



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Algèbre et Mathématiques

Thème

Fractions continues et applications

Présentée par :

Benhamed chaima

Turki chaima

Soutenu publiquement le : 28/06/2021.

Devant le jury composé de :

Mihoubi Douadi
Boudaoud Abdelmadjid
Ghedbane Nasser

Prof,
Prof,
M.A.A,

Université de M'sila
Université de M'sila
Université de M'sila

président.
Encadreur.
Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah, le tout puissant d'avoir éclairer notre vision, renforcer notre courage et volonté pour finir ce travail.

Nous tenons à remercier particulièrement notre directeur de mémoire Monsieur **Boudaoud Abdelmadjid**, pour toute l'aide qu'il nous a apporté, sa patience et ses conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Nous tenons à remercier aussi Monsieur **Mihoubi Douadi**, d'avoir accepté de présider ce mémoire. Nous tenons à remercier Monsieur **Ghedbane Nasser**, pour avoir accepté d'examiner notre mémoire.

Nos remerciements s'adressent à tous les enseignants du département de mathématiques, tous les étudiants et étudiantes de notre promotion, ainsi que tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire. Nous accordons tout notre respect à ceux qui nous ont soutenus, en particulier à nos chers parents, nos mères, nos grands parents, nos soeurs nos.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions de base	2
1.1 Division Euclidienne	2
1.1.1 Division Euclidienne dans \mathbb{Z}	2
1.1.2 Division Euclidienne dans \mathbb{N}	3
1.2 L'algorithme d'Euclide	4
1.3 Approximations Diophantiennes	4
1.4 Théorème (Principe des tiroirs de Dirichlet)	5
1.5 Théorème d'approximation de Dirichlet	6
1.6 Série de Farey	6
2 Fractions Continues Finies	7
2.1 Définition	8
2.2 Réduites	10
2.3 Définition Récursive	11
2.4 Application : Solution de $ax+by=c$	17
3 Fractions continues infinies	18
3.1 Représentation d'un nombre irrationnel par une fraction continue infinie simple	20
3.2 Théorème d'approximation des irrationnels	22
4 Fractions continues périodiques	25
4.1 Théorème de Lagrange	26
4.2 Théorème de Galois	30
4.3 Application : Equation de Pell	32
Bibliographie	33

Introduction

Le domaine d'approximation des réels par des rationnels est très vaste, nous l'appelons souvent approximations Diophantiennes. Le premier résultat très connu dans ce sens est le théorème de densité des nombres rationnels dans l'ensemble des réels, ce résultat nous dit que nous pouvons s'approcher d'un réel donné x par des rationnels autant que nous voulons mais généralement avec des dénominateurs qui agrandissent rapidement. Les recherches dans ce domaine augmentent de plus en plus ou nous pouvons par exemple consulter les références [2] et [5] pour une remède à l'absence du contrôle de la relation entre l'erreur et le dénominateur citée ci-dessus.

Les fractions continues, sujet de ce mémoire, s'inscrivent dans le domaine cité ci-dessus et nous munissons d'un outil très important pour exprimer les nombres et pour les approximer. Après que nous donnons les définitions nécessaires, nous montrons que chaque nombre rationnel a une fraction continue finie et que chaque nombre irrationnel a une fraction continue infinie, de plus les fractions continues fournissent les meilleures approximations rationnelles des nombres dans le sens où si $\frac{p}{q}$ est une réduite d'une fraction continue d'un réel x alors nous ne pouvons pas trouver un rationnel $\frac{m}{n}$ avec $n < q$ qui approxime mieux que $\frac{p}{q}$ le nombre x . Aussi nous introduisons les fractions continues périodiques où nous citons le théorème de Lagrange qui affirme qu'une fraction continue infinie d'un nombre irrationnel est périodique si et seulement si ce nombre est un irrationnel quadratique. Nous terminons ce mémoire par quelques applications.

Ainsi le chapitre un est consacré aux notions de base nécessaire pour le reste du mémoire. Les fractions continues finies (resp. infinies) font l'objet du chapitre deux (resp. trois). Le dernier chapitre est destiné aux fractions continues périodiques ainsi qu'une application concernant l'équation de Pell. Nous terminons notre mémoire par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Notions de base

Nous rappelons quelques outils fondamentaux de l'arithmétique qui sont nécessaires pour le reste du mémoire.

1.1 Division Euclidienne

1.1.1 Division Euclidienne dans \mathbb{Z}

Théorème 1.1 Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ telle que : $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

les entiers q et r sont appelés, respectivement, le quotient et le reste de la division Euclidienne de a par b .

Preuve. L'existence.

Si $a = 0$ alors le couple $(0, 0)$ convient. Si $a \neq 0$ on distingue les cas suivants cas 1 : $b > 0$. Soit $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot b > a\}$. L'entier $(|a| + 1)b$ est un multiple de b qui est strictement plus grand que a . En effet :

$$(|a| + 1)b > |a|b = |a|(b - 1 + 1) \geq |a| \geq a.$$

On a donc $A \neq \emptyset$. Montrons que A est minoré par $-|a|$. Si $m < -|a|$ alors, comme $b \geq 1$, $mb < -|a|b \leq -|a| \leq a$ et donc m n'appartenez pas A .

Soit n le plus petit élément de A . De $n - 1 < n$ on déduit $(n - 1)b < nb$ et donc $(n - 1)b \leq a < nb$. Posons $q = n - 1$. On a $qb \leq a < qb + b$ d'où $0 \leq a - qb < b$. Si

$$r = a - qb,$$

alors

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b = |b|.$$

cas 2 : $b < 0$. D'après le premier cas, il existe q et r tels que $a = (-b)q + r$ avec

$$0 \leq r \leq |-b|. \text{ En écrivant } a = b(-q) + r, \text{ on voit que le couple } (-q, r) \text{ convient.}$$

Unicité

Supposons que :

$$a = bq_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < |b|$$

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

on a $r_0 - r = b(q_0 - q)$. Or $-|b| < r_0 - r < |b|$, ou encore, $-|b| < b(q_0 - q) < |b|$.

Il en résulte que $0 \leq |b| < b|q_0 - q| < |b|$. et donc $0 \leq |q_0 - q| < 1$. Finalement, $|q_0 - q| = 0$ d'où $q_0 = q$ et $r = r_0$. ■

1.1.2 Division Euclidienne dans \mathbb{N}

Théorème 1.2 Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Preuve. L'unicité résulte de l'unicité dans \mathbb{Z} . Pour l'existence, considérons la preuve du (division Euclidienne dans \mathbb{Z}) dans le cas $b > 0$. Comme $nb > a$, on a $n > 0$ et donc $q = n - 1 \geq 0$. De plus, $r < |b| = b$ et donc $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ vérifie

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

■

1.2 L'algorithme d'Euclide

Nous expliquons sur les deux exemples suivants

Exemple 1.1 On considère l'exemple de 225 et 60. On cherche à calculer $d = \text{pgcd}(225, 60)$.

$$225 = 60 \times 3 + 45 \quad \text{donc } d = \text{pgcd}(60, 45)$$

$$60 = 45 \times 1 + 15 \quad \text{donc } d = \text{pgcd}(45, 15)$$

$45 = 15 \times 3 + 0$ donc $d = 15$. Dans la dernière étape, on constate que $\text{pgcd}(225, 60) = \text{pgcd}(45, 15) = 15$.

Exercice Calculer le pgcd de 2211 et de 100.

Solution Soit $d = \text{pgcd}(2211, 100)$.

$$2211 = 100 \times 22 + 11 \quad \text{donc } d = \text{pgcd}(100, 11)$$

$$100 = 11 \times 9 + 1 \quad \text{donc } d = \text{pgcd}(11, 1) = 1.$$

1.3 Approximations Diophantiennes

Soit ξ un réel donné. L'approximation diophantienne traite de l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels, c.à.d approcher le réel ξ par le rationnel $\frac{p}{q}$ avec une précision ϵ , en d'autres mots

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \epsilon$$

En fait, l'approximation diophantienne s'intéresse en général à résoudre en nombre entier une inégalité de type :

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < f(q)$$

Proposition 1.1 [11] Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ telle que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}$$

Preuve. On considère la partie entière $[\xi q]$ du produit ξq . Deux cas sont alors possibles :

- cas où $\xi q - [\xi q] < \frac{1}{2}$ auquel cas on pose $p = [\xi q]$; où $[\cdot]$ désigne la partie entière.
- cas où $\xi q - [\xi q] > \frac{1}{2}$ auquel cas $[\xi q] - \xi q < -\frac{1}{2}$ d'où $[\xi q] - \xi q + 1 < \frac{1}{2}$ et l'on pose $p = [\xi q] + 1$.

Donc on a trouvé un entier p tel que $|\xi q - p| < \frac{1}{2}$ et donc $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q}$ ■

Exemple 1.2 [11] En prenant le nombre π on a les inégalités suivants :

$$0.02 < \left| \pi - \frac{19}{6} \right| < 0.03, \quad 0.01 < \left| \pi - \frac{25}{8} \right| < 0.02, \quad 0.01 < \left| \pi - \frac{22}{7} \right| < 0.002$$

Du point de vue de l'approximation, le choix dans cet exemple du dénominateur $q = 7$ est donc bien meilleur que ceux des dénominateurs 6 et 8.

1.4 Théorème (Principe des tiroirs de Dirichlet)

Si $m + 1$ objets sont rangés dans m tiroirs, alors il y'aura au moins un tiroir qui contient deux objets ou plus.

Exemple 1.3 [3] Dans un groupe avec au moins 8 personnes, il doit y'avoir au moins deux personnes qui sont nées le même jour de la semaine.

Exemple 1.4 [3] Soit $m > 1$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une suite de nombres entiers contenant au moins $m + 1$ entiers i.e. ($p \geq m + 1$). Alors il existe deux nombres de cette suite dont la différence est divisible par m .

Preuve. [3] Par la division Euclidienne il existe, pour chaque $1 \leq i \leq p$, des entiers uniques q_i et r_i tels que $x_i = mq_i + r_i$ où $0 \leq r_i \leq m$. D'où on a $m + 1$ entiers r_i qui appartiennent à l'ensemble fini $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ contenant m éléments. Par conséquent, d'après le principe des tiroirs, il existent deux entiers x_{i1} et x_{i2} pour les quelles $r_{i1} = r_{i2}$. Alors dans ce cas

$$\begin{aligned} x_{i1} - x_{i2} &= (mq_{i1} + r_{i1}) - (mq_{i2} + r_{i2}) \\ &= m(q_{i1} - q_{i2}). \end{aligned}$$

ce qui signifie que m divise $x_{i1} - x_{i2}$. ■

1.5 Théorème d'approximation de Dirichlet

Théorème 1.3 [3] Si α est un nombre réel et n est un entier positif, alors il existe des entiers p et q avec $1 \leq q \leq n$ tels que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Preuve. Considérons les $n + 1$ nombres $\{0\alpha\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$ qui sont respectivement les fractionnaires des nombres $j\alpha$ où $j = 0, 1, 2, \dots, n$. L'intervalle $[0, 1]$ peut être écrit selon la réunion disjointe suivante formée par n intervalles

$$[0, 1[= \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[.$$

D'autre part, on a $n + 1$ réels $\{j\alpha\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) dans ces n intervalles. D'où, par le principe des tiroirs, deux de ces réels sont dans le même intervalle; notons les par $\{j_1\alpha\}$ et $\{j_2\alpha\}$ où on suppose que $j_2 < j_1$. Donc $|\{j_1\alpha\} - \{j_2\alpha\}| < \frac{1}{n}$ i.e., $|(j_1\alpha - \lfloor j_1\alpha \rfloor) - (j_2\alpha - \lfloor j_2\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}$. D'où $(j_1 - j_2)\alpha - (\lfloor j_1\alpha \rfloor - \lfloor j_2\alpha \rfloor) < \frac{1}{n}$. La preuve est achevée en prenant $q = j_1 - j_2$ et $p = \lfloor j_1\alpha \rfloor - \lfloor j_2\alpha \rfloor$. ■

1.6 Série de Farey

Soient N un entier non nul, on considère les rationnels irréductibles de $[0, 1]$ dont les dénominateurs ne dépassent pas N . Par convention on note le rationnel 0 par $\frac{0}{1}$ et 1 par $\frac{1}{1}$. Ainsi on obtient un ensemble ordonné de rationnel que l'on appelle série de FAREY d'ordre N : et on noté par F_N .

Les rationnels de la série de FAREY F_N ($N \geq 1$) ont des belles propriétés et jouent un rôle important dans le domaine des approximations diophantiennes [2].

Chapitre 2

Fractions Continues Finies

Considérons le rationnel $\frac{64}{17}$ et réitérons l'algorithme d'Euclide comme suit

$$64 = 17 \cdot 3 + 13$$

$$17 = 13 \cdot 1 + 4$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

D'ici on a

$$\frac{64}{17} = \frac{17 \cdot 3 + 13}{17}$$

$$\frac{64}{17} = 3 + \frac{13}{17}$$

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{\frac{17}{13}} = \frac{1}{\frac{13 \cdot 1 + 4}{13}}$$

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{1 + \frac{4}{13}}$$

Alors

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{\frac{13}{4}}$$

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{\frac{4 \cdot 3 + 1}{4}}$$

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}$$

$$\frac{64}{17} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

2.1 Définition

Définition 2.1 [1] On appelle fraction continue simple et finie l'expression

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où a_0, \dots, a_n sont des entiers (quotients), a_1, \dots, a_n sont supérieurs ou égaux à 1.

Nous notons l'expression précédente par :

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] \tag{2.1}$$

Il y'a d'autres notations mais on adopte cette dernière.

Proposition 2.1 *Tout nombre rationnel peut être écrit comme une fraction continue simple finie.*

Preuve. Soit p et q deux entiers positifs où $p > q$. L'algorithme d'Euclide nous donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 p &= q \times a_0 + b_0, & 0 < b_0 < q \\
 q &= b_0 \times a_1 + b_1, & 0 < b_1 < b_0 \\
 b_0 &= b_1 \times a_2 + b_2, & 0 < b_2 < b_1 \\
 b_1 &= b_2 \times a_3 + b_3, & 0 < b_3 < b_2 \\
 &\vdots & \vdots \\
 b_{n-1} &= b_n \times a_{n+1} + 0, & 0 < b_n < b_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Alors $\text{pgcd}(p, q) = b_n$, le dernier reste non nul du processus de division.

Rappelons que les quotients de ces équations a_0, a_1, \dots, a_{n+1} sont des entiers positifs. Par écriture de ces équations sous forme fractionnelle on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{b_0}{q} \\
 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{b_1}{b_0}} \\
 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_2}{b_1}}} \\
 &\vdots \\
 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}.
 \end{aligned}$$

■

Exemple 2.1 1) Tout entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit comme une fraction continue, en prenant $n = a_0$. Réciproquement, une fraction continue avec $n = 0$ est simplement un entier

a_0 .

2) Le nombre $\frac{1}{2}$ est une fraction continue, avec $n = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

3) Représentons de $\frac{3}{4}$ comme une fraction continue :

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

et donc $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$.

2.2 Réduites

Théorème 2.1 [15] *Chaque fraction continue simple finie représente un nombre rationnel.*

Preuve. Prouvons par récurrence.

Pour $k = 1$ on a

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

qui est rationnel. Maintenant supposons que pour l'entier positif $k \geq 1$, la fraction continue simple $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ est rationnelle. supposons a_0, a_1, \dots, a_{k+1} sont des entiers avec a_1, a_2, \dots, a_{k+1} des entiers positifs.

Notons que

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_{k+1}]},$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe des entiers p et q , avec q non nulle, de sorte que $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, \dots, a_{k+1}]$. Alors on :

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{(a_0 \cdot p + q)}{p}.$$

Ceci achève la preuve de la même manière que l'algorithme d'Euclide. ■

Remarque 2.1 [15] Soit $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$. Les fractions continues pour les

nombre rationnels ne sont pas uniques car, pour $a_k \geq 2$, on peut mettre

$$a_k = (a_k - 1) + 1$$

et donc $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, 1]$. Par exemple

$$\frac{64}{17} = [3; 1, 3, 4] = [3; 1, 3, 3, 1].$$

Dans la suite nous considérons les rationnels obtenus à partir d'une fraction continue finie en coupant l'expression (2.1) à différents rangs.

2.3 Définition Réursive

Définition 2.2 [15] Les fractions continues $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, où k est un entier non négatif inférieur à n . S'appelle la k -ième convergente de la fraction continue $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, la k -ième convergent est noté par C_k .

Théorème 2.2 [15] Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels avec a_1, a_2, \dots, a_n positives. Soient les suites $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ et $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ définies récursivement par :

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1 \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

et

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

pour $k = 2, 3, \dots, n$. Alors la k -ième convergente $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ est donnée par :

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}$$

Preuve. Prouvons par récurrence.

Pour $k = 0$

$$C_0 = [a_0] = \frac{[a_0]}{1} = \frac{p_0}{q_0},$$

pour $k = 1$

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1},$$

pour $k = 2$

$$C_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}},$$

$$a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 \times p_1 + p_0}{a_2 \times q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}.$$

Le théorème est vrai pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

Pour $2 \leq k < n$. on a

$$\begin{aligned} C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] &= \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k p_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \frac{a_{k+1}}{a_k} \right] \\ &= \frac{\left(1 + \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(1 + \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_{k+1} a_k) p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{(a_{k+1} a_k) q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1} (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \end{aligned}$$

■

Exemple 2.2 Calculons les réduites de la fraction continue $[1, 2, 1, 2]$

$$\begin{aligned}p_0 &= 1 & , & & q_0 &= 1 \\p_1 &= 1 \cdot 2 + 1 = 3 & , & & q_1 &= 2 \\p_2 &= 1 \cdot 3 + 1 = 4 & , & & q_2 &= 1 \cdot 2 + 1 = 3 \\p_3 &= 2 \cdot 4 + 3 = 11 & , & & q_3 &= 2 \cdot 3 + 2 = 8 \\C_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1} = 1 \\C_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} \\C_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{3} \\C_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{11}{8}\end{aligned}$$

Nous donnons dans la suite le théorème suivant qui donne une importante propriété des réduites.

Théorème 2.3 [15] Soit $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, $1 \leq k \leq n$ la k -ième réduite de $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Alors

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

Preuve. Prouvons par récurrence. Pour $k = 1$

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0 = 1.$$

Supposons que le théorème est vraie pour $1 \leq k < n$. i.e

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1} &= (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k - (a_{k+1}q_k + q_{k-1})p_k \\
&= p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} \\
&= -(-1)^{k-1} \\
&= (-1)^k.
\end{aligned}$$

Le théorème est vraie pour $k + 1$. Ainsi le théorème est démontré. ■

Exemple 2.3 Considérons la fraction continue $[1; 2, 1, 2]$. Alors

$$\begin{aligned}
p_1q_0 - p_0q_1 &= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1 \\
p_1q_2 - p_2q_1 &= 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1 \\
p_2q_3 - p_3q_2 &= 4 \cdot 8 - 11 \cdot 3 = -1
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1 [15] Soit $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ la k -ième convergente de la fraction continue simple $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Alors

$$C_k - C_{k-1} = \frac{a_k (-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

Pour tout k avec $1 \leq k \leq n$. Aussi

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

Pour tout k avec $2 \leq k \leq n$.

Preuve. En soustrayant des fractions et en appliquant le théorème 2.3, on peut dire que

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}.$$

Ce qui nous donne la première identité du corollaire 2.1. Pour obtenir la deuxième identité, notez que

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Parce que $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ et $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, nous voyons que le numérateur de la fraction de droite est

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} - p_{k-2}) q_{k-2} - (a_k q_{k-1} - q_{k-2}) p_{k-2} \\ &= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} p_{k-1}) \\ &= a_k (-1)^{k-2}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.3 pour voir que

$$p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1} = (-1)^{k-2}.$$

Par conséquent, nous trouvons que

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}.$$

C'est la deuxième identité du corollaire ■

Théorème 2.4 [15] Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers avec $a_k \geq 1$ par $1 \leq k \leq n$. Alors la suite de réduites $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ de la fraction continue $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ a les propriétés suivantes :

- a) la sous suite de réduites paires $C_0, C_2, C_4 \dots$ est strictement croissante.
- b) la sous suite de réduites impaires $C_1, C_3, C_5 \dots$ est strictement décroissante.
- c) Toute réduite paire est plus petite que toute réduite impaire.

Les assertions a, b et c peuvent être écrites comme suit :

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Preuve. [15] Par le corollaire 2.1 on a pour $k = 2, 3, \dots, n$:

$$C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^k}{q_k \cdot q_{k-2}}.$$

Aussi nous avons

$$C_k < C_{k-2}.$$

Lorsque k est impair. Aussi nous avons

$$C_k > C_{k-2}.$$

Lorsque k est pair. D'où

$$\dots < C_5 < C_3 < C_1,$$

et

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots .$$

On a du corollaire 2.1

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0.$$

C'est à dire

$$C_{2n-1} > C_{2n}.$$

Pour comparer C_{2k} et C_{2j-1} , nous avons

$$C_{2j-1} > C_{2j+2k-1} > C_{2j+2k} > C_{2k}.$$

D'où, chaque convergente d'indice impaire et plus grand que chaque convergente d'indice pair. ■

Exemple 2.4 Considérons la fraction continue simple finie $[1; 1, 1, 3, 1, 2]$. Alors les convergentes sont :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, C_1 = 2, C_2 = \frac{3}{2} \\ C_3 &= \frac{11}{7}, C_4 = \frac{4}{9}, C_5 = \frac{39}{25}. \end{aligned}$$

Alors

$$C_0 < C_2 < C_4$$

et

$$C_1 > C_3 > C_5.$$

D'où

$$C_0 < C_2 < C_4 < C_5 < C_3 < C_1.$$

Exercice 2.5 1) Donner le développement en fraction continue de $\frac{116}{27}$.

2) Quel est le nombre dont le développement en fraction continue est :

$$\frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}.$$

2.4 Application : Solution de $ax+by=c$

Les fractions continues finies simples sont utilisables pour résoudre les équations diophantiennes linéaire

$$ax + by = c.$$

Supposons que l'on a une telle équation avec $(a, b) = 1$ et $b > 0$, car on peut toujours se ramener à cette situation.

Théorème 2.6 [1] Supposons que $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, avec $(a, b) = 1$ et $b > 0$. Si n est impair, l'équation $ax + by = c$ a pour solution $x = cq_{n-1}$, $y = -cp_{n-1}$. Si n est pair, l'équation a pour solution $x = -cq_{n-1}$, $y = cp_{n-1}$.

Exemple 2.5 Trouver une solution de $19x + 12y = 3$.

On a $a = 19$, $b = 12$, $c = 3$, et $(a, b) = 1$.

On a $\frac{19}{12} = [1; 1, 1, 2, 2]$ et donc n est le dernier quotient partiel, $n = 4$ (n pair), alors $x = -cq_{n-1} = 3q_3 = (-3) \cdot 5 = -15$. $y = cp_{n-1} = 3p_3 = 3 \cdot 8 = 24$.

Chapitre 3

Fractions continues infinies

Supposons que nous ayons une suite infinie d'entiers a_0, a_1, a_2, \dots , avec $a_k \geq 1$ par $k \geq 1$.

Définition 3.1 On appelle fraction continue infinie un nombre écrit sous la forme :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des entiers et si $k \geq 1$, a_1, a_2, \dots, a_k sont supérieurs ou égaux à 1.

Théorème 3.1 [13] Soit a_0, a_1, a_2, \dots une séquence infinie d'entiers avec a_1, a_2, \dots positifs et soit $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Les convergentes C_k ont une limite α .

C'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} C_k = \alpha.$$

Preuve. Soit m un entier paire positif. Par théorème (2.4)

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots > C_{m-1}.$$

$$C_2 < C_4 < C_6 < \dots < C_m.$$

Et $C_{2j} > C_{2k+1}$ pour tous entiers positifs j, k . quand $2j \leq m$ et $2k + 1 < m$. En considérant toutes les valeurs possibles de m .

$$\begin{aligned} C_1 &> C_3 > C_5 > \dots > C_{2n-1} > C_{2n+1} > \dots \\ C_0 &< C_2 < C_4 < C_6 < \dots < C_{2n} < C_{2n+1} < \dots \end{aligned}$$

La suite des convergentes d'indices impaires est décroissante minorée donc elle converge i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_{2k+1} = \alpha_1.$$

La suite des convergentes d'indices paires est croissante majorée donc elle converge i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_{2k} = \alpha_2$$

Nous avons

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

D'autre part il est démontré [15] que pour tout k , $q_k \geq k$ donc

$$\frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)(2n)},$$

et par conséquent

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_{2n+1} - C_{2n}) = 0.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_{2n}.$$

■

Théorème 3.2 Soit a_0, a_1, a_2, \dots des entiers avec a_1, a_2, \dots positives alors $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ est irrationnel.

Preuve. Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ est soit $C_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ désignent la k -ième convergente de α . Lorsque n est un entier positif

Nous avons d'après le théoème 3.1 : $C_{2n} < \alpha < C_{2n+1}$, de façon que

$$0 < \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

Cela signifie

$$0 < \alpha - C_{2n} = \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

Et par conséquent nous avons

$$0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}.$$

Si α est rationnel avec $\alpha = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers avec $b \neq 0$, alors $0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}}$. Comme $q_{2n+1} > 2n + 1$ pour tout entier n alors il existe n_0 , tel que $q_{2n_0+1} > b$ i.e $\frac{b}{q_{2n_0+1}} < 1$. Puisque $\alpha q_{2n} - p_{2n}$ est un entier alors on a contradiction car on est arrivé à trouver qu'un entier strictement positif est strictement inférieur à 1. ■

3.1 Représentation d'un nombre irrationnel par une fraction continue infinie simple

La théorème suivant nous montre que tout nombre irrationnel peut être exprimé par une seule fraction continue infinie, de plus nous fournit un algorithme pour trouver la fraction continue infinie qui représente l'irrationnel considéré.

Notation 3.1 Soit x un réel donné. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x . elle est notée par $[x]$. La partie fractionnaire de x est la différence $x - [x]$, notée par $\{x\}$. De plus $0 \leq \{x\} < 1$.

Théorème 3.3 [15] Soit $\alpha = \alpha_0$ un nombre irrationnel. Soit la séquence définie a_0, a_1, \dots récursivement par

$$a_k = [\alpha_k], \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k - a_k\}} \quad \text{où } k = 0, 1, 2, \dots$$

α est la valeur de la fraction continue infinie simple $[a_0, a_1, \dots]$.

Exemple 3.1 - Nous savons que $\pi \approx 3,141592$, l'algorithme donc $a_0 = [\pi] = 3$,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}}, \alpha_1 = \frac{1}{\pi - 3} = 7,062513, \text{ donc } a_1 = [7,062513] = 7.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{7,062513 - 7} = 15,9965, \text{ donc } a_2 = [15,9965] = 15.$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{15,9965 - 15} = 1,003417, \text{ donc } a_3 = [1,003417] = 1.$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{1,003417 - 1} = 292,634591, \text{ donc } a_4 = [292,634591] = 292.$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{292,634591 - 292} = 1,575818, \text{ donc } a_5 = 1.$$

Avec cela, on voit que la réduite d'ordre 5 de la fraction continue de π est $[3, 7, 15, 1, 292, 1]$.

Théorème 3.4 [15] *Si deux fractions continues simples infinies $a = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ et $b = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ représentent le même nombre réel, alors $a_k = b_k$ quel que soit $k \geq 0$.*

Preuve. Supposons que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Alors comme $C_0 = a_0$ et $C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$, le théorème 2.4 nous donne $a_0 < \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}$, de façon que $a_0 = [\alpha]$. De plus nous avons

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots]}.$$

Car

$$\begin{aligned} \alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] &= \lim_{k \rightarrow +\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots]} \right), \\ &= a_0 + \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} [a_1; a_2, a_3, \dots]}, \\ &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots]}. \end{aligned}$$

Supposons que

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots].$$

Alors nous remarquons montre que

$$a_0 = b_0 = [\alpha],$$

et

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, \dots]},$$

donc

$$[a_1; a_2, a_3, \dots] = [b_1; b_2, b_3, \dots].$$

Suppose que $a_k = b_k$, et montre que $[a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, \dots] = [b_{k+1}; b_{k+2}, b_{k+3}, \dots]$.

En utilisant le même arguments on trouver $a_{k+1} = b_{k+1}$, et

$$a_{k+1} + \frac{1}{[a_{k+2}; a_{k+3}, \dots]} = b_{k+1} + \frac{1}{[b_{k+2}; b_{k+3}, \dots]}.$$

Ce qui implique

$$[a_{k+2}; a_{k+3}, \dots] = [b_{k+2}; b_{k+3}, \dots].$$

Donc par le principe de récurrence on a $a_k = b_k$, pour $k = 0, 1, 2, \dots$ ■

Exemple 3.2 1) Nous avons $\alpha = \sqrt{2} = 1,4142135624$. On trouver que

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1},$$

$$\text{donc } a_1 = [\sqrt{2} + 1] = 2,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1}, \text{ donc } a_2 = [\sqrt{2} + 1] = 2,$$

$$\text{Alors } a_1 = a_2, \text{ donc } \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

3.2 Théorème d'approximation des irrationnels

Rappelons que dans le premier chapitre on a cité le théorème de Dirichlet qui affirme que pour tout réel x il existe $\frac{p}{q}$ tel que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Dans cette section nous donnons, en se basant sur les fractions continues, un autre résultat d'approximation diophantienne.

Théorème 3.5 [15] *Si α est un nombre irrationnel, il existe une infinité de nombres irrationnels $\frac{p}{q}$ tels que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Preuve. Soit $\frac{p_k}{q_k}$ la k -ième convergent de α . Alors par la preuve du théorème 3.3 nous avons

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{(q_k q_{k+1})}.$$

Car s'il s'ensuit que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}.$$

Par conséquent, les convergents de α , $\frac{p_k}{q_k}$, $k = 1, 2, \dots$, sont une infinité de nombres rationnels répondant aux conditions du théorème. ■

Exemple 3.3 Par exemple le début de la fraction continue de π est $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$.

Ses premières réduites sont $3 - \pi = -0.1415926535897932384626433832$,

$$\frac{333}{106} - \pi = -0.00008321962752908751924715684090,$$

$$\frac{103993}{33102} - \pi = -0.0000000005778906343903818884,$$

La formule $\left| \frac{p_n}{q_n} - \pi \right| < \frac{1}{q_n^2}$ signifie que quand $q_n \approx 10r$, alors les représentations décimales de $\frac{p_n}{q_n}$ et de π coïncident sur $2r$ chiffres après le virgule. On voit cela bien avec $\frac{333}{106}$ (4 chiffres) et $\frac{103993}{33102}$ (9 chiffres). Mais l'inégalité raffinée $\left| \frac{p_n}{q_n} - \pi \right| < \frac{1}{a(n+1)q_n^2}$ indique que l'approximation est particulièrement bonne quand le prochain quotient partiel est grand.

Théorème 3.6 [15] *Soit α un nombre irrationnel et soient $\frac{p_j}{q_j}$, $j = 1, 2, \dots$, ses convergentes. Si r et s sont des entiers avec $s > 0$ tel que*

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|,$$

alors $s \geq q_{k+1}$.

Les réduites des fractions continues simples nous fournissent la meilleure approximation pour α , dans le sens où si réduite de α est $\frac{p_k}{q_k}$, alors $\frac{p_k}{q_k}$ est plus proche à α que tout autre rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q_k > q$.

Corollaire 3.1 Soit α un nombre irrationnel et soient $\frac{p_j}{q_j}$, $j = 1, 2, \dots$, la convergence de la fraction continue infinie simple de α si $\frac{r}{s}$ est un nombre rationnel, ou r et s sont des entiers avec $s > 0$, tels que

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Donc $s > q_k$.

Preuve. Supposons que $s \leq q_k$ et que

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Multiplions les deux membres de cette dernière inégalité par s et q_k , alors

$$s \left| \alpha - \frac{r}{s} \right| < q_k \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Ceci implique que $|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|$. Contradiction. ■

Application :

1. Voici les 12 premières décimales de $\pi = 3,141592653589$. Les anciens savaient que $\frac{22}{7}$ et $\frac{333}{106}$ sont deux nombres rationnels qui approximent π . Montrer que ce sont deux réduites de π . Calculer les deux suivantes

2. Trouver la fraction continue du nombre $\sqrt{3} + 1$.

Chapitre 4

Fractions continues périodiques

Une fraction continue simple infinie x est dite périodique si elle est infinie et s'il existe un entier $N \geq 0$ et un entier $k \geq 1$ tels que pour tout $n \geq N$

$$a_{n+k} = a_n.$$

Une fraction continue périodique est alors de la forme

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, a_{N+k-1}}].$$

On a démontré que toute fraction continue simple infinie converge.

Définition 4.1 (Irrationnel quadratique) On appelle irrationnel quadratique toute racine irrationnelle d'une équation quadratique à coefficients entiers.

Définition 4.2 (Nombre purement périodique) Un nombre x est dit purement périodique si son développement en fraction continue est une fraction continue périodique avec $N = 0$.

Définition 4.3 Un irrationnel quadratique est un nombre réel de la forme $A + B\sqrt{D}$ avec $D \geq 2$ un entier non carré parfait, A, B et D rationnels différents de zéro.

Exemple 4.1 Par exemple

$$\sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$$

sont des irrationnels quadratiques. Les nombres quadratiques réels sont les solutions réelles irrationnelles des équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c rationnels (ou entiers). Pour trouver l'équation du second degré dont $\frac{2 + \sqrt{14}}{5}$ est la solution, on écrit $x = \frac{2 + \sqrt{14}}{5}$ puis on isole le radical

$$5x - 2 = \sqrt{14}$$

Maintenant on élève les deux membres de l'équation au carré, puis on met tous les termes d'un côté.

$$(5x - 2)^2 = (\sqrt{14})^2, \text{ donc } 25x^2 - 10x + 4 = 14, \text{ ceci implique } 25x^2 - 10x = 10.$$

Comme les trois coefficients 25, -10 , -10 ont un pgcd non trivial 5, on peut diviser par lui et trouver l'équation

$$5x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Cette procédure donne une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c entiers, $a > 0$ et $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$ pour tout irrationnel quadratique .

Proposition 4.1 *Soit un nombre réel $x = A + B\sqrt{D}$ tel que $A \in \mathbb{Q}$, $B \in \mathbb{Q}^*$ et D est un entier naturel qui n'est pas un carré parfait. Alors x est racine d'une équation quadratique à coefficients entiers $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$.*

Preuve. On vérifie que x est solution de l'équation $x^2 - 2Ax + (A^2 - B^2D) = 0$.

Le réel $x' = A - B\sqrt{D}$ est l'autre racine de cette équation, il est appelé conjugué de x . Nous aurons besoin par la suite suivant. ■

4.1 Théorème de Lagrange

Définition 4.4 [15] Une fraction continue est périodique si et seulement si elle représente un irrationnel quadratique.

Preuve. L'implication(\implies).

Soit $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, a_{N+k-1}}]$ une fraction continue périodique.

Observons que

$$r_N = [a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k-1}, r_N],$$

De sorte que

$$\begin{aligned} r_N &= \frac{p_{N-1}r_N + p_{N-2}}{q_{N-1}r_N + q_{N-2}} \\ r_N (q_{N-1}r_N + q_{N-2}) &= (p_{N-1}r_N + p_{N-2}) \\ \iff r_N^2 q_{N-1} + q_{N-2} - p_{N-1}r_N + p_{N-2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

D'autre part, on a

$$x = \frac{r_N p_{N-2} + p_{N-2}}{r_N q_{N-1} + q_{N-2}}.$$

Ou encore

$$r_N = \frac{p_{N-2} - q_{N-2}x}{p_{N-1} - q_{N-1}x}.$$

Finalement, en réinjectant cette dernière expression dans l'équation (4.1), puis en multipliant par $q_{N-1}x - p_{N-1}$ différent de zéro, on en déduit que x est solution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

La réciproque (\Leftarrow).

Soit $x = [a_0, a_1, \dots]$ un irrationnel quadratique qui est solution d'une équation quadratique à coefficients entiers a, b et c :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } b^2 - 4ac > 0. \quad (4.2)$$

Nous souhaitons montrer que $[a_0, a_1, \dots]$ est périodique. Soit $n \geq 2$, on a

$$x = \frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

$$a \left(\frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}} \right)^2 + b \frac{r_n p_{n-1} + p_{n-2}}{r_n q_{n-1} + q_{n-2}} + c = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$a (r_n p_{n-1} + p_{n-2})^2 + b (r_n p_{n-1} + p_{n-2})(r_n q_{n-1} + q_{n-2}) + c (r_n q_{n-1} + q_{n-2})^2 = 0.$$

Tous calculs faits, on trouve l'équation à coefficients entiers A_n, B_n et C_n suivante :

$$\begin{aligned} A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n &= 0 \\ A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + bp_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1} + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 = A_{n-1}. \end{aligned}$$

Or A_0 car dans le cas contraire $\frac{p_n - 1}{q_n - 1}$ serait une racine rationnel de (4.2), ce qui ne peut se produire que dans deux cas. Le premier étant si $b^2 - 4ac = 0$, auquel cas l'équation n'admet pas de racines irrationnelles, ce qui est contradictoire avec l'existence de x . Le second cas étant si $b^2 - 4ac = 0$, est un carré parfait, mais là encore cela contredit l'irrationalité de x . En résumé, l'équation

$$A_n y^2 + B_n y + C_n = 0$$

est bien une équation quadratique à coefficients entiers, et l'on en connaît une racine irrationnelle r_n de sorte que $B_n^2 - 4A_n C_n > 0$ et n'est pas un carré parfait. En effet nous vérifions que l'on a

$$B_n^2 - 4A_n C_n = b^2 - 4ac.$$

■

Exemple 4.2 Trouver le nombre irrationnel de fraction continue $[8, \overline{1, 16}]$.

On a $x = [8, \overline{1, 16}]$ signifie que $[8, 1, 16, 1, 16, \dots]$.

$$x = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{\ddots}}}}},$$

on pose

$$y = 1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

donc

$$y = 1 + \frac{1}{16 + \frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{\frac{16y + 1}{y}} = \frac{17y + 1}{16y + 1},$$

alors

$$16y^2 - 16y - 1 = 0, \quad y = \frac{16 \pm 8\sqrt{5}}{32} \text{ puisque } y \text{ positif } \frac{2 + \sqrt{5}}{4},$$

donc

$$x = 8 + \frac{1}{y} = 8 + \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{5}}{4}} = 8 + \frac{4}{2 + \sqrt{5}} = \frac{20 + 8\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Algorithme pour calculer la fraction continue simple d'un irrationnel quadratique

Lemme 4.1 [15] *Si α est un irrationnel quadratique, alors α peut être écrit selon la forme*

$$\alpha = \frac{(P + \sqrt{d})}{Q}$$

où P, Q et d sont des entiers, $Q \neq 0$, $d > 0$, d n'est pas un carré parfait et $Q \mid (d - P^2)$.

Démonstration. Comme α est un irrationnel, le lemme 4.1 implique

$$\alpha = \frac{(a + \sqrt{b})}{c}$$

où a, b et c sont des entiers, $b > 0$ et $c \neq 0$. Multiplions à la fois le numérateur et le dénominateur de cette expression par $|c|$, pour obtenir

$$\alpha = \frac{(a|c| + \sqrt{bc^2})}{c|c|}.$$

Prenons $P = a|c|$, $Q = c|c|$ et $d = bc^2$. Nous pouvons vérifier facilement que ces entiers répond bien aux exigences du lemme.

Nous donnons maintenant un algorithme qui fournis la fraction continue simple pour un irrationnel quadratique.

Théorème 4.1 (Algorithme)[15]. *Soit α un irrationnel quadratique, alors par le lemme– il existent des entiers P_0, Q_0 et d tels que*

$$\alpha = \frac{(P_0 + \sqrt{d})}{Q_0}$$

où $Q_0 \neq 0$, $d > 0$, d n'est pas un carré parfait et $Q_0 \mid (d - P_0^2)$. Définissons récursivement

$$\alpha_k = \frac{(P_k + \sqrt{d})}{Q_k},$$

$$a_k = [\alpha_k],$$

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k,$$

$$Q_{k+1} = \frac{(d - P_{k+1}^2)}{Q_k},$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Alors $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Exemple 4.3 Soit $\alpha = \sqrt{47} = \frac{0 + \sqrt{47}}{1}$ alors $d = 47$.

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & q_0 &= 1, & a_0 &= [\alpha_0] = 6 \\ p_1 &= a_0 q_0 - p_0 = 6, & q_1 &= \frac{d - p_1^2}{q_0} = 11, & a_1 &= [\alpha_1] = 1 \\ p_2 &= a_1 q_1 - p_1 = 5, & q_2 &= \frac{d - p_2^2}{q_1} = 2, & a_2 &= [\alpha_2] = 5 \\ p_3 &= a_2 q_2 - p_2 = 5, & q_3 &= \frac{d - p_3^2}{q_2} = 11, & a_3 &= [\alpha_3] = 1 \\ p_4 &= a_3 q_3 - p_3 = 6, & q_4 &= \frac{d - p_4^2}{q_3} = 1, & a_4 &= [\alpha_4] = 12 \\ p_5 &= a_4 q_4 - p_4 = 6, & q_5 &= \frac{d - p_5^2}{q_4} = 11, & a_5 &= [\alpha_5] = 1. \end{aligned}$$

$$\sqrt{47} = [6; \overline{1, 5, 1, 12}]$$

4.2 Théorème de Galois

Définition 4.5 (Irrationnel quadratique réduit) [15] : On dit qu'un irrationnel quadratique a est réduit si $a > 1$ et si son conjugué a' vérifie $-1 < a' < 0$.

Définition 4.6 [15] La fraction continue $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ est purement périodique s'il existe un entier n tel que $a_k = a_{n+k}$, pour $k = 0, 1, 2, \dots$, tel que

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [\overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}}].$$

Le théorème suivant caractérise le fait qu'un irrationnel quadratique a une fraction continue purement périodique.

Théorème 4.2 [15] La fraction continue simple d'un irrationnel quadratique α est purement périodique si et seulement si α est réduit. De plus, si α est réduit et $\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n}]$ alors la fraction continue de $\frac{-1}{\alpha'}$ est

$$[\overline{a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0}].$$

Exemple 4.4 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ comme $\alpha > 1$, $\alpha' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\alpha' \in]-1, 0[$ alors α est réduit. Par le théorème 4.2 α a une fraction continue purement périodique. Par le théorème 4.1 $\alpha = [\overline{1; 2}]$.

Cas particulier : calcul de la fraction continue simple de racine de N

Proposition 4.2 [15] Soit N un entier positif qui n'est pas un carré parfait, alors le développement en fraction continue de \sqrt{N} est de la forme

$$\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$$

pour un certain $n \geq 1$ et avec $a_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \geq 0$.

Preuve. Notons $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$, le développement en fraction continue simple infinie de \sqrt{N} . Considérons l'irrationnel quadratique $a_0 + \sqrt{N}$, où $a_0 = E(\sqrt{N})$. On a dans ce cas

$$a_0 + \sqrt{N} > 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{N} - a_0 < 1.$$

Puisque \sqrt{N} n'est pas un entier, on a même $0 < \sqrt{N}$. D'où $-1 < a_0 - \sqrt{N} < 0$. C'est-à-dire que le conjugué de $a_0 + \sqrt{N}$. Ainsi $a_0 + \sqrt{N}$ est réduit, donc est purement

périodique d'après le théorème 4.2 . Son développement en fraction continue simple infinie est alors de la forme

$$a_0 + \sqrt{N} = [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] .$$

Pour un certain $n \geq 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sqrt{N} &= [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] - a_0 = [2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}] - a_0 \\ &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}] \\ &= [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}] . \end{aligned}$$

■

Exemple 4.5 En utilisant l'algorithme du théorème 4.2, on obtient que le développement en fraction continue simple des $\sqrt{14}$, $\sqrt{19}$ et $\sqrt{29}$ sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} \sqrt{14} &= [3, \overline{1, 2, 1, 6}], \\ \sqrt{19} &= [4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}], \\ \sqrt{29} &= [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]. \end{aligned}$$

4.3 Application : Equation de Pell

Parmi les applications des fractions continues on trouve l'étude de l'équation de la forme :

$$x^2 - Ny^2 = m$$

où N et m sont des entiers fixés.

Nous nous intéressons dans cette partie au où $N > 0$ qui n'est pas un carré parfait et $m = 1$ i.e équation de Pell. Le cas $m = -1$ est appelé l'équation associée à l'équation de Pell.

Théorème 4.3 [15] Soit N un entier positif qui n'est pas un carré parfait. Soit $\frac{p_k}{q_k}$ noté la k -ième convergente de la fraction continue simple de \sqrt{N} , $k = 1, 2, 3, \dots$, est soit m la longueur de cette fraction continue de \sqrt{N} . Alors

cas1 : N est pair, les solutions positives de l'équation diophantienne $x^2 - Ny^2 = 1$ sont $x = p_{jm-1}$, $y = q_{jm-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, et l'équation diophantienne $x^2 - Ny^2 = -1$ n'a pas de solution.

cas2 : N est impair, les solutions positifs de l'équation diophantienne $x^2 - Ny^2 = 1$ sont $x = p_{2jm-1}$, $y = q_{2jm-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, et la solution de $x^2 - Ny^2 = -1$ sont $x = p_{(2j-1)m-1}$, $y = q_{(2j-1)m-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Exemple 4.6 $N = 28, 19$ et 29

Le développement en fraction continue périodique de $\sqrt{28}$ est $[5, \overline{3, 2, 3, 10}]$ ($m = 4$ est pair). Une solution positive de l'équation diophantienne $x^2 - 28y^2 = 1$ est $x = p_{4j-1}$, $y = q_{4j-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, où $\frac{p_{4j-1}}{q_{4j-1}}$ est $(4j - 1)$ - ième réduite de $\sqrt{28}$,

$$\text{alors } [5, 3, 2, 3] = \frac{127}{24}.$$

$N = 19$:

Le développement en fraction continue périodique de $\sqrt{19}$ est $[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ ($m = 6$ est pair). Une solution positive de l'équation diophantienne $x^2 - 19y^2 = 1$ est $x = p_{6j-1}$, $y = q_{6j-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, où $\frac{p_{6j-1}}{q_{6j-1}}$ est $(6j - 1)$ - ième réduite de $\sqrt{19}$ alors

$$[4, 2, 1, 3, 1, 2] = \frac{170}{39}.$$

$N = 29$:

Le développement en fraction continue périodique de $\sqrt{29}$ est $[5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$ ($m = 5$ est impair). solution positive de l'équation diophantienne $x^2 - 29y^2 = 1$ est $x = p_{10j-1}$, $y = q_{10j-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, où $\frac{p_{10j-1}}{q_{10j-1}}$ est $(10j - 1)$ - ième réduite de $\sqrt{29}$ alors $[5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1] =$

$$\frac{9801}{1820},$$

une solution positive de l'équation diophantienne $x^2 - 29y^2 = -1$ est $x = p_{(2j-1)5-1}$, $y = q_{(2j-1)5-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, alors $[5, 2, 1, 1, 2] = \frac{70}{13}$.

Bibliographie

- [1] Adler, Andrew, and John E. Coury. The theory of numbers : A text and source book of problems. Jones & Bartlett Pub, 1995.
- [2] Boudaoud, A. (1988). Modélisation de phénomènes discrets et approximations diophantiennes infinitésimales (Doctoral dissertation, Mulhouse).
- [3] Boudaoud, A. Introduction à la théorie des nombres, cours 1^{ère} master Université Mohamed Boudiaf de M'sila Faculté des Mathématiques
- [4] Boudaoud, A. (2004). Sur l'approximation simultanée au sens infinitésimal de réels à cardinal illimité. Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, 74(1-2), 17-22.
- [5] Boudaoud, A. (2016). Diophantine approximation with improvement of the simultaneous control of the error and of the denominator. arXiv preprint arXiv :1605.02538.
- [6] Cusick, T. W, & Flahive, M. E. (1989). The Markoff and Lagrange spectra (No. 30). American Mathematical Soc.
- [7] De Koninck, J. M., & Mercier, A. (2004). 1001 problèmes en théorie classique des nombres. Ellipses.
- [8] Djamel, B., & Abdelmadjid, B. (2015). Non-classical study on the simultaneous rational approximation. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 9(2), 209-225.
- [9] G.H Hardy and E.M.Wright D.R.Heath -Brown J.H.silverman An introduction to the theory of numbers
- [10] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2007). Introduction à la théorie des nombres [An Introduction to the Theory of Numbers].

- [11] Jones, W. B. & Thron, W. J. (1984). Continued fractions : Analytic theory and applications. Cambridge University Press.
- [12] Nathanson, M. B. (2008). Elementary methods in number theory (Vol. 195). Springer Science & Business Media.
- [13] NIVEN, Ivan, ZUCKERMAN, Herbert S., et MONTGOMERY, Hugh L. An introduction to the theory of numbers. John Wiley & Sons, 1991.
- [14] Mollin, R. A. (1997). Fundamental number theory with applications. Crc Press.
- [15] Rosen Kenneth, H. (1984). Elementary number theory and its applications.
- [16] Stark, H. M. (1970). An introduction to number theory, Markham Publ. Co., Chicago

Conclusion. Les fractions continues est un sujet qui se trouve presque partout dans les livres qui traitent de la théorie des nombres. Elles sont utilisées pour approximer les réels par les rationnels, résoudre des équations Diophantiennes, factoriser des entiers, A cause de cette importance que nous avons choisi de travaillé dans ce sujet où nous avons met les notions de base dans le premier chapitre, les fractions continues finies (resp. infinies) dans le deuxième (resp. le troisième) chapitre. Le dernier chapitre est consacré à une application concernant l'équation de Pell-Fermat.

Abstract. Four chapters form this memory. The first one contains some fundamental notions and definitions. The finite simple (resp. infinite simple) continued fractions are the subject of the second (resp. of the third) chapter. The last chapter is for periodic continued fractions and an application to the Pell-Fermat equation. Finally, we end our work with a conclusion and a bibliography.

Résumé. Cette mémoire est formée par quatre chapitres. Le premier contient quelques notions et définitions fondamentales. Les fractions continues simples finies (resp . simples infinies) font l'objet du deuxième (resp . du troisième) chapitre. Le dernier chapitre concerne les fractions continues périodiques et une application à l'équation de Pell-Fermat. Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion et une bibliographie.

المخلص . تتكون هذه المذكرة من أربعة فصول . الأول يحتوي على بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية . الكسور المستمرة البسيطة المنتهية (على التوالي . غير المنتهية) هي موضوع الفصل الثاني (الثالث . على التوالي) . يتعلق الفصل الأخير بالكسور الدورية المستمرة وتطبيق على معادلة Pell-Fermat. أخيرًا ، ننهى عملنا بخاتمة وببليوجرافيا.