



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Numerical solution of two dimensional flow

Présentée par :

Hallab Khawla

Soutenu publiquement le : 00/00/2021.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r* — —

M.C.B, Université de M'sila

Encadreur : *Pr Gasmi* Abdelkader

M.C.B, Université de M'sila

Examineur : *M^r* — —

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation. Je tiens à remercier sincèrement Mr. Abdelkader Gasmi, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout aulong de la réalisation de ce travail,

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues . pour leurs aides et leurs encouragements. Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci pour tout

Dédicaces

Je dédie cet modeste travail

A mes chers parents

Et à mon cher mari Adel Amour,

À mon fils, la prunelle de mes yeux, Yaman, à ma chère fille, Hour

A mes soeurs bien-aimées Hind et Safaa et mes frères Houssam.. Yaakoub.. Mohammed Yassin

Pour oubada..ghofran

Pour tout la famille Hallab

Et pour la famille ammour

à tous mes proches

hallab khawla

Résumé

An approximate method is presented to solve the problem of steady free-surface flow of an ideal fluid over a semi-infinite triangle in the bottom of an open channel. Schwartz-Christoffel transformation is used to map the region of flow, in the complex potential-plane, onto the upper half-plane. The Hilbert transformation as well as the perturbation technique are used as a basis for the approximate solution of the problem for large Froude number and small inclination angle of the ramp. General equations, in integral form, for any order of approximation are obtained. Solution up to first-order approximation is discussed and illustrated.

Keywords : free-surface flow problems, Schwartz-Christoffel transformation, Hilbert transformation, perturbation technique, nonlinear integral equations.

Une méthode approximative est présentée pour résoudre le problème de l'écoulement stationnaire à surface libre d'un fluide idéal sur un triangle semi-infini au fond d'un canal ouvert. Transformation Schwartz-Christoffel est utilisée pour cartographier la région d'écoulement, dans le plan de potentiel complexe, sur le demi-plan supérieur. La transformation de Hilbert ainsi que la technique de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative du problème pour un grand nombre de Froude et un petit angle d'inclinaison de la rampe. On obtient des équations générales, sous forme intégrale, pour tout ordre d'approximation. La solution jusqu'à l'approximation du premier ordre est discutée et illustrée.

Mots-Clés : problèmes d'écoulement à surface libre, transformation de Schwartz-Christoffel, transformation de Hilbert, technique de perturbation, équations intégrales non linéaires.

ملخص : تم تقديم طريقة تقريبية لحل مشكلة التدفق الثابت للسطح الحر لمائع مثالي فوق المثلث شبه اللامتناهي في الجزء السفلي من القناة المفتوحة، يستخدم تحويل شوارتز كريستوفل لرسم خريطة لمنطقة التدفق، في المستوى المعقد المحتمل، على نصف المستوى العلوي. يتم استخدام تحويل هيلبرت وكذلك تقنية الاضطراب كأساس للحل التقريبي للمشكلة من أجل عدد فرود كبير وزاوية الميل للمنحدر صغيرة. يتم الحصول على معادلات عامة، في شكل متكامل، لأي درجة تقريب، تمت مناقشة وتوضيح الحل حتى التقريب من الدرجة الأولى.

الكلمات الدالة: مشاكل التدفق على السطح الحر، تحويل شوارتز كريستوفل، تحويل هيلبرت، تقنية الاضطراب، المعادلات التكاملية غير خطية.

Table des matières

1	Notions préliminaires sur les écoulement potentiel	7
1.1	Descriptions du mouvement	8
1.1.1	Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)	8
1.1.2	Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses)	8
1.2	Définitions	9
1.2.1	Fluide incompressible	9
1.2.2	Lignes de courant	9
1.3	Quelques propriétés de l'écoulement	9
1.3.1	Définitions	9
1.3.2	Potentiel de vitesse	9
1.3.3	Fonction de courant	10
1.4	Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe	10
1.5	Équation de Bernoulli	12
1.6	Équation de conservation de la masse	12
1.7	Transformation de Hilbert	13
1.8	Transformation de Schawarz-Christoffel	13
1.9	Analyse dimensionnelle	14
2	Résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel	15
2.1	Formulation du problème	16
2.2	Les équations approximatives	22
2.3	Technique de perturbation	23
2.3.1	approximation de l'ordre zéro	23
2.3.2	approximation de premier order	24
2.4	Solution du problème	24
3	Résultats numériques	26

Table des figures

1.1	Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation	11
2.1	z -plane	16
2.2	f -plane	18
2.3	t -plane	19
3.1	Effet de la hauteur de bosse triangulaire E sur le profil de surface libre pour $\alpha = \beta, \delta = 0,1187, F^2 = 10,0$	27
3.2	Effet de la forme du fond sur le profil de surface libre pour $\alpha = 0,3\text{rad}, F^2 = 10$ et ϵ	28
3.3	Effet de la forme du fond sur le profil de surface libre pour $\epsilon = 0,005$ et $F^2 = 10$	29

Notation

\vec{S} le vecteur position d'une particule donnée
 \vec{s}_0 position initiale
 t le temp
 (X, Y, Z) les coordonées cartésiennes
 \vec{U} le vecteur de vitesse
 (u_x, u_y, u_z) champ de vitesse
 φ le potentiel de vitesse
 ψ la fonction de courant
 $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ la fonction de potentiel complexe
 $z = x + iy$ la variable complexe associée à la foction
 p pression du fluide
 ρ densité du fluide
 g gravité
 $m(t)$ la masse
 S la surface
 \vec{n} le vecteur normal unitaire à un element de surface de S
 H la transformation de Hilbert
 F le nombre de Froude
 rot Rotationnel
 \overrightarrow{grad} gradient
 $\frac{d}{dt}, \frac{D}{Dt}$ dérivée matérielle
 $\frac{\partial}{\partial x}$ dérivée par raport a x
 Δ la placien
 w la variable de hodographe logarithmique
 $f'(t)$ la fonction de cartographie
 L' la longueur de la rampe
 α angle d'inclinaison β angle d'inclinaison

Introduction générale

Les écoulements à surface libre de type au-dessus du seuil sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines réservoirs . Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, expérimentales et numériques.

Nous traitons particulièrement les écoulements plan dans les cas incompressible et irrotationnel. Pour trouver la solution numérique du problème d'écoulement traité, où en prendre l'effet de la gravité et en négligeant les tensions de surface, nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel, transformation de Hilbert et technique de perturbation on résoud le problème numériquement.

Le présente mémoire comporte trois chapitres. Après cette brève introduction, nous abordons dans le premier chapitre, on traite des notions fondamentales sur les propriétés en mécanique des fluides telles que les Mouvements sur les deux méthodes ensuite la fonction de courant et potentiel des vitesses.

Dans le deuxième chapitre, on traite le problème dans le cas où la tension de surface est négligeable . Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. Nous utilisons d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel , technique de perturbation et la méthode de Hilbert pour obtenir la forme de la surface liber.

Dans le troisième chapitre, nous donnons les résultats en courbes montrant l'effet de d'angles α et β , de la hauteur ε .

Enfin, on présent la conclusion générale de notre travaille.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ÉCOULMENT POTENTIEL

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux

1.1 Descriptions du mouvement

Les descriptions des mouvements du fluide peuvent se faire à l'aide de deux méthodes distinctes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (méthode de Lagrange) ou on peut fixer un point dans l'espace et observer à un instant donné le champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler)

1.1.1 Méthode Lagrangienne (description par les trajectoires)

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées

Soit $\vec{S}(\vec{S}_0, t)$ le vecteur position actuelle d'une particule donnée où \vec{S}_0 est le vecteur de position initiale au temps initial t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{S} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t), \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t), \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du vecteur de position initial du vecteur de position actuelle es au temps t de la particule. Le vecteur vitesse noté par $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ en \vec{S}_0 peut être calculé par :

$$u_x = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}; u_y = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}; u_z = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}. \quad (1.2)$$

Les avantages de la description lagrangienne sont :

- ◆ La trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée.
- ◆ La conservation de la masse est satisfaite.

1.1.2 Méthode eulérienne (description par le champ de vitesses)

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. La représentation mathématique de la méthode eulérienne

s'écrit pour la vitesse : $\vec{u}(\vec{S}, t)$ où $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ Par ailleurs les composantes du champ de vitesse s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t), \\ u_y = u_y(x, y, z, t), \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2 Définitions

1.2.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa volume ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.2.2 Lignes de courant

Ce sont les lignes qui en chaque point de l'écoulement sont tangentes au vecteur vitesse en ce point. On déduit de cette définition l'équation différentielle qui modélise les lignes de courant

$$\frac{dx_1}{u_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1, x_2, x_3, t)}. \quad (1.4)$$

Où t a une valeur de temps fixée.

1.3 Quelques propriétés de l'écoulement

1.3.1 Définitions

Un écoulement est dit :

1) Irrrotationnelle si le rotationnel de vecteurs vitesse est nul c'est à dire $rot \vec{u} = 0$ où u represent la vitesse de l'écoulement .

2) Incompressible si $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ où $div(\vec{u}) = 0$.

1.3.2 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{u} est irrotationnel, on peut définir une fonction φ scalaire telle que

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien et en considérant un écoulement plan, on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.5)$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \implies \Delta \varphi = 0.$$

1.3.3 Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifié pour tout point de ce domaine, à l'instant t on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Cela implique que la forme différentielle $u_x dx + u_y dy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d(\psi) = u_x dx + u_y dy.$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.6)$$

Où ψ s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \implies \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \wedge \left| \begin{matrix} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{matrix} \right| = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

$\implies \Delta \psi = 0, \psi$ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.4 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ où $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (φ et ψ et représentent respectivement les fonctions potentielle et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes :

1- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f

2- $f(z)$ est analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \implies &\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_y. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système d'équations constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les

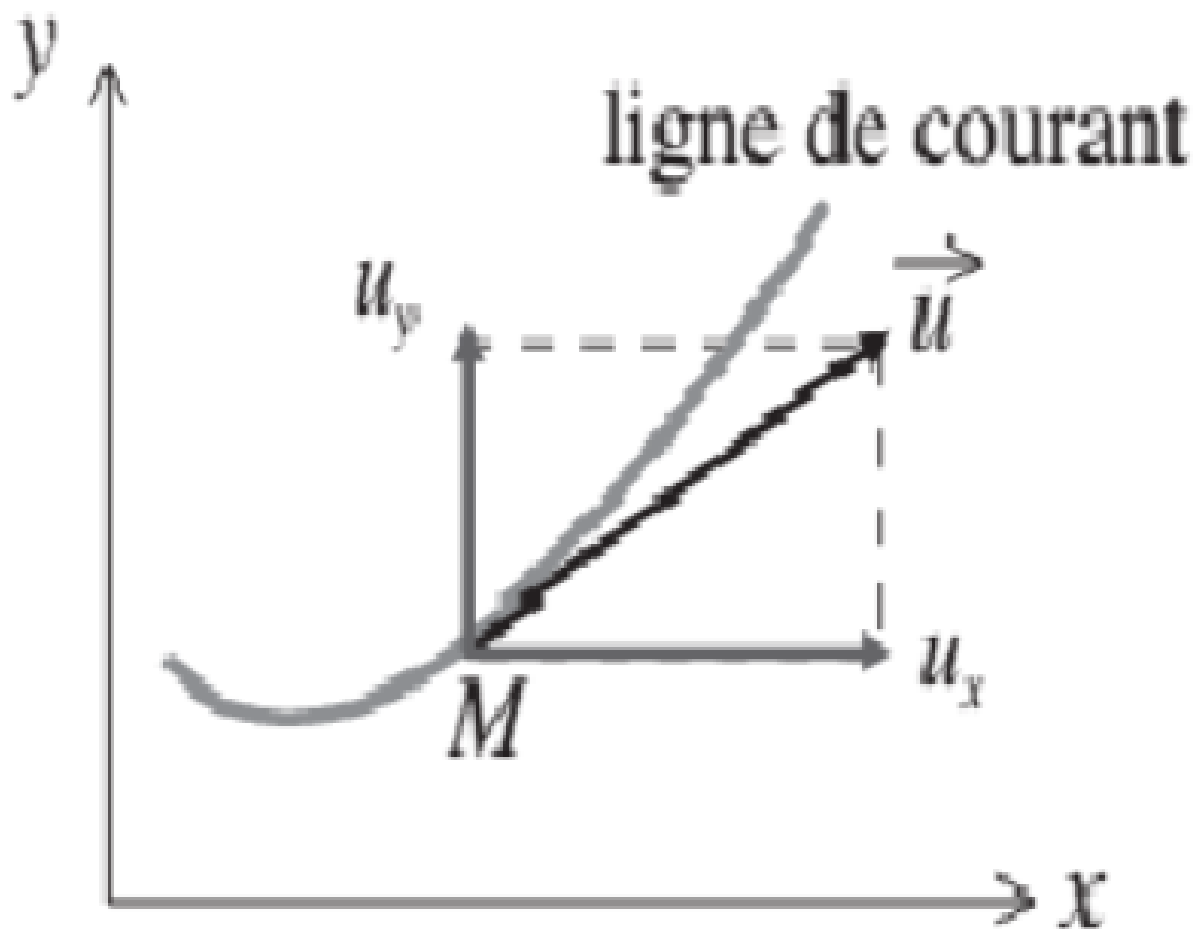


FIGURE 1.1 – Mouvement de rotation d'un volume de fluide sans déformation

relations trouvées précédemment.

Pour que $f(z)$ soit analytique, il faut que φ et ψ vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe des vitesses.

On a vu que pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel des vitesses φ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

1.5 Équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de Bernoulli est :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + yg = cont.$$

Telle que $q = \sqrt{u_x^2 + v_x^2}$, p la pression du fluide, ρ la densité du fluide, g la gravité.

1.6 Équation de conservation de la masse

Considérons un fluide occupant un volume v_0 de densité $\rho(x, t)$ et de frontière une surface fermée s . La quantité de masse m de fluide contenue dans ce volume est égale à

$$m(t) = \int_{v_0} \rho(x, t) dv,$$

La variation de la masse m contenue dans le volume v_0 est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = \int_{v_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dv. \quad (1.7)$$

D'autre part, la variation de la masse est égale au flux massique qui passe à travers la surface S Soit \vec{n} est le vecteur normal unitaire à un élément de surface de S , \vec{V} e vecteur vitesse alors le flux massique est donné par :

$$\int_s \rho V \cdot \vec{n} ds. \quad (1.8)$$

En identifiant les deux expressions 1.7 et 1.8 on obtient :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = - \int_s \rho V \cdot \vec{n} ds.$$

D'après le théorème de divergence (Green-Ostogradsky) :

$$\int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{v_0} \text{div } \rho \vec{V} dv.$$

On obtient ainsi

$$\int_{v_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} \right) dv = 0.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} = 0.$$

Cette équation est connue sous le nom " équation de continuité".

1.7 Transformation de Hilbert

Définition 1.1. Soit s une fonction définie sur \mathbb{R} , on appelle transformée de Hilbert la fonction \hat{s} définie par :

$$\hat{s}(t) = H \{s\} (t) = vp \{ (h \star s) (t) \} = vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) h(t - \tau) d\tau \right\} = \frac{1}{\pi} vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t)}{t - \tau} d\tau \right\}.$$

Où H est la transformation de Hilbert et où

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

et

$$vp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) h(t - \tau) \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\epsilon} s(t) h(t - \tau) d\tau + \int_{t+\epsilon}^{+\infty} s(t) h(t - \tau) d\tau \right\}.$$

vp étant l'abréviation de valeur principale de Cauchy on peut montrer que pour tout réel $p > 1$, H est un opérateur borné de l'espace $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1.8 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements, cette transformation réalise une transformation l'intérieur d'un polygone du plan complexe en demi-plan supérieur de la variable complexe λ

soient a_1, a_2, \dots, a_n les points correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan λ . on définit la transformation de schwarz -christoffel qui représente l'intérieur du polygone à demi plan supérieur par la formule :

$$\Omega = K \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + K.$$

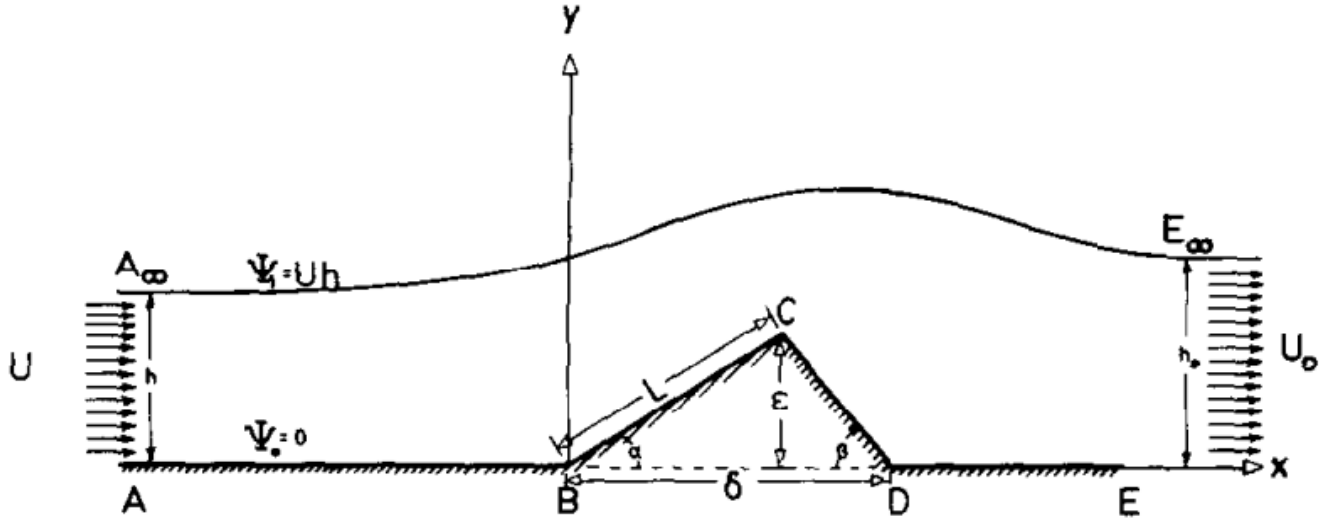
où K et M sont des constantes complexes , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone .

1.9 Analyse dimensionnelle

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physiques. Nous utilisons le théorème π de Vaschy-Buckingham, qui montre comment on rend sans dimension une équation physique. L'emploi des variables non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de n variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimensions en les réduisant à $n - k$, avec ($k = 1, \dots, 4$). Les quatre variables universellement connues sont la longueur L , la masse m , la température T et le temps t .

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME D'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel considéré, en tenant compte des forces de la gravité et nous négligeons la tension de surface, en utilisant la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation .

FIGURE 2.1 – z -plane

2.1 Formulation du problème

On considère dans cette étude un problème d'un mouvement irrotationnel bidimensionnel, c'est-à-dire que la vitesse de cet écoulement est dérivée d'un potentiel $\varphi(x, y)$ satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Le fluide est considéré comme non visqueux et incompressible, soumis à l'action de la force gravitationnelle et ayant une surface supérieure libre.

À l'origine on considère que l'écoulement est uniforme avec une vitesse U_1 c'est-à-dire dans la direction positive de l'axe des abscisses x et de profondeur h_1 le fond de l'écoulement se compose d'un paroi horizontal AB , triangle BCD avec deux angles d'inclinaison α et β , et un paroi horizontal DE . Où le fond s'étend de $-\infty$ (point A) à $+\infty$ (point E). Le domaine est illustré dans la figure 1.

Pour plus de commodité, nous choisissons le point B comme origine dans le plan z , l'axe des abscisses x est confondu sur la paroi AB et l'axe des y est perpendiculaire passant par le point B . On introduit la fonction potentiel $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ est une fonction analytique de z dans la région d'écoulement, avec une vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) = qe^{-i\theta}. \quad (2.2)$$

Si on prendre comme unité de longueur h_1 et unité de vitesse U_1 on peut écrire les variable unidimensionnels

$$z' = \frac{z}{h_1}, q' = \frac{q}{u_1}, f' = \frac{f}{\psi_1}. \quad (2.3)$$

Où

$$\psi_1 = u_1 h_1.$$

La condition sur la surface libre où la pression est uniforme est donnée par l'équation de Bernoulli :

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q^2 + yg &= \frac{1}{2}u^2 + hg, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}q^2 + g(y - h) &= \frac{1}{2}u^2, \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{q}{u}\right)^2 + \frac{g}{u^2}(y'h - h) &= \frac{1}{2}, \\ \Rightarrow q'^2 + \frac{2gh}{u^2}(y' - 1) &= 1, \end{aligned}$$

alors

$$q'^2 + \frac{2}{F^2}(y' - 2) = 1 \quad (2.4)$$

Telle que

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{h}, \\ q' &= \frac{q}{u}, \end{aligned}$$

où $q = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ et F le nombre de Froude définit par :

$$F = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}}. \quad (2.5)$$

La hauteur de la triangle notée par ϵ , où

$$\epsilon = \frac{L \sin \alpha}{h_1} = L' \sin \alpha. \quad (2.6)$$

En utilisant les variables unitaires (2.3) l'équation (2.2) en forme adimensionnelle de vient :

$$\xi = \frac{df'}{dz'} = q' e^{-i\theta}. \quad (2.7)$$

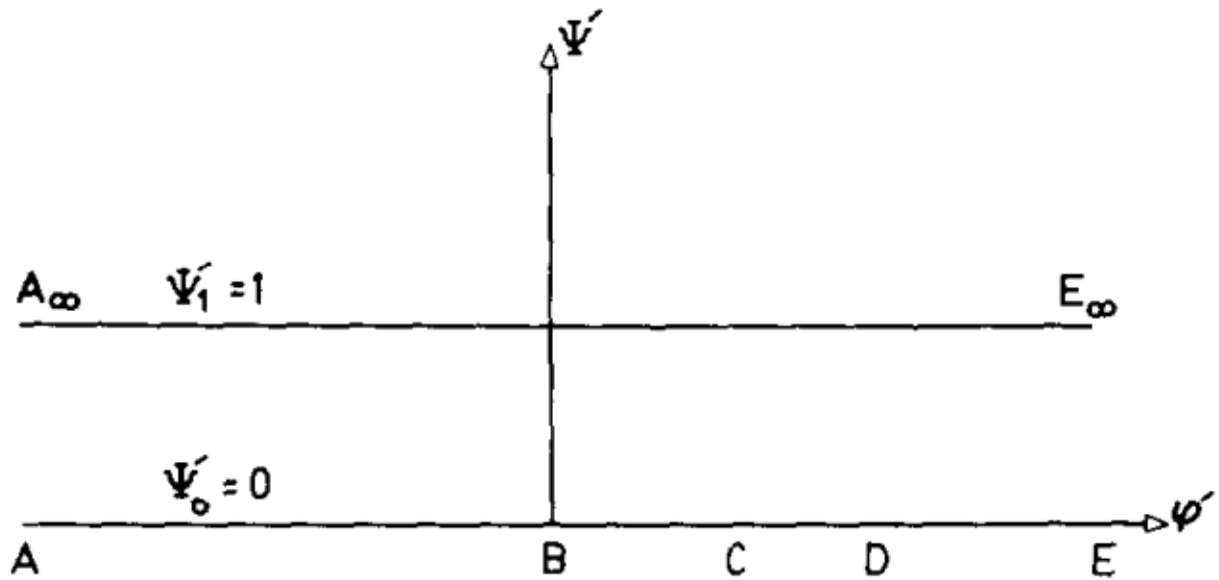
On a

$$\omega = \ln \xi = \ln q' - i\theta. \quad (2.8)$$

$$\xi = e^\omega,$$

comme

$$\xi = \frac{df'}{dz'} = q' e^{-i\theta},$$

FIGURE 2.2 – f -plane

alors

$$dz' = \frac{1}{\xi} df',$$

$$z' = \int \frac{1}{e^f} df',$$

donc

$$z' = \int e^{-f} df'. \quad (2.9)$$

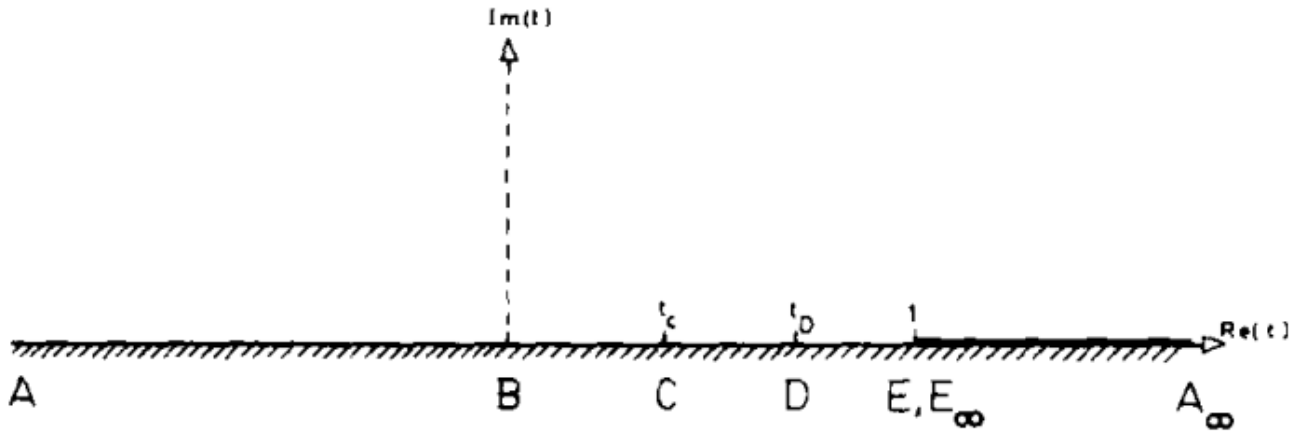
Où ω est appelé la variable de hodographe logarithmique. En utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel, nous transformons la région de l'écoulement du plan f' sur la moitié supérieur d'un plan t auxiliaire, de sorte que les points suivants correspondent. (voir les figures 2.2 et 2.3)

point	f'	t
B	0	0
E, E_∞	$+\infty$	1
A, A_∞	$-\infty$	$+\infty$

La transformation utilisé est donnée par :

$$f'(t) = -\frac{1}{\pi} \ln(1-t); 0 \leq \arg(1-t) \leq \pi. \quad (2.10)$$

Pour exprimer ω en fonction de la variable unique t , nous introduisons la méthode de Hilbert pour un problème de valeur de frontière mixte dans le demi plan supérieur, $Q(t)$ est une fonction analytique définie dans le demi plan supérieur du plan t , et supposons que $Im(Q(t))$ satisfait la condition Hölder à la limite, $Im(t) = 0$, du plan t .

FIGURE 2.3 – t -plane

Si $Im(Q(t))$ est connu sur la limite, $Q(t)$ est donné par la formule intégrale de Poisson

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(q(v))}{v-t} dv + \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j. \quad (2.11)$$

Où A_j sont des reèls constants, et f dénote une intégrale singulière dans la sérénité de cauchy .

Maintenant, nous essayons de relier la fonction $\omega(t)$ à la fonction $Q(t)$. De (2.11), nous trouvons que $Q(t)$ est exprimé en termes de ses parties imaginaires le long de l'axe réel, la limite du plan t .

Ainsi, nous devons examiner la valeur de $\omega(t)$ le long de la limite du plan t , et nous trouvons que on a $\omega = \ln q' e^{-i\theta}$ alors

$$Im(\omega(t)) = -\theta(t), \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} q'^2 + \frac{2}{F^2} (y' - 1) &= 1, \\ \Rightarrow q'^2 &= 1 - \frac{2}{F^2} (y' - 1), \\ \Rightarrow q' &= \sqrt{1 - \frac{2}{F^2} (y' - 1)}, \\ \Rightarrow \ln q' &= \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t)). \end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\begin{aligned} Im(\omega(t)) &= -\theta(t). \\ Re(\omega(t)) &= \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \alpha, & 0 < t < t_c, \\ -\beta, & t_c < t < t_D, \\ 0, & t_D < t < 1, \\ \theta(t), & t > 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Et

$$\eta'(t) = y'(t) - 1.$$

Cela signifie que nous connaissons la partie réelle où Imaginaire de $\omega(t)$ le long de la limite du plan t . alors nous devons construire une fonction auxilliare $H(t)$ qui fait connaitre la partie Imaginaire du quotient $Q(t) = \omega(t) / H(t)$ à la limite du plan t . la forme générale de $H(t)$ est :

$$H(t) = \begin{cases} -\sqrt{(1-t)}, & t < 1, \\ -i\sqrt{t-1}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

chanson [20]a montré que la solution finale est indépendante du choix particulier de $H(t)$.

on a

$$Q(t) = \frac{\omega(t)}{H(t)} = \begin{cases} \frac{\ln q' - i\theta}{-\sqrt{(1-t)}}, & t < 1, \\ \frac{\ln q' - i\theta}{-i\sqrt{(t-1)}}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

en utilisant (2.12) et (2.15) , nous obtenons

$$Im(Q(t)) = \begin{cases} \frac{\theta(t)}{\sqrt{1-t}}, & t < 1, \\ \frac{\ln(1 - \frac{2}{F^2}\eta'(t))}{2\sqrt{(t-1)}}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

ensuite ,nous examinons la condition en amont ,À l'approche du point A_∞ , c'est-à-dire, comme $t \rightarrow +\infty$, $H(t) \simeq -i\sqrt{t}$ et $\omega(t) \simeq \ln q'(t) = 0$. Danc , $Q(t) \simeq \omega(t) / (-i\sqrt{t}) = 0$,et de , $A_j = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.

Ainsi , (2.11) prend la forme

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(q(v))}{v-t} dv. \quad (2.18)$$

En utilisant (2.6), nous obtenons

$$Q(t) = \frac{\omega(t)}{H(t)} = \begin{cases} \frac{-\ln q'(t)}{\sqrt{1-t}} + i \frac{\theta(t)}{\sqrt{1-t}}; & t < 1, \\ \frac{i \ln q'(t)}{\sqrt{t-1}} + \frac{\theta(t)}{\sqrt{t-1}}; & t > 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$= R(t) + iS(t).$$

La forme (2.18) équivaut à :

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(v)}{v-t} dv, \\ S(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(v)}{v-t} dv, \end{aligned} \quad (2.20)$$

en utilisant (2.20), nous obtenons un ensemble d'équations intégrales, et pour notre travail nous avons seulement besoin des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\sqrt{t-1}}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\ln q(s)}{(s-t)\sqrt{s-1}} ds + \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right) \\ &\quad - \frac{2\beta}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m\sqrt{t-1}}{t-1+n} \right), \quad t > 1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \ln(q_j(t)) &= \frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(q(s))}{(s-t)\sqrt{s-1}} ds - \alpha \frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_0^{t_C} \frac{ds}{(s-t)\sqrt{1-s}} \\ &\quad + \beta \frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_{t_C}^{t_D} \frac{ds}{(s-t)\sqrt{1-s}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{cases} r = 1 - \sqrt{1-t_C}, \\ m = \sqrt{1-t_C} - \sqrt{1-t_D}, \\ n = \sqrt{(1-t_C)(1-t_D)}, \end{cases}$$

et $j = 1, 2, 3, 4$, $q_1(t)$ défini pour $t < 0$, $q_2(t)$ pour $0 < t < t_C$, $q_3(t)$ pour $t_C < t < t_D$ et $q_4(t)$ pour $t_D < t < 1$.

Les coordonnées (x', y') d'un point sur la surface libre peuvent être obtenir en utilisant (2.8) et (2.9) comme suit :

on a

$$z' = \int e^{-\omega} dw',$$

telle que

$$\omega = \ln q' - i\theta,$$

alors

$$z' = \int e^{-\ln q' + i\theta} dw',$$

en utilisant (2.10), nous obtenons

$$z'(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{i\theta(v)}}{q'(v)} \times \frac{1}{1-v} dv + const.$$

Donc

$$z'(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{e^{i\theta(v)}}{q'(v)(1-v)} dv + (x'_{\infty} + i)$$

séparant la partie réelle et imaginaire :

$$x'(t) = x'_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{\cos \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv. \quad (2.23)$$

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^t \frac{\sin \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv \quad (2.24)$$

à partir de (2.24) nous pouvons trouver la longueur de BC :

$$L' = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{1}{(1-v)q'_2(v)} dv. \quad (2.25)$$

par conséquent, le système d'équations (2.4) (2.21),(2.22),(2.23)et(2.24) décrit complètement notre problème

2.2 Les équations approximatives

Pour un nombre de Froud F plus élevé et pour une petite valeur de l'angle d'inclinaison α , dans ce cas le changement dans $\theta(t)$ sera très petit, nous pouvons rapprocher le $\sin \theta(t)$ par $\theta(t)$ et le $\cos \theta(t)$ par 1 . Après cela , nous procédons à la chute des nombres premiers et le système d'équation prend la forme

$$q(t) \simeq 1 - \frac{1}{F^2} \eta(t), \quad t \succ 1. \quad (2.26)$$

$$\eta(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \int_t^{\infty} \frac{\theta(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta(v) \right) dv, \quad t \succ 1. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) \simeq & -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^{\infty} \frac{\eta(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right) \\ & - \frac{2\beta}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m\sqrt{t-1}}{t-1+n} \right), \quad t > 1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$x(t) \simeq x_{\infty} - \frac{1}{\pi} \int_t^{\infty} \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta(v) \right) dv, \quad t \succ 1. \quad (2.29)$$

2.3 Technique de perturbation

Développer $q(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ et $x(t)$ en termes de petits paramètres α et β ,

$$q(t) = q_0(t) + \alpha q_{\alpha,1}(t) + \alpha^2 q_{\alpha,2}(t) + \dots + \beta q_{\beta,1}(t) + \beta^2 q_{\beta,2}(t) + \dots, \quad (2.30)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \alpha \eta_{\alpha,1}(t) + \alpha^2 \eta_{\alpha,2}(t) + \dots + \beta \eta_{\beta,1}(t) + \beta^2 \eta_{\beta,2}(t) + \dots, \quad (2.31)$$

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \alpha \theta_{\alpha,1}(t) + \alpha^2 \theta_{\alpha,2}(t) + \dots + \beta \theta_{\beta,1}(t) + \beta^2 \theta_{\beta,2}(t) + \dots, \quad (2.32)$$

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_{\alpha,1}(t) + \alpha^2 x_{\alpha,2}(t) + \dots + \beta x_{\beta,1}(t) + \beta^2 x_{\beta,2}(t) + \dots \quad (2.33)$$

en employant les expansions (2.30)–(2.33) dans les équations (2.22)–(2.26) et en assimilant des termes de puissance similaire de α et β , nous obtenons le :

2.3.1 approximation de l'ordre zéro

$$q_0(t) = 1 - \frac{1}{F^2} \eta_0(t), \quad (2.34)$$

$$\eta_0(t) = -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_0(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta_0(v) \right) dv, t \succ 1, \quad (2.35)$$

$$\theta_0(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_0(v)}{(v-t)\sqrt{v-t}} dv, t \succ 1, \quad (2.36)$$

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta_0(v) \right) dv, , t \succ 1. \quad (2.37)$$

Cette approximation de l'ordre zéro correspond au cas d'écoulement sur fond plat .solution de approximation de l'ordre zéro est : les variables sans dimension $x' = \frac{x}{h_1}$, $y' = \frac{y}{h_1}$, $z' = \frac{z}{h_1}$ on a

$$q_0(t) = 1 - \frac{1}{F^2} \eta_0(t),$$

telle que

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_0(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta_0(v) \right) dv, \\ &= y' - 1, \\ &= \frac{y}{h_1} - 1. \end{aligned}$$

L'écoulement est sur fond plat, alor $y = h_1$. Donc

$$\eta_0(t) = 0; \implies q_0(t) = 1. \quad (2.38)$$

Et comme

$$\eta_0(t) = 0 \quad (2.39)$$

alors

$$\theta_0(t) = 0 \quad (2.40)$$

et

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{dv}{1-v}.$$

écrire

$$x_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv}{1-v}.$$

Par conséquent

$$x_0 = -\frac{1}{\pi} \ln(t-1). \quad (2.41)$$

2.3.2 approximation de premier ordre

$$\begin{cases} q_{1,\alpha}(t) \approx -\frac{1}{F^2} \eta_{1,\alpha}(t), \\ q_{1,\beta}(t) \approx -\frac{1}{F^2} \eta_{1,\beta}(t). \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} \eta_{1,\alpha}(t) \approx -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_{1,\alpha}(v)}{1-v} dv, \\ \eta_{1,\beta}(t) \approx -\frac{1}{\pi} \int_t^\infty \frac{\theta_{1,\beta}(v)}{1-v} dv. \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} \theta_{1,\alpha}(t) \approx -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_{1,\alpha}(v)}{(v-t)\sqrt{v-t}} dv + \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \\ \theta_{1,\beta}(t) \approx -\frac{\sqrt{t-1}}{\pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_{1,\beta}(v)}{(v-t)\sqrt{v-t}} dv - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m\sqrt{t-1}}{t-1+n} \right), \end{cases} \quad (2.44)$$

Et

$$\begin{cases} x_{1,\alpha}(t) \approx -\frac{1}{\pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_{1,\alpha}(v)}{1-v} dv \\ x_{1,\beta}(t) \approx -\frac{1}{\pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_{1,\beta}(v)}{1-v} dv \end{cases} \quad (2.45)$$

2.4 Solution du problème

Solution des approximations du premier ordre : à partir de (2.44), pour le très grand nombre de Froud F , on peut négliger le premier terme par rapport au second et on obtient

$$\begin{cases} \theta_{1,\alpha}(t) \approx \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \\ \theta_{1,\beta}(t) \approx -\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m\sqrt{t-1}}{t-1+n} \right), t \succ 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

En remplaçant en (2.43) et en accomplissant l'intergration, on trouve

$$\begin{cases} \eta_{1,\alpha}(t) \approx \frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right), \\ \eta_{1,\beta}(t) \approx -\frac{4m}{\pi^2 \sqrt{1-n}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-n}{t-1}} \right), t \succ 1. \end{cases} \quad (2.47)$$

Par conséquence, la relation (2.42) devient de la forme :

$$\begin{cases} q_{1,\alpha}(t) \approx -\frac{4r}{\pi^2 F^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right), \\ q_{1,\beta}(t) \approx \frac{4m}{\pi^2 F^2 \sqrt{1-n}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-n}{t-1}} \right), t \succ 1. \end{cases} \quad (2.48)$$

Et

$$\begin{cases} x_{1,\alpha}(t) \approx \frac{8r}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}}, \\ q_{1,\beta}(t) \approx -\frac{8m}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}}, t \succ 1. \end{cases} \quad (2.49)$$

Par conséquence, la solution de système (2.26) – (2.29) devient par :

$$q(t) \simeq 1 - \alpha \frac{4r}{\pi^2 F^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right) + \beta \frac{4m}{\pi^2 F^2 \sqrt{1-n}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-n}{t-1}} \right), \quad (2.50)$$

$$y(t) \approx 1 + \alpha \frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right) - \beta \frac{4r}{\pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-r}{t-1}} \right), \quad (2.51)$$

$$\theta(t) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right) - \frac{2\beta}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{m\sqrt{t-1}}{t-n} \right) \quad (2.52)$$

$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \ln(t-1) + \alpha \frac{8r}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}} + -\frac{1}{\pi} \ln(t-1) + \beta \frac{8m}{\pi^3 F^2 \sqrt{t-1}}. \quad (2.53)$$

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous donnons les résultats en courbes montrant l'effet de l'angle α , de la hauteur ε .

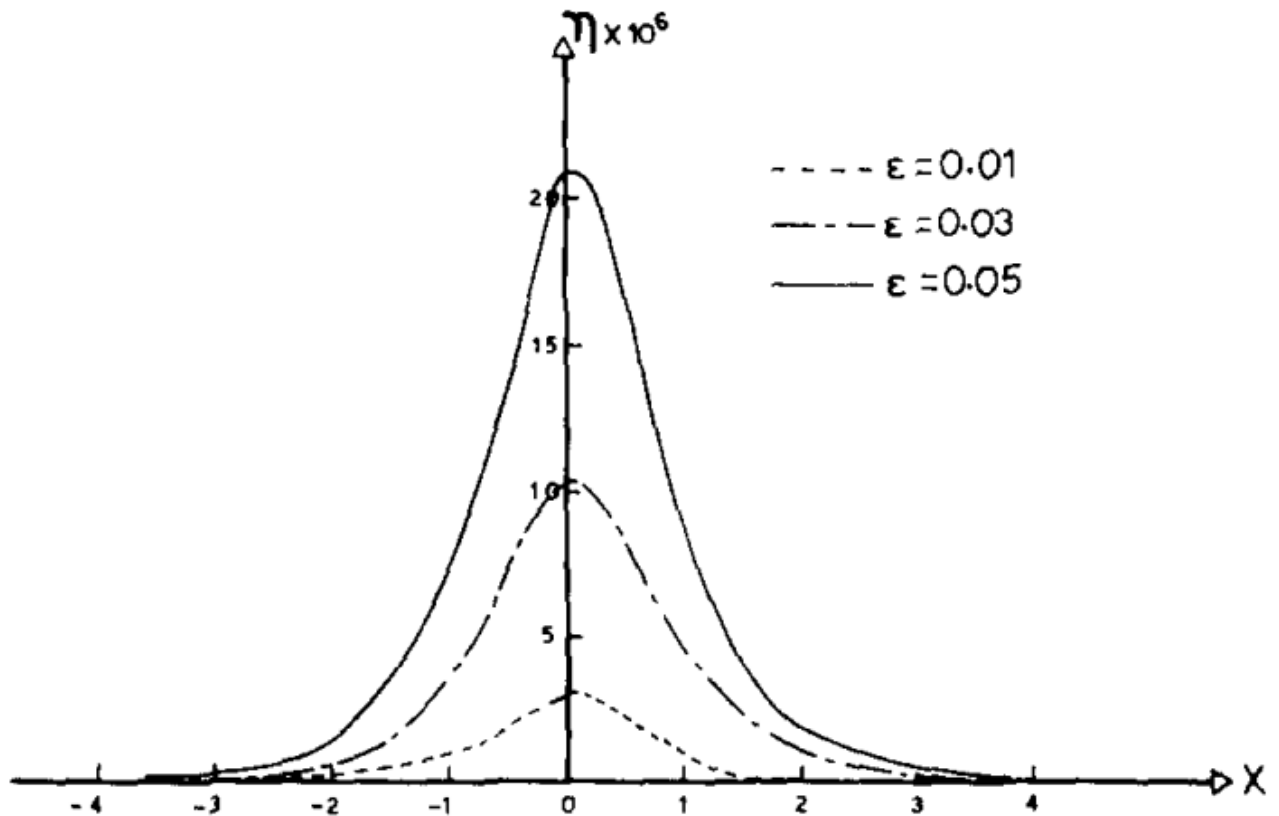


FIGURE 3.1 – Effet de la hauteur de bosse triangulaire E sur le profil de surface libre pour $\alpha = \beta, \delta = 0, 1187, F^2 = 10, 0$

Les solutions approchées pour des écoulements à un grand nombre de Froude se trouvent sur une large gamme de hauteur de bosse de triangulaires. Résultats montrant l'élévation de la surface libre sur une plage de bosses triangulaires dimensionnées hauteurs $\epsilon : 0, 01 - 0, 05$, pour $(\alpha = \beta, \delta = 0, 1187, F^2 = 10, 0$ et sur une plage d'angle d'inclinaison $\beta, 0, 1027$ rad à $0, 3$ rad, pour $\alpha = 0, 3, F^2 = 10$ et ϵ va de $0, 010, 02$ sont donnés dans les figures 3.1 et 3.2. Il est clair que pour $(\alpha = \beta$, le profil de surface libre est presque symétrique par rapport au point C , comme on s'y attendait. L'effet de la forme du fond sur la surface libre l'élévation pour $\epsilon = 0, 005$ et $F^2 = 10$ fixes est donnée dans Figure 3.3. Ces résultats démontrent la montée monotone en élévation de surface libre avec des augmentations de ϵ et β .

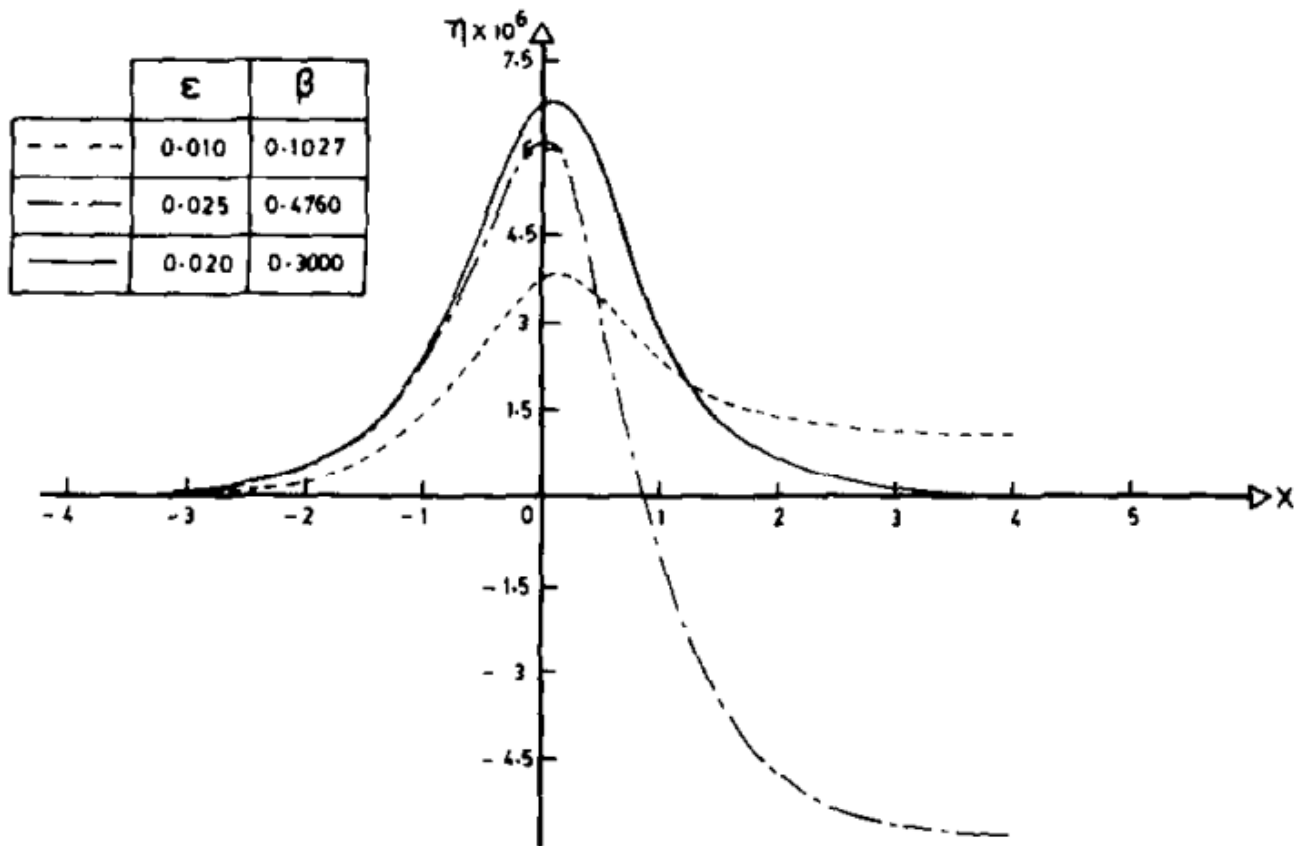


FIGURE 3.2 – Effet de la forme du fond sur le profil de surface libre pour $\alpha = 0,3\text{rad}$, $F^2 = 10$ et ϵ

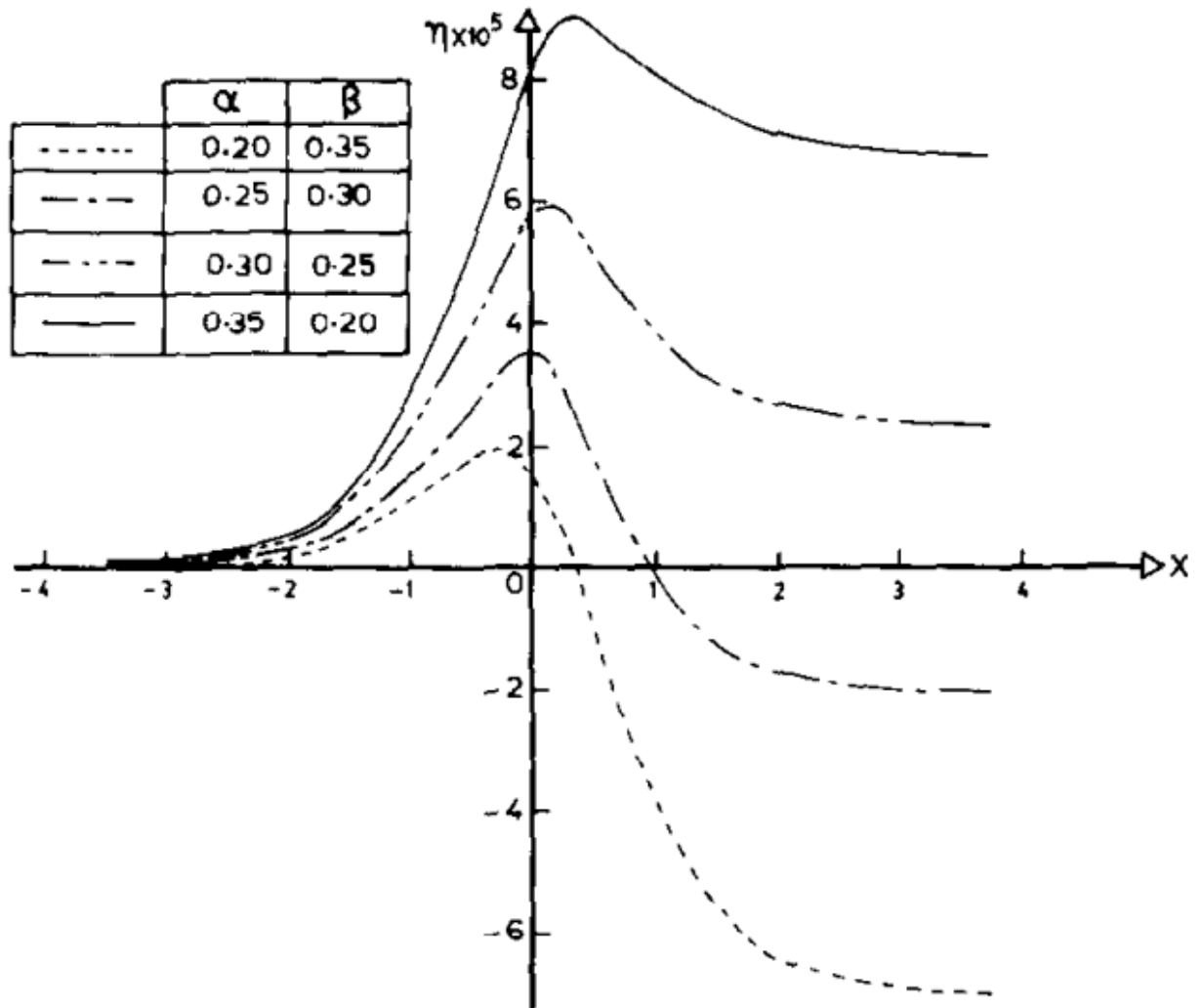


FIGURE 3.3 – Effet de la forme du fond sur le profil de surface libre pour $\epsilon = 0,005$ et $F^2 = 10$

Conclusion

Les problèmes des écoulements à surface libre sont très difficiles et même impossible à résoudre explicitement, surtout si on inclut les effets de la force de gravité, cela est due a la non linéarité de la condition au bord de l'équation de Bernoulli, sur une surface qui est de forme inconnue. Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'écoulement bidimensionnel fluide incompressible et non visqueux, au-dessus du seuil triangulaire par la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation .

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Fausto Saleri et Paola Gervasio, Calcul Scientifique Cours, exercices corrigées et illustrations en MATLAB et Octave, Deuxième édition , Springer.
- [2] H.Serguine, Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite plate.,Thesis of Magister University of M'sila,(2004).
- [3] Laiadi abdelkader, effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles ,thèse magistère de universite de ouargla(2012).
- [4] Riadh , Ben Hamoduda Notions de Mécanique des fluides, cours et exercices corrigés.
- [5] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, Mécanique des fluides, Dunod,Paris,2011 ISBN 978-2-10-056922-9.
- [6] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method, Univesity of Nova Scotia Halifax, Canada.
- [7] Abd-el-Malek, Mina B and Hanna, Sarwat N. Approximate solution of a flow over a ramp for large Froude number. J. Comput.Appl.Math.28(1989) : 105117.
- [8] M.B.Abd-el-Malel,Boudray integral methods and free surface problems,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario,canada,1981.
- [9]K.M.Agrawal,Non-linear theories in two-dimensional fully and partially cavitatong flow,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario,canada,1969.
- [10]B.E.Larock and R.L.Street ,A Rieman -Hilbert problem for non-linear fully cavitating flow,J.Ship Research 9 (3) (1965) 170-178.
- [11]T.H.Lim,Integral equation methodes for the numerical solution of free surface problems in inviscid flow ,ph.D.dissertation,University of Windsor ,Windsor ,Ontario, canada ,1978.
- [12]N.I.Muskhelishvili,Singular Integral Equations(Noordhoff,Gronigen,The Netherlands ,1953).
- [13]A.C.Smith and M.B.Abd-el-Malk,Hilbert's methods for numerical solution of flow from a uniform channel over a shelf ,j.Engrg .Math.17(1983) 27-39.
- [14]A.C.Smith and T.H.Lim,The steady water wave :A numerical solution using the Riamann-Hilbert methods,Internat.J.Engrg.sci.18 (1980) 139-152.

-
- [15] S.C. Song, A quasi-linear and linear for non-separated and separated two-dimensional flow about lifting bodies, Univ. Minnesota, Min. SAF Lab. Tech. paper, B-43, 1963.
- [16] L.K. Forbes, I.W. Schwartz, Free-surface flow over a semicircular obstruction, *J. Fluid Mech*, **114**(1982), 299–314.
- [17] A. Gasmi, H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, *J. Phys. A : Math. Gen*, **36**(2003), 851–862.
- [18] A. Gasmi, H. Mekias, jet from container and flow past a vertical flat plate in a channel with the surface tension effects, *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, **53(56)**(2007), 2687–2698.
- [19] A. Gasmi, A. Amara, Free-surface profile of a jet flow in U-shaped channel without gravity effects, *ASCM (Kyungshang)*, **28(3)**(2018), 393–400.
- [20] A. Laiadi, A. Merzougui, Free surface flows over a successive obstacles with surface tension and gravity effects, *AIMS Mathematics*, **4(2)**(2019), 316–326.
- [21] A. Laiadi, A. Merzougui, Numerical solution for a free surface flow over multiple obstacles. *Electron. J. Math. Anal. Appl*, **6(1)**(2018), 266–275.
- [22] A. Mina B, S.N. Hanna, Approximate solution of a flow over a ramp for large Froude number, *J. Comput. Appl. Math*, **28**(1989), 105–117.
- [23] A. Mina B, S.N. Hanna and M.K. Kamel, Approximate solution of gravity flow from a uniform channel over triangular bottom for large Froude number, *Appl. Math. Model*, **15(1)**(1991), 25–32.
- [24] A. Mina B, S.Z. Masoud, Linearized solution of a flow over a ramp, *Appl. Math. Model*, **124**(1988), 406–410.
- [25] A. Merzougui, A. Laiadi, Free surface flow over a triangular depression, *TWMS J. Appl. Eng. Math*, **4(1)**(2014), 67–73.
- [26] H. Sekhri, F. Guechi and H. Mekias, A waveless free surface flow past a submerged triangular obstacle in presence of surface tension, *Electron. J. Differential Equations*, **190**(2016), 1–8.
- [28] J-M. Vanden-Broeck, J. Marc, Free-surface flow over an obstruction in a channel, *The Physics of fluids*, **30(8)**(1987), 2315–2317.