UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equation Aux Dérivées Partielles

Par

FAID Nor El Houda

Sujet

Problème de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire

Devant le jury :

- N. Benhamidouche	Pr.	Univ de M'sila	Président
- Y. Arioua	MC.	Univ de M'sila	Rapporteur
- F. Mihoubi	MA.	Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2015 / 2016

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- A mes parents qui n’ont jamais cessé de me soutenir et encourager en mes études.
- Et tous les membranes de ma famille mes sœurs, mon frère pour leurs encouragements

  et pour leurs soutient moral tout au long de mes études.
- A toute mes amies, et surtout Asma Moussai qui n’a cessé de m’a patronner.
- Je tiens à remercier l’ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

  A tous les professeures qui m’a donne leurs confiances.

  En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Tout d’abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d’accomplir ce travail modeste.

Je tient tout à témoigner ma vive reconnaissance au Professeur Yacine ARIOUA qui a guidé avec beaucoup d’attention, de gentillesse et de patience mes premiers pas en recherche en tant que directeur de mémoire de licence et de mémoire de master.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs Nourdine BENHAMIDOUCHE, Farid MIHOUBI ,d’avoir accepter et consacrer une partie de leur temps à la rédaction de rapports et à la participation au jury.

Un grand merci à tous mes collègues d'EDP, et à tous ceux qui m’ont aidé un jour.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à L'Hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre 1/2. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} x^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev ([10], 1993), celui de Rubin ([9], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([5], 2006).

Les dérivées fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique.

Le sujet de cette mémoire est l'étude mathématique des modèles d'équations aux dérivées partielles fractionnaires, dits "Equations de diffusions fractionnaires" s'écrit sous trois forme :

$$(D^{\alpha}_{0^+,t}u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t), \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0; 0 < \alpha < 2; \lambda > 0),$$

où $(D^{\alpha}_{0^+,t}u)(x,t)$ la dérivée partial fractionnaire de Riemann-Liouville d'order $\alpha > 0$.

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t) = \lambda^2\left(\triangle_x\, u\right)(x,t)\,, \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0; 0 < \alpha < 2; \lambda > 0)\,,$$

où $\left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t)$ la dérivée fractionnaire partielle de Caputo d'order $\alpha > 0$. par rapport à $t > 0$,et le Laplacien $\left(\triangle_x\, u\right)(x,t)$ par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\left({}^{C}D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\lambda\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t)\,,\quad\left(x\in\mathbb{R},t>0,\alpha>0,\beta>0,\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\right).$$

Le mémoire se compose de cinq chapitres qui s'articulent de la façon suivante :

Le premier chapitre sera consacré aux élément de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la transformée de Fourier la fonction gamma, la fonction Beta, la fonction Bessel, la fonction hypergéométrique de Gausse, la fonction de Mittag-Leffler, La fonction Wright, et la fonction $H_{p,q}^{m,n}$ qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérés.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, et Caputo, qui sont les plus utilisées.

Dans le troisième chapitre de notre travail, nous présentons la solution de problème de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans le cas de deux et n dimensions.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de problème de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Caputo

Dans le dernier chapitre de notre travail, nous généralisons les résultats des chapitres trois et quatre pour l'équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville par rapport à le premier variable et la dérivée fractionnaire de Caputo par rapport à le deuxième variable.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la transformée de Laplace, la transformée de Fourier la fonction gamma, la fonction Beta, la fonction Bessel, la fonction hypergéométrique de Gausse, la fonction de Mittag-Leffler, La fonction Wright, et la la fonction $H_{p,q}^{m,n}$, qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires, lemmes et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres suivants.

1.1 Transformation de Laplace

La transformé de Laplace intervient dans la résolution des équations et des systèmes différentiels.

Définition 1.1.1 *([14])La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est défnie par :*

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \ s \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.la transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.1.1) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre expontiel a, c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que :

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \textit{pour } t > T$$

Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $Re(s) > a$.l'originale $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\mathcal{L}f(s)ds, \quad c > a \tag{1.1.2}$$

1. $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.

2. $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$, (pour la démonstration, on applique l'intégration par partie)

3. $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$, (on applique intégration par partie :

$$\int_0^{\infty} te^{-st}dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

Proposition 1.1.1 *La transformée de Laplace est linéaire i.e.*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i f_i(t)\right)(s) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathcal{L}f_i(s) \tag{1.1.3}$$

Définition 1.1.2 *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur tout intérvalle $[0; x]$de $\mathbb{R}_+$, le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \tag{1.1.4}$$

est commontative

$$f * g = g * f$$

Proposition 1.1.2 *([5])Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) \tag{1.1.5}$$

Proposition 1.1.3 *([5])La transformée de laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1}f^{(k)}(0^+) \qquad (1.1.6) \\ &= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+) \end{aligned}$$

1.2 Transformation de Fourier

la transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série des fonctions périodiques de Fourier. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes.

– **Cas de un dimention ($x \in \mathbb{R}$)**

Définition 1.2.1 *La transformation de Fourier pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est donné par :*

$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \tag{1.2.1}$$

La transformation inverse de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$est définie par la formule :

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{1.2.2}$$

On a

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$$

– **Propriétés de la transformation de Fourier :**

1. **Linéarité :**

$$\mathcal{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)](\xi) = \lambda \mathcal{F}(f)(\xi) + \mu \mathcal{F}(g)(\xi), \xi \in \mathbb{R} \tag{1.2.3}$$

2. **Translation :**

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-i\xi a} \mathcal{F}(f)(\xi), \ \xi \in \mathbb{R} \tag{1.2.4}$$

3. **Changement d'échelle :**

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(\frac{\xi}{a}) \quad a \text{ constant réelle non nul et } \xi \in \mathbb{R} \tag{1.2.5}$$

4. **Transformé de fourier de la fonction dérivée :**

$$\mathcal{F}[D^k f(x)] = (-i\xi)^k (\mathcal{F}f)(\xi) \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.2.6}$$

et pour la dérivvation par rapport à la variable ξ :

$$D^k(\mathcal{F}f)(\xi) = (ix)^k \mathcal{F}[f(x)](\xi) \tag{1.2.7}$$

Si f et g deux fonction intégrable on définit le produit de convolution par la forme suivant :

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.2.8}$$

et (1.1.5) reste vraie pour le transformée de Fourier :

$$(\mathcal{F}(f * g))(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi) \tag{1.2.9}$$

Proposition 1.2.1

$$\mathcal{F}\left(e^{-c|x|}\right)(\xi) = \frac{2c}{c^2 + |\xi|^2}, \; c > 0 \tag{1.2.10}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-c|x|}\right)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(c-i\xi)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(c+i\xi)} \\
&= \frac{1}{(c-i\xi)}e^{x(c-i\xi)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{(c+i\xi)}e^{-x(c+i\xi)}\Big|_{0}^{\infty} \\
\mathcal{F}\left(e^{-c|x|}\right)(\xi) &= \frac{2c}{c^2+|\xi|^2}, \quad c > 0.
\end{aligned}$$

■

– **Cas de multi-dimention** $(x \in \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi \cdot x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.2.11}$$

La transformé inverse de fourier dans $\mathbb{R}^n$est donné par :

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](\xi) &= e^{-i\xi a}(\mathcal{F}f)(\xi), \quad (\xi, a \in \mathbb{R}^n), \\
\mathcal{F}\left[f(\lambda x)\right](\xi) &= \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{F}f(\frac{\xi}{\lambda}), \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \; \lambda > 0)
\end{aligned}$$

La transformation de Fourier pour la fonction dérivée est donné comme la relation(1.2.6) :

$$\mathcal{F}[D^k f(x)] = (-i\xi)^k (\mathcal{F}f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n; k \in \mathbb{N}^n \tag{1.2.13}$$

et

$$D^k (\mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}\left[(ix)^k f(x)\right](\xi), \quad (\xi \in \mathbb{R}^n; k \in \mathbb{N}^n) \tag{1.2.14}$$

Si $\triangle$ est l'opérateur de Laplace pour n-dimension

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{1.2.15}$$

alors on a :

$$\mathcal{F}\left[\triangle f(x)\right](\xi) = -\left|\xi\right|^2 (\mathcal{F}f)(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.2.16}$$

la produit de convolution définie par:

$$g * f = f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

et la relation (1.2.9) reste vraie pour multi-dimension.

1.3 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

1.3.1 La fonction Gamma:

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x)$.

1. **La fonction Γ comme fonction de variable réelle**

   Pour $t \in [0, +\infty[$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{1.3.1}$$

Théorème 1.3.1 *La fonction Γ est définie et de classe c^∞ sur $]0, +\infty[$ ses dérivées successives sont données par la formule :*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1} dt. \tag{1.3.2}$$

De plus, la fonction Γ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.3.3}$$

et à l'égalité $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.1

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2!,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(3/2) = 1/2\sqrt{\pi}.$$

2. **La fonction Γ comme fonction de variable complexe**

Proposition 1.3.1 *L'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.3.4}$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(z) \succ 0$.
Pour $\mathrm{Re}(z) \succ 0$ *et tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{z-1} dt. \tag{1.3.5}$$

et

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.3.6}$$

1.3.2 La fonction Bêta

Définition 1.3.1 *La fonction **Bêta** est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes x et y par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,\ \mathrm{Re}(x) > 0,\ \mathrm{Re}(y) > 0 \tag{1.3.7}$$

Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \forall x,y : \mathrm{Re}(x) > 0,\ \mathrm{Re}(y) \tag{1.3.8}$$

Remarque 1.3.1 *La fonction Bêta est symétrique.*

1.3.3 Fonction de Bessel

La fonction de Bessel de premiére espèce est définie par :

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \tag{1.3.9}$$

telle que $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ et $\nu \in \mathbb{C}$.

Dans le cas particulier,quand $\nu = \frac{-1}{2}$ et $\nu = \frac{1}{2}$, on a:

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos(z), \text{ et } J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin(z).$$

D'autre façon on a la fonction de Bessel de deuxième espèce ou bien fonction de Newmann $Y_\nu(z)$,est définie à partir la fonction de Bessel de premier espèce par :

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} \left[\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right], \quad (\nu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}). \tag{1.3.10}$$

La fonction de Bessel modifiée est définie par :

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad (z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]). \tag{1.3.11}$$

La fonction de Bessel modifié de troisième espèce (fonction de Macdonald) $K_\nu(z)$,est définie à partir d'une fonction de Bessel modifié par :

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)} \left[\cos(\nu\pi) I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right], \quad (\nu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}). \tag{1.3.12}$$

Lemme 1.3.1 *Pour $z \in \mathbb{C}\,(|\arg(z)| < \pi)$ la relation suivante :*

$$K_\nu(z) = \frac{2^{-2-\nu}}{i\sqrt{\pi}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)\,\Gamma([s-\nu]/2)}{\Gamma([\nu+1+s]/2)} z^{-s} ds, \tag{1.3.13}$$

où le chemin de l'intégration sépare tous les pôles $s = -v - n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ et $s = v - 2m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ à gauche.

1.3.4 La fonction hypergeométrique de Gauss

On définit la fonction hypergeomètrique sous la forme suivant :

$${}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \; |z| < 1; \; a,b \in \mathbb{C}; \; c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-, \tag{1.3.14}$$

telle que $(a)_k$ est le symbole de pochhammer

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}; \; (k \in \mathbb{N}; \; \Re(a) > -k; \; a \notin \mathbb{Z}^-)$$

Quelques proprietés simple pour la fonction hypergéomitrique :

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b,c;z) &= {}_2F_1(b,a,c;z),\\
{}_2F_1(a,b,c;0) &= {}_2F_1(0,b,c;z) = 1,\\
{}_2F_1(a,b,b;z) &= (1-z)^{-a},\\
{}_2F_1(a,b,c;1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (\Re(c-a-b)>0),\\
{}_2F_1(a,b,c;z) &= (1-z)^{c-a-b} \times_2 F_1(c-a,c-b,c;z)
\end{aligned}$$

La formule de différentiation est donnée par :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n {}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}{}_2F_1(a+n,b+n,c+n;z), \quad (n\in\mathbb{N}),$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{a+n-1}{}_2F_1(a,b,c;z)\right] = (a)_n z^{a-1}{}_2F_1(a+n,b,c;z) \qquad (n\in\mathbb{N})$$

1.3.5 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.3.2 *Pour $z\in\mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffter $E_\alpha(z)$ (notée par M-L)est définie comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad (\alpha>0) \tag{1.3.15}$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad (\alpha>0,\ \beta>0) \tag{1.3.16}$$

Exemple 1.3.2 *Pour des valeurs spéciales de α et β on a :*

1. $E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$

2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$ (on obtient, $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z-1)$

3. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z-z-1}{z}$(on obtient, $E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+1)!} = \frac{1}{z^2}(e^z-z-1)$

Théorème 1.3.2 *La fonction de Mittag-Leffter possède les proprietés suivantes :*

– Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffter généralisée satisfait :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) dt = \frac{1}{z-1} \tag{1.3.17}$$

– La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[z^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(+az^\alpha)\right](s) = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.3.18}$$

où $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y)$.

– Intégration de la fonction de M-L:

$$\int_0^\infty E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha) \tag{1.3.19}$$

– La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de M-L est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n} = \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)\right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^\alpha) \tag{1.3.20}$$

Preuve. voir [5] ■

Proposition 1.3.2

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \quad \left(\operatorname{Re}(s) > 0;\ \lambda \in \mathbb{C};\ \left|\lambda s^{-\alpha}\right| < 1\right) \tag{1.3.21}$$

Preuve. d'aprés la définition 1.3.2 et 1.1.1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta+\alpha k-1} e^{-st} dt \end{aligned}$$

on pose le changement de variable suivant :

$$st = T \Rightarrow dt = \frac{1}{s} dT \tag{1.3.22}$$

donc on a

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} s^{-\alpha k-\beta} \int_0^{+\infty} T^{\beta+\alpha k-1} e^{-T} dT$$

et avec la formule de la fonction Gamma (1.3.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda)^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}s^{-\alpha k-\beta}\times\Gamma\left(\alpha k+\beta\right) \\ &= s^{-\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k\end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^{-\alpha}|<1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s) &= s^{-\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k=\lim_{k\to+\infty}s^{-\beta}\frac{\left(1-\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^{k+1}\right)}{1-\lambda s^{-\alpha}} \\ &= \frac{s^{-\beta}}{1-\lambda s^{-\alpha}}\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s)=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}$$

■

1.3.6 La fonction Wright

On définie la fonction entiére (de z) :

$$\phi(\alpha,\beta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha>-1,\ \beta\in\mathbb{C} \tag{1.3.23}$$

nommé d'après le mathématicien britannique E.M. Wright, est apparu pour la première fois dans le cas $\alpha>0$ dans le cadre de ses recherches sur la théorie asymptotique des partitions. Plus tard, il a trouvé des nombreuses autres applications, tout d'abord, dans le Mikusinski opérationnel le calcul et dans la théorie des transformations intégrales de type Hankel. Récemment cette fonction est apparue dans les documents relatifs à des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire .

si $\rho=1$ et $\beta=\nu+1$,la fonction $\phi(1,\nu+1;\frac{\pm z^2}{4})$ est exprimée en termes de fonctions de Bessel $J_\nu(z)$ et $I_\nu(z)$ donné par(1.3.9) et(1.3.11) comme suit :

$$\phi\left(1,\nu+1;\frac{-z^2}{4}\right)=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z),\phi\left(1,\nu+1;\frac{z^2}{4}\right)=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}I_\nu(z). \tag{1.3.24}$$

La formule de différentiation suivante pour $\phi(\alpha,\beta;z)$ est :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \phi(\alpha,\beta;z)=\phi(\alpha,\alpha+n\beta;z),\quad (n\in\mathbb{N})\,. \tag{1.3.25}$$

La transformation de Laplace (1.1.1) pour (1.3.23) est exprimée en termes de la fonction de Mittag-Leffler

$$\mathcal{L}\left[\phi(\rho,\beta;z)\right](s)=\frac{1}{s}E_{\rho,\beta}\left(\frac{1}{s}\right),\quad (\rho>-1;\ \beta\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s)>0)$$

En particulier

$$\phi\left(-\frac{1}{2},-n;z\right)=\frac{(-1)^{n+1}z}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\times_1 F_1(\frac{3}{2}+n;\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}),\quad n=0,1,\cdots, \tag{1.3.26}$$

$$\phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-n;z\right)=\frac{(-1)^{n}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\times_1 F_1(\frac{1}{2}+n;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}),\quad n=0,1,\cdots, \tag{1.3.27}$$

Si $n=0$ on a

$$\phi\left(-\frac{1}{2},0;z\right)=-\frac{z}{2\sqrt{\pi}}e^{-z^2/4}, \tag{1.3.28}$$

$$\phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};z\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2/4}. \tag{1.3.29}$$

Proposition 1.3.3

$$\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{\frac{-\alpha}{2}}\right)\right](s)=s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Preuve. à partir de (1.1.1) et (1.3.23) on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{\frac{-\alpha}{2}}\right)\right](s) &= \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-|x|/\lambda t^{\frac{-\alpha}{2}}\right)^k}{k!\Gamma(\frac{-\alpha}{2}k+\frac{\alpha}{2}-k+1)}e^{-st}dt,\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|x|/\lambda)^k}{k!\Gamma(\frac{-\alpha}{2}k+\frac{\alpha}{2}-k+1)}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-k-k\frac{\alpha}{2}}e^{-st}dt,\end{aligned}$$

on fait la changement de variable (1.3.22).

Ainsi, l'expression devient comme suite :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{\frac{-\alpha}{2}}\right)\right](s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-|x|/\lambda\right)^k}{k!\Gamma(\frac{-\alpha}{2}k+\frac{\alpha}{2}-k+1)}s^{k+k\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}-1}\\
&\quad\times\int_0^{\infty}T^{\left(\frac{\alpha}{2}-k-k\frac{\alpha}{2}+1)\right)-1}e^{-T}dT\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-|x|/\lambda\right)^k}{k!\Gamma(\frac{-\alpha}{2}k+\frac{\alpha}{2}-k+1)}s^{k+k\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}-1}\\
&\quad\times\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-k-k\frac{\alpha}{2}+1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-|x|/\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}\right)^k}{k!}s^{k-\frac{\alpha}{2}-1}=s^{k-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}},\\
\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{\frac{-\alpha}{2}}\right)\right](s) &= s^{k-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}.
\end{aligned}
$$

■

1.3.7 La fonction-H

Pour les nombres entiers $m,n,p,$ et q telle que $0\leq m\leq q$ et $0\leq n\leq p$ et pour $a_I,b_j\in\mathbb{C}$,et $\alpha_I,\beta_j\in\mathbb{R}_+\,(I=1,...,p;j=1,...,q)$, la fonction $H_{p,q}^{m,n}(z)$ est définie par :

$$
H_{p,q}^{m,n}(z)=H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_I,\alpha_I)_{1,p}\\ \left(b_j,\beta_j\right)_{1,q}\end{array}\right.\right]
$$

$$
=H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_1,\alpha_1),\cdots,(a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1),\cdots,\left(b_q,\beta_q\right)\end{array}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}}h_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds \tag{1.3.30}
$$

avec

$$
h_{p,q}^{m,n}(s)=\frac{\Pi_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+\beta_js\right)\Pi_{l=1}^{n}\Gamma\left(1-\alpha_l-\alpha_ls\right)}{\Pi_{l=n+1}^{r}\Gamma\left(\alpha_l+\alpha_ls\right)\Pi_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-\beta_js\right)}. \tag{1.3.31}
$$

où $\mathcal{L}$ est possède les formes suivantes:

1. $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{-\infty}$ est une boucle gauche située dans une bande horizontale commence au point $-\infty+i\varphi_1$ et se terminant au point $-\infty+i\varphi_2$ avec $-\infty<\varphi_1<\varphi_2<\infty$;

2. $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{+\infty}$est une boucle gauche située dans une bande horizontale commence au point $+\infty+i\varphi_1$ et se terminant au point $+\infty+i\varphi_2$ avec $-\infty<\varphi_1<\varphi_2<\infty$;

3. $\mathcal{L} = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ est un contour à partir du point $\gamma - i\infty$ et se terminant au point $\gamma + i\infty$.

Les propriétés de la fonction-H (1.3.30) dépendent des nombres $\triangle, \delta$,and μ,voir [5] pour le plus détail sur l'ensemble $\mathcal{L}$ voir [6],[11]

Proposition 1.3.4 *le résultat suivant :*

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{array}{c} (a_p, \alpha_p) \\ \left(b_q, \beta_q\right) \end{array} \right.\right] = kH_{p,q}^{m,n}\left[z^k \left| \begin{array}{c} (a_p, \alpha_p) \\ \left(b_q, \beta_q\right) \end{array} \right.\right], \tag{1.3.32}$$

où $k > 0$.

Proposition 1.3.5 *On a la formule suivant :*

$$z^\sigma H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{array}{c} (a_p, \alpha_p) \\ \left(b_q, \beta_q\right) \end{array} \right.\right] = H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{array}{c} (a_p + \sigma\alpha_p, \alpha_p) \\ \left(b_q + \sigma\beta_q, \beta_q\right) \end{array} \right.\right], \tag{1.3.33}$$

où $\sigma \in \mathbb{C}$

La plupart des fonctions peuvent être exprimées dans termes de la fonction-H.la fonctions hypergéométriques de Gauss et Kummer sont représentés par:

$${}_2F_1\left(a, b, c; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} H_{2,2}^{1,2}\left[-z \left| \begin{array}{c} \left(1-a, 1\right), \left(1-b, 1\right) \\ \left(0, 1\right), \left(1-c, 1\right) \end{array} \right.\right] \tag{1.3.34}$$

la fonction de Bessel du premier espèce, la fonction de Bessel modifiée, et la fonction Macdonald donné par:

$$J_\nu\left(z\right) = 2^{-\nu}\sqrt{\pi} H_{1,2}^{1,0}\left[z \left| \begin{array}{c} \left(\left[1+\nu\right]/2, 1/2\right) \\ \left(\nu, 1\right), \left(-\nu/2, 1/2\right) \end{array} \right.\right], \tag{1.3.35}$$

$$Y_\nu\left(z\right) = \sqrt{\pi} H_{2,3}^{1,1}\left[z \left| \begin{array}{c} (1-\nu/2, 1/2), (\left[1+\nu\right]/2, 1/2) \\ \left(\nu, 1\right), \left(-\nu/2, 1/2\right), \left((1-\nu)/2, 1/2\right) \end{array} \right.\right] \tag{1.3.36}$$

et

$$K_\nu\left(z\right) = 2^{-\nu-1}\sqrt{\pi} H_{1,2}^{2,0}\left[z \left| \begin{array}{c} \left(\left[1+\nu\right]/2, 1/2\right) \\ \left(\nu, 1\right), \left(-\nu/2, 1/2\right) \end{array} \right.\right] \tag{1.3.37}$$

pour plus détail voir [4]

Chapitre 2

Eléments de Calcul Fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sense Riemann-Liouville, et Caputo, qui sont les plus utilisées.

2.1 Intégrales fractionnaires

Nous allons proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann Liouville (RL).

Définition 2.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L) d'ordre α d'une fonction f est définie par:*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \ x > a \tag{2.1.1}$$

et

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \ x < b. \tag{2.1.2}$$

Pour $\alpha = 0$, on a :

$$I_{a+}^{0} = I \text{ (l'opérateur identité)}$$

et pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, I_a^{α} coincide avec l'intégrale répétée $n-$fois de la forme :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_n - 1} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(1-n)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

On a aussi l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville sur le demi-axe $\mathbb{R}^+$

$$I_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x > 0 \tag{2.1.3}$$

et

$$I_{-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x > 0 \tag{2.1.4}$$

Exemple 2.1.1 *Soit $f(x) = (x-a)^c$ avec $c > -1$,alors*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c}$$

En effet

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt,$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta on obtient:

$$t - a = s(x-a), \ 0 \leq s \leq 1 \tag{2.1.5}$$

$$dt = (x-a)ds$$

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-a-s(x-a)]^{\alpha-1} s^c (x-a)^{c+1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^c ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1) \\
I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c}
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}, c = 1$ et $a = 0$ donc $f(x) = x$ on aura

$$I_{0+}^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

Théorème 2.1.1 *([14]) Si $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$, alors $I_a^{\alpha} f(x)$ existe pour tout $x \in [a,b]$ et on a :*

$$I_a^{\alpha} f \in L^1[a,b] \tag{2.1.6}$$

Preuve. Soit $f \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{pour } \ 0 \leq u \leq b-a \\ 0 & \text{pour } \ u \in \mathbb{R}\backslash(0, b-a] \end{cases}$$

et

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} f(u) & 0 \leq u \leq b \\ 0 & u \in \mathbb{R}\backslash(0, b] \end{cases}.$$

Par constraction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in \{1, 2\}$, on a : $I_a^\alpha f \in L^1[a,b]$ ■

Théorème 2.1.2 *([5],[14]) Soit $\alpha, \beta > 0$,pour toute fonction $f \in L^1[a,b]$, on a :*

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x) \tag{2.1.7}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$, et $f \in C[a,b]$,alors (2.1.7) est vraie pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)d\tau dt$$

D'aprés le théorème (2.1.1) les intégrales existent et par le théorème de Fubini on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau$$

En utilisant le changement de variable(2.1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1} d\tau = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$.

Si $f \in C[a;b]$, alors $I_a^\alpha f(x) \in C[a;b]$, et par suite $I_a^\alpha I_a^\beta f \in C[a;b]$, et aussi : $I_a^{\alpha+\beta} f \in C[a;b]$

■

Lemme 2.1.1 *([5]) Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1(0,b)$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$\mathcal{L}(I_{0+}^{\alpha} f)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{L}f(s) \tag{2.1.8}$$

Preuve. On peut écrire $I_a^{\alpha} f$ comme une convolution de deux fonctions $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)$$

Alors

$$\mathcal{L}\left[I_{0+}^{\alpha} f\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s)\cdot\mathcal{L}f(s)$$

comme

$$\mathcal{L}\left[x^{\alpha-1}\right](s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

d'où le résultat. ■

2.2 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Caputo qui sont les plus utilisées.

2.2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt, \ x > a, \ si\ \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad si \quad \alpha = n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

En particulier ,

1) Pour $\alpha = 0$, on a :

$$D_{\alpha}^0 f(x) = DI_a^1 f(x) = If(x) = f(x) \tag{2.2.2}$$

Exemple 2.2.1 *Soit* $f(x) = (x-a)^c$ *avec* $c > -1$, *et* $\alpha \geq 0$ *tel que* $n-1 \leq \alpha \leq n$, *d'aprés (2.1.5) on a*

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^c dt, \; x > a \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{n-\alpha-1} s^c (x-a)^{c+1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^c ds (x-a)^{n-\alpha+c} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \beta(c+1, n-\alpha)(x-a)^{n-\alpha+c} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(c+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-c)} \\
D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-c)}.
\end{aligned}$$

– Pour le cas $(\alpha - c) \in \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, \quad (\alpha - c) \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{2.2.3}$$

– Par ailleurs si $(\alpha - c) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-c)} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha+1)} (n-\alpha+c) D^{n-1} (x-a)^{n-(\alpha-c)-1} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{(n-\alpha+c)\Gamma(c+n-\alpha)} (n-\alpha+c) D^{n-1} (x-a)^{n-(\alpha-c)-1} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha)} D^{n-1} (x-a)^{n-(\alpha-c)-1} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha-1+1)} (n-(\alpha-c)-1) D^{n-2} (x-a)^{n-(\alpha-c)-2} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha-1)} D^{n-2} (x-a)^{n-(\alpha-c)-2} \\
&= \cdots = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+2)} (-(\alpha-c)+1)(x-a)^{-(\alpha-c)} \\
D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-c)} = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} (x-a)^{(c-\alpha)}
\end{aligned}$$

On prend $\alpha = \frac{1}{2}$, $c = 0$, $a = 0$ et $f(x) = 1$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} D_0^{\alpha}(1) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)}(x-a)^{(c-\alpha)} \\ D_0^{\frac{1}{2}}(1) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \end{aligned}$$

et pour $\alpha = \frac{1}{2}, c = 1, a = 0$ et $f(x) = x$, alors on obtient:

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-0.5+1)}(x)^{(1-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}(x)^{(\frac{1}{2})} \\ D_0^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{\pi})}\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 *([5],[14]) Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x), \ m > \alpha \tag{2.2.4}$$

Preuve. Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^n f(x) \end{aligned}$$

car $D^{m-n} I_a^{m-n} = I$. ■

Théorème 2.2.1 *([14]) Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors : $D_a^{\alpha}(c_1 f + c_2 g)$ exixte,et on a :*

$$D_a^{\alpha}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^{\alpha} f(x) + c_2 D_a^{\alpha} g(x) \tag{2.2.5}$$

Remarque 2.2.1 *([12]) Supposons que $f \in C(0,1) \cap L(0,1)$, tel que $D^{\alpha} f \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors :*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k t^{\alpha-k}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\alpha] + 1 \tag{2.2.6}$$

Lemme 2.2.1 *([14]) Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a;b]$, alors l'égalité :*

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x), \tag{2.2.7}$$

est vraie pour presque tout $x \in [a;b]$

Preuve. En utilisant la définition (2.2.1) on a :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^n f(x) = f(x)$$

■

Théorème 2.2.2 *([14]) Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta \leq m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ alors :*

(1)- Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$, l'égalité :

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x) \tag{2.2.8}$$

est presque partout sur $[a, b]$.

(2)- S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a, b]$, tel que $f = I_a^\alpha \varphi$, alors :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{2.2.9}$$

pour presque tout $x \in [a; b]$.

(3)- pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existes, alors :

$$D^k (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x) \tag{2.2.10}$$

(4)- Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f(x)$ existe, alors :

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x) \tag{2.2.11}$$

Preuve. En utilisant la définition (2.2.1) et la relation (2.1.7) on obtient

(1)- Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^n (I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a; b]$.

(2)- Par la relation (2.2.7), on obtient :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = I_a^\alpha (D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) = I_a^\alpha(\varphi(x)) = f(x)$$

(3)- on a :

$$\begin{aligned} D^k(D_a^\alpha f(x)) &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\ &= D_a^{k+\alpha} f(x) \end{aligned}$$

d'où la résultat .

(4)- on a :

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = D^m I_a^{m-\beta} (I_a^\alpha f)(x) = D^m I^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

existe pour $i-1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$

■

Théorème 2.2.3 *Si $f \in L^1[a,b]$, $b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est :*

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \tag{2.2.12}$$

avec $n-1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la définition (2.2.1), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_{0+}^\alpha f)(s) &= \mathcal{L}(D^n I_{0+}^{n-\alpha} f)(s) = s^n \mathcal{L}(I_{0+}^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k (I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.2 *On a :*

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n} f\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) \, (\alpha \neq n) \, ; \left(D_{a+}^{0} f\right)(a+) = f(a) \, (\alpha = n) \, ,$$

où I_{a+}^α l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 2.2.2 *On suppose que $\alpha > 0,\ x > a,\ \alpha,\ a,\ x \in \mathbb{R}$. L'opérateur fractionnaire*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt\ ,\ n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}. \\ \frac{d^n}{dt^n} f(x), \qquad \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Caputo ou opérateur différentiel fractionnaire de Caputo d'ordre α. Cet opérateur est introduit par le mathématicien italien Caputo en 1967 ([1]).

1− La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{C}D^{\alpha} c = 0$$

2− Soit $f(x) = (x-a)^{\gamma}$, $\gamma > 0$, pour $(0 < \alpha \leq 1)$, on utilisant le changement de variable (2.1.5) on a :

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{1-\alpha} f'(x) = \gamma I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\gamma-1}\, dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \int_0^1 s^{\gamma-1} (1-s)^{-\alpha}\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \beta(\gamma, 1-\alpha) \\ ^{C}D_a^{\alpha} f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} (x-a)^{-\alpha+\gamma}. \end{aligned}$$

3− Soit $a = 0, \alpha = \frac{1}{2}, (n=1)\,, f(x) = x$, l'application de fourmule (2.2.13) on a

$$^{C}D_a^{1/2} x = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1/2}} dt.$$

alors la dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction $f(x) = x$ est :

$$\begin{aligned} \text{on pose } u &= (x-t)^{1/2} \Rightarrow du^2 = -dt \text{ alors} \\ ^{C}D_a^{1/2} x &= -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{1}{u} du^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u}{u} du \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2 *Soit $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que ${}^{C}D_a^{\alpha}f(x)$ existe. alors*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}f(x)=I_a^{n-\alpha}D^{n}f(t). \tag{2.2.14}$$

Théorème 2.2.4 *([12]) Soient $\alpha\geq 0$, $n=[\alpha]+1$,si f possède $n-1$ dérivées en α et si $D_a^{\alpha}f$ existe, alors :*

$$ {}^{C}D_a^{\alpha}f(x)=D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right] \tag{2.2.15}$$

pour presque tout $x\in[a,b]$.

Preuve. D'aprés la définition on a :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right] &= D^{n}I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right]\\ &= \frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_a^x\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]dt, \end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right] &= \int_a^x\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]dt\\ &= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x}\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha}\left[Df(t)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right] \end{aligned}$$

où :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right]=I_a^{n-\alpha+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right].$$

De la même façon pour n-fois alors :

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right] &= I_a^{n-\alpha+n}D^{n}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right]\\ &= I_a^{n}I_a^{n-\alpha}D^{n}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right] \end{aligned}$$

or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est un pollynôme de dégré $n-1$, alors :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] &= D^n I^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(x) = {}^C D_a^{\alpha} f(x) \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. ■

Corollaire 2.2.1 *([14]) Soient $\alpha \geq 0$ et $n=[\alpha]+1$, si ${}^C D_a^{\alpha} f(x)$ et $D_a^{\alpha} f(x)$ existent, on suppose que $D^k f(a)=0$ pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, alors :*

$$^C D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) \tag{2.2.16}$$

Théorème 2.2.5 *Si $f \in C[a,b]$ et $\alpha > 0$ $(n-1<\alpha\leq n)$, alors*

$$^C D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{2.2.17}$$

Preuve. Soit $g = I_a^{\alpha} f$ et par le corollaire precédent $\left(D^k f(a)=0, \text{ pour } k \in \{0,1,\cdots,n-1\}\right)$ et d'aprés l'égalité (2.2.7), on a :

$$^C D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f = {}^C D_a^{\alpha} g = D_a^{\alpha} g = D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f = f$$

■

Il a aussi la propriété de la linéarité comme la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville théorème 2.2.1

Théorème 2.2.6 *Si $f \in C[0,b]$, pour tout $b>0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\mathcal{L}\left({}^C D_0^{\alpha} f\right)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+) \tag{2.2.18}$$

Preuve. Pour $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x>0$ alors :

$$^{C}D_0^{\alpha}f(x)=I_0^{n-\alpha}f^{(n)}(x)$$

donc d'aprés (2.1.8)

$$\mathcal{L}\left(^{C}D_0^{\alpha}f\right)(s)=\mathcal{L}\left(I_0^{n-\alpha}f^{(n)}\right)(s)=s^{-n+\alpha}\left(\mathcal{L}f^{(n)}\right)(s)$$

et d'aprés (1.1.5)

$$\mathcal{L}\left(^{C}D_0^{\alpha}f\right)(s)=s^{\alpha}\left(\mathcal{L}f\right)(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0^+)$$

■

Chapitre 3

Problèmes de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Riemann-Liouvilles.

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de la solution de problème de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la forme suivant :

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0; 0 < \alpha < 2; \lambda > 0), \tag{3.0.1}$$

où $(D_{0^+,t}^{\alpha}u)(x,t)$ la dérivée partial fractionnaire de Riemann-Liouville de order $\alpha > 0$ pour $t > 0$ est définie dans la définition (2.2.1) et l'opérateur Laplacien $(\triangle_x\, u)(x,t)$ pour la variable $x \in \mathbb{R}^n$

On applique transformation de Fourier et Laplace pour obtenir la solution explicite de l'équation (3.0.1) avec la condition initial type de Cauchy

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,0+) = f_k(x) \tag{3.0.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, k = 1$ pour $0 < \alpha \leq 1$, et $k = 2$ pour $1 < \alpha < 2$.

D'abord, nous considérons le cas de $n = 1$, alors on a le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (D_{0^+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \lambda > 0) \\ (D_{0+,t}^{\alpha-k}u)(x,0+) = f_k(x), & x \in \mathbb{R},\ k = 1,2 \end{cases} . \tag{3.0.3}$$

3.1 Problème de Cauchy pour l'équation à un-dimension ($x \in \mathbb{R}$).

Théorème 3.1.1 *Si* $0 < \alpha < 2$ *et* $(\lambda > 0)$ *, alors le problème du type de Cauchy (3.0.3) admet une solution* $u(x,t)$ *donnée par :*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} G_k^{\alpha}(x-\tau,t) f_k(\tau) d\tau \quad l = 1 \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1; \; l = 2 \text{ pour } 1 < \alpha < 2. \tag{3.1.1}$$

où :

$$G_k^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi \left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (k = 1,2) \tag{3.1.2}$$

Preuve. Soit l'équation différentielle partielle de l'ordre $0 < \alpha < 2$,

$$(D_{0^+,t}^{\alpha} u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0; \lambda > 0), \tag{3.1.3}$$

avec la condition initial de la forme (3.0.2) pour $n = 1$,

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x,0+) = \begin{cases} f_1(x) & 0 < \alpha \leq 1 \\ f_2(x) & 1 < \alpha < 2 \end{cases}, \tag{3.1.4}$$

où $x \in \mathbb{R}, k = 1$ pour $0 < \alpha \leq 1$, et $k = 2$ pour $1 < \alpha < 2$.
pour résoudre ce problème,on applique transformée de Laplace par rapport à la variable de temp t :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} dt \quad (x \in \mathbb{R}; s > 0) \tag{3.1.5}$$

et transformation de Fourier par rapport à la variable spatiale $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{ix\xi} dx \; (\xi \in \mathbb{R}; t > 0). \tag{3.1.6}$$

on applique transformée de Laplace (3.1.5) sur (3.1.3),et d'àprés la formule (2.2.12) on obtient :

$$\mathcal{L}_t(D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}_t u)(x,s) - \sum_{j=1}^{l} s^{j-1}(D_{0+,t}^{\alpha-j} u)(x,0+) \tag{3.1.7}$$

$$\text{telle que } x \in \mathbb{R}, l-1 < \alpha \leq l, l \in \mathbb{N} \tag{3.1.8}$$

Si

$$\begin{aligned} l &= 1 \Rightarrow 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow (D^{\alpha-1}_{0+,t}u)(x,0) = f_1(x) \\ l &= 2 \Rightarrow 1 < \alpha < 2 \Rightarrow (D^{\alpha-2}_{0+,t}u)(x,0) = f_2(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{L}_t(D^\alpha u)(x,s) = s^\alpha(\mathcal{L}_t u)(x,s) - \sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x) \tag{3.1.9}$$

et

$$\mathcal{L}_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}_t u\right)(x,s) \tag{3.1.10}$$

on remplace (3.1.9) et (3.1.10) dans (3.1.3), on obtient :

$$s^\alpha(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}_t\right)(x,s) \tag{3.1.11}$$

puis on applique la transformée de Fourier (3.1.6) sur la formule (3.1.11),

$$\mathcal{F}_x(s^\alpha \mathcal{L}_t u)(\xi,s) = s^\alpha \mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) \tag{3.1.12}$$

et

$$\mathcal{F}_x\left(\sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x)\right)(\xi,s) = \sum_{k=1}^{l} s^{k-1}\mathcal{F}_x(f_k(x))(\xi) \tag{3.1.13}$$

et d'àprés la propriété (1.2.16) on a :

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathcal{L}_t u\right)\right)(x,s) = -\left|\xi\right|^2 \mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s), \tag{3.1.14}$$

et on remplace (3.1.12),(3.1.13) et (3.1.14) dans (3.1.11),

$$s^\alpha \mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) = \sum_{k=1}^{l} s^{k-1}\mathcal{F}_x(f_k(x))(\xi) - \lambda^2\left|\xi\right|^2 \mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s),$$

donc :

$$\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) = \sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2\left|\xi\right|^2}\mathcal{F}_x(f_k(x))(\xi), \tag{3.1.15}$$

si on pose $c = \frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda}$ et par la proposition (1.2.1) on a :

$$\mathcal{F}_x\left(e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right) = \frac{2(s^{\frac{\alpha}{2}}/\lambda)}{\left(\frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda}\right)^2 + \left|\xi\right|^2} = \frac{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}}{s^2 + \lambda^2\left|\xi\right|^2}.$$

Par conséquent l'exprission (3.1.15) devient sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) &= \left(\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}\mathcal{F}_x\left(s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right)(\xi)\mathcal{F}_x(f_k(x))(\xi), \quad l=1,2,\\
&= \left(\mathcal{F}_x\left[\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right]\right)\mathcal{F}_x(f_k(x))(\xi), \quad l=1,2,
\end{aligned}$$

en fonction de la propriété de convolution (1.2.9),

$$\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) = \left(\mathcal{F}_x\left[\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2\lambda}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x)\right]\right)(\xi), \;\; l=1,2.$$

Maintenant, nous obtenons la solution explicite $u(x,t)$ en utilisant la transformée inverse de Fourier pour la variable ξ, et la transformée inverse de Laplace pour la variable s, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_t u)(\xi,s) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}_x\left[\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2\lambda}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x)\right]\right)(\xi), \; l=1,2.\\
&= \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x), \; l=1,2.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}_t u)(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x)\right), \; l=1,2.\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right)(t) *_x f_k(x) \quad l=1,2.
\end{aligned}$$

d'où :

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right)(t) *_x f_k(x) \quad l=1,2.$$

et avec l'utilisation de la proposition (1.3.3) on obtient finallement :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}_t\left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right)(s) *_x f_k(x) \quad l=1,2.\\
&= \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l}t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}-k+1;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) *_x f_k(x) \quad l=1,2.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1.1 *Si $0 < \alpha \leq 1$ et $\lambda > 0$, alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0^+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}; t > 0. \\ (D^{\alpha-1}_{0+,t}u)(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{3.1.16}$$

admet une solution $u(x,t)$ est donnée par :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t) f_k(\tau) d\tau, \tag{3.1.17}$$

avec :

$$G_1^{\alpha}(x-\tau,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.1.18}$$

Corollaire 3.1.2 *Si $1 < \alpha < 2$ et $\lambda > 0$, alors le problème du type de Cauchy*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{0^+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R};\ t > 0. \\ (D^{\alpha-1}_{0+,t}u)(x,0) = f_1(x),\ (D^{\alpha-2}_{0+,t}u)(x,0) = f_2(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{3.1.19}$$

admet une solution $u(x,t)$ est donnée par :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{\alpha}(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau, \tag{3.1.20}$$

où $G_1^{\alpha}(x,t)$ est donné dans (3.1.18), et

$$G_2^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-2} \phi\left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.1.21}$$

Exemple 3.1.1 *le problème de type de Cauchy (3.1.16) avec $\alpha = \frac{1}{2}$,*

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}_{0^+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R};\ t > 0 \\ \left(I^{\frac{1}{2}}_{0+,t}u\right)(x,0_+) = f(x) \end{cases}, \tag{3.1.22}$$

alors d'àprés la corollaire (3.1.1) la solution sous la forme suivant :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\frac{1}{2}}(x-\tau,t) f(\tau) d\tau, \tag{3.1.23}$$

où $G_1^{\frac{1}{2}}(x,t)$ et donné dans (3.1.18) avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exemple 3.1.2 *le problème de type de Cauchy (3.1.16) avec $\alpha = \frac{3}{2}$,*

$$(D^{\frac{3}{2}}_{0^+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x \in \mathbb{R};\ t > 0)\,. \tag{3.1.24a}$$

avec les conditions :

$$(D_{0^+,t}^{\frac{1}{2}}u)(x,0_+) = f_1(x), \ \left(I_{0^+,t}^{\frac{1}{2}}u\right)(x,0_+) = f_2(x), \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{3.1.25}$$

admet une solution par la forme suiv :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\frac{3}{2}}(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{\frac{3}{2}}(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau, \tag{3.1.26}$$

où $G_1^{\frac{3}{2}}(x,t)$ *et* $G_2^{\frac{3}{2}}(x,t)$ *donné par (3.1.18) et (3.1.21) avec* $\alpha = \frac{3}{2}$.

Exemple 3.1.3 *le problème de type de Cauchy pour l'équation de la chaleur :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in \mathbb{R}; \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, \tag{3.1.27}$$

admet la solution suivant :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau, \ G(x,t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}.$$

C'est une résultat bien connue d'aprés le corollaire (3.1.1) et par la relation de la fonction Wright (1.3.29)

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}. \tag{3.1.28}$$

3.2 Problème s de Cauchy pour l'équation à multi-dimension $(x \in \mathbb{R}^n)$.

De façon plus générale on a l'équation multidimensionnelle fractionnaire (diffusion-d'onde) (3.0.1) d'ordre $0 < \alpha < 2$ avec les conditions de type Cauchy (3.0.2) la solution de cette problème est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Si* $0 < \alpha < 2$ *est* $\lambda > 0$, *alors la solution du probléme de Cauchy (3.0.1)-(3.0.2) est donné par :*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k^{\alpha}(x-\tau,t) f_k(x) d\tau,$$

telle que $l = 1$ *pour* $0 < \alpha \leq 1, l = 2$ *pour* $1 < \alpha < 2$,

$$G_k^\alpha(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=1}^{l} t^{-k-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right), \left(1-k-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right], \ (k=1,2).$$

Preuve. On a le probléme suivant :

$$\begin{cases} (D_{0+,t}^{\alpha} u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t), & (x \in \mathbb{R}^n;\ t > 0;\ 0 < \alpha < 2;\ \lambda > 0), \\ (D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x,0+) = f_k(x), & k = 1,2. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

pour résoudre ce problème, on applique la transformée de Laplace par rapport à t :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt, \quad (x \in \mathbb{R}^n;\ s > 0) \tag{3.2.2}$$

et le tronsformée de Fourier par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)e^{ix\xi}dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n; t > 0; l = 1,2). \tag{3.2.3}$$

on applique la transformée de Laplace (3.2.2) à (3.0.1),et d'àprés la formule (3.1.7) avec $x \in \mathbb{R}^n$ et la condition initial dans (3.0.2), on a :

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 (\triangle_x \mathcal{L}_t u)(x,s), \quad (l = 1,2).$$

et on applique la transformée de Fourier (3.2.3) et on utilise la formule (1.2.16) donné par :

$$(\mathcal{F}_x \triangle_x u)(\xi,t) = -|\xi|^2 (\mathcal{F}_x u)(\xi,t), \tag{3.2.4}$$

on obtient la relation suivant :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi,s) = \sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2|\xi|^2} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n; t > 0; l = 1,2) \tag{3.2.5a}$$

Pour obtenir la solution explicite $u(x,t)$ et par l'utilisation la transformée inverse de Fourier par rapport à ξ :

$$\left(\mathcal{F}_\xi^{-1} u\right)(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi,t)e^{-i\xi\cdot x}d\xi \quad (\xi \in \mathbb{R}^n; t > 0) \tag{3.2.6}$$

et la la transformée inverse de Laplace par rapport à s :

$$\left(\mathcal{L}_s^{-1} u\right)(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}u(x,s)ds, \quad (x \in \mathbb{R}; c = \Re(s) > a) \tag{3.2.7}$$

Pour appliquer la transformée de Fourier inverse (3.2.3) à (3.2.5a) on a besoin de savoir exactement la transformée de Fourier de la fonction Macdonald $K_{(n-2)/2}(|x|)$ défini par (1.3.12).

Lemme 3.2.1 *([5]). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ alors on a :*

$$\left(\mathcal{F}_x\left[|x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}(c|x|)\right]\right)(\xi) = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{n/2} \frac{c}{c^2 + |\xi|^2}, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n;\ n \in \mathbb{N}). \tag{3.2.8}$$

■

Preuve. On retour dans expression (3.2.5a) et on fait le simplification suivant :

$$\frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\xi|^2} = \frac{s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}}{\lambda} \frac{(s^{\frac{\alpha}{2}}/\lambda)}{\left(\frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda}\right)^2 + |\xi|^2}$$

d'aprés (3.2.8) pour $c = \frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda}$, on obtient cette formule :

$$\frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\xi|^2} = \frac{s^{k-1+\alpha(n-2)/4}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} \left(\mathcal{F}_x\left[|x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right)(\xi) \tag{3.2.9}$$

on remplace (3.2.9) dans (3.2.5a) donc on peut écrire la relation sous la forme suivant :

$$(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \left(\mathcal{F}_x\left[\sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1+\alpha(n-2)/4}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right)(\xi)(\mathcal{F}_x f_k)(\xi)$$

$$(\xi \in \mathbb{R}^n,\ l = 1, 2)$$

et avec l'utilisation de la proposition de convolution (1.2.9),

$$(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \left(\mathcal{F}_x\left[\sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1+\alpha(n-2)/4}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right] *_x f_k(x)\right)(\xi), \tag{3.2.10}$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier inverse (3.2.6), on déduit que :

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \left[\sum_{k=1}^{l} \frac{s^{k-1+\alpha(n-2)/4}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right] *_x f_k(x) \tag{3.2.11}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$,et $l = 1, 2$.

L'application de la transformée de Laplace inverse de (3.2.7), on peut obtenir la solution explicite du problème de Cauchy (3.2.1). Pour cela nous avons besoin de connaître la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$s^{k-1+\alpha(n-2)/4} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (l = 1, 2). \tag{3.2.12}$$

on montre que cette fonction est exprimée dans un terme de la transformée de Laplace de certains fonction spécial-H (1.3.30) de la forme

$$H_{2,2}^{2,0}\left[z \left| \begin{matrix} (a,1/2),(b,\alpha/2) \\ (c,1),(d,1/2) \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(c+\tau)\Gamma(d+\tau/2)}{\Gamma(a+\tau/2)\Gamma\left(b+\frac{\alpha\tau}{2}\right)} z^{-\tau} d\tau, \tag{3.2.13}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.2.2 *([5]) Si* $0 < \alpha \leq 1$ $(k = 1)$ *ou* $1 < \alpha < 2$ $(k = 1, 2)$, *alors on a la relations :*

$$\mathcal{L}_t\left[t^{-k-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(1-k-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right]\right](s) = \tag{3.2.14}$$

$$2^{n/2}\pi^{-1/2}s^{k-1+\frac{\alpha(n-2)}{4}}K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

De cette lemme, la réécriture de (3.2.11) sous la forme :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} \times$$

$$\mathcal{L}_t\left[\sum_{k=1}^{l} t^{-k-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(1-k-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right] *_x f_k(x)\right](s)$$

finallement par l'application de transformée inverse de Laplace (3.2.7) on obtient la solution explicite $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=1}^{l} t^{-k-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(1-k-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right] *_x f_k(x) \tag{3.2.15}$$

avec $l = 1$ *et* $l = 2$ *dans le cas* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $1 < \alpha < 2$,*respectivement.*

■

Corollaire 3.2.1 *Si* $0 < \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda > 0$, *alors la probléme de Cauchy*

$$\begin{cases} (D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x u)(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ (D_{0+,t}^{\alpha-1}u)(x,0+) = f(x) \end{cases}, \tag{3.2.16}$$

admet une solution écrit ce la forme :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1^\alpha(x-\tau,t)\, f_k(x) d\tau, \tag{3.2.17}$$

où :

$$G_1^\alpha(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-1-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right] \tag{3.2.18}$$

Corollaire 3.2.2 *Si* $1 < \alpha < 2$,*et* $\lambda > 0$, *alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} (D_{0^+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ (D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x,0+) = f_1(x), & (D_{0+,t}^{\alpha-2} u)(x,0+) = f_2(x) \end{cases} \tag{3.2.19}$$

admet une solution donnée par la relation suivant :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1^\alpha(x-\tau,t)\, f_1(x) d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} G_2^\alpha(x-\tau,t)\, f_2(x) d\tau, \tag{3.2.20}$$

où $G_1^\alpha(x-\tau,t)$ *est donné dans (3.2.18) et :*

$$G_2^\alpha(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-2-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(-1-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right] \tag{3.2.21}$$

Exemple 3.2.1 *La solution du problème de Cauchy (3.2.1),*

$$\begin{cases} (D_{0^+,t}^{1/2} u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ (I_{0^+,t}^{1/2} u)(x,0+) = f(x) \end{cases}, \tag{3.2.22}$$

est donné par :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1^\alpha(x-\tau,t)\, f(\tau) d\tau,$$

où $G_1^\alpha(x,t)$ *(3.2.18) avec* $\alpha = \frac{1}{2}$

Exemple 3.2.2 *La solution du problème de Cauchy (3.2.1),:*

$$\begin{cases} (D_{0^+,t}^{3/2} u)(x,t) = \lambda^2(\triangle_x\, u)(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ (D_{0^+,t}^{1/2} u)(x,0+) = f_1(x), \quad (I_{0^+,t}^{1/2} u)(x,0+) = f_2(x) \end{cases}, \tag{3.2.23}$$

est donné par :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1^{3/2}(x-\tau,t)\, f_1(\tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} G_2^{3/2}(x-\tau,t)\, f_2(\tau) d\tau$$

où $G_1^{3/2}(x,t)$ *(3.2.18) et* $G_2^{3/2}(x,t)$ *(3.2.21) avec* $\alpha = \frac{3}{2}$

le résultat du corollaire (3.2.1) est simplifiée pour $\alpha = 1$ .ce est basé sur l'affirmation suivante :

Lemme 3.2.3 *La fonction $G_1^{\alpha}(x,t)$ pour $\alpha = 1$ dans (3.2.18) écrit sous la forme :*

$$G(x,t) = G_1^1(x,t) = \frac{1}{(2\lambda\sqrt{\pi})^n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}. \tag{3.2.24}$$

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= G_1^1(x,t) \\
&= \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-1-\frac{\alpha(n-2)}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\alpha(n-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] \\
&= \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

d'aprés la définition de la fonction-H dans les formules (1.3.31) et (1.3.30)

$$\begin{aligned}
H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1+\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4}+\frac{\tau}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4}+\frac{\tau}{2}\right)} z^{-\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1+\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{\tau}{2}\right)} z^{-\tau}d\tau
\end{aligned}$$

alors

$$H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] = H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right) \end{matrix}\right] \tag{3.2.26}$$

et on remplace la relation (3.2.26) dans (3.2.25),

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= G_1^1(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] \\
&= \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right) \end{matrix}\right] \\
&= \frac{2^{-n}}{\lambda^{n}(\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{n}{2}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right) \end{matrix}\right]
\end{aligned}$$

et par la proposition (1.3.5) la formule devient :

$$G(x,t) = G_1^1(x,t) = \frac{2^{-n}}{\lambda^n (\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{n}{2}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{2}\right), \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2} - 1 + 1\left(1-\frac{n}{2}\right), 1\right) \end{array}\right]$$

finallement on a :

$$G(x,t) = G_1^1(x,t) = \frac{2^{-n}}{\lambda^n (\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{n}{2}} H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{1}{2}} \middle| \begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ (0,1) \end{array}\right] \tag{3.2.27}$$

Avec certaines conditions voir [5] présente l'égalité suivante :

$$H_{1,1}^{1,0}\left[z \middle| \begin{array}{c} \left(b, \frac{\alpha}{2}\right) \\ (0,1) \end{array}\right] = \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, b; z\right) \tag{3.2.28}$$

alors la forme (3.2.27) prend cette forme :

$$G(x,t) = G_1^1(x,t) = \frac{2^{-n}}{\lambda^n (\pi)^{(n-1)/2}} t^{-\frac{n}{2}} \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{3.2.29}$$

donc le résultat dans (3.2.24) résulte de (3.1.28) ■

Exemple 3.2.3 *Le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 (\triangle_x u)(x,t), & (x \in \mathbb{R}^n; t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases},$$

admet une solution bien connue donnée par :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\tau,t) f(\tau) d\tau, \quad G(x,t) = \frac{1}{(2\lambda\sqrt{\pi})^{n/2}} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}.$$

Chapitre 4

Problèmes de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Caputo

Dans le chapitre précédent nous avons établi des solutions explicites des problèmes de Cauchy pour l'équation de diffusion impliquant la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $\left(D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ d'ordre $\alpha > 0$. Dans ce chapitre nous nous intéressons au cas de l'équation de diffusion impliquant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la forme (3.0.1),

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda^2 \left(\triangle_x u\right)(x,t), \quad \left(x \in \mathbb{R}^n;\ t > 0\ ; 0 < \alpha < 2;\ \lambda > 0\right), \tag{4.0.1}$$

impliquant la dérivée fractionnaire partielle de Caputo $\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ par rapport à $t > 0$,et le Laplacien $\left(\triangle_x u\right)(x,t)$ par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ donné par (1.2.15).le dérivé de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ et $l-1 < \alpha < l$,$(l \in \mathbb{N})$ donné par :

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \left(D_{0^+,t}^{\alpha}\left[u(x,\tau) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\frac{\tau^k}{k!}\right]\right)(x,t). \tag{4.0.2}$$

Lorsque, $x \in \mathbb{R}$ fixer, $u(x,t) \in C^l\left(\mathbb{R}_+\right)$ en fonction de $t > 0$,alors $\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ a la représentation :

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{\left(\partial^l u(x,\tau)/\partial \tau^l\right)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-l+1}}$$

Suite à le chapitre 3, on applique la transformée de Fourier et de Laplace pour obtenir une solution explicite de l'équation (3.0.1) avec les conditions initiales :

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n;\ k = 0 \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1; k = 1 \text{ et } l < \alpha < 2), \tag{4.0.3}$$

et

$$\frac{\partial^0 u(x,0)}{\partial t^0} = u(x,0). \tag{4.0.4}$$

Comme dans le chapitre 3 on commençe par le cas de ($n = 1$)

4.1 Problèmes de Cauchy pour l'équation à un-dimension $(x \in \mathbb{R})$.

On considèrel'équation aux dérivées partielles fractionnaires (3.0.1) d'ordre $0 < \alpha < 2$ suivante :

$$\left({}^C D^{\alpha}_{0+,t} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ \ (x \in \mathbb{R}; t > 0; \lambda > 0), \tag{4.1.1}$$

avec les coditions de Cauchy (4.0.3).

Théorème 4.1.1 *Si $0 < \alpha < 2$ et $\lambda > 0$, alors la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0+,t} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \lambda > 0) \\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), & (k = 0, 1) \end{cases}, \tag{4.1.2}$$

écrit ce la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{-\infty}^{+\infty} G^{\alpha}_k(x-\tau,t) f_k(\tau)\, d\tau, \ \ l = 1 \ si\ 0 < \alpha \leq 1, \ \ et\ l = 2 \ si\ 1 < \alpha < 2 \tag{4.1.3}$$

où :

$$G^{\alpha}_k(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{k-\frac{\alpha}{2}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, k+1-\frac{\alpha}{2}; \frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (k = 0, 1). \tag{4.1.4}$$

Preuve. On a le probléme de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0+,t} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \lambda > 0) \\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

on applique la transformée de Laplace par rapport à la variable de temp $t > 0$ et transformée de Fourier par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ on utilise la formule (2.2.18) et :

$$\mathcal{L}_t \left({}^C D^\alpha_{0^+,t} u \right)(x,s) = s^\alpha (\mathcal{L}u)(x,s) - \sum_{k=0}^{l-1} s^{\alpha-k-1} \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}, \quad (x \in \mathbb{R};\ l-1 < \alpha \leq l), \quad (4.1.6)$$

où $l = 1$ et $l = 2$ dans les cas respectifs $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < \alpha < 2$, les conditions initiales (4.0.3) et la formule (3.1.14),on arrive la relation (3.1.15),

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\xi|^2} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi), \quad (\xi \in \mathbb{R};\ t > 0,\ l = 1, 2). \quad (4.1.7)$$

Par (1.2.10), on a :

$$\left(\mathcal{F}_x \left[\frac{1}{2\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \right] \right)(\xi) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\xi|^2} \quad (k = 0, 1),$$

donc l'équation (4.1.7) s'écrit sous la forme suivante :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \left(\mathcal{F}_x \left[\frac{1}{2\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \right] \right)(\xi) (\mathcal{F}_x f_k)(\xi), \quad (l = 1, 2),$$

par la propriété de convolution (1.2.9),

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \left(\mathcal{F}_x \left[\frac{1}{2\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k \right] \right)(\xi) \quad (l = 1, 2),$$

L'application de la transformée de Fourier inverse (3.2.6) à cette formule, on obtient la relation :

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \quad (l = 1, 2). \quad (4.1.8)$$

Lorsque $0 < \alpha < 2$, les fonctions $s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}}$ $(k = 0, 1)$ sont exprimés par la transformée de Laplace de la fonction Wright $\phi(-\alpha/2, b; z)$ comme suit :

$$\left(\mathcal{L}_t \left[t^{k-\frac{\alpha}{2}} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, k+1-\frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}} \right) \right] \right)(s) = s^{\frac{\alpha}{2}-k-1} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (k = 0, 1). \quad (4.1.9)$$

Puis l'application de la transformée de Laplace inverse à (4.1.8) et en prenant (4.1.9) et (1.2.8) en compte, on obtient le résultat suivant :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k^\alpha(x-\tau, t) f_k(\tau)\, d\tau, \quad l = 1 \text{ si } 0 < \alpha \leq 1, \text{ et } l = 2 \text{ si } 1 < \alpha < 2,$$

telle que :

$$G_k^\alpha(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{k-\frac{\alpha}{2}} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, k+1-\frac{\alpha}{2}; \frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (k = 0, 1).$$

■

Corollaire 4.1.1 *Si $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$, alors le probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^C D_{0^+,t}^{\alpha} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (x \in \mathbb{R}; t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, \tag{4.1.10}$$

a une solution sous la forme :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t)\, f(\tau)\, d\tau, \tag{4.1.11}$$

où :

$$G_1^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, k+1-\frac{\alpha}{2}; \frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{4.1.12}$$

Corollaire 4.1.2 *Si $1 < \alpha < 2$ et $\lambda > 0$, alors le probléme de Cauchy*

$$\begin{cases} \left({}^C D_{0^+,t}^{\alpha} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (x \in \mathbb{R}; t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \end{cases} \tag{4.1.13}$$

admet une solution sous la forme :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t)\, f_0(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} G_2^{\alpha}(x-\tau,t)\, f_1(\tau)\, d\tau, \tag{4.1.14}$$

où $G_1^{\alpha}(x,t)$ est donnée par (4.1.12), et :

$$G_2^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{1-\frac{\alpha}{2}} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, k+1-\frac{\alpha}{2}; \frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{4.1.15}$$

Exemple 4.1.1 *Le problème de Cauchy (4.1.10) avec $\alpha = \frac{1}{2}$,*

$$\begin{cases} \left({}^C D_{0^+,t}^{1/2} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{4.1.16}$$

alors la solution donnée par :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{1/2}(x-\tau,t)\, f(\tau)\, d\tau, \tag{4.1.17}$$

où $G_1^{1/2}$ est donnée par (4.1.12) avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exemple 4.1.2 *Le problème de Cauchy (4.1.13) avec $\alpha = \frac{3}{2}$*

$$\begin{cases} \left({}^C D_{0^+,t}^{3/2} u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \end{cases}, \tag{4.1.18}$$

alors la solution écrit par la forme suivant :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{3/2}(x-\tau,t)\, f_0(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} G_2^{3/2}(x-\tau,t)\, f_1(\tau)\, d\tau, \tag{4.1.19}$$

où $G_1^{3/2}(x,t)$ et $G_2^{3/2}(x,t)$ sont données par (4.1.12) et (4.1.15) avec $\alpha = \frac{3}{2}$

4.2 Problèmes de Cauchy pour l'équations à multi-dimension $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Dans cette section, on expand les résultats de la section 4.1 de l'équation de diffusion fractionnaire multidimensionnelle (4.0.1) d'ordre $0 < \alpha < 2$ avec les conditions (4.0.3).

Théorème 4.2.1 *Si* $0 < \alpha < 2$ *et* $\lambda > 0$, *alors la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+,t} u(x,t) = \lambda^2 (\triangle_x u)(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n;\ t > 0;\ 0 < \alpha < 2;\ \lambda > 0 \\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x),\ (k = 0 \ pour \ \ 0 < \alpha \leq 1;\ k = 1 \ pour \ l < \alpha < 2) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\mathbb{R}^n} G^{\alpha}_k (x-\tau, t) f_k(\tau) d\tau, \ \ (l = 1 \ si \ \ 0 < \alpha \leq 1, \ \ et\ l = 2 \ si\ 1 < \alpha < 2), \tag{4.2.2}$$

où :

$$G^{\alpha}_k(x,t) = \frac{2^{-n} |x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}} \pi^{(n-1)/2}} t^{k - \frac{\alpha(n+2)}{4}} H^{2,0}_{2,2} \left[\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{n}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(1 + k - \frac{\alpha(n+2)}{4}, \frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2} - 1, 1\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right], \ k = 0, 1.$$

Preuve. Application d'une transformée de Laplace (3.1.5) par rapport à $t > 0$ et la transformée de Fourier (3.1.6) par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$, et en utilisant la relation (4.1.6) avec les conditions initiales (4.0.3) et la formule (1.2.16), on arrive la relation de la forme (4.1.7) suivant :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 |\xi|^2} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n; t > 0, l = 1, 2), \tag{4.2.3}$$

selon (3.2.14) avec $c = \frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda}$ cette formule prend la forme :

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \left(\mathcal{F}_x \left[\sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\frac{\alpha(n+2)}{4} - k - 1}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2} \left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\alpha/2} \right) \right] \right) (\xi) (\mathcal{F}_x f_k)(\xi), \ l = 1, 2,$$

et la propriété de convolution (1.2.9),

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi, s) = \mathcal{F}_x \left[\sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\frac{\alpha(n+2)}{4} - k - 1}}{\lambda (2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2} \left(\frac{|x|}{\lambda} s^{\alpha/2} \right) *_x f_k(x) \right] (\xi).$$

Or, en appliquant la transformée de Fourier inverse (3.2.6), on déduit que :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\frac{\alpha(n+2)}{4}-k-1}}{\lambda(2\lambda\pi)^{n/2}} |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda}s^{\alpha/2}\right) *_x f_k(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n; t > 0, l = 1,2). \tag{4.2.4}$$

les fonctions

$$s^{\frac{\alpha(n+2)}{4}-k-1} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda}s^{\alpha/2}\right) \quad (k = 0,1) \tag{4.2.5}$$

sont exprimés par la transformée de Laplace de la fonction $H_{2,2}^{2,2}$ (3.2.13). Il existe l'affirmation suivante, qui peut être prouvé que le lemme 3.2.2.

Lemme 4.2.1 *Si* $0 < \alpha \leq 1$ $(k = 0)$ *ou* $1 < \alpha < 2$ $(k = 1)$ *alors, il existe les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{L}_t \left[t^{k-\frac{\alpha(n+2)}{4}} H_{2,2}^{2,2}\left[\left|\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right), \left(1+k-\frac{\alpha(n+2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right]\right]\right)(s) \\ = \ & 2^{n/2}\pi^{-1/2} s^{\frac{\alpha(n+2)}{4}-k-1} K_{(n-2)/2}\left(\frac{|x|}{\lambda}s^{\alpha/2}\right). \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

■

Preuve. en utilisant (4.2.6), la réécriture (4.2.4) sous la forme :

$$(\mathcal{L}_t u)(x,s) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+n/2}(\pi)^{(n-1)/2}} \times$$

$$\left(\mathcal{L}_t \left[t^{k-\frac{\alpha(n+2)}{4}} H_{2,2}^{2,2}\left[\left|\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right), \left(1+k-\frac{\alpha(n+2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right] *_x f_k(x) \right]\right)(s),$$

et l'application de la transformée de Laplace inverse (3.2.7), nous sommes amenés à la solution explicite $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{2^{-n}|x|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+n/2}(\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=1}^{l} \left[t^{k-\frac{\alpha(n+2)}{4}} H_{2,2}^{2,2}\left[\left|\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}} \begin{array}{c} \left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right), \left(1+k-\frac{\alpha(n+2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right] *_x f_k(x) \right] \tag{4.2.7}$$

avec $l = 1$ et $l = 2$dans les cas respectifs $0 < a \leq 1$ et $1 < a < 2$. Ainsi on obtient le résultat suivant. ■

Corollaire 4.2.1 *Si $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$, alors la solution du probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u\left(x,t\right)=\lambda^{2}\left(\triangle_{x}\,u\right)\left(x,t\right), \quad \left(x\in\mathbb{R}^{n};t>0\right) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}, \tag{4.2.8}$$

est de la forme :

$$u\left(x,t\right)=\int_{\mathbb{R}^{n}}G^{\alpha}_{1}\left(x-\tau,t\right)f_{k}\left(\tau\right)d\tau, \tag{4.2.9}$$

où :

$$G^{\alpha}_{1}\left(x,t\right)=\frac{2^{-n}\left|x\right|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}\pi^{(n-1)/2}}t^{-\frac{\alpha(n+2)}{4}}H^{2,0}_{2,2}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\begin{array}{c}\left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(1-\frac{\alpha(n+2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.\right]. \tag{4.2.10}$$

Corollaire 4.2.2 *Si $1 < \alpha < 2$ et $\lambda > 0$,alors le probléme de Cauchy :*

$${}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u\left(x,t\right)=\lambda^{2}\left(\triangle_{x}\,u\right)\left(x,t\right) \quad \left(x\in\mathbb{R}^{n};t>0\right) \tag{4.2.11}$$

$$u(x,0)=f_{0}(x), \quad \frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=f_{1}\left(x\right) \quad \left(x\in\mathbb{R}^{n}\right) \tag{4.2.12}$$

admet une solution donné par :

$$u\left(x,t\right)=\int_{\mathbb{R}^{n}}G^{\alpha}_{1}\left(x-\tau,t\right)f_{k}\left(\tau\right)d\tau+\int_{\mathbb{R}^{n}}G^{\alpha}_{2}\left(x-\tau,t\right)f_{1}\left(\tau\right)d\tau, \tag{4.2.13}$$

où $G^{\alpha}_{1}(x,t)$ est donné par (4.2.10), et :

$$G^{\alpha}_{2}\left(x,t\right)=\frac{2^{-n}\left|x\right|^{(2-n)/2}}{\lambda^{1+\frac{n}{2}}\pi^{(n-1)/2}}t^{1-\frac{\alpha(n+2)}{4}}H^{2,0}_{2,2}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\begin{array}{c}\left(\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right),\left(2-\frac{\alpha(n+2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(\frac{n}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{4},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.\right], \tag{4.2.14}$$

Exemple 4.2.1 *Le problème de Cauchy (4.0.1) avec $\alpha = \frac{1}{2}$,*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u\left(x,t\right)=\lambda^{2}\left(\triangle_{x}\,u\right)\left(x,t\right), \quad \left(x\in\mathbb{R}^{n};\ t>0\right) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases} \tag{4.2.15}$$

a une solution donnée par :

$$u\left(x,t\right)=\int_{\mathbb{R}^{n}}G^{1/2}_{1}\left(x-\tau,t\right)f\left(\tau\right)d\tau, \tag{4.2.16}$$

où $G^{1/2}_{1}(x-\tau,t)$ est donnée par (4.2.10) avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exemple 4.2.2 *Le problème de Cauchy (4.0.1)-(4.2.12) avec* $\alpha = \frac{3}{2}$,

$$\begin{cases} {}^{C}D^{3/2}_{0^+,t} u\,(x,t) = \lambda^2\,(\triangle_x\, u)\,(x,t)\,, & (x \in \mathbb{R}^n; t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1\,(x) & \end{cases}, \tag{4.2.17}$$

a une solution donnée par :

$$u\,(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G^{3/2}_1\,(x-\tau,t)\, f_k\,(\tau)\, d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} G^{3/2}_2\,(x-\tau,t)\, f_1\,(\tau)\, d\tau, \tag{4.2.18}$$

où $G^{3/2}_1\,(x,t)$ *et* $G^{3/2}_2\,(x,t)$ *sont données par (4.2.10) et (4.2.14) avec* $\alpha = \frac{3}{2}$.

Chapitre 5

Problèmes de Cauchy pour les équations d'évolutions fractionnaires

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'équation différentielle fractionnaire

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t), \tag{5.0.1}$$

avec $x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,et impliquant la dérivée fractionnaire partielle de Caputo $\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ par rapport à $t > 0$ d'ordre $\alpha > 0$ $(l-1 < \alpha \leq l;\ l \in \mathbb{N})$ défini par (4.0.2) et la dérivé fractionnaire partielle de Liouville $\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t)$ telle que :

$$\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_{-\infty}^{x}\frac{u(\tau,t)}{(x-\tau)^{\beta}}d\tau,\ \ (\beta > 0). \tag{5.0.2}$$

On appliquons la transformée de Fourier et de Laplace pour établir la solution explicite de l'équation (5.0.1) avec les conditions de Cauchy suivantes de la forme (4.0.3) :

$$u(x,0) = f_0(x),\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x),\quad (k = 1,\cdots,l-1;\ x \in \mathbb{R}). \tag{5.0.3}$$

Comme le chapitre 4 on commence à partir du cas le plus simple de l'équation (5.0.1) avec $\beta = 1$,

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ \ (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \alpha > 0). \tag{5.0.4}$$

5.1 Solution du problème le plus simple

On considére le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0+,t} u\right)(x,t) = \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \alpha > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), & (k = 1, \cdots, l-1) \end{cases}, \tag{5.1.1}$$

L'application de la transformée de Laplace (3.1.5) par rapport à la variable de temp $t > 0$ et la formule (4.0.2) on a :

$$s^{\alpha} (\mathcal{L}_t u)(x,s) - \sum_{k=0}^{l-1} s^{\alpha-k-1} f_k(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_t u)(x,s). \tag{5.1.2}$$

Et l'application de la transformée de Fourier (3.1.6) par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et la transformée de Fourier des fonctions dérivés :

$$(\mathcal{F}_x D^m_x u)(\xi,s) = (-i\xi)^m (\mathcal{F}_x u)(\xi,s), \quad \left(D_x = \frac{\partial}{\partial x};\ m \in \mathbb{N}\right) \tag{5.1.3}$$

avec $m = 1$, on arrive à la relation pour $(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi,s)$:

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\xi,s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} + i\lambda\xi} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi). \tag{5.1.4}$$

puis l'application de la transformée de Fourier inverse (3.2.6) par rapport à ξ, et la transformée de Laplace inverse (3.2.7) par rapport à s, on obtient la solution du problème (5.1.1) :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} + i\lambda\xi} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right) e^{st} ds \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-k-1} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{F}_x f_k)(\xi)}{s^{\alpha} + i\lambda\xi} e^{ix\xi} d\xi \qquad (5.1.5) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{l-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} + i\lambda\xi} e^{st} ds \right) e^{ix\xi} d\xi \qquad (5.1.6) \end{aligned}$$

donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{l-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) \times \mathcal{L}_s^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} + i\lambda\xi} \right) e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.1.7}$$

Sur la base de (5.1.4), on peut donner une autre représentation de la solution $u(x,t)$ en fonction de la Mittag-Leffter $E_{\alpha,\beta}(z)$ définie dans (1.3.16). D'après la proposition (1.3.2) avec $\beta = k+1$, on a donc :

$$\left(\mathcal{L}_t\left[t^k E_{\alpha,k+1}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right)\right]\right) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+i\lambda\xi} \quad \left(\left|\lambda\xi s^{-\alpha}\right| < 1; k = 1,\cdots;l\right), \tag{5.1.8}$$

et avec l'utilisation de (5.1.8), la formule (5.1.7) devient sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,k+1}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.1.9}$$

Ainsi, on a établi le résultat suivant.

Théorème 5.1.1 *Soit $\alpha > 0$ telle que $(l-1 < \alpha \leq l \;;\; l \in \mathbb{N})$ alors le probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t) = \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (x \in \mathbb{R};\; t > 0;\; \alpha > 0) \\ u(x,0) = f_0\left(x\right), \; \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (k = 1,\cdots,l-1) \end{cases}, \tag{5.1.10}$$

admet une solution explicite donné par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,k+1}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.1.11}$$

Corollaire 5.1.1 *Si $0 < \alpha \leq l$, alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t) = \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (x \in \mathbb{R}\;; t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases},$$

admet une solution donné par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-1} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\mathcal{F}_x f\right)(\xi)}{s^{\alpha}+i\lambda\xi} e^{ix\xi} d\xi \tag{5.1.12}$$

ou de manière équivalente :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi \tag{5.1.13}$$

Corollaire 5.1.2 *Si $1 < \alpha \leq 2$ alors le probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t) = \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (x \in \mathbb{R};\; t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1\left(x\right) \end{cases}, \tag{5.1.14}$$

admet une solution donné par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-1} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\mathcal{F}_x f_0\right)(\xi)}{s^{\alpha}+i\lambda\xi} e^{ix\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-2} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\mathcal{F}_x f_1\right)(\xi)}{s^{\alpha}+i\lambda\xi} e^{ix\xi} d\xi,$$

ou de manière équivalente :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_0\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi + \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,2}\left(-i\lambda\xi t^{\alpha}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_1\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi.$$

Exemple 5.1.1 *Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{0^+,t}^{1/2}u\right)(x,t) = \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, \tag{5.1.15}$$

a une solution donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{1/2}\left(-i\lambda\xi t^{1/2}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.1.16}$$

Exemple 5.1.2 *Le problème de Cauchy :*

$$\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0) \tag{5.1.17}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \tag{5.1.18}$$

a une solution donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{3/2}\left(-i\lambda\xi t^{3/2}\right)\times\left(\mathcal{F}_x f_0\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi + \frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{3/2,2}\left(-i\lambda\xi t^{3/2}\right)\times\left(\mathcal{F}_x f_1\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi.$$

5.2 Solution du problème général

Dans cette section, nous généralisons les résultats de la section 5.1 pour l'équation différentielle fractionnaire (5.0.1) avec le dérivé fractionnaire de Liouville $\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t)$ par rapport à $x \in \mathbb{R}$. d'ordre $\beta > 0$. pour cela on a besoin de la formule suivante pour la transformée de Fourier :

$$\left(\mathcal{F}_x D_{-,x}^{\beta}u\right)(\xi,s) = (-i\xi)^{\beta}\left(\mathcal{F}_x u\right)(\xi,s), \ (\beta > 0), \tag{5.2.1}$$

Théorème 5.2.1 *Soit* $\alpha > 0$ *telle que* $(l - 1 < \alpha \leq l\ ;\ l \in \mathbb{N})$ *.et soit* $\beta > 0$, *alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{array}{l} \left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t) = \lambda\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t), \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0; \alpha > 0) \\ u(x,0) = f_0(x), \ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (k = 1, \cdots, l-1) \end{array}, \tag{5.2.2}$$

admet une solution explicite donné par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-k-1}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)}{s^{\alpha} - \lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}}e^{ix\xi}d\xi \tag{5.2.3}$$

ou de manière équivalente :

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{t^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha,k+1}\left(\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}t^{\alpha}\right)\times\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi. \tag{5.2.4}$$

Preuve. D'aprés l'application d'une transformée de Laplace (3.1.5) par rapport à la variable de temp $t>0$, puis l'application de la transformée de Fourier (3.1.6) par rapport à la variable $x\in\mathbb{R}$ à l'équation (5.0.1) et par l'utilisation de les relations (4.0.2) et (5.2.1), nous arrivons la relation suivante :

$$\left(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u\right)(\xi,s)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}-\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}}\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\,.$$

En utilisant l'inverse de la transformée de Laplace et de Fourier, et en appliquant les mêmes arguments que dans la section 5.1, on obtient la solution $u(x,t)$ au problème (5.2.2) sous la forme (5.1.5) et (5.1.9) comme suit :

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}s^{\alpha-k-1}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)}{s^{\alpha}-\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}}e^{ix\xi}d\xi, \tag{5.2.5}$$

et

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{t^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha,k+1}\left(\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}t^{\alpha}\right)\times\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi. \tag{5.2.6}$$

■

Corollaire 5.2.1 *Si Si $0<\alpha\leq l$, et $\beta>0$ alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases}\left({}^{C}D_{0^+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\lambda\left(D_{-,x}^{\beta}u\right)(x,t)\,, & (x\in\mathbb{R};\ t>0)\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}, \tag{5.2.7}$$

admet une solution sous la forme :

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}s^{\alpha-1}e^{st}ds\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\mathcal{F}_x f\right)(\xi)}{s^{\alpha}-\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}}e^{ix\xi}d\xi \tag{5.2.8}$$

ou de manière équivalente :

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{\alpha}\left(\lambda\left(-i\xi\right)^{\beta}t^{\alpha}\right)\times\left(\mathcal{F}_x f\right)(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi \tag{5.2.9}$$

Corollaire 5.2.2 *Si* $1 < \alpha \leq 2$ *et* $\beta > 0$, *alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0^+,t} u\right)(x,t) = \left(D^{\beta}_{-,x} u\right)(x,t)\,, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) & \end{cases}, \tag{5.2.10}$$

est résoluble ,et sa solution a la forme :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-1} e^{st} ds \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{F}_x f_0)(\xi)}{s^{\alpha} - \lambda(-i\xi)^{\beta}} e^{ix\xi} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-2} e^{st} ds \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{F}_x f_1)(\xi)}{s^{\alpha} - \lambda(-i\xi)^{\beta}} e^{ix\xi} d\xi \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha}\left(\lambda(-i\xi)^{\beta} t^{\alpha}\right) \times (\mathcal{F}_x f_0)(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &+ \frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,2}\left(\lambda(-i\xi)^{\beta} t^{\alpha}\right) \times (\mathcal{F}_x f_1)(\xi) e^{ix\xi} d\xi \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Corollaire 5.2.3 *Si* $\alpha > 0$ *telle que* $(l-1 < \alpha \leq l\ ;\ l \in \mathbb{N})$, *alors la probléme de Cauchy :*

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0^+,t} u\right)(x,t) = \lambda \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x)\,,\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), & (k = 1, \cdots, l-1) \end{cases}, \tag{5.2.13}$$

admet une solution sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{\alpha-k-1} e^{st} ds \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{F}_x f_k)(\xi)}{s^{\alpha} + \lambda\xi^2} e^{ix\xi} d\xi, \tag{5.2.14}$$

ou de manière équivalente

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,k+1}\left(-\lambda\xi^2 t^{\alpha}\right) \times (\mathcal{F}_x f_k)(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.2.15}$$

Exemple 5.2.1 *Le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \left({}^C D^{1/2}_{0^+,t} u\right)(x,t) = \lambda\left(D^{\beta}_{-,x} u\right)(x,t)\,, & (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \beta > 0) \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}, \tag{5.2.16}$$

a une solution donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{1/2}\left(\lambda(-i\xi)^{\beta} t^{1/2}\right) \times (\mathcal{F}_x f)(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.2.17}$$

Exemple 5.2.2 *Le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0^+,t} u\right)(x,t) = \left(D^{\beta}_{-,x} u\right)(x,t)\,, \quad (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ \beta > 0) \\ u(x,0) = f_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \end{cases}, \tag{5.2.18}$$

a une solution donnée par :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{3/2}\left(\lambda\,(-i\xi)^{\beta}\, t^{3/2}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_0\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{3/2,2}\left(\lambda\,(-i\xi)^{\beta}\, t^{3/2}\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_1\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Exemple 5.2.3 *Le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l} = \lambda \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m}, \quad (x \in \mathbb{R};\ t > 0;\ l, m \in \mathbb{N}) \\ u(x,0) = f_0(x)\,,\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (k = 1, \cdots, l-1) \end{cases}, \tag{5.2.20}$$

a une solution donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{l,k+1}\left(\lambda\,(-i\xi)^m\, t^l\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.2.21}$$

Exemple 5.2.4 *Le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l} = \lambda \frac{\partial^{2m} u(x,t)}{\partial x^{2m}} \quad (x \in \mathbb{R}; t > 0;\ l, m \in \mathbb{N}) \\ u(x,0) = f_0(x)\,,\ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad (k = 1, \cdots, l-1) \end{cases}, \tag{5.2.22}$$

a une solution donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{l,k+1}\left(\lambda\,(-1)^m\,(\xi)^{2m}\, t^l\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \tag{5.2.23}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_2\left(-\lambda\xi^2 t^2\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_0\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{2,2}\left(-\lambda\xi^2 t^2\right) \times \left(\mathcal{F}_x f_1\right)(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

est la solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x \in \mathbb{R};\ t > 0) \\ u(x,0) = f_0(x)\,,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x) \end{cases} \tag{5.2.25}$$

Remarque 5.2.1 *Si $\lambda > 0$et λ est remplacé par λ^2, alors les relations (5.2.14), (5.2.15) avec $l = 1$et $l = 2$, le rendement en forme différente que (4.1.11) et (4.1.12) , des solutions explicites des problèmes de Cauchy, (4.1.10) et (4.1.13). Il est facile de vérifier que ces solutions coïncident pour les fonctions "appropriées" $f_0(x)$ et $f_1(x)$.*

Conclusion générale

Dans cette mémoire nous avons présenté une étude intéressante concerne les équations aux dérivées partielles fractionnaires, dits "Equations de diffusions fractionnaires", nous présentons la solution du problème de Cauchy pour l'équation de diffusion fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de sens Caputo dans le cas de deux et n dimensions.

Nous avons également étudions le problème du Cauchy pour l'équation d'évolution fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville par rapport à le premier variable et la dérivée fractionnaire de Caputo par rapport à le deuxième variable.

Cette étude ouvert quelques perspectives notamment, la généralisation de tout les résultats pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] CAPUTO.M, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-Il,The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol 13, (1967) 529-539.*

[2] GORENFLO.R,LUCHKO(2).Y, MAINARDI. FRANCESCO,*Analytical properties and applications of the Wright,First Mathematical Institute, Free University of Berlin , Germany*

[3] ISHTEVA.M.K, *Properties and Applications of Caputo Fractional Operator, Thèse de Master, University Karlsruhe Bulgaria, 2005*

[4] KILBAS.A.A, AND SAIGO.M, *H-Transforms. Theory and Applications, Chapman and Hall, Boca Raton, Florida, 2004.*

[5] KILBAS.A.A, SRIVASTAVA.H.M AND TRUJILLO.J.J, *Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).*

[6] MATHAI.A.M, AND K SAXENA.R, *The H- Function with Applications in Statistics and other Disciplines, Wiley and Sons, New York, 1978.*

[7] MATHAI.A.M, RAM KISHORE SAXENA,HANS J.HAUBOLD, *the H-function theory and Applications, Springer New York Dordrecht Heidelberg London*

[8] MOKHTARI.S.Y, *Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire, Magister en Mathématique, BADJI MAKHTAR, 2012*

[9] RUBIN.B, *Fractional intégrais and potentials, Harlow: Longman (1996)*

[10] SAMKO.S.G, KILBAS.A.A. AND MARICHEV.O.I, *Fractional intégrais and derivatives theory and applications*, *(Gordon and Breach, New York (1993))*

[11] SRIVASTAVA.H.M, GUPTA.K.C, AND GOYAL,S. P, *The H-Functions of One and Two Variables with Applications*, *South Asian Publishers, New Delhi, 1982.*

[12] WANG.J, XIANG.H, AND LIU.Z, *Position solution to nonzero boundary values problem for a couped system of nonlinear fractional differential equations*, *Volume 2010, 1-12.*

[13] WATSON.G.N, *Atreatise on the theory of Bessel Functions ,Cambridge University Press*

[14] WELLBEER.M, *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their,Analytical Bockground*, *D. Univ Braunschweig, (2010).*

ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بدراسة معادلة الانتشار الكسرية و التي ترتبط بعد ظواهر. و الجزء الأكبر من هذا العمل هو إعطاء الحل الوا ضح لهذه المعادلة.

الكلمات المفتاحية : معادلة الانتشار الكسرية, مشغل التفاضلية الكسرية ريمان-ليوفيل ,مشغل التفاضلية الكسرية كابوتو, المعادلات الخاصة.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse l'équation de diffusion fractionnaire qui sont liées à plusieurs phénomènes. L'essentiel de ce travail consiste à donné la solution explicite de cette équation.

Mots clés: l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouvilles, l'opérateur fractionnaire de Caputo, l'intégrale fractionnaire, l'équation de diffusion fractionnaire, fonctions spéciales.

Abstract

In this work we are interested fractional diffusion equation which are related to a number of phenomena. The essence of this work is given the explicit solution solutions of this equation.

Keywords: fractional operator Riemann-Liouvilles, the fractional operator Caputo, fractional integral, the fractional diffusion equation, special functions.