ١.٢.٣.٤.٥.... و في صف ثان تكتب كل الأعداد الزوجية:. ٢٠٤٠٦٠٠٨٠١٠ .. فإن الأعداد في الصفين واحد هو نفسه، مع أن الصف الثاني نتج عن أخذ العدد اللامتناهي من الأعداد الزوجية أخذه من السلسلة اللامتناهية المؤلفة من كل الأعداد، وظاهر أن الكل ليس أكبر من جزئه، لكن ملكه " أكبر هنا مشتركة غامضة، ومعناها هنا هو: الاحتواء على عدد من الحدود أكبر" و بهذا المعنى يمكن للكل أن يكون مساويا لجزئه دون أن يكون ثم تناقض). [1]

2." إن بعض السلاسل اللامتناهية لها نهاية من جهة مثلا: سلسلة اللحظات الماضية تنتهي في اللحظة الحاضرة، أو عدد النقط اللانهائي في خط متناه.

و لكن بولوزانوبري: إن خاصية العدد اللامتناهي الكبر في أن الكل يساوي جزءه على خلاف المألوف باعتبار أن سلسلة الأعداد الزوجية من نصف الأعداد في السلسلة الكاملة"[2]

" إن خصائص العدد اللامتناهي التي منها تلك الخاصية التي أشار إليها بولوزانوبري أنها أصبحت واضحة في نطاق المعالجة الرياضية التامة للأعداد اللامتناهية عند جورج كانتور في الربع الأخير من القرن الماضي.

و قد أقر براتراند راسل بأن الأعداد الطبيعية لها خاصيتين الأولى، انعكاسية، الثانية: استقرائية".[3]

أ. انعكاسية:

---

(1) عبد الرحمان بدوي: الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص354.

(2) محمد ثابت الفندي: محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 115.

(3) محمد ثابت الفندي، محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 115.

و نقول أن العدد يتصف بالانعكاسية و هذا يعني أننا لو أضفنا عددا متناهيا أو سلبناه منها سيكون ذلك دون زيادة أو نقصان في عدد المجموعة، فلو لاحظنا مثلا: المثال التالي:" نكتب في الصف الأول مجموعة الأعداد الطبيعية: 1،2،3 . .... الخ، و في الصف الثاني مجموعة الأعداد الزوجية: 2،4،6،8 ... الخ و للنظر في المجموعتين:

3، 2، 1، ..

8، 6، 4، 2 ...[1]

و هنا نلاحظ أن المجموعتين متكافئتين و هذا ما يبدي التناقض بالرغم من أن المجموعة الثانية هي مجموعة فرعية من الأولى، و لكن لا يعقل أننا نتعامل مع سلسلة الأعداد اللامتناهية، ومنه يمكن أن نستنتج أن:

الجزء يساوي الكل"، و هذه الخاصية ربما كان " بلزانو " أول من ركز انتباهه عليها في القرن 19م، عندما استنتج أن سلسلة الأعداد الزوجية مساوية لسلسلة الأعداد الكاملة بالرغم من أن الأولى هي نصف الثانية.

(و بالتالي يستحيل لنا أن نقول أن خواص العمليات الحسابية لم يعد لها نفع، حين تطبيقها على الأعداد اللانهائية أو اللامتناهية، ومن ثم يتبين عدم جدوى هذه العمليات المألوفة لدينا في هذا الميدان الجديد ميدان اللامتناهي:

أ + أ = أ

أ + ن = أ

أ + أ = أ

أx + ن = أ [2]

أ x أ = أ

[1] صلاح محمود عثمان محمد، الاتصال و اللاتناهي بين العلم و الفلسفة، المرجع السابق، ص 121.

[2] محمد ثابت الفندي، محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها، المرجع السابق، ص 115.

أن = أ

إلخ ... [1]

و صـــحيح أيضـــا أنه يوجد حد أدنى وأقل في العدد، أما من جهة الزيادة فكل كم معين يمكن دائما أن يتجاوز و أن يتعدى، أما في المقادير على الضـد من ذلك، إذ يجوز دائمـا أن نجعل الصــــغير أصـــــغر، غير أنـه ليس يمكن أن يوجد مقدار كبير غير متناهي".[2]

ب. الاســـتقرائية: أما خاصـــية الاســـتقراء الموجودة في الأعداد المتناهية، و لكنها غير موجودة في الأعداد اللامتناهية، فمعناها:

" لأن أول الأعداد اللانهائية ليس له ســـلف مباشـــر، فلا يوجد عدد يدعى أكبر الأعداد المتناهية ليكون سلف لعدد بعده يدعى أصغر الأعداد اللامتناهية (...).

و من ثم فالأعداد اللامتناهية لا استقرائية وهو مكافئ لقولنا أنها أعداد منعكسة".[3]

و ما دمنا فهمنا طبيعة الأعداد اللامتناهية، فليس ثمة من المســـتغرب إذن ألا تجدي العمليات الحسابية المألوفة، ولا تتزعج إذا علمنا أن:

أ + ن = أ

أ x ن = أ

أ x أ = أ

حيث ن: عدد استقرائي".[4]

و نشــير أيضـــا إلى خاصـــية أخرى من أن الأعداد اللامتناهية لا تخضـــع لقانون الاســـتنباط الرياضـــي، ومما أشـــار إليه " راســـل" بالقول: إذا علم أي عدد ق، و إذا كان

---

[1] محمد ثابت الفندي ، المرجع السابق، الصفحة نفسها.

[2] أرسطو: الفيزياء السماع الطبيعي، المرجع السابق، ص 95.

[3] صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال و اللاتناهي بين العلم والفلسفة، المرجع السابق، ص124.

[4] المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

ينتمي لكل فصل س، ينتمي إليه أيضا العدد التالي بعد، أي عدد من أعداد الفصل س، إذن ق متناه، و إذا لم يكن كذلك لم يكن متناهيا، و في هذا وحده، وما يترتب عليه من نتائج تفرق الأعداد المتناهية عن اللامتناهية. [1]

" كما أثار جاليلو" (Galilou) أيضا أن العدد اللامتناهي لا يقبل الثوابت الرياضية مثل: مساوي، أكبر، أصغر، ... و هذا ما آل بصعوبات استعصى عليه حلها، لذلك نجده لجأ إلى الاستعارة حيث تتجلى هذه الاستعارة فيما يلي، شبه المتصل، بمجسم حلل إلى مسحوق نهائي يتألف من عدد لا متناهي من الذرات اللامتناهية في الصغر". [2]

المبحث الثالث: أهم الإشكالات التي أثارها حقل اللامتناهي

بدراسة تأسيس ضمير اللامتناهي في حقل الرياضيات والفلسفة في طور النشوء، فإن حقيقة اللانهائي من طرح السؤال باستمرار، فكما أن العلم في تقدم مستمر فان الإشكالات التي يطرحها اللانهائي في تقدم وتطور مستمر، كذلك تطوره مرتبط بتطور النظريات الرياضية و تقدمها، لذلك تبقى ثنائية (النهائي / اللانهائي) محل بحث و نقاش مستمر يسعى لاكتشاف آفاق جديدة لأن الجديد هو الذي لم يولد بعد.... الخ.

فهل نحن هنا أيضا، أمام استمرار الفلسفة بأساليب أخرى ... أم أنه لا وجود للمتناهي إلا بوجود الفكر؟

" كذلك فمنذ أمد بعيد فإن مشكلة اللانهائي آلت على طرح الكثير من المفارقات و نذكر الإشكاليات أو التساؤلات التي أثارها العديد من الباحثين: هل هناك لا متناه واحد أم لا متناهيات كثيرة؟ وإذا كانت هناك لا متناهيات كثيرة، فكيف نميزها و نقارنها؟ و هل

---

[1] برتراند راسل: أصول الرياضيات: ت: محمد موسى أحمد، أحمد فؤاد الصواني، دار المعارف، مصر، ج 2، ص 117.

[2] المرجع نفسه، ص 54.

هناك لا متناه أكبر من لا متناه آخر؟ حيث يمكن القول أن هناك لا متناهين متساويين؟ و الجزء من اللانهائي هل هو متناه أم لا متناه؟ و هل يمكن أن نزيد في حجم اللامتناهي؟"[1]

و هذا ما يبرر رجوع الفلاسفة و الرياضيين في تبريرهم لقاعدة اللامتناهي بالرجوع إلى الواقع، ومن ثم (ترضخ) النظريات الرياضية أو المنطقية الحقائق على الطبيعة.

و لهذا أصبح من العسير تطبيق العمليات الحسابية على اللامتناهي خصوصا على الأعداد في مجال الحساب الرياضي، لأن النتيجة لن تتغير أبدا لأنها دائما تؤول إلى اللامتناهي لكنها لا تبلغه.

" كذلك الإشكاليات التي طرحها أرسطو في رده على " أفلاطون" و الفيثاغورليين في جعلهم اللامتناهي جوهرا، أما أرسطو فيعتبره بأنه مجرد صفة حالة على الأشياء لا أكثر، إذ لا يحمل عليه شيئا، وإلا وقعنا في مفارقات أهمها إمكانية الحديث عن إدراك ما لا نهاية، ومن إدراك لا نهاية في ما لا نهاية:

فإنه إذا أمكن أن يكون جوهرا فإنه سيكون حينئذ بالضرورة قابلا لأن ينقسم، و قبوله لأنه ينقسم معناه أنه: يمكن أن ينقسم إلى ما لا نهاية، فتوجد حينئذ ما لانهاية في ما لانهاية وهذا خلف. [2]

و هذا ما دفع "هوبس" (Hobbes) على إثر هذا كله رفض فكرة اللامتناهي على أنها غير مقبولة في حين يرى " جون لوك" (Locke) أنه من الصعب العثور على شخص شاذ يقول بفكرة وضعية لعدد لا متناهي بالفعل لأنه مهما كانت أفكارنا حول قضايا أو عدد أو مدة ما و مهما كانت مقاديرها فلن تكون سوى أفكار منتهية. [3]

---

[1] Houriya Sinouceur: l'infini, Ibld, p.p 905.906

[2] عبد الرحمان بدوي أرسطو، دار القلم، بيروت، لبنان، ط2، 1980. ص 204.

[3] Houriya Sinouceur : l'infini, Ibid, p.906

و هذا ما دفعه أيضا إلى التساؤل: **هل هذا يعني ألا وجود للمتناهي الفعلي إلا في أذهاننا؟**

الفصل الثالث

الثورة العلمية في الرياضيات و الفيزياء

المبحث الأول: هندسة إقليدس.

المبحث الثاني: الهندسات اللا إقليدية.

المبحث الثالث: نظرية المجموعات (جورج كانتور أنموذجاً)

المبحث الرابع: أثر فكرة اللانهاية على نظرية الكوانتا (الفيزياء المعاصرة

المبحث الأول: هندسة إقليدس

يُعد موضوع طبيعة الهندسة في الرياضيات ذو أهمية كبيرة في فلسفة العلم (ويعود تاريخ الهندسة إلى الحضارة الفرعونية، حين ابتكر المصري القديم عدة طرائق رياضية معينة تعينه على حل مشاكله اليومية، وإعادة تقويم مساحة أرضه بعد كل فيضان، وتلك هي نقطة البدء في نشأة علم المساحة الذي هو علم الهندسة في مرحلته التجريبية، وهذا المعنى التجريبي فهم الإغريق القدامى علم الهندسة، وإن كانوا قد ارتقوا بعد ذلك في علم التجريد العقلي، وليس أدل على ذلك من كلمة "geometry" (هندسة) كلمة مشتقة من مقطعين "gro" بمعنى "أرض" "metrim" وتعني "يقيس" ومن الواضح أنه عندما صيغت هذه الكلمة كان اهتمام الإغريق منصبا على قياس الأراضي، ومن جهة أخرى فرغم أن " إقليدس" كان أول من وضع نسقا أكسيوماتيكيا عرفته البشرية، إلا أن " أرسطو" قد سبقه في وضع أسس هذا النسق ويتضح ذلك في كتابه "التحليلات الثانية. [1]

حيث اهتمت هذه الهندسات بتحليل الزمان والمكان الذي يعد بناء أساسيا في الفيزياء الحديثة " وبالإضافة إلى ذلك تعد الهندسة الرياضية والهندسة الفيزيائية نموذجين ممتازين لوسيلتين مختلفتين بشكل أساسي في اكتساب المعرفة القبلية والتجريبية"[2] ونحن نعرف أن الفلسفة واحدة من الأنساق التي تطورت مبكرا وهذا ما نجده في الهندسة " ويعتبر إقليدس صاحب أول نسق هندسي استنباطي أو أكسيوماتيكي، والذي يتجلى من خلال كتابه "الأصول" – عرفته الحضارة الإنسانية وبه خطت الرياضيات أولى خطواتها

---

[1] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مذكرة دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط 5، ص ص 57-58.

[2] ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم، الأسس الفلسفية للفيزياء، ت: السيد نفادى، دار الثقافة الجديدة، القاهرة، ط1، 2003، ص 151.

نحو اعتلاء عرش اليقين، بكل ما لهذا اليقين من معنى ودلالات، ومن خلاله أصبح النهج الرياضي هدفا تتطلع إليه كل العلوم".[1]

والأكسيوماتيك نظرية بمعنى بصفة عامة " اختيار عدد من القضايا الأولية البسيطة كنقطة ابتداء ثم نشرع في استنباط قضايا أخرى من تلك الأولى لمساعدة بعض التعريفات".[2]

والأكسيوماتيك أيضا "اختبار مماثل للألفاظ فما نبدأ به من حدود نفترض أنها "حدود" أولية بسيطة، بها نعرف الحدود التي يجرى إدخالها خلال تطور النسق".[3]

(وهنا يبدأ "إقليدس" نسقه بتعريف الحدود الأساسية للهندسة، مثل "النقطة" "الخط" فيعرف النقطة بقوله "النقطة ما ليس له أجزاء، أو ما ليس له بعد" و" الخط طول لا عرض له" وهو لم يضع تعريف لكل الحدود المستخدمة في بناء النسق، ففي التعريفين السابقين تعريف النقطة والخط، بينما الكلمات المستخدمة في التعريفات نفسها مثل "أجزاء" "طول" و "عرض" وهي حدود لا معرفة يحتويها النسق التقليدي، وكما حاولنا تقديم تعريف جديد نستخدم فيه الحدود السابقة بالإضافة إلى الحدود اللا معرفة). [4]

"وكانت السمة البديهية الإقليدية في حد ذاتها – اشتقاق النظريات من بديهيات ومصادرات أساسية تعد إسهاما عظيما على نحو لافت للنظر، بحيث ظلت تلعب دور رئيسيا في معظم المناهج الحديثة التي وضعت أنساقا رياضية في صياغة دقيقة".[5]

(ينتقل "إقليدس" بعد ذلك إلى المبادئ الأساسية للنسق أو القضايا اللا مبرهنة unproved propositions وهنا يميز بين نوعين من القضايا الأولية "المسلمات"

---

(1) محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مرجع سابق، ص 58.

(2) صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال والاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص ص 84 – 85.

(3) المرجع نفسه، ص 86.

(4) كامل كامل محمد عويضة: إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، مرجع سابق، ص 72.

(5) ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 151.

"المصـــــادرات" و "البديهيات"، وليس من فارق بينها ســـوى في درجة التعميم، فالبديهيات تختص بالمفاهيم العامة commonnation أي تلك التي لا تتعلق بالنســـق الهندســـي وحده، ولو أردنا الدقة، تختص البديهيات بمفهوم "المقدار" "magnitude" كأن نقول مثل المســاواة متعدية (أي إذا كانت أ= ب، ب= ج فإن أ=ج) ولا تتأثر بإضــافة المتســاويات (أي إذا كانت أ= ب، ج= د فإن أ + ج= ب+ د) في حين تختلف المســلمات من نســق إلى آخر وقد وضع إقليدس ضمن مسلمات هندسية وهي) [1]

1. يمكن من خط مستقيم بين أي نقطتين.

2. أي خط مستقيم متناه هو جزء من خط مستقيم لا متناه.

3. يمكن رسم دائرة بأي مركز وبأي قطر.

4 كل الزوايا القائمة متساوية.

5. إذا قطع خط مستقيم خطين مستقيمين آخرين، بحيث يكون مجموع الزاويتين الداخليتين من جهة واحدة من القطع أقل من قائمتين، فإن هذين الخطين يلتقيان إذا امتدا من هاتين الزاويتين.[2]

"إلا أن واحدة من بديهيات إقليدس، ألا وهي بديهية التوازي، قد ســبب للرياضــيين قدرا كبيرا من الاضـــــطراب، وذلك لعدة قرون، ويمكننا أن نذكر هذه البديهة على النحو التالي: إذا رســمنا على ســطح مســتو الخط المســتقيم ل، ثم وضــعنا النقطة م، بحيث لا تكون على ل، ثم رســـمنا الخط المســـتقيم ل، بحيث يمر على النقطة م، إذن لكان هناك خط واحد يوازي الخط ل. (وتعريف ذلك هو: يتوازي المستقيمان المرسومان على سطح مستوي إذا لم تجمعهما نقطة واحدة)" .. [3]

---

(1) صلاح محمود عثمان محمد، الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص 86.

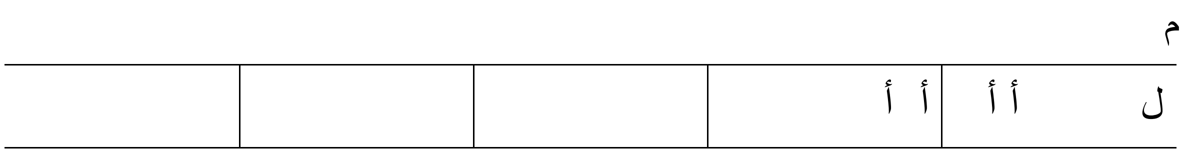
(2) المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

(3) ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 151.

ومن جملة المقدمات السـابقة (التعريفات، البديهيات، المصـادرات) يشـتق إقليدس مجموعة من القضـايا المبرهنة أو "المبرهنات" "the orems" يتم البرهنة على صـحتها باعتبارها مشتقة أو مستنبطة من الحدود والقضـايا الأولية، ومن هذه المبرهنات ارتأينا فقط الإشـارة إلى المبرهنة رقم "17" لأنها وراء أزمة الأسـس التي انطلقت شـرارتها الأولى من المسـلمة الخامسـة المعروفة بمسـلمة التوازي the parallel تقول المبرهنة " مجموع أي زاويتين من مثلث أقل من قائمتين")[1] وباستخدام المسلمة الخامسة يمكن أن نظيف" "وإذا كان مجموع زاويتا القاعدة في شـكل مثلثي الأضـلاع أقل من قائمتين، فلا بد وأن يكون هذا الشـكل مثلثا" وهكذا يمكن أن نبرهن على أن مجموع زوايا المثلث مسـاويا بالضـبط القائمتين"[2]

ويمكن أن تذكر بعض الأمثلة لإثبات مبرهنة التوازي

(إذا رسـمنا الخط المسـتقيم ل على سـطح مسـتوي، ثم رسـمنا المنحنى م، وكانت النقاط التي على م تأخذ نفس مسـافة النقاط التي على ل، إذن لكان الخط م خط مسـتقيم أيضـا، ويبين الشكل 13-1، حيث تمثل أ المسافة الثابتة من ل إلى كل النقاط التي على م، وفي محاولات البرهان على بديهية التوازي، كانت هذه البديهية التي تبدو صـادقة حدسا، تؤخذ في بعض الأحيان بوصفها فرضا ضمنيا، وهذا الفرض الضمني، أمكن حقا البرهان على بديهة التوازي). [3]



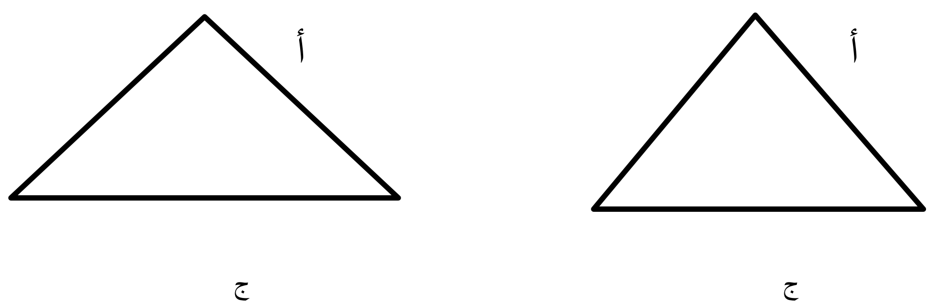
[1] صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص 86.

[2] المرجع نفسه، ص87.

[3] ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 154.

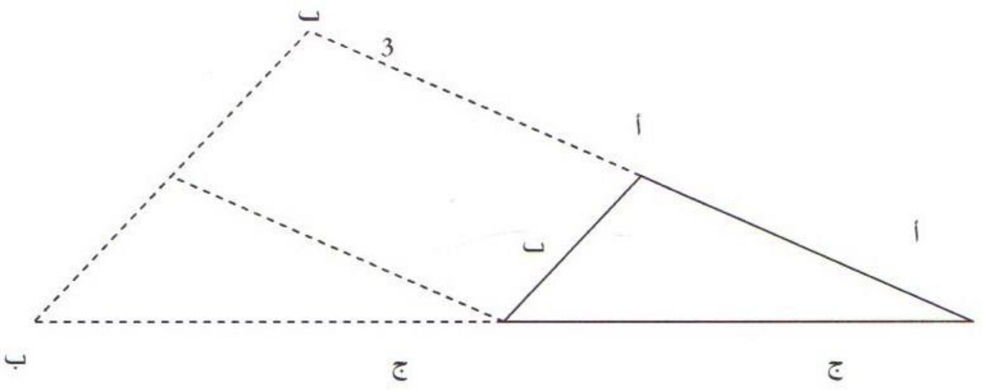
"ولســوء الحظ لا يمكن البرهنة على الفرض نفســه إلا إذا افترضــنا صــدق بديهة التوازي أو أيه بديهة أخرى مكافئة لها".[1]

" فإذا كان المثلثين مثلا نفس الزوايا والأضلاع، يقال أنهما متشابهان، وفي الشكل 13 – 2 النسبة أ: ب تساوي النسبة أ:ب، كما أن النسبة ب: جـ النسبة ب: جـ. أفترض أنني رسمت أولا المثلث الأصغر أب جـــ، فهل يمكنني رسم مثلث أكبر له نفس الزوايا، وتكون أضلاعه أ ب جـــ متناسبة على أضلاع المثلث أب جـــ؟ من الواضح أن الإجابة سوف تكون بالإيجاب. [2]



[1] ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق ص 154.
[2] ردولف كارناب مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 155.

أفترض أننا نرغب في رسم مثلث أكبر، بحيث تكون أضلاعه ضعف أضلاع المثلث الأصغر، ويمكننا أن نفعل هذا بسهولة عن طريق مد الضلع أ بحيث يكون له نفس طول ضلع أ و نفعل ذلك بالمثل مع الضلع جـ، ثم نصل بين الضلعين، كما هو مبين في الشكل.



" وبقليل من التفكير يتضح تماما أن طول الضلع، الثابت يساوي، ب، وأن المثلث الأكبر يتشابه مع المثلث الأصغر، وإذا سلمنا بهذه البديهيات المتعلقة بالمثلثات المتشابهة لكان في استطاعتنا البرهنة على بديهية التوازي"[1]

ولكننا نعود إلى القول أن بديهية التوازي قد اتخذت شكلا متنكرا – الحقيقة أننا لا نستطيع أن نبرهن على تشابه المثلثين دون استخدام بديهة التوازي، أو أي بديهة أخرى متكافئة معها، ولكي نستخدم البديهة المتعلقة بالمثلثات لكان ذلك موافقا لاستخدام بديهة التوازي. [2]

ويظهر من كل هذا أن بديهة التوازي مستقلة عن باقي البديهيات وكذلك لا يمكن اشتقاقها من البديهيات الأخرى.

(1) ردولف كارناب مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 155.
(2) المرجع نفسه، ص ص 155 – 156.

وعن طريق التوصــل إلى بدائل مختلفة تم اســتحداث أنســاق بديهية حديثة، أطلق عليها الهندسات اللاإقليدية"[1]

المبحث الثاني: الهندسات اللاإقليدية

" وقد ذكرنا أن مسلمات إقليدس تعرضت لنقد اليونانيين أنفسهم لتضمنها الحشو أو لانطوائها على غموض ولأن بعضــها من الممكن في نظر بعضــهم أن تشـتق من غيرها، فلم تحقق شـرط الاسـتقلال، كما انتقد منهج إقليدس لأنه يفترض قضــايا هندسـية لم تكن موضوعة بين بديهيات أو مسلمات، ولم يبرهن على أنها تشتق من غيرها".[2]

"ولمحاولة البحث عن بديهية توضـــــع مكان بديهية التوازي لإقليدس، يوجد لدينا اتجاهين متعارضين يمكننا أن نتحرك من خلالها:

1.يمكننا أن نقول أنه على سطح مستو، وفي نقطة خارج الخط، لا يوجد سطح موازي (ولقد أكد إقليدس وجوده على نحو قاطع).

2.ويمكننا أن نقول أنه هناك أكثر من متواز واحد. (وهذا يثبت في النهاية أنه إذا كان لدينا

أكثر من متوازي، فلا بد أن يكون هناك عدد لا متناه منها")[3]

" فالمسـلمة الخامسـة لها تاريخ طويل وشـيق، فعلى الرغم من أن إقليدس يصـنفها ضــمن مبادئ يفترض أنها واضــحة بذاتها، إلا أنها بدت غير ذلك، وإذا كانت تفترض أن الخطين المتوازيين لا بد وأن يمتد إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين، فإن نقطة التلاقي – لو كان مجموع الزاويتان الداخليتان أقل من قائمتين – قد يكون من البعد بحيث تخرج عن نطاق الخبرة المباشرة".[4]

---

[1] صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص 87.

[2] كامل كامل محمد عويضة: إقليدس، مرجع سابق، ص 89.

[3] ردولف كارناب: مدخل إلى فلسفة العلوم – الأسس الفلسفية للفيزياء، مرجع سابق، ص 159.

[4] صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص 88.

ولا يمكن في هذه الحالة اللجوء إلى الأشكال المرسومة لإثبات المسلمة، لأن أية مساحة يمكن أن تحتويها الخبرة لا بد وأن تكون صغيرة نسبيا، وبذلك تعجز هذه المسلمة على أن تكون واضحة بذاتها كباقي المسلمات، ويجب بالتالي إقامة البرهان على صحتها. وبالطبع كانت هناك محاولات عديدة للرد على هذا الاعتراض، منها أن المسلمات الأخرى تستعصي على الخبرة بنفس الطريقة تماما، لكن هذا الرد رغم وجاهته لم يكن برهانا مباشرا يثبت صحة المسلمة، فضلا على أنه يفتح باب الشك في باقي المسلمات".[1]

" مما دفع بالبعض إلى إثبات صحة المسلمة باستخدام "البرهان بالخلف" بمعنى أن استجابة إثبات بطلان تلك القضية يتضمن في ذاته صحتها، منها محاولة الرياضي " العربي نصر الدين الطوسي (1200) (1273م) ومن بعده القديس الإيطالي جيرولامو ساكري" G.SCCHERI 1667 - 1733) وربما كان الأول مصدر للثاني، حيث ترجم كتابه الأساسي"[2] (شكل القطاع إلى عدة لغات منها الأثينية، الإنجليزية والفرنسية وبقي قرونا طويلة موجها لعلماء أوروبا فيما يتعلق بعلم الهندسة ومجمل القول في البرهان "الطوسي" و"ساكري" والذي يعرف بفرض الزاوية الحادة THE ACUTE-ANGLE HYPOTHESIS، أنه لا يمكن رسم أكثر من موازي واحد لمستقيم معين من نقطة ما خارج هذا المستقيم، لأن ذلك لا يتفق وطبيعة الخط المستقيم، بل ويتناقض مع باقي مسلمات إقليدس، وعلى الرغم من سلبية هذا في اختيار الفروض المضادة لمسلمات إقليدس مما كان إيذانا بنشأة أخرى لا إقليدية). [3]

" ومع بداية القرن التاسع عشر، شهر الرياضيون بأن الوقت قد حان كي يتوقفوا عن محاولة البرهنة على صحة هذه المسلمة، وأن يحاولوا بدلا من ذلك إقامة أنساق أخرى

---

(1) صلاح محمود عثمان محمد ، الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة و العلم مرجع سابق، ص 88.

(2) المرجع نفسه، ص 89.

(3) المرجع نفسه، ص 90.

تســتبدل فيها قضــية أو أكثر بما يقابلها من قضـــايا النســق الإقليدي، وقد كانت جهود الروســـي نيكولاي لوباتشــفيســكي" (1782) (1856م) أول عرض منهجي لهندســـة لا إقليدية، وبما يميز هذه الهندسة مخالفتها للنسق الإقليدي".[1]

(حيث قال بأنه يمكن أن ترسم من نقطة معلومة عدة مستقيمات موازية لمستقيم معلوم واحتفظ مسلمات وبديهيات إقليدس الأخرى، وأقام عليها هندسة لا إقليدية مستنتجا من هذه الفروض والنتائج، لا نستطيع أن نجد بينها ما هو متناقض مع ما قيل سابقا مع أنها تختلف عن نظريات إقليدس...... النظرية القائلة: إن مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين، وهذه النظرية تتعارض مع النتيجة الثانية لمسلمة التوازي، وكذلك من المستحيل أن نشيد شكلا مشابها لشكل معين، ولكن بأبعاد مختلفة، وهذه النظرية تناقض مع النتيجة الثالثة لمسلمة إقليدس الخامسة). [2]

(وبعد مرور ما يقارب قرن (1854م) قدم الرياضـــــي الألماني "برنارد ريمان" هندســة أخرى، لا تخالف الهندســة الإقليدية فحســب، بل وتخالف أيضــا ما ســبق وقدمه "لوباتشفسكي"، وأصبحت تعرف هندسته بالهندسة الكروية وهي تخالف الأنساق السابقة في القضايا التالية:

1. المكان سطح كروي، درجة الانحناء به أكبر من الصفر.

2.الخط المســتقيم لا يمكن أن يمتد إلى مالا نهاية، وأنه منته لأنه دائري وبذالك تســقط المسلمة الثانية في النسق الإقليدي.

3.لا مستقيمات متوازية، فكل المستقيمات تتقاطع في نقطتين.

4.مجموع زوايا المثلث تزيد عن قائمتين.) [3]

---

(1) المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

(2) كامل محمد محمد، عويضة إقليدس، مرجع سابق، ص 197.

(3) صلاح محمود عثمان محمد، الاتصال واللاتناهي بين الفلسفة والعلم، مرجع سابق، ص 91.

ومن اختلاف قضـايا الأنسـاق الثلاثة السـابقة، تصـل إلى نتيجة هامة تفيد بأن مسلمة التوازي مستقلة منطقيا عن باقي مسلمات إقليدس".[1]

" وكما لاحظنا سـابقا يمكن الحصـول على هندسـات جديدة مختلفة عن الهندسـة الإقليدية دون الوقوع في التناقض، وهو تغير جوهري في معنى الهندسـة يقودنا إلى التسـاؤل عما إذا كان من الممكن إحداث مزيد من التغيرات بحيث تحصـل على مزيد من الهندسات، ومع تطور البحث في أسس الهندسة كان الرد بالإيجاب".[2]

المبحث الثالث: نظرية المجموعات (جورج كانتور أنموذجا)

جورج كانتور: السيرة والبدايات

النشأة والتكوين العلمي

وُلد جورج كانتور في 3 مارس 1845 في سـانت بطرسـبرغ في روسـيا لأب من أصـول دنماركية وأم روسـية. انتقلت عائلته إلى ألمانيا عندما كان في الحادية عشـرة من عمره، حيث تلقى تعليمه الثانوي والجامعي.

حصـل كانتور على الدكتوراه في الرياضـيات من جامعة برلين عام 1867، وكان موضوع أطروحته في نظرية الأعداد. [3]

يقول دونسـتر في دراسـته عن حياة كانتور: "لم يكن هناك ما يشـير في بداية حياته الأكاديمية إلى أنه سيصـبح الشـخصـية الرياضـية الثورية التي نعرفها اليوم. فقد بدأ حياته المهنية كباحث في تحليل فورييه والنظرية العددية، وهي مواضـيع تقليدية نسـبياً في ذلك الوقت." [4]

---

[1] صلاح محمود عثمان محمد المرجع السابق،ص 91.

[2] المرجع نفسه، الصفحة نفسها.

[3] والتر بوركرت، "جورج كانتور: حياته وفلسفته وأعماله الرياضية"، برلين: شبرنغر، 2005،ص 18-22

[4] إدوارد دونستر، "جورج كانتور: رجل في صراع مع اللانهاية" ،المجلة الرياضية الأمريكية،ع 14، 2010،ص 127

الطريق إلى نظرية المجموعات

بدأ كانتور العمل كمحاضـــر في جامعة هالِه في ألمانيا عام 1869، وهي الجامعة التي قضـــى فيها معظم حياته المهنية. وكان اهتمامه الأولي منصــباً على نظرية الأعداد وتمثيل الدوال بمتسـلسـلات، لكن اسـتفسـاراته حول التقارب في هذه المتسـلسـلات قادته تدريجياً إلى التفكير في طبيعة المجموعات اللانهائية من الأعداد الحقيقية. [1]

في عام 1874، نشـر كانتور بحثه الرائد "حول خاصـية لمجموعة جميع الأعداد الحقيقية الجبرية"، الذي أثبت فيه أن مجموعة الأعداد الحقيقية لها قوة أكبر (أي "أكثر لانهائية") من مجموعة الأعداد الطبيعية، مفتتحاً بذلك مجالاً جديداً تماماً في الرياضيات[2].

المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات

تعريف المجموعة

قدم كانتور تعريفاً بسـيطاً لكنه ثوري للمجموعة بأنها: "تجميع لأشـياء محددة متمايزة من إدراكنا أو فكرنا، تسمى عناصر المجموعة." [3].

هذا التعريف، على بســاطته، فتح الباب لتأســيس فرع جديد من الرياضــيات يتعامل مع مفهوم المجموعة كمفهوم أســاســي.كما يشــير موســتوفســكي: "ما يميز تعريف كانتور للمجموعة هو عموميته وتجريده. فهو لا يقتصــــر على مجموعات الأعداد أو النقاط الهندســية، بل يشــمل أي تجميع لأي نوع من العناصــر، ســواء كانت رياضــية أو غير رياضية." [4].

---

(1) إدوارد دونستر، المرجع السابق، ص 129.

(2) جورج كانتور، "حول خاصـــية لمجموعة جميع الأعداد الحقيقية الجبرية،" مجلة كريل للرياضـــيات،ع 77 ،1874، ص 258-262

(3) أندريه موستوفسكي، "نظرية المجموعات التحليلية" ،مستردام: نورث هولاند، 1976،ص 12

(4) جورج كانتور، "مساهمات في تأسيس نظرية المجموعات" ، برلين: ماير وميلر، 1883،ص 47-52

العمليات على المجموعات

وضـــع كانتور الأســـاس للعمليات على المجموعات، مثل الاتحاد والتقاطع والفرق والمكمل، والتي أصـبحت فيما بعد جزءاً أسـاسـياً من لغة الرياضـيات الحديثة .كما أدخل مفهوم المجموعة الجزئية والعلاقة بين المجموعات.

وفي هذا السياق، يقول هيلبرت: "لم يقتصـر إنجاز كانتور على تعريف المجموعة كمفهوم رياضي، بل امتد إلى تطوير جبر كامل للمجموعات، مما سمح بمعالجتها كأشياء رياضية قابلة للتحليل والتركيب." [1].

التناظر الأحادي والقوة

من أهم المفاهيم التي أدخلها كانتور مفهوم "التناظر الأحادي (one-to-one correspondence)" بين المجموعات، حيث يمكن إقامة مقابلة بين عناصـر مجموعتين بحيث يقابل كل عنصر في المجموعة الأولى عنصراً وحيداً في المجموعة الثانية والعكس صحيح. [2].

اعتمد كانتور على هذا المفهوم في تعريف "قوة المجموعة(cardinality) "، حيث تكون مجموعتان متكافئتين في القوة إذا أمكن إقامة تناظر أحادي بينهما. هذا المفهوم سـمح له بتصنيف المجموعات اللانهائية حسب "حجمها" أو "قوتها" [3].

ثورة كانتور في مفهوم اللانهاية

اللانهاية المحتملة واللانهاية الفعلية

قام كانتور بتمييز واضـــح بين نوعين من اللانهاية: اللانهاية المحتملة (potential infinity)التي تشـير إلى عملية يمكن أن تسـتمر بلا نهاية (مثل إضــافة 1 إلى العدد

---

[1] جورج كانتور، "مساهمات في تأسيس نظرية الأعداد العابرة" ، لايبزيغ: تويبنر، 1895، ص 93-95

[2] المرجع نفسه، ص96.

[3] جورج كانتور، "أسس نظرية عامة للمجموعات،" مجلة الرياضيات، ع 46، 1883، ص 487.

السابق)، واللانهاية الفعلية (actual infinity) التي تعامل معها كشيء مكتمل موجود في لحظة معينة (مثل مجموعة جميع الأعداد الطبيعية) [1].

في هذا السـياق، يقول داويكنز: "كان الفلاسـفة والرياضـيون قبل كانتور يقبلون فكرة اللانهاية المحتملة، لكن معظمهم رفضوا فكرة اللانهاية الفعلية باعتبارها متناقضة. ما فعله كانتور هو أنه أعطى معنى رياضياً دقيقاً للانهاية الفعلية، وبذلك حرر الفكر الرياضي من قيود فلسفية استمرت لقرون." [2].

العدد الترتيبي والعدد الأصلي

طور كانتور مفهومي العدد الترتيبي (ordinal number) والعدد الأصـلي (cardinal number)كوسيلة لقياس المجموعات اللانهائية. العدد الترتيبي يصف ترتيب عناصر المجموعة، بينما العدد الأصـلي يصـف قوة أو حجم المجموعة بغض النظر عن الترتيب. [3].

وقد رمز كانتور لقوة مجموعة الأعداد الطبيعية بالحرف $\aleph_0$ (ألف–صفر)، وهي أصغر قوة لانهائية ممكنة، وسـمى المجموعات التي لها هذه القوة بالمجموعات القابلة للعد[4]. (countable).

قوى المجموعات اللانهائية والأعداد العابرة

من أهم اكتشـافات كانتور إثباته أن قوة مجموعة الأعداد الحقيقية أكبر من قوة مجموعة الأعداد الطبيعية. أثبت ذلك باسـتخدام طريقة التقطير (Diagonalization Method)،

---

(1) ريتشارد داويكنز، "اللانهاية والعقل البشري: فلسفة الرياضيات" ،أوكسفورد: مطبعة جامعة أوكسفورد، 2007،ص 67

(2) جورج كانتور، "مساهمات في تأسيس نظرية الأعداد العابرة" ، لايبزيغ: توبينر، 1895، ص 102–107

(3) المرجع نفسه، ص108.

(4) جورج كانتور، "حول أحد سؤال التحليل الرياضـي المرتبط بنظرية المجموعات،" مجلة برلين للرياضـيات، 1891: ص75–84

التي أصـــبحت فيما بعد إحدى الأدوات الأســـاســـية في نظرية المجموعات والمنطق الرياضي [1].

وقد سمى كانتور الأعداد التي لا يمكن وضعها في تناظر أحادي مع الأعداد الطبيعية بـ "الأعداد العابرة(transcendental numbers) "، وأثبت أن معظم الأعداد الحقيقية هي أعداد عابرة. [2].

فرضية الاستمرار

طرح كانتور فرضـــية مهمة تُعرف باســـم "فرضـــية الاســـتمرار (Continuum Hypothesis)"، التي تنص على أنـه لا توجـد مجموعـة لانهـائيـة قوتهـا أكبر من قوة مجموعة الأعداد الطبيعية وأصــغر من قوة مجموعة الأعداد الحقيقية. [3].وعلى الرغم من جهود كانتور المضنية، لم يتمكن من إثبات هذه الفرضية أو نفيها .وقد أثبت كورت غودل عام 1940 أن فرضـــية الاســـتمرار لا يمكن نفيها في إطار نظرية المجموعات المعيارية، ثم أثبت بول كوهين عام 1963 أنها لا يمكن إثباتها أيضـــاً، مما يعني أنها مســـتقلة عن البديهيات المعيارية لنظرية المجموعات. [4].

المفارقات والتحديات في نظرية المجموعات

مفارقة راسل والمفارقات الأخرى

ظهرت في نظرية المجموعات مفارقات منطقية عديدة، أشـــــهرها "مفارقة راســـــل" (Russell's Paradox)التي اكتشـــفها برتراند راســـل عام 1901. تتعلق هذه المفارقة بمجموعة جميع المجموعات التي لا تحتوي على نفســـها كعنصــــر: هل تحتوي هذه

(1) جورج كانتور ، المرجع السابق، ص82.

(2) جورج كانتور ،المرجع السابق، ص82.

(3) جورج كانتور، "مساهمات في تأسيس نظرية الأعداد العابرة" ،لايبزيغ: تويبنر، 1895،ص 115-118

(4) بول كوهين، "نظرية المجموعات واستقلال فرضية الاستمرار" ،نيويورك: بنجامين، 1966،ص 24.

المجموعة على نفسها أم لا؟ كلا الإجابتين تؤدي إلى تناقض. [1]. يقول راسل عن هذه المفارقة: "عندما اكتشفت هذه المفارقة، كنت أنوي نشر المجلد الثاني من 'مبادئ الرياضيات'... ثم وصلت رسالة من فريجه تبين أنه واحد من الرياضيين القلائل الذين قرؤوا المجلد الأول، وكتب لي قائلاً إن الأسس قد تهدمت." [2].

جهود تجاوز المفارقات

استجابةً لهذه المفارقات، ظهرت محاولات عديدة لإعادة صياغة نظرية المجموعات على أسس أكثر متانة. من أبرز هذه المحاولات:

1.**نظرية الأنماط** (Theory of Types)التي طورها راسل وهوايتهيد، والتي تمنع المجموعات من أن تكون عناصر في نفسها من خلال نظام هرمي من "الأنماط". [3].

2.**نظرية المجموعات المحورية** التي طورها إرنست زرميلو وأبراهام فرينكل(ZF) ، والتي تعتمد على مجموعة من البديهيات المحددة بدقة[4].

3.**نظرية الفئات** (Category Theory)التي قدمت إطاراً بديلاً أكثر تجريداً للرياضيات، تجاوز بعض مشكلات نظرية المجموعات. [5].

تأثير نظرية المجموعات على الرياضيات والعلوم

تأسيس الرياضيات الحديثة

أصبحت نظرية المجموعات، كما طورها كانتور وتلاميذه، الأساس الذي تقوم عليه معظم فروع الرياضيات الحديثة. يقول جان دييدونيه، أحد مؤسسي مجموعة بورباكي :

---

[1] برتراند راسل، "المبادئ الرياضية للفلسفة" كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1903،ص 101–107.

[2] رتراند راسل، "سيرة ذاتية" لندن: جورج ألين، 1967،ص 217

[3] ألفريد نورث وايتهيد وبرتراند راسل، "برينكيبيا ماتيماتيكا" ،كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1910، المجلد الأول،ص 37–45

[4] إرنست زرميلو، "التحقيقات في أسس نظرية المجموعات،" مجلة الرياضيات،ع 65 ،1908،ص 261–281

[5] صامويل إيلنبرج وساوندرز ماكلين، "المنشورات العامة لنظرية الفئات،" مجلة الرياضيات الأمريكية،ع 58 ،1945، ص231–294

"منذ ظهور أعمال كانتور، لم يعد ممكناً ممارسة الرياضيات بنفس الطريقة. لقد أصبحت نظرية المجموعات لغة الرياضيات الجديدة." [1].

وبحسب كوهين: "يمكن اعتبار معظم المفاهيم الرياضية الحديثة – بما في ذلك التبولوجيا، الجبر المجرد، التحليل الوظيفي – نتاجاً مباشراً أو غير مباشر لثورة كانتور في مفهوم المجموعة." [2]

التأثير على المنطق والفلسفة

كان لنظرية كانتور تأثير عميق على تطور المنطق الرياضي والفلسفة. فقد ألهمت أعماله جهود فريجه وراسل وهيلبرت وغودل وآخرين في دراسة أسس الرياضيات والمنطق[3].

وفي مجال الفلسفة، أثارت أفكار كانتور نقاشات حادة حول طبيعة اللانهاية والوجود الرياضي. يقول مور: "أدت نظرية كانتور إلى إعادة النظر في العلاقة بين الرياضيات والفلسفة والمنطق، وفتحت الباب أمام تصورات جديدة للوجود الرياضي تتجاوز حدود الحدس والتجربة." [4]

التطبيقات في العلوم الأخرى

امتد تأثير نظرية المجموعات إلى العلوم الأخرى، فوجدت تطبيقات في الفيزياء والاقتصاد وعلوم الحاسوب والذكاء الاصطناعي والاحتمالات والإحصاء. [5]

---

[1] جان دييدونيه، "تاريخ نظرية المجموعات،" في "موسوعة فلسفة العلوم" نيويورك: ماكميلان، 1992،ص 85

[2] بول كوهين، "مقدمة في نظرية المجموعات" نيويورك: أكاديميك برس، 1978،ص 7

[3] مايكل هاليت، "كانتور إلى كوهين: العقد الأول في تاريخ نظرية المجموعات" نيويورك: كلارندون، 1984،ص 178-185

[4] جريجوري مور، "زرميلو وتأسيس نظرية المجموعات الحديثة،" مجلة تاريخ البحث المنطقي،ع 1 ،1980،ص229

[5] هربرت منزر، "تطبيقات نظرية المجموعات في الهندسة والتحليل" شيكاغو: مطبعة جامعة شيكاغو، 1997،ص 42-47

وفي علوم الحاسوب تحديداً، أصبحت نظرية المجموعات أساسية في دراسة بنيات البيانات والخوارزميات ونظرية الحسابية. كما أن مفهوم اللانهاية الذي طوره كانتور وجد تطبيقات مهمة في نظرية الأوتوماتا والحسابات النظرية. [1]

المعارضة والنقد لنظرية كانتور

الرفض المبكر والصراعات

واجهت نظرية كانتور معارضة شديدة من بعض الرياضيين المعاصرين له، خاصة ليوبولد كرونيكر الذي وصف أفكار كانتور بأنها "هراء محض" وعمل على عرقلة نشر أبحاثه وترقيته الأكاديمية. [2]

يقول بويل: "كان كرونيكر يمثل تياراً بنائياً (constructivist) في الرياضيات، يرفض المفاهيم التي لا يمكن بناؤها باستخدام الأعداد الصحيحة. وكان يرى في عمل كانتور على اللانهاية تهديداً لنقاء الرياضيات ودقتها. [3]"

الحدسيون وانتقاد اللانهاية الفعلية

انتقد تيار "الحدسيين (Intuitionists) "بقيادة الرياضي الهولندي لويتزن براور أسس نظرية المجموعات، ورفضوا فكرة اللانهاية الفعلية. كان براور يرى أن المفاهيم الرياضية يجب أن تكون قابلة للبناء العقلي المباشر، وأن استخدام اللانهاية الفعلية يؤدي إلى نتائج غير موثوقة. [4]

---

[1] روبرت غولدبلات، "محاضرات في نظرية الحساب" نيويورك: سبرينجر، 2008،ص 85-93

[2] هارولد إدواردز، "كرونيكر ضد كانتور: حول مفهوم العدد في القرن التاسع عشر،" مجلة تاريخ الأفكار،ع 49 1988،ص 97-111

[3] ديفيد بويل، "مدارس الفكر الرياضي" برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 2009،ص 156

[4] لويتزن براور، "الحدسية والشكلية،" مجلة الفلسفة العلمية،ع 12 ،1912،ص 52-61

وقد كتب براور: "لا يمكن للفكر البشـــري أن يتعامل مع جميع الأعداد الطبيعية كمجموعة مكتملة، لأن بناء هذه المجموعة يتطلب عملية لا متناهية. ما نسميه باللانهاية هو في الحقيقة إمكانية الاستمرار في العملية، وليس نتيجة مكتملة لها." (1)

النضال الشخصي والاعتراف المتأخر

المرض النفسي والصعوبات الشخصية

عانى كانتور من نوبات اكتئاب حادة ومرض ذهاني، تفاقمت مع تعرضـــه للانتقادات الشديدة والصراعات المهنية. وقد أمضى فترات طويلة من حياته في مصحات نفسية، خاصة في سنواته الأخيرة. (2)

يذهب بعض المؤرخين إلى وجود علاقة بين الاضطرابات النفسية التي عانى منها كانتور وبين طبيعة أبحاثه في اللانهاية. يقول أكرمان: "ربما كان غوص كانتور العميق في أعماق اللانهاية وســعيه المســتمر لفهم ما هو أبعد من الفهم البشــري المعتاد أحد العوامل التي أجهدت قواه العقلية." (3)

الاعتراف والتقدير اللاحق

على الرغم من الصـــعوبات التي واجهها، بدأ الاعتراف بأهمية عمل كانتور في حياته، خاصـــة من قبل ديفيد هيلبرت الذي دافع بقوة عن نظرية المجموعات. وقد قال هيلبرت كلمته الشـــهيرة: "لا أحد ســـيخرجنا من الجنة التي خلقها كانتور." (4) بعد وفاة كانتور عام 1918، ازداد الاعتراف بأهمية أعماله، وأصـــبحت نظرية المجموعات جزءاً أســاسـياً من الرياضـيات الحديثة. وقد قال واينمان: "لقد حدث في تاريخ العلم أن يُرفض

---

(1) لويتزن براور ،المرجع السابق، ص58.

(2) جوزيف دابين، "جورج كانتور والمرض العقلي والرياضيات،" علم النفس التاريخي،ع 7 ،1996،ص 270-291

(3) روبرت أكرمان، "اللانهاية والعقل: علم النفس الرياضي لجورج كانتور ،بوسطن: بيركهاوزر، 1990،ص 175

(4) ديفيد هيلبرت، "حول اللانهاية" في "أوراق ديفيد هيلبرت المختارة" ،برلين: شبرنغر، 2013،ص 191

عمل عالم في حياته ثم يُعترف به بعد وفاته، لكن قلة من العلماء عانوا الرفض بشـــكل قاسٍ كما عانى كانتور، وقلة أيضاً حظوا بتقدير لاحق كالذي ناله." [1]

التطورات اللاحقة في نظرية المجموعات

تطور النظرية في القرن العشرين

شـهد القرن العشـرون تطورات هائلة في نظرية المجموعات، بدءاً من وضـع أنظمة بديهية متينة لها على يد زرميلو وفرينكل وفون نويمان وبيرنايز وغودل. [2]

أدت نظريات غودل عن عدم الاكتمال (1931) وأبحاث كوهين في الاســتقلال (1963) إلى تعميق فهمنا للمســائل المفتوحة في نظرية المجموعات، خاصــة فرضــية الاســتمرار، وإلى ظهور ما يسمى بـ "نظرية المجموعات الأنموذجية(Model Theory) [3].

نظرية المجموعات اليوم

تســـتمر نظرية المجموعات في التطور حتى اليوم، مع ظهور مجالات جديدة مثل نظريـة المجموعـات الكبيرة (Large Cardinal Theory) ونظريـة الجبر الإســـقاطي (Forcing)ونظرية التعريفية(Descriptive Set Theory).[4] يقول وودين، أحد أبرز علماء نظريـة المجموعـات المعاصـــرين: "ما زلنـا نكتشـــف نتـائج مذهلـة في نظريـة المجموعات، وما زال هناك الكثير من الأســـئلة المفتوحة التي تنتظر الإجابة. إن إرث كانتور ما زال حياً وملهماً للأجيال الجديدة من الرياضيين." [5].

---

[1] هانز واينمان، "المبدعون المنسيون في تاريخ العلم" كامبريدج، مطبعة معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا، 2015،ص 204

[2] أكيكو يوشيكاوا، "تاريخ الأنظمة البديهية لنظرية المجموعات" بازل: بيركهاوزر، 2002،ص 45–62.

[3] توماس جيك، "نظرية المجموعات والميتاماتيماتيكا: التراث الفلســـفي لجودل وكوهين" أوكســـفورد: كلارندون، 1999،ص 127–134

[4] أكيرا كاناموري، "نظرية المجموعات الكبيرة" ،أمستردام: نورث هولاند، 2003،ص 12–18.

[5] وو هيو وودين، "نظرية المجموعات في القرن الحادي والعشرين،" مجلة المنطق الرمزي 85 (2020): 7

أهمية كانتور في تاريخ الفكر العلمي

إعادة تشكيل المنظور الرياضي

يمكن القول إن كانتور أحدث تغييراً جذرياً في وجهة النظر الرياضية تجاه اللانهاية، وفتح مجالات جديدة تماماً للبحث الرياضي. يقول وايل: "قبل كانتور، كانت اللانهاية تُعامل بحذر شديد في الرياضيات، وكان يُنظر إليها كمفهوم غامض وغير مكتمل. بفضل كانتور، أصبحت اللانهاية موضوعاً يمكن دراسته رياضياً بدقة ووضوح." [1]

الشجاعة الفكرية والإبداع

تُظهر مسيرة كانتور مثالاً على الشجاعة الفكرية والإبداع في مواجهة المعارضة . فعلى الرغم من الرفض والنقد الذي واجهه، واصل تطوير أفكاره بإصرار وعمق. [2] يقول راسل في تقييمه لإنجازات كانتور: "قام كانتور بما لم يستطع أحد قبله فعله :أعطى المفهوم الغامض للانهاية دقة رياضية صارمة، وأظهر أن هناك عوالم لانهائية متعددة، بعضها أكبر من الآخر. كان هذا اختراقاً فلسفياً ورياضياً لم يسبق له مثيل." [3]

المبحث الرابع: أثر فكرة اللانهاية على نظرية الكوانتا (الفيزياء المعاصرة)

أنواع اللانهاية في الفيزياء

يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من اللانهاية في الفيزياء:

1.**اللانهاية كمفهوم تقريبي :(VL∞)** وهي تلك التي تُستخدم للإشارة إلى عدد أو مقدار كبير جداً، لكنها تظل مجرد تمثيل رياضي دون أن تصل إلى الحقيقة المادية. [4]

---

(1) هيرمان وايل، "الرياضيات والمنطق: مراجعة في تاريخ الفكر" (برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 1940)، 87.

(2) مايكل هاليت، "كانتور: حياة، أعمال، وفلسفة" (نيويورك: كلارندون، 1979)، 240-245

(3) برتراند راسل، "حكمة الغرب" (لندن: ماكدونالد، 1959)، 303

(4) مايكل هاليت، "كانتور: حياة، أعمال، وفلسفة" (نيويورك: كلارندون، 1979)، 240-245.

2.**اللانهاية الحقيقية :(ESS∞)** وهي تلك التي تحمل في طياتها تناقضـــات ذاتية، وتتعارض مع طبيعة العالم المادي المحدود. [1]

وقد أشـــار دافيد هيلبرت إلى هذا التمييز بقوله: "في حين أنّ مفهوم اللانهاية يُعدُّ أمراً ضـروريأً لأغراض رياضـية مختلفة، إلا أن اللانهاية لا يمكن أن تتحقق في أيِّ مكان في الواقع الفعلي مطلقاً، بغض النظر عن التجارب التي سـتقوم بها، أو الملاحظات التي ستستعين بها، أو المعرفة التي سيتم الاحتكام إليها".[2]

اللانهاية في سياق الرياضيات والفيزياء

إن المفارقة الأسـاسـية التي تواجه الفيزيائيين هي أن الرياضـيات، التي تعد اللغة الأسـاسـية للفيزياء، تسـمح باسـتخدام مفهوم اللانهاية بطريقة متسـقة ومفيدة، في حين أن الواقع الفيزيائي يبدو محدوداً بشـكل أسـاسـي. وكما يشـير بعض الفلاسـفة، فإن "اللانهاية ليسـت شـيئًا يمكن العثور عليه تجريبيًا في الواقع، ولا في خبراتنا أو ملاحظتنا أو معارفنا الحسية".[3]

ظهور اللانهايات في نظرية الكوانتا

المشكلات الرياضية للانهاية في نظرية المجال الكمومي

تُعد نظرية المجال الكمومي (QFT) من أهم النظريات في الفيزياء المعاصـرة، لكنها تعاني من مشكلة أساسية: ظهور قيم لانهائية عند محاولة حساب كميات فيزيائية أساسية.

---

[1] ريتشـارد داويكنز، "اللانهاية والعقل البشـري: فلسـفة الرياضـيات" (أوكسـفورد: مطبعة جامعة أوكسـفورد، 2007)، 189

[2] اللانهاية في الفيزياء، وجود حقيقي أم مفهوم رياضي، ص 4.

[3] اللانهاية، مفارقات الفلسفة والدين والرياضيات، ص 2.

هذه المشكلة ظهرت بوضوح في الأربعينيات من القرن الماضي، عندما حاول العلماء حساب خصائص الإلكترون مثل كتلته وشحنته. [1]

التذبذبات الكمومية للفراغ

في فيزياء الكم، الفراغ ليس خالياً تماماً بل هو مليء بتذبذبات طاقة مستمرة، حيث تظهر وتختفي جسيمات افتراضية بشكل عشوائي. عند محاولة حساب طاقة هذا الفراغ الكمومي، نجد أنها تؤول إلى قيمة لانهائية، وهي نتيجة غير مقبولة فيزيائياً. [2]

يؤكد مبدأ عدم اليقين في ميكانيكا الكم أن "العدم المطلق" لا يمكن أن يتحقق، وأن الفراغ ليس بالعدم بأي حال من الأحوال. هذا يعني أن الصفر المطلق (كنقيض للانهاية) لا يمكن تحقيقه فيزيائياً، مما يؤثر على فهمنا للطبيعة الأساسية للواقع الكمومي. [3]

مشكلة التباعد فوق البنفسجي

عند حساب تفاعلات الجسيمات على مسافات قصيرة جداً (أو طاقات عالية جداً)، تظهر مشكلة تُعرف بـ "التباعد فوق البنفسجي .(Ultraviolet Divergence) "تنشأ هذه المشكلة لأن نظرية المجال الكمومي تفترض أن الجسيمات الأولية هي نقاط لا بُعد لها، مما يؤدي إلى ظهور قيم لانهائية عند التعامل مع تفاعلاتها على مسافات قصيرة جداً. [4]

(1) ريتشارد فاينمان، محاضرات فاينمان في الديناميكا الكهربائية الكمومية، برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 1985،ص 129.

(2) ستيفن واينبرج، النظرية الكمومية للمجالات، المجلد الأول: الأسس ، كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1995، ص146.

(3) اللانهاية في الفيزياء: وجود حقيقي أم مفهوم رياض، المرجع السابق، ص 5-6.

(4) فرانك ويلتشك، "الحرية العاسيمبتوتية والجاذبية الكمومية،" المجلة الفيزيائية، ص120.

أثر اللانهاية على التنبؤات الكمومية

لقد أثارت مشكلة اللانهايات تحديات كبيرة أمام القدرة التنبؤية لنظرية الكوانتا. فمن ناحية، أظهرت النظرية قدرة فائقة على التنبؤ بنتائج التجارب بدقة غير مسبوقة، ومن ناحية أخرى، كانت الحسابات الأساسية تؤدي إلى قيم لانهائية غير مقبولة فيزيائياً. [1]

طرق معالجة اللانهايات في نظرية الكم

إعادة التطبيع(Renormalization)

كان تطوير تقنية "إعادة التطبيع (Renormalization) "من أبرز الإنجازات التي مكنت الفيزيائيين من التعامل مع اللانهايات. هذه التقنية لا تعتبر مجرد حيلة رياضية للتخلص من اللانهايات، بل هي تعبير عميق عن طبيعة النظريات الفيزيائية الفعالة على مقاييس طاقة متعددة[2].

تعتمد إعادة التطبيع على فكرة أن القيم اللانهائية التي تظهر في الحسابات يمكن استيعابها في إعادة تعريف بعض المعاملات الأساسية في النظرية، مثل الشحنة والكتلة، بحيث تصبح النتائج النهائية محدودة ومتفقة مع التجارب. هذه الطريقة نجحت بشكل مذهل في الديناميكا الكهربائية الكمومية(QED) ، وأدت إلى تنبؤات دقيقة للغاية تم التحقق منها تجريبياً. [3].

مجموعات إعادة التطبيع

طوّر الفيزيائي كينيث ويلسون في السبعينيات نظرية "مجموعات إعادة التطبيع " (Renormalization Group)، التي قدمت فهماً أعمق لكيفية تغير القوانين الفيزيائية

[1] ريتشارد فاينمان، محاضرات فاينمان في الديناميكا الكهربائية الكمومية،ص 130-131

[2] ستيفن واينبرج، نحو نظرية نهائية ، نيويورك: بانتام، 1993،ص 124.

[3] المرجع نفسه، ص 125.

عبر مقاييس الطاقة المختلفة. هذه النظرية أعطت تفسيراً أكثر عمقاً لمشكلة اللانهايات وسمحت بفهم أفضل لسلوك النظريات الفيزيائية عند مقاييس طاقة مختلفة. [1].

تقوم نظرية مجموعات إعادة التطبيع على أساس أن الفيزياء على مقياس معين من الطاقة لا تعتمد بشكل حساس على تفاصيل الفيزياء على مقاييس طاقة أعلى بكثير. هذا يعني أننا نستطيع بناء نظريات فعّالة (Effective Theories) تصف الفيزياء على مقياس معين دون الحاجة إلى معرفة تفاصيل الفيزياء الأكثر أساسية على المقاييس الأصغر. [2].

اللانهاية والمفاهيم الأساسية لنظرية الكم

علاقة اللانهاية بمبدأ عدم اليقين

يربط مبدأ عدم اليقين لهايزنبرج بين اللانهاية وطبيعة القياسات الكمومية .فوفقاً لهذا المبدأ، لا يمكن قياس زوج من المتغيرات المترافقة (مثل الموضع والزخم) بدقة لانهائية في الوقت نفسه. وقد أدى هذا المبدأ إلى إعادة النظر في مفهوم القياس الدقيق وحدود المعرفة العلمية[3].

من ناحية أخرى، يؤكد مبدأ عدم اليقين ونتائج نظرية المجال الكمومي أن "العدم المطلق" لا يمكن أن يتحقق، وأن الفراغ ليس بالعدم بأي حال من الأحوال. هذا يعني أن الصفر المطلق (كنقيض للانهاية) لا يمكن تحقيقه فيزيائياً، مما يؤثر على فهمنا للطبيعة الأساسية للواقع الكمومي [4].

---

[1] كينيث ويلسون، "مجموعة إعادة التطبيع ومشكلة التباعد،" المراجعة الفيزيائية، ص2177.

[2] كينيث ويلسون، المرجع السابق، ص3179–3178.

[3] فيرنر هايزنبرج، المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم ،شيكاغو: مطبعة جامعة شيكاغو، 1930،ص 20–21

[4] اللانهاية في الفيزياء: وجود حقيقي أم مفهوم رياضي، ص7–8.

اللانهاية والتفسير الاحتمالي للكم

في التفســير الاحتمالي لميكانيكا الكم، تلعب فكرة اللانهاية دوراً مهماً. فعلى ســبيل المثال، عند وصف الدالة الموجية لجسيم، نجد أن هناك احتمالاً (وإن كان ضئيلاً) لوجود الجســيم في أي نقطة في الفضـــاء، مما يعني أن توزيع الاحتمال ينتشـــر، نظرياً، إلى مالانهاية[1].

هذه الفكرة لها تداعيات فلســفية عميقة، لأنها تشــير إلى أن الجســيمات الكمومية ليست محصورة في منطقة محددة من الفضاء، بل يمتد وجودها الاحتمالي عبر الفضاء بأكمله. وهذا يتناقض مع تصــورنا الكلاســيكي للجســيمات كنقاط محددة الموضــع في الفضاء[2].

التفردات والنقاط اللانهائية في فيزياء الكم والنسبية

نقاط التفرد في الثقوب السوداء ونظرية الكم

تشــير معادلات النســبية العامة إلى وجود نقاط تفرد (Singularities) في مراكز الثقوب السوداء، حيث تصبح بعض الكميات الفيزيائية لانهائية. هذه التفردات تمثل تحدياً كبيراً عند محاولة دمج نظرية الكم مع النســـبية العامة، لأن الفيزياء المعروفة تنهار عند هذه النقاط[3].

وكما تشــير النســبية العامة، فإن "النســبية العامة هي النظرية الهندســية للجاذبية نشــرها ألبرت أينشــتاين ســنة 1915 والوصـــف الحالي للجاذبية في الفيزياء الحديثة." [4].وفي إطار هذه النظرية، تظهر التفردات كحالات تنهار فيها البنية الهندســية للزمكان، مما يؤدي إلى قيم لانهائية للكثافة وشدة الجاذبية.

---

[1] جون فون نيومان، الأسس الرياضية لميكانيكا الكم ، برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 1955،ص 157

[2] جون فون نيومان، المرجع السابق ص157.

[3] المرجع نفسه، ص158.

[4] النسبية العامة،" ويكيبيديا، تم الوصول إليه في 21 مايو 2025

اللانهاية والزمن في نقطة الانفجار العظيم

تشـــير نظريات الكون إلى أن الكون بدأ من حالة ذات كثافة طاقة لانهائية عند نقطة الانفجار العظيم. هذه النقطة تمثل أيضـــاً تحدياً للفيزياء المعاصـــرة، وقد دفعت إلى تطوير نظريات كمومية للجاذبية والكون المبكر. [1].

التفسيرات الفلسفية للانهاية في فيزياء الكم

اللانهاية كمؤشر على عدم اكتمال النظرية

يرى بعض الفيزيائيين أن ظهور القيم اللانهائية في نظرياتنا هو مؤشـــر على عدم اكتمال هذه النظريات. فكما يقول هيلبرت، إن اللانهاية لا يمكن أن تتحقق في الواقع الفيزيائي، وبالتالي فإن ظهورها في النظريات يشير إلى وجود خلل أو قصور فيها. [2].

في هذا السياق، يمكن النظر إلى اللانهايات التي تظهر في نظرية المجال الكمومي وفي نقاط التفرد في النسبية العامة على أنها علامات تشير إلى الحدود التي تقف عندها معرفتنا الحالية، وإلى الحاجة لنظرية أعمق وأكثر شمولاً.

اللانهاية كأداة حسابية لا تعكس الواقع الفيزيائي

يرى اتجاه آخر في الفيزياء النظرية أن اللانهايات هي مجرد أدوات حســـابية لا تعكس الواقع الفيزيائي. وفقاً لهذه النظرة، فإن ظهور القيم اللانهائية في الحســـابات هو نتيجة لتقريبات وافتراضـــات رياضـــية في نماذجنا، ولا يعني بالضـــرورة أن الطبيعة نفســـها تحتوي على كميات لانهائية[3].

---

[1] ستيفن هوكينج، تاريخ موجز للزمن ،نيويورك: بانتام، 1988،ص 52-53

[2] اللانهاية في الفيزياء: وجود حقيقي أم مفهوم رياضي، المرجع السابق، ص 9.

[3] ريتشارد فاينمان، شخصية الفيزياء الطبيعية ، كامبريدج: مطبعة معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا، 1967،ص 36.

النظريات الحديثة لتجاوز مشكلة اللانهاية

نظرية الأوتار واللانهاية

تُعد نظرية الأوتار (String Theory) من أبرز المحاولات لتجاوز مشكلة اللانهايات في الفيزياء النظرية. بدلاً من اعتبار الجسيمات الأولية نقاطاً لا أبعاد لها، تفترض نظرية الأوتار أنها أوتار صغيرة جداً ذات بُعد واحد. هذا الافتراض يجعل التفاعلات أكثر "نعومة" على المسافات القصيرة، مما يؤدي إلى تجنب بعض مشاكل التباعد الرياضي التي تظهر في النظريات النقطية. [1].

تذهب نظرية الأوتار أبعد من ذلك بافتراض وجود أبعاد إضافية مطوية على نفسها بطريقة معقدة، مما يوفر إطاراً نظرياً موحداً لجميع القوى الأساسية بما فيها الجاذبية. هذا قد يقدم حلاً نظرياً لمشكلة توحيد الجاذبية مع ميكانيكا الكم.

نظرية الكم الحلقي للجاذبية واللانهاية

تقدم نظرية الكم الحلقي للجاذبية (Loop Quantum Gravity) مقاربة مختلفة لمشكلة اللانهايات. تفترض هذه النظرية أن بنية الفضاء-زمن ذاتها متقطعة على المستوى الكمومي، أي أن هناك وحدة أساسية صغرى للطول (طول بلانك) لا يمكن تقسيمها. هذا يعني أن المسافات والأزمنة لا يمكن أن تكون أصغر من قيم معينة، مما يضع حداً طبيعياً للانهايات التي تظهر عند المسافات القصيرة جداً [2].

في إطار هذه النظرية، تُستبدل التفردات الموجودة في النسبية العامة (مثل مركز الثقب الأسود أو لحظة الانفجار العظيم) بحالات كمومية منتظمة، مما يتجنب مشكلة القيم اللانهائية.

---

[1] برايان جرين، الكون الأنيق: الأوتار الفائقة، والأبعاد المخفية، والبحث عن النظرية النهائية ، نيويورك: فينتاج، 2000،ص 138.

[2] كارلو روفيلي ولي سمولين، "بنية متقطعة للفضاء والزمن،" المجلة الفيزيائية النووية.

مستقبل مفهوم اللانهاية في فيزياء الكم

نحو نظرية فيزيائية خالية من اللانهايات

يســـعى العلماء حالياً إلى تطوير نظريات فيزيائية أكثر اكتمالاً تكون خالية من اللانهايات على المستوى الأساسي. هذا المسعى يقودهم إلى اقتراح معيار الاتساق في أي نظرية أساسية في الفيزياء$VS(0) \cong ESS(0) \leftrightarrow ESS(\infty) \cong VL(\infty)$:وهذا يعني أنه في النظرية الأساسية لا ينبغي أن يكون هناك على المستوى العملي صراع بين هذين المفهومين للانهاية الكبيرة واللانهاية الصغيرة[1].

تقنيات جديدة للتعامل مع اللانهايات

تتطور باستمرار تقنيات رياضية وفيزيائية جديدة للتعامل مع اللانهايات في نظرية الكم. من بين هذه التقنيات، تقنية القطع (Cutoff) التي تضـــع حداً أعلى لطاقات أو ترددات النظام الفيزيائي، وتقنية التنظيم البعدي (Dimensional Regularization) التي تعتمد على تغيير أبعاد الفضاء-زمن بطريقة تجعل الحسابات محدودة. [2].

---

[1] اللانهاية في الفيزياء: وجود حقيقي أم مفهوم رياضي، المرجع السابق، ص10.

[2] جيرارد 'ت هوفت وم. فيلتمان، "تنظيم وإعادة تطبيع نظريات القياس،" النووية.

خاتمة

إذا كان ثمة سؤال يفرض نفسه فلا بد و أنه التالي:

ما هي النتائج التي توصلنا إليها من خلال بحثنا في موضوع مشكلة اللانهائي و هل هذه النتائج قاطعة ينبغي أن تؤكد ليس ثمة نتيجة نهائية في العلم و لا إجابات تتأتى بنفسها عن سيرورة التعديل أو التأويل فالإنسان مهما كان معتقدا بصدق وصواب نظرية ما حتى يفاجئه العلم بنظرية جديدة متوسعة في مداها.

1.مصطلح اللانهائي يعد من أهم الاصطلاحات في تاريخ العلم و الفلسفة فهو مرتبط بما هو لا متناهي أي " **لا محدود و لا نهاية له**"، وكذلك المفاهيم و الإشكالات المرتبطة به.

2.مشكلة اللانهائي تعود جذورها إلى العصر اليوناني رغم ندرة التفكير الرياضي و إهمال الحساب البسيط بسبب إعاقة العدد الأصم واستمرت إلى العصر الحديث و خصوصا أين ظهرت نظريات جديدة حول العدد مع الفارق بين الطرحين إذ الأول ناقش اللانهائي مناقشة فلسفية أما الثاني ناقشها رياضيا.

3.لقد أدى تراكم المعرفة العلمية في نهاية القرن التاسع عشر إلى كشف وجوه أخرى للمشكلة فقد ارتقت الرياضيات أعلى درجات التجريد فاستوى لديها القول بالاتصال و الانفصال أما الفلسفة فقد استغرقتها مشكلات لا تنتهي الآراء بشأنها.

4.كانت طبيعة الاتصال في مطلع القرن الحديث تلتمس في ذلك الخط المستقيم الديكارتي المتمثل في ترابط النقاط في المكان و بعد اكتشاف نيوتن و ليبنتز لحساب التكامل والتفاضل أصبحت الدالة الهندسية المتصلة نموذجا أكثر قبولا بمعنى الاتصال لكن هذه الدالة لم تلبث إن توارت خلف كثرة الدوال المنفصلة التي كان اكتشافها نذيرا بزعزعة يقين الحدس الهندسي للاتصال.

حقا لقد ساهم حساب التفاضل والتكامل في حل بعض المشكلات لكن من أين لنا وصف اتصال الزمان و المكان بدوال تحتوي الانفصال؟.

هنا نبرز ضرورة العودة إلى الأعداد الصحيحة لمنطق وحيد يتمثل في سلسلات الأعداد بكافة أشكالها.

5. يمكن القول بأن علماء التحليل نجحوا إلى حد كبير في تجاوز متناقضـــات الأعداد اللامتناهية التي وقفت لقرون طويلة حائلا دون وضع تعريف عددي دقيق للاتصال و لقد تأكد هذا النجاح بعد اكتشـــاف كانتور لنظرية في المجموعات و كشـــفه للخواص الغير مألوفة لتلك الأعداد إلا أن نقائض الأعداد اللامتناهية عادت بتســاؤلات جديدة تهدد يقين الأعداد مما ألقى عليها بظلال الشك كقاعدة يقينية للرياضيات بأكملها.

6.حقيقة اللانهائي هي طرح السـؤال باسـتمرار كما أن العلم في تقدم مسـتمر فإشـكالات اللانهائي مستمرة بتطور النظريات الرياضية وتعقدها لذلك تبقى ثنائية النهائي و اللانهائي محل بحث و نقاش متجدد يسعى إلى اكتشاف أفاق جديدة.

7. على أن أكثر المسائل التي دار حولها نقاش واسع عقب الكشوف العلمية التي تحدثنا عنها و خاصة نظرية "**الكوانتم**" الطاقة وعلاقات الارتياب.

8.كما أن التقدم الرياضي فتح آفاق بحثية جديدة منها تفتيت الذرة و رد العالم إلى جزئيات صغيرة و تفتيت هذه الجزئيات و كشف جوهرها و الاستفادة من طاقتها.

فالتطور الذي أحرزه العلم بمنهجه التجريبي و ارتباطه الوثيق بالرياضيات أصبح السمة المميزة للقرن العشرين.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1.أرسطو: الفيزياء السماع الطبيعي، ت،عبد القادر قنيفي، إفريقيا الشرق المغرب، 1998.

2. أكيرا كاناموري، "نظرية المجموعات الكبيرة" ،أمستردام: نورث هولاند، 2003.

3. أكيكو يوشيكاوا، "تاريخ الأنظمة البديهية لنظرية المجموعات" بازل: بيركهاوزر، 2002.

4. ألفريد نورث وايتهيد وبرتراند راسل، "برينكيبيا ماتيماتيكا" ،كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1910، المجلد الأول.

5.اميل بريهيه : تاريخ الفلسفة ، ت، جورج طرابيشي ، دار الطليعة، بيروت، ط1، 1983.

6. أندريه موستوفسكي، "نظرية المجموعات التحليلية" ،مستردام: نورث هولاند، 1976.

7. برايان جرين، الكون الأنيق: الأوتار الفائقة، والأبعاد المخفية، والبحث عن النظرية النهائية ، نيويورك: فينتاج، 2000.

8.برتراند راسل: أصول الرياضيات، ت ، محمد احمد، احمد فؤاد الصوافي، دار المعارف مصر، ج 2.

9. برتراند راسل، "المبادئ الرياضية للفلسفة" كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1903.

10. برتراند راسل، "حكمة الغرب" (لندن: ماكدونالد، 1959).

11. بول كوهين، "مقدمة في نظرية المجموعات" نيويورك: أكاديميك برس، 1978،ص 7

12. بول كوهين، "نظرية المجموعات واستقلال فرضية الاستمرار" ،نيويورك: بنجامين، 1966.

13. بيوتر كونزمان ، وآخرون) : أطلس الفلسفة، ت ، جورج كتورة، المكتبة الشرقية، بيروت ، ط 2 ، 2007 .

14. توماس جيك، "نظرية المجموعات والميتاماتيماتيكا: التراث الفلسفي لجودل وكوهين" أوكسفورد: كلارندون، 1999.

15. جان دييدونيه، "تاريخ نظرية المجموعات،" في "موسوعة فلسفة العلوم" نيويورك: ماكميلان، 1992،ص 85

16. جورج سارطون : تاريخ العلم ، ت ، جميل علي ، ج 2 ، دار المعارف ، القاهرة ، 3 ، 1978 .

17. جورج كانتور، "أسس نظرية عامة للمجموعات،" مجلة الرياضيات، ع 46، 1883.

18. جورج كانتور، "مساهمات في تأسيس نظرية الأعداد العابرة" ، لايبزيغ: تويبنر، 1895.

19. جون فون نيومان، الأسس الرياضية لميكانيكا الكم ، برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 1955.

20. جيرارد 'ت هوفت وم. فيلتمان، "تنظيم وإعادة تطبيع نظريات القياس،" النووية.

21. ديفيد بويل، "مدارس الفكر الرياضي" برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 2009.

22. ديفيد هيلبرت، "حول اللانهاية" في "أوراق ديفيد هيلبرت المختارة" ،برلين: شبرنغر، 2013.

23. رتراند راسل، "سيرة ذاتية" لندن: جورج ألين، 1967،

24. ردولف كارتاب: مدخل إلى فلسفة العلوم ، الاسس الفلسفية للفيزياء ، ت ، السيد نفادي ، دار الثقافة الجديدة ، القاهرة ، ط 1 ،2003.

25. روبرت أكرمان، "اللانهاية والعقل: علم النفس الرياضي لجورج كانتور ،بوسطن: بيركهاوزر، 1990.

26. روبرت غولدبلات، "محاضرات في نظرية الحساب" نيويورك: سبرينجر، 2008.
27. روبير بلانشي : المصادريات – الأكسيوماتيك ، ت، محمود يعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر ، 2004.
28. ريتشارد فاينمان، شخصية الفيزياء الطبيعية ، كامبريدج: مطبعة معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا، 1967.
29. ريتشارد فاينمان، محاضرات فاينمان في الديناميكا الكهربائية الكمومية، برينستون: مطبعة جامعة برينستون، 1985.
30. ريتشارد فاينمان، محاضرات فاينمان في الديناميكا الكهربائية الكمومية.
31. زكي نجيب محمود : بيرتراند راسل ، ط 2 ، دار المعارف ، مصر ، 1919 .
32. ستيفن هوكينج، تاريخ موجز للزمن ،نيويورك: بانتام، 1988.
33. ستيفن واينبرج، النظرية الكمومية للمجالات، المجلد الأول: الأسس ، كامبريدج: مطبعة جامعة كامبريدج، 1995.
34. ستيفن واينبرج، نحو نظرية نهائية ، نيويورك: بانتام، 1993.
35. صلاح طلاح محمد عثمان محمد : الاتصال و اللاتناهي بين العلم و الفلسفة ، منشأة المعارف ، الاسكندرية ، 1998.
36. عادل عوض : فلسفة العلم في فيزياء انشتاين دار الوفاء تدنيا الطباعة والنشر ، الاسكندرية ، ط 1 ، 2008.
37. عبد الرحمن بدوي : ارسطو ، دار القلم ، بيروت ، لبنان ، 2 ، 1980.
38. عبد القادر بشتة : انشتاين و فيزياء الذرة ، دار النهضة العربية ، بيروت ، ط 1 ، 2006.
39. فيرنر هايزنبرج، المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم ،شيكاغو: مطبعة جامعة شيكاغو، 1930.

40. كامل كامل محمد عويضـــة : اقليدس بين الفلســفة والمنهج الرياضـــي ، دار الكتب العلمية ، بيروت ، ط 1 ، 1994.

41. كينيث ويلسون، "مجموعة إعادة التطبيع ومشكلة التباعد،" المراجعة الفيزيائية.

42. ماهر عبد القادر محمد علي : فلســفة العلوم – المنطق الاســتقرائي ، ج 1 ، دار النهضة العربية للنشر ، بيروت ، 1982 .

43. مايكل هاليت، "كانتور إلى كوهين: العقد الأول في تاريخ نظرية المجموعات" نيويورك: كلارندون، 1984،ص 178–185

44. مايكل هاليت، "كانتور: حياة، أعمال، وفلسفة" (نيويورك: كلارندون، 1979).

45. محمد ثابت الفندي : فلسفة الرياضة ، دار النهضة العربية للطباعة والنشر ، بيروت ، ط 1 ، 1969.

46. محمد ثابت الفندي : محاضرات في فلسفة العلوم ومناهجها ، دار المعرفة الجامعية ، الاسكندرية ، 1996 .

47. محمد جديدي : الفلسفة الاغريقية ، دار العربية للعلوم ، ط 1 ، 2009 .

48. محمد عابد الجابري : مدخل الى فلسفة العلوم – العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، مركز دراسات الوحدة العربية ، بيروت ، لبنان ، 2002.

49. محمود فهمي زيدان: من نظريات العلم المعاصر إلى المواقف الفلسفية، دار النهضة العربية للنشر ، بيروت ، 1982.

50. هانز واينمان، "المبدعون المنسيون في تاريخ العلم" كامبريدج، مطبعة معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا، 2015.

51. هربرت منزر، "تطبيقات نظرية المجموعات في الهندسـة والتحليل" شـيكاغو: مطبعة جامعة شيكاغو، 1997.

52. هيرمان وايل، "الرياضـــيات والمنطق: مراجعة في تاريخ الفكر" (برينســتون: مطبعة جامعة برينستون، 1940

53. والتر بوركرت، "جورج كانتور: حياته وفلسـفته وأعماله الرياضـية"، برلين: شـبرنغر، 2005.

54. ولتر مستيس : تاريخ الفلسفة اليونانية ، ت ، مجاهد عبد المنعم ، دار النشر بيروت ، ط2، 2005.

55. يوسف كرم : تاريخ الفلسفة اليونانية ، دار القلم ، بيروت ، لبنان ، قط ، دس .

الموسوعات و المعاجم

1. اندريه لالاند : موسوعة لالاند الفلسفية ، ت ، خليل احمد خليل ، مجلد 2 ، منشورات العويدات ، بيروت ، ط 2 ، 2001.

2. جميل صليبا : المعجم الفلسفي ، ج 2 ، دار الكتاب العالمي ، بيروت ، لبنان ، 1994.

3. عبد الرحمن بدوي : الموسوعة الفلسفية ، ج 2 ، المؤسسة العربية للدراسات و النشر ، بيروت ، ط 1 ، 1984

4. رشدي راشد ، رئيس مورلون : موسوعة تاريخ العلوم العربية ، ج 2 ، مركز دراسات الوحدة العربية ، بيروت ،ط1، 1997.

المجلات :

1. إدوارد دونستر، "جورج كانتور: رجل في صراع مع اللانهاية" ،المجلة الرياضية الأمريكية،ع 14، 2010.

2. إرنست زرميلو، "التحقيقات في أسس نظرية المجموعات،" مجلة الرياضيات،ع 65 ،1908،ص 261-281

3.جريجوري مور، "زرميلو وتأسيس نظرية المجموعات الحديثة،" مجلة تاريخ البحث المنطقي،ع 1 ،1980.

4.جورج كانتور، "حول أحد سؤال التحليل الرياضي المرتبط بنظرية المجموعات،" مجلة برلين للرياضيات.

5.جورج كانتور، "حول خاصـــــية لمجموعة جميع الأعداد الحقيقية الجبرية،" مجلة كريل للرياضيات،ع 77 ،1874.

6.جوزيف دابين، "جورج كانتور والمرض العقلي والرياضيات،" علم النفس التاريخي،ع 7 ،1996.

7.صـــــامويل إيلنبرج وســـــاوندرز ماكلين، "المنشـــــورات العامة لنظرية الفئات،" مجلة الرياضيات الأمريكية،ع 58 ،1945.

8.فرانك ويلتشك، "الحرية العاسيمبتوتية والجاذبية الكمومية،" المجلة الفيزيائية.

9.كارلو روفيلي ولي سمولين، "بنية متقطعة للفضاء والزمن،" المجلة الفيزيائية النووية.

10. لويتزن براور، "الحدسية والشكلية،" مجلة الفلسفة العلمية،ع 12 ،1912.

11. هارولد إدواردز، "كرونيكر ضد كانتور: حول مفهوم العدد في القرن التاسع عشر،" مجلة تاريخ الأفكار،ع 49 1988.

12. وو هيو وودين، "نظرية المجموعات في القرن الحادي والعشـــــرين،" مجلة المنطق الرمزي،ع 85 (2020).

13. HOURYA SI NACER: L'INFINI LA RECHERCHE .268.SEPEMBRE.1994.

فهرس الموضوعات

فهرس الموضوعات

ملخص:

مثلت مشـــكلة اللانهائي تحدياً محورياً في تطور الفكر الرياضـــي منذ العصـــور القديمة. تعامل أرسطو مع اللانهائي المحتمل فقط، رافضـاً اللانهائي الفعلي، واستمر هذا الموقف حتى أحدث جورج كانتور ثورة من خلال نظرية المجموعات .طور كانتور مفاهيم الأعداد العابرة والأعداد الأصلية لقياس المجموعات اللانهائية، وأثبت أن مجموعة الأعداد الحقيقية أكبر من مجموعة الأعداد الطبيعية، واضعاً فرضية الاستمرار .أدت مفارقة راسل وغيرها إلى تطوير نظم بديهية أكثر صرامة، مع انقسام الرياضـيين بين المدرسـة الشكلية (هيلبرت) والحدســية (براور) والمنطقية (راســل). أثرت نظرية عدم الاكتمال لغودل على فهم حدود النظم الرياضـــية، بينما وجد مفهوم اللانهائي تطبيقات في التحليل الرياضـــي ونظرية الأعداد وفيزياء الكم، مع استمرار الجدل الفلسفي حول طبيعته: حقيقة موضوعية أم بناء ذهني

الكلمات المفتاحية: مشكلة اللانهائي، الفكر الرياضي، الثورة العلمية، جورج كانتور.

Abstract:

The concept of infinity has represented a pivotal challenge in the development of mathematical thought since ancient times. Aristotle dealt only with potential infinity, rejecting actual infinity, and this position continued until Georg Cantor revolutionized the field through set theory. Cantor developed concepts of transfinite numbers and cardinal numbers to measure infinite sets, proving that the set of real numbers is larger than the set of natural numbers, and proposing the continuum hypothesis. Russell's paradox and other contradictions led to the development of more rigorous axiomatic systems, with mathematicians divided between the formalist school (Hilbert), the intuitionist school (Brouwer), and the logicist school (Russell). Gödel's incompleteness theorem influenced the understanding of mathematical systems' limitations, while the concept of infinity found applications in mathematical analysis, number theory, and quantum physics, with ongoing philosophical debate about its nature: objective reality or mental construct?

Keywords*: The Problem of Infinity, Mathematical Thought, Scientific Revolution, Georg Cantor.*