REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Mastère en :
MATHÉMATIQUES

Thème:

Sur la Multiplication ponctuelle des espases de Besov

Option:

Mathématiques Fondamentales et
Appliquées

Par:

Laboukhi Fatna

Dirigé par :
Mr. Madani Moussai

soutenu le: **10/ 06 / 2012.**

Remerciements

Je tiens à remercier vivement la professeur M. MOUSSAI pour avoir accepte de diriger ce travail, ainsi pour sa gentillesse, son dévouement et ses conseils précieux .

Aussi, je veut remercier la département de Matématique, et tout les professeurs respectables .

Je remercie chleureusement, et du foud du coeur mes parent : mon père et ma chère mamau pour le soutien qu'ils mon toujours rapporté, et toute la famille .

Aussi, je tiens à remercier mes camarades et toute personne ayant participé de prés ou loin à la réalisation de ce travail .

Table des matières

Introduction

L'objectif dans cette thèse est l'étude de le problème suivant :

La détermination des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres s, p, q, p_1, p_2, q_1, q_2, r tels que l'inégalité suivante:

$$\|f\ g\|_{B^s_{p,q}} \leq c\,\|f\|_{B^S_{p_1,q_1}}\,\|g\|_{B^s_{p_2,q_2}}$$

soient vérifiée . Ceci à été étudié par pleusieurs auteurs , W.Sikel , H . Triebel ,

J . Franke ,...

Notre travail est organisé en quatre chapitres:

• Dans le premier chapitre on rappèlle des définitions de quelque notions en analyse harmonique comme l'espace de Schwartz , la décomposition de Littwood- paley et la décomposition du produit $f\ g$. qu'on va utiliser dans la suite .

• Dans le deusième chapitre on donne la définition et les propriétés de l'espace de Besov et quelque exemples de fonctions dans cet espace .

• Dans le troisième chapitre on rappèle quelque définitions et lemmes qu'on va utiliser dans l'étude de la multiplication ponctuelle dans l'espace de Besov, il ya certains auteurs qui travaillent sur ce point par exemple Franke, Sikel, Sikel- Triebel,...

pour plus en détail , on traite le cas $B.B \hookrightarrow B$ et aussi $B.\left(B \cap L^{\infty}\right) \hookrightarrow B$ pour $r = \frac{n}{p_2}$.

• Dans le quatrième chpitre on va donne un exemple d'application de l'espace de Besov en equation d'ondes .

Chapitre 1

Sèrie de Littlewood-Paley

Dans ce chapitre on va rappeler des définitions de quelque notions en analyse harmonique comme l'espace de schwarts, la Dècomposition de Littlewood-Paley et la Dècomposition du produit fg qu'on va utiliser dans la suite .

1.1 Dècomposition de Littlewood-Paley

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est à decroissance rapide si pour tout $m \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \varphi(x) = 0$ .On dit que la fonction $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ appartient à l 'espace $S(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^{\alpha}\varphi$ est à dècroissance rapide . Il est èquivalent à dire que les quantitès suivates*

$$N_P(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \sup \left| x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi(x) \right|$$

Sont finies pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1 *on peut demontrer que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ si seulement si*

$$\|\varphi\|_{k,s} = \sup_{|\beta| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k \left| \partial^{\beta} \varphi(x) \right| \ \langle \ \infty \ .$$

Définition 1.2 *Une forme linèaire T dèfine sur l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ est dite une distribution tempèrée , ce qu'un note $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ s'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c N_P(\varphi)$$

Exemple 1.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $L^P\left(\mathbb{R}^N\right) \subset S'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Théorème 1.1 *La transformation de fourier applique l'espace* $S(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même et il existe une constante* c_p , *telle que*

$N_p(\hat{\varphi}) \leq c_p N_{p+n+1}(\varphi)$.

Maintenant, nous allors rappeller la dèfinition de la dècomposition de Littlewood -Paley d'une distribution tempèrée .

Définition 1.3 (*La dècomposition de Littlewood-Paley*)

Soit $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

(i) *supp* $\phi \subset \{\epsilon \in \mathbb{R}^n \ \ 1 \leq |\epsilon| \leq 3\}$

(ii) $\phi(\epsilon) \geq 0$ *pour* $1 \leq |\epsilon| \leq 3$

$(iii) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\epsilon) = 1$ *pour* $\epsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose $\varphi(\epsilon) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(2^{-k}\epsilon\right)$ *,on obtient une fonction* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\textit{supp}\ \varphi \subset \{\varepsilon \in \mathbb{R}^n : |\varepsilon| \leq 3\}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\varphi(\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(2^{-k}\varepsilon\right) = 1 \tag{1.1}$$

La relation 1.1 est appellé la partition de l'unité . A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convlutions

$$\triangle_k : S'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

et

$$Q_J : S'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{cases} (\Delta_k f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\phi\left(2^{-k}\epsilon\right)\right) * f & (k \in \mathbb{N}) \\ \\ (Q_j f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-j}\epsilon\right)\right) * f & (j \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

on bien

$$\begin{cases} (\Delta_k f)^{\wedge}(\epsilon) = \phi\left(2^{-k}\epsilon\right)\hat{f}(\epsilon) & k \geq 1 \\ \\ (Q_j f)^{\wedge}(\epsilon) = \varphi\left(2^{-j}\epsilon\right)\ \hat{f}(\epsilon) & j \geq 0 \end{cases}$$

avec la notation $\Delta_0 = Q_0$.

Ecrivons la relation ou point $2^{-j}\epsilon$*,alors*

$$\varphi\left(2^{-j}\epsilon\right) + \sum_{k=j+1}^{\infty}\phi\left(2^{-k}\epsilon\right) = 1.$$

En multipliant par $\hat{f}$ *, donc*

$$\varphi\left(2^{-j}\epsilon\right)\hat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty}\phi\left(2^{-k}\epsilon\right)\hat{f} = \hat{f}\ . \tag{1.2}$$

pour j=0, on obtient

$$\varphi(\epsilon)\,\hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(2^{-k}\epsilon\right)\hat{f} = \hat{f}\ ,$$

i,e

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k f = f\ .$$

Et alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k f\ . \tag{1.3}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ *sur 1.2 , on obtient*

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty}\Delta_k f = f\ ,$$

alors

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty}\Delta_k f = \sum_{k=0}^{j}\Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty}\Delta_k f$$

donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f \ .$$

La serie 1.3 est la décomposition de Littlewood-Paley , et elle converge dans S'.

1.2 Décomposition du produit fg

Pour toute f et g dans $S'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
fg &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k (f.g) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j \ f \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_l \ g \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_k (\Delta_j \ f.\Delta_l \ g) .
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $(\Delta_k (\Delta_j f.\Delta_l g))^{\wedge}$

$$\begin{aligned}
(\Delta_k (\Delta_j \ f.\Delta_l \ g))^{\wedge} (\epsilon) &= \left(\phi \left(2^{-k}\epsilon\right) (\Delta_j \ f.\Delta_l \ g)\right)^{\wedge} (\epsilon) \\
&= \phi \left(2^{-k}\epsilon\right) (\Delta_j \ f * \Delta_l \ g) (\epsilon) \\
&= \phi \left(2^{-k}\epsilon\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j \ f (\epsilon - \eta) (\Delta_l \ g) (\eta) \, d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi \left(2^{-k}\epsilon\right) \phi \left(2^{-j} (\epsilon - \eta)\right) \phi \left(2^{-l}\eta\right) \hat{f} (\epsilon - \eta) \hat{g} (\eta) \, d\eta.
\end{aligned}$$

donc , il ya 3 cas où le suort de $(\Delta_k (\Delta_j f.\Delta_l g))^{\wedge}$ n'est pas vide

$$
\begin{aligned}
l &\leq k \text{ et } k-2 \leq j \leq k+4 \\
j &\leq k \text{ et } k-2 \leq l \leq k+4 \\
l &\geq k, j \geq k \text{ et } k-1 \leq l \leq k+1
\end{aligned}
$$

$\forall f, g \in S'(\mathbb{R}^n)$,on a

$$
f\ g = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k (f.g),
$$

où

$$
\Delta_k (f.g) = \Delta_{k(1)} (f.g) + \Delta_{k(2)} (f.g) + \Delta_{k(3)} (f.g),
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\Delta_{k(1)} (f.g) &= \Delta_k \left(Q_{k+1}\, g.\tilde{\Delta}_k\ f \right) \\
\Delta_{k(2)} (f.g) &= \Delta_k \left(\tilde{\Delta}_k\, g.Q_{k+1}\ f \right) \\
\Delta_{k(3)} (f.g) &= \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k \left(\bar{\Delta}_j\, g.\Delta_j\ f \right),
\end{aligned}
$$

tel que $\tilde{\Delta}_k = \sum_{j=k-2}^{k+4} \Delta_j$ et $\bar{\Delta}_j = \sum_{j=k-1}^{k+1} \Delta_j$.

Chapitre 2

Espace de Besov

Dans ce chapitre on donne définition et propriétés de l'espace de Besov et l'interpolation dans cet espace et quelque inégalité essentelle comme celle de Hölder, Young et Bernstien aussi certain exemples de fonction dans Besov .

.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1 (*Espace de Besov*).

Soit $s \in \mathbb{R}$ *et* $p, q \in \left]0, \infty\right]$. *L'espace de Besov noté* $B^s_{p,q}$ *est l'ensemble de toute les fonctions* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty$

ou

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} \|\Delta_j f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} & si \quad q \neq \infty \\ \\ \sup_{j\geq 0} \left(2^{sj} \|\Delta_j f\|_p\right) & si \quad q = \infty \end{cases}$$

Proposition 2.1
- $B^s_{p,q}$ *est un espace Banach* .
- $B^s_{p,q} = C^s$ *si* $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ (C^s *est l'espace de Hölder*) .
- $B^s_{2,2} = H^s$ *espace de Sobolev* .
- $B^s_{p,2} = H^s_p$ *espace de Bessel* .

Proposition 2.2
- $B_{p,q}^{\ s} \hookrightarrow B_{p,q}^{\ t}$ *si* $(s \geq t)$.
- $B_{p,q1}^{\ s} \hookrightarrow B_{p,q2}^{\ s}$ *si* $(q1 \leq q2)$.
- $B_{p1,q1}^{\ s} \hookrightarrow B_{p2,q2}^{\ t}$ *si* $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$ *et* $(0 < p1 < p2 \leq \infty)$.

Proposition 2.3 *Soit* $m \in \mathbb{N}$*.si* $0 < s < m$ *l'espace de Besov* $B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)$ *admet une norme equivalente :*

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_p^q \tfrac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

Preuve.voir Triebel [21] ■

Remarque 2.1 *L'intègrale par rapport à h peut être changer par* $\left(\int\limits_{|h| \leq \epsilon} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_p^q \tfrac{dh}{|h|^n} \right)$ *pour tout* $\epsilon > 0$ *(en particulier* $\epsilon = 1$*), car la partie de I'intègrale lorsque* $|h| > \epsilon$ *est facilement majorée par* $\|f\|$.

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_{|h| \leq 1} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}$$

avec la modification habutuelle pour $q = +\infty$.

2.2 L'interpolation dans l'espace de Besov

Proposition 2.4 ***voir Peetre*** [11]***:***

Soient $1 \leq p_0, p_1, q_0 \leq \infty$ *et* $1 \leq q_1 < \infty$*,alors*

$$\left[B_{p_0,q_0}^{s_0}, B_{p_1,q1}^{s_1} \right]_\theta = B_{p,q}^{s},$$

avec

$$\begin{aligned} s &= (1-\theta)\, s_0 + \theta s \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \ (0 < \theta < 1) \ . \end{aligned}$$

2.3 Inègalité de Hölder ,Young et Bernstein

Théorème 2.1 (***Inègalité de Hölder***)

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$ *alors* $f.g \in L^r$ *et*

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\right) \ .$$

Théorème 2.2 (***Inègalité de Young***)

Soient $p,\ q,\ r \in [1, \infty]$ *tel que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *alors pour toute* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *et , on a* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

Preuve. On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$. On a

$$\begin{aligned} T\ f\ (x) &= \int f\ (y)^{\frac{1}{q}} g(x-y) f(y)^{\frac{1}{q4}} dy \\ |T\ f\ (x)| &\leq \left| f\ (y)^{\frac{1}{q}} g(x-y) f(y)^{\frac{1}{q4}} \right| dy\ . \end{aligned}$$

En utilisant l'inègalite de Hölder, on obtient d'une part

$$\|T\ f\ (x)\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$$

D'autre part I'inègalite de Hölder donne

$$|T\ f\ (x)| \leq \|f\|_{\acute{q}} \|g\|_q$$

alors on applique le thèoreme de I'interpolation, i.e

$$\begin{aligned} T\ &:\ L^1(\mathbb{R}^n) \ \to\ L^q(\mathbb{R}^n) \\ T\ &:\ L^q(\mathbb{R}^n) \ \to\ L^\infty(\mathbb{R}^n)\ , \end{aligned}$$

il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \quad \to \quad L^r(\mathbb{R}^n), \text{ avec } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\ .$$

■

Théorème 2.3 (*Inègalite de Bernstien*)

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *il existe* $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$, *telle que pour toute* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *avec supp*$\hat{f} \subset \{\epsilon \in \mathbb{R}^n / \ |\epsilon| < r\}$, *on*

$$\left\| f^{\ (\alpha)} \right\|_q \leq c\ R^{\ |\alpha|+n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q:}\right)} \|f\|_p\ .$$

Preuve. Soit $\psi \in S(\mathbb{R}^n\ )$ telle que $\psi(\varepsilon) = 1$ pour $|\varepsilon| \leq 1$.

On pose $\psi_R(\varepsilon) = \psi\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$, on a $\hat{f} = \hat{f}\psi_R$

$$f^{\ (\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)} * f.$$

Par l'inègalite de Young, on obtient

$$\left\| f^{\ (\alpha)} \right\|_q \leq \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)} \right\|_r \|f\|_p, avec 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)}(x) = R^n \left(\mathcal{F}^{-1}\psi\right)^{(\alpha)}(Rx).$$

il vient

$$\left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\psi_R\right)^{(\alpha)}(x) \right\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \left\| \left(\mathcal{F}^{-1}\psi\right)^{(\alpha)} \right\|_r$$

Ce qui donne le résultat . ■

2.4 Exemples de fonctions dans Besov

Exemple 2.1 $f(x) = vp\ \frac{1}{x}$ $\left(\text{la valeur principale de } \frac{1}{x}\right)$.

On a

$$\mathcal{F}f\left(\epsilon\right)=-i\pi sgn\ \epsilon \tag{2.1}$$

$$supp\ \left(\Delta_j^{\wedge}f\right)\subset\left\{\epsilon\in\mathbb{R}/\left|\epsilon\right|\leq 2^{j+1}\right\}$$

d'après l'inègalite de Bernstien on obtient

$$\left\|\Delta_j f\right\|_p\leq c_1 2^{j\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\left\|\Delta_j f\right\|_2\quad(p\geq 2)\ . \tag{2.2}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_j f\right\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\|\Delta_j^{\wedge}f\right\|_2\quad(\textit{Plancherel})\\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\|\varphi\left(2^{-j}.\right)\hat{f}\right\|_2\\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\|\varphi\left(2^{-j}.\right)\right\|_2\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}2^{\frac{j}{2}}\left\|\varphi\right\|_2=c_2 2^{\frac{j}{2}}\end{aligned}$$

car $\varphi\in D\left(\mathbb{R}\right).$

En remlaçant dans on obtient

$\left\|\Delta_j f\right\|_p\leq c2^{j\ \left(1-\frac{1}{p}\right)}\ ,\ c=c_1c_2$ *constante*

d'où

$$2^{sj}\left\|\Delta_j f\right\|_p\leq c2^{j\left(s\ +\frac{1}{\grave{p}}\right)}$$

La serie $\sum_{j\geq 0}2^{j\left(s\ +\frac{1}{\grave{p}}\right)q}$, $1\leq q\leq+\infty$ *converge si* $s<-\frac{1}{\grave{p}}$,*ce qui donne*

$vp\frac{1}{x}\in B_{p,q}^s\left(\mathbb{R}\right)$ *dans les deux cas suivants :*

1) $s=-\frac{1}{\grave{p}}$, $1\leq p\leq\infty$, $q=+\infty$ *et* $\left\|f\right\|_{B_{p,\infty}^{-\frac{1}{\grave{p}}}}=\sup_{j\geq 0}2^{-\frac{1}{\grave{p}}j}\left\|\Delta_j f\right\|_p$

2) $s<-\frac{1}{\grave{p}}$, $1\leq p,q\leq+\infty$ *et* $\left\|f\right\|_{B_{p,q}^s}<+\infty$.

Preuve.de 2.1

Soient $g \in \grave{S}(\mathbb{R})$, $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(xy)(\epsilon) = i\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}g(\epsilon)$ et

$$\begin{aligned}
\langle x\ \hat{f}, \varphi\rangle &= \langle x\ f, \hat{\varphi}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x|\geq\epsilon} e^{ix0}\ \hat{\varphi}(x)\,dx \\
&= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}(0) \\
&= 2\pi\varphi(0) \\
&= 2\pi\langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

d'ou

$$\mathcal{F}(xf)(\epsilon) = i\frac{d}{d\ \epsilon}\mathcal{F}f(\epsilon) = 2\pi\delta \quad (\delta \text{ mesure de dirac }),$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}f(\epsilon) = -2i\pi H(\epsilon) + a\ ,\ a \text{ constante}$$

H est la fonction de Hovisiede

puisque $\delta = H'$ en effet

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\ \ dx = \varphi(0)\ \ ,\ \ \varphi \in D(\mathbb{R})\ \ .$$

f est impaire donc $\hat{f}$ est impaire $(\mathcal{F}f(\epsilon) = -\mathcal{F}\ f(-\ \epsilon)\ \ ,\ \epsilon \in D(\mathbb{R}))$,

d'où

$$a = i\pi(H(\epsilon) + H(-\epsilon)) = i\pi\ ,\ \text{avec}\ \ H(\epsilon) = \begin{cases} 1\ ,\ \epsilon \geq 0 \\ \\ 0\ ,\ \epsilon < 0 \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{F}f(\epsilon) = -2i\pi H(\epsilon) + i\pi = \begin{cases} -i\pi \ , \ \epsilon \geq 0 \\ i\pi \ , \ \epsilon < 0 \end{cases} = -i\pi sgn\ \epsilon$$

■

Exemple 2.2 $f = \delta$ *(mesure de Dirac)*

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ *on a*

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

d'où

$$\Delta_j\, \delta = \varphi\left(2^{-j}.\right) \ .$$

Comme dans l'exemple 2.6 on obtient $2^{sj} \left\|\Delta_j \delta\right\|_p \leq c 2^{j\left(s+\frac{n}{\grave{p}}\right)}$.

La serie $\sum\limits_{j\geq 0} 2^{j\ \left(s+\frac{n}{\grave{p}}\right)q}$ *converge si* $s < \frac{-n}{\grave{p}}$, $1 \leq q \leq +\infty$, *ce qui donne*

$$\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{dans les cas suivants :}$$

1) $s = -\frac{n}{\grave{p}}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $q = +\infty$.

2) $s < -\frac{n}{\grave{p}}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$.

Exemple 2.3 $f = \mathcal{F}^{-1} g$ *telle que* $g(x) = |x|^{-\sigma}$.

On a

$$(\Delta_j f)^{\wedge}(\epsilon) = \varphi\left(2^{-j}\epsilon\right) \hat{f}(\epsilon) = |\epsilon|^{-\sigma} \varphi\left(2^{-j}\epsilon\right) \ .$$

supp $\varphi(2^{-j}.) \subset \{\epsilon \in \mathbb{R}^n / 2^{j-1} \leq |\epsilon| \leq 2^{j+1}\}$ *alors on peut pose* $|\epsilon| = 2^j$, *d'où*

$$\Delta_j f = \varphi\left(2^{-j}.\right) 2^{-j\sigma} \ .$$

Comme dans l'exemple 2.6 on obtient

$$2^{sj} \left\|\Delta_j f\right\|_p \leq c 2^{j\left(\frac{n}{\grave{p}}\right)} \ \textit{avec}\ c > 0,$$

ce qui donne

$$f \in B^{s}_{p,q}\left(\mathbb{R}^{n}\right) \;\; \textit{dans les cas suivants:}$$

1) $s = -\frac{n}{\grave{p}}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $q = +\infty$.

2) $s < -\frac{n}{\grave{p}}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$.

$\blacksquare$

Chapitre 3

La multiplication ponctuelle dans l'espace de Besov

Ce chapitre contient des définitions, lemmes puis on etude la multiplication ponctuelle de type $B.B \hookrightarrow B$ aussi un cas limite .

Définition 3.1 *Soient* A_0, A_1 *et* A_2 *trois espace de Banach, On dit que* $A_0.A_1 \hookrightarrow A_2$ *si pour toute fonction* f *appartient à* A_0 *et* g *appartient à* A_1 *on a* $f.g$ *appartient à* A_2 *de plus il existe* $c > 0$ *telle que*

$$\|f.g\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_0} \|g\|_{A_1} \ .$$

Définition 3.2 (*Multiplicateurs ponctuels*)

Soit $A \in \grave{D}$, A *est dite multiplicateur ponctuel de* E *s'il existe* $c_0 > 0$, *tel que*

$$\|A\varphi\| \leq c_0 \|\varphi\|_E \ , \quad (\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)) \ .$$

L'espace linéaire des multiplicateurs sera note $M(E)$, *défini par la norme*

$$\sup \{\|A \ \varphi\|_E \ ; \|\varphi\|_E = 1\} \ .$$

Définition 3.3 (*Espace de Lizorkin-Triebel*)

Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in]0, \infty[$ *et* $q \in]0, \infty)$

$$F^{\ s}_{p,q} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{F^{\ s}_{p,q}} < \infty \right\}$$

où

$$\|f\|_{F^{\,s}_{p,q}} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} \left|\Delta_j f\right|\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p & si \;\; q \neq \infty \\ \\ \sup_{j\geq 0} \left\| \left(2^{sj} \left|\Delta_j f\right|\right) \right\|_p & si \;\; q = \infty \end{cases} .$$

Lemme 3.1 (i) *soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,\min(p,q)} \hookrightarrow F^{\,s}_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,\max(p,q)} .$$

(ii) *soient* $0 < p < p_1 \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, *alors*

$$F^{\,s}_{p,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,p} \quad .$$

En plus de ca si $0 < u < p \leq \upsilon \leq \infty$ *et* $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$,*alors*

$$B^{\,s_0}_{p_0,u} \hookrightarrow F^{\,s}_{p,q} \hookrightarrow B^{\,s_1}_{p_1,\upsilon}$$

Définition 3.4 *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$, *alors L'espace* $L\left(\ell^{\,s,q}\right)$ *est*

$$L^p\left(\ell^{s,q}\right) = \left\{ \{f_k\} \subset S' : supp\ \hat{f}_k \subset \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^n : |\epsilon| < c2^k \right\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\}\|_{L^p(\ell^{\,s,q})} = \left\| \left\{ 2^{sk} f_k \right\} \right\|_{L^p(\ell^q)} = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left|f_k\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$,*alors L'espace* $\ell^{s,q}\left(L^p\right)$ *est*

$$\ell^{s,q}\left(L^p\right) = \left\{ \{f_k\} \subset S' : supp\ \hat{f}_k \subset \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^n : |\epsilon| < c2^k \right\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\}\|_{\ell^{\,s,q}(L^p)} = \left\| \left\{ 2^{sk} f_k \right\} \right\|_{\ell^{\,q}(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left\|f_k\right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Lemme 3.2 *Soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$, alors pour toute suite réelle positive $\{\varepsilon_k\} \in l^q$, on a*

$$\left\| a^k \sum_{j=0}^{k} a^{-j} \varepsilon_j \right\|_{\ell^q} + \left\| a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^{j} \varepsilon_j \right\|_{\ell^q} \leq c \left\| \varepsilon_k \right\|_{\ell^q} \quad .$$

avec

$\left(c = 2 \left(1 - a^{\min(1,q)}\right)^{-\frac{1}{\min(1,q)}} \right)$.

Lemme 3.3 *Soit $0 < p \leq \infty$ et $\gamma > 0$, pour toute suite $\{f_j\} \subset L^P$, telle que*

$$supp\ \hat{f}_j \subset \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^n : |\epsilon| \leq \gamma 2^j \right\} \ ,$$

alors

$$\left\| \Delta_k f_j \right\|_p \leq c 2^{(j-k)\rho} \left\| f_j \right\|_p \quad .$$

Avec $k \leq j < \infty$ et $\rho = \max\left(0, \frac{n}{p} - n\right)$, avec c dépend de n, p et γ .

Proposition 3.4 *Soite la fonction de Fefferman-Stein qui définit par*

$$\left(\Delta_k^{*,a} f\right)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\left|\Delta_k f \ \ (x-y)\right|}{1 + \left|2^k y\right|} \ , \ \ (x \in \mathbb{R}^n \text{ et } k\text{=0,1,2...}) \ .$$

(i) Pour tout $a > \frac{n}{\min(p,q)}$, on a

$$\left\| 2^{sk} \Delta_k^{*,a} f \right\|_{L^p(\ell^q)} \sim \|f\|_{F_{p,q}^s} \ .$$

(ii) Pour tout $a > \frac{n}{p}$, on a

$$\left\| 2^{sk} \Delta_k^{*,a} f \right\|_{\ell^q(L^P)} \sim \|f\|_{B_{p,q}^s} \ .$$

Preuve.voir Triebel[21] ∎

3.1 Multiplication du type B.B $\hookrightarrow$B

Théorème 3.1 *Soient $1 \leq p_1,\ p_2,\ q \leq \infty$ et $\frac{n}{p_1} - n < s < \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}\right)$, alors*

$$B_{p_1,q}^s \ \left(B_{p_2,\infty}^{\frac{n}{p_2}} \cap L^\infty \right) \hookrightarrow B_{p_1,q}^s \ .$$

Preuve.Estimation de $\Delta_{k(1)}(f.g)$

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right| &= \left|\Delta_k\left(Q_{k+1}g.\tilde{\Delta}_k f\right)(x)\right| \\
&= 2^{kn}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\,Q_{k+1}g\ \ (x-y)\,dy\right| \\
&\leq 2^{kn}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\right|\left|\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\right|\left|Q_{k+1}g\ \ (x-y)\right|dy \\
&\leq 2^{kn}\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\right|\left|\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\right|dy \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\left(\tilde{\Delta}_k^{*,a_1}f\right) \quad . \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Puisque $\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty \leq \left\|\check{\varphi}\right\|_1\left\|g\right\|_\infty$ *,alors on a*

$$
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right| \leq c\left\|g\right\|_\infty\left(\tilde{\Delta}_k^{*,a_1}f\right),
$$

donc

$$
2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right\|_{p_1} \leq c\left\|g\right\|_\infty 2^{ks}\left\|\Delta_k^{*,a_1}f\right\|_{p_1} \quad . \qquad (3.2)
$$

On prend la relation 3.2 en norme de ℓ^q*,alors*

$$
\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell^q(L^{p_1})} \leq c\left\|g\right\|_\infty\left\|2^{ks}\Delta_k^{*,a_1}f\right\|_{\ell(L^{p_1})} \quad . \qquad (3.3)
$$

.

Choisissons $a_1 > \frac{n}{p_1}$*, alors d'après la proposition 3.4, on a*

$$
\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell^q(L^{p_1})} \leq c\left\|g\right\|_\infty\left\|f\right\|_{B^s_{p_1,q}} \quad .
$$

Estimation de $\Delta_{k(2)}(f.g)$.

Soient u, υ, β *et* σ *tel que*

$$
\begin{aligned}
\max\left(p_1, \frac{n}{\frac{n}{p_1}-s}\right) &< u < \frac{n}{\max\left(0, \frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}\right)} \\
\upsilon &= \left(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{u}\right)^{-1},\ \beta = s-\frac{n}{p_1}+\frac{n}{u} \ et\ \sigma = s-\frac{n}{p_1}+\frac{n}{\upsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\upsilon} &= \left\|\Delta_k\left(Q_{k+1}f.\tilde{\Delta}_k g\right)(x)\right\|_{\upsilon} \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}f.\tilde{\Delta}_k g\right\|_{\upsilon} \ ,
\end{aligned}
$$

en appliquant l'inégalité de Hölder, $\left(\frac{1}{\upsilon}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{u}\right)$, *on a*

$$
\begin{aligned}
\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\upsilon} &\leq c\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_2} \cdot \left\|Q_{k+1}f\right\|_u \\
&\leq c\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u \ ,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
2^{k\sigma}\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\upsilon} &\leq c2^{k\sigma}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j f\right\|_u \\
&\leq c\left(2^{k\frac{n}{p_2}}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right) \\
&\leq c\sup_{k\geq 0}\left(2^{k\frac{n}{p_2}}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right),
\end{aligned}
$$

alors

$$
2^{k\sigma}\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\upsilon} \leq c\left(\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\left\|\Delta_j f\right\|_u\right)\right) \ . \tag{3.4}
$$

D'après le lemme 3.2 (*car* $\beta<0$), *donc*

$$
\begin{aligned}
\left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(2)} (f.g) \right\|_{\ell^q(L^\upsilon)} &\leq c \left(\|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2\,,\,\infty}} \right) \left\| 2^{k\beta} \sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta} \left(2^{j\beta} \|\Delta_j f\|_u \right) \right\|_{\ell^q} \\
&\leq c \|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}} \|f\|_{B^{\beta}_{u\,,\,q}} . \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Le choix des paramètres u, υ, β, σ donne

$$
\ell^{\sigma,q}(L^\upsilon) \hookrightarrow \ell^{s,q} et B^{\ s}_{p_1,q} \hookrightarrow B^{\ \beta}_{u,q} \ ,
$$

i.e.

$$
\left\| 2^{ks} \Delta_{k(2)} (f.g) \right\|_{\ell^q(L^{p_1})} \leq c \left\| 2^{k\sigma} \Delta_{k(2)} (f.g) \right\|_{\ell^q(L^\upsilon)} \ ,
$$

et

$$
\|f\|_{B^{\beta}_{u,q}} \leq c \|f\|_{B^{s}_{p_1,q}} \ ,
$$

alors, la relation 3.5 donne

$$
\left\| 2^{ks} \Delta_{k(2)} (f.g) \right\|_{\ell^q(L^{p_1})} \leq c \|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}} \|f\|_{B^{s}_{p_1,q}} \ .
$$

Estimation de $\Delta_{k(3)} (f.g)$ *.*

D'après l'inclusion suivante

$$
B^{\ s\ +\frac{n}{p_2}}_{t,\infty} \hookrightarrow B^{s}_{p_1,q} \ ,
$$

alors

$$
\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{B^{s}_{p_1,q}} \leq c \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{B^{\ s\ +\frac{n}{p_2}}_{t,\infty}} .
$$

Donc

$$
\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{B^{\ s\ +\frac{n}{p_2}}_{t,\infty}} \leq c \|g\|_{B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,\infty}} \|f\|_{B^{s}_{p_1,q}} \text{, voir Rumst-Sickel [13].}
$$

Où $\frac{1}{t} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *et* $s + \frac{n}{p_2} > \max\left(0, \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n\right)$, *donc*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{B^s_{p_1,q}} \leq c \|g\|_{B^{\frac{n}{p2}}_{p_2,\infty}} \|f\|_{B^s_{p_1,q}} ,$$

et alors

$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{\ell^q(L^{p_1})} \leq c \|g\|_{B^{\frac{n}{p2}}_{p_2,\infty}} \|f\|_{B^s_{p_1,q}}$ ■

3.2 Un cas limite

Théorème 3.2 *Soient* $0 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1$, $r > 0$ *et* $s + r = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - n \geq 0$.

(i) *Si* $r < \frac{n}{p_2}$, *alors*

$$B^s_{p_1,q_1}.B^r_{p_2,q_2} \hookrightarrow B^s_{p,q} ,$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n}$, $s < \min\left(r, \frac{n}{p_1}\right)$, $q_2 \leq \frac{n}{\frac{n}{p_2} - r}$ *et* $q = \infty$

ou

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \ s < r \ et \ q = q_1 \ .$$

(ii) *Si* $r = \frac{n}{p_2}$, $\left(i.e. \ s = \frac{n}{p_1} - n\right)$, *alors*

$$B^s_{p_1,q_1} \left(B^{\frac{n}{p_2}}_{p_2,q_2} \cap L^\infty \right) \hookrightarrow B^s_{p,q} ,$$

avec $s < \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}\right)$ *et* $q = \infty$.

Preuve.de (i)

Soit $g \in B^r_{p_2,q_2}$ et $f \in B^s_{p_1,q_1}$.

Estimation de $\Delta_{k(1)} (f.g)$.

On pose $u = \frac{n}{\frac{n}{p_2} - r}$ $\left(i.e. \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{u}\right)$, *alors*

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right| &= \left|\Delta_k\left(Q_{k+1}g.\tilde{\Delta}_k f\right)(x)\right| \\
&= 2^{kn}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\,Q_{k+1}g\ \ (x-y)\,dy\right| \\
&\leq 2^{kn}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\right|\left|\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\right|\left|Q_{k+1}g\ \ (x-y)\right|dy \\
&\leq 2^{kn}\left(Q^{*,a_1}_{k+1}g\right)\left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\ \right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\right|\left(1+\left|2^{k+1}y\right|^{a_1}\right)\left(1+\left|2^k y\right|^{a_2}\right)dy \\
&\leq c\left(Q^{*,a_1}_{k+1}g\right)\left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right\|_p \leq c\left\|\left(Q^{*,a_1}_{k+1}g\right)\left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\right)\right\|_p \quad ,
$$

d'après I'inègalité de **Hölder** , $\left(\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{u}\right)$, alors

$$
2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_p \leq c2^{ks}\left\|Q^{*,a_1}_{k+1}g\ \right\|_u\left\|\left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\ \right)\right\|_{p_1} \quad ,
$$

donc

$$
2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_p \leq c\left\|\sup_{j\in N_0} Q^{*,a_1}_j g\right\|_u\ 2^{ks}\quad \left\|\left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\ \right)\right\|_{p_1} \quad . \tag{3.6}
$$

On prend la relation 3.6 en norme de ℓ^{q_1}, alors on a

$$
\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^P)} \leq c\left\|\sup_{j\ \in N_0} Q^{*,a_1}_j g\right\|_u\left\|2^{ks}\ \left(\ \tilde{\Delta}^{*,a2}_k f\right)\right\|_{\ell^{q_1}(L^{p_1})} \quad . \tag{3.7}
$$

Choisissons $a_2 > \frac{n}{P_1}$, alors d'après la proposition 3.4

$$
\left\|2^{ks}\ \left(\ \Delta^{*,a2}_k f\right)\right\|_{\ell^{q_1}(L^{p_1})} \leq c\left\|f\right\|_{B^s_{p_1,q_1}} \ .
$$

Choisissons $a_1 > \frac{n}{u}$, alors on a

$$\left\| \sup_{j \in N_0} Q_j^{*,a_1} g \right\|_u \leq c \|g\|_{F^{\,0}_{u,2}}, \text{ voir Runst-Sickel [13] }.$$

Nous avons aussi $\frac{1}{u} = \frac{1}{p_2} - \frac{r}{n} \Longrightarrow r - \frac{n}{p_2} = 0 - \frac{n}{u}$ et $0 < q_2 \leq \frac{n}{\frac{n}{p_2} - r} = u$, alors d'après le lemme 3.1/(ii), on a

$$B^{\,r}_{p_2,q_2} \hookrightarrow F^{\,0}_{u,2} \text{ i.e. } \|g\|_{F^0_{u,2}} \leq c \|g\|_{B^{\,r}_{p_2,q_2}},$$

alors, la relation3.7 devient

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(1)} (f.g) \right\|_{\ell^{q_1}(L^P)} \leq c \|g\|_{B^{\,r}_{p_2,q_2}} \|f\|_{B^{\,s}_{p_1,q_1}} \quad .$$

Estimation de $\Delta_{k(2)} (f.g)$ **.**

Soient u, υ, β et σ tel que

$$\begin{aligned} \max \left(p_1, \frac{n}{\frac{n}{p_1} - s} \right) \quad &< \quad u < \frac{n}{\max \left(0, \frac{n}{p_1} - r\right)} \\ \upsilon \quad &= \quad \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{u} \right)^{-1}, \beta = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{u} \; et \; \sigma = s - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{\upsilon}, \end{aligned}$$

on a d'après le lemme 3.3

$$\begin{aligned} \| \; \Delta_{k(2)} (f.g) \|_\upsilon \quad &= \quad c \left\| \Delta_k \left(Q_{k+1} f. \tilde{\Delta}_k g \right) (x) \right\|_\upsilon \\ &\leq \quad c \left\| Q_{k+1} f. \tilde{\Delta}_k g \right\|_\upsilon, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de **Hölder,**$\left(\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{u} \right)$, alors

$$\begin{aligned} \| \; \Delta_{k(2)} (f.g) \|_\upsilon \quad &\leq \quad c \|Q_{k+1} f\|_u \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \\ &\leq \quad c \left\| \tilde{\Delta}_k g \right\|_{p_2} \sum_{j=0}^{k+1} \|\Delta_j f\|_u \quad . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
2^{k\sigma}\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{v} &\leq c2^{k\sigma}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\|\Delta_j f\|_u \\
&\leq c\left(2^{k\sigma}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right) \\
&\leq c\sup_{k\geq 0}\left(2^{k\sigma}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right) ,
\end{aligned}$$

donc

$$2^{k\sigma}\left\| \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{v}\leq c\|g\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left(\left(2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right)\right) \tag{3.8}$$

D'après le lemme 3.2 $\left(\beta<0 \text{ car } s<\frac{n}{p_1}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|2^{k\sigma}\ \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^v)} &\leq c\|g\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left(\left\|2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j\beta}\left(2^{j\beta}\|\Delta_j f\|_u\right)\right\|_{\ell^{q_1}}\right) \\
&\leq c\|g\|_{B^r_{p_2,\infty}}\|f\|_{B^{\beta}_{u,q_1}} .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous avons

$$\ell^{\sigma,q_1}(L^v)\hookrightarrow \ell^{s,q_1}(L^p) \text{ et } B^s_{p_1,q_1}\hookrightarrow B^{\beta}_{u,q_1} ,$$

donc la relation 3.9 devient

$$\begin{aligned}
\left\|2^{k\sigma}\ \Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^p)} &\leq c\|g\|_{B^r_{p_2,\infty}}\|f\|_{B^s_{p_1,q_1}} \\
&\leq c\|g\|_{B^r_{p_2,q_2}}\|f\|_{B^s_{p_1,q_1}} .
\end{aligned}$$

Estimation de $\Delta_{k(3)}(f.g)$.

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_u &\leq \left\|\sum_{j=k}^{\infty}\Delta_k\left(\Delta_j f.\bar{\Delta}_j g\right)\right\|_u \\ &\leq c\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\Delta_j f.\bar{\Delta}_j g\right\|_u \text{ , d'après le lemme 3.2 .}\end{aligned}$$

D'après I'inégalité de Hölder ,$\left(\frac{1}{u}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)$,on a

$$\begin{aligned}2^{k(s+r)}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_u &\leq c2^{k(s+r)}\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{u}-n\right)}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \\ &\leq c2^{k(s+r)}\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)(s+r)}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2} \\ &\leq c\sum_{j=k}^{\infty}\left(2^{jr}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}\right),\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{k\geq 0}2^{k(s+r)}\left\|\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_u \leq c\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{jr}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}\right) \tag{3.10}$$

Puisque $\ell^d \hookrightarrow \ell^1$ pour$\left(d=\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)^{-1}\right)$, donc

$$\left\|2^{k(s+r)}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell^\infty(L^u)} \leq c\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{jrd}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2}^d\right)\left(2^{jsd}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}^d\right)\right)^{\frac{1}{d}}.$$

D'après I'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left\|2^{k(s+r)}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell^\infty(L^u)} &\leq c\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jrq_2}\left\|\bar{\Delta}_j g\right\|_{p_2}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq_1}\left\|\Delta_j f\right\|_{p_1}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,q_2}}\left\|f\right\|_{B^s_{p_1,q_1}}.\end{aligned}$$

Puisque $\ell^{s+r,\infty}(L^u) \hookrightarrow \ell^{s,\infty}(L^p)$, donc

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(3)}(f.g)\right\|_{\ell^{\infty}(L^p)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,q_2}}\left\|f\right\|_{B^s_{p_1,q_1}} .$$

On considère maintenant le deuxième cas où $\left(\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}, s<r \; et \; q=q_1\right)$.

Estimation de $\Delta_{k(1)}(f.g)$.

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_p &= \left\|\Delta_k\left(Q_{k+1}g.\tilde{\Delta}_k f\right)\right\|_p \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}g.\tilde{\Delta}_k f\right\|_p \quad \text{, d'après le lemme 3.3} \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}g\right\|_{p_2}\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_1} \quad \text{, d'après l'inégalité de } \textbf{Hölder} \\
&\leq c\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_1}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j\, g\right\|_{p_2},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_p &\leq c\left(2^{ks}\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_1}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-jr}\left(2^{jr}\left\|\Delta_j\, g\right\|_{p_2}\right)\right) \\
&\leq c\sup_{j\geq 0}\left(2^{jr}\left\|\Delta_j\, g\right\|_{p_2}\right)\left(2^{ks}\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_1}\right)\sum_{j=0}^{k+1}2^{-jr} .
\end{aligned}$$

Donc

$$2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_p \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left(2^{ks}\left\|\tilde{\Delta}_k f\right\|_{p_1}\right) . \qquad (3.11)$$

On prend la relation 3.11 en norme de ℓ^{q_1}, alors

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^p)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left\|f\right\|_{B^s_{p_1 q_1}} .$$

donc

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^p)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,q_2}}\left\|f\right\|_{B^s_{p_1 q_1}}$$

Estimation de $\Delta_{k(2)}(f.g)$.

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_p &= \left\|\Delta_k\left(Q_{k+1}f.\tilde{\Delta}_k g\right)\right\|_p \\ &\leq c\left\|Q_{k+1}f.\tilde{\Delta}_k g\right\|_p \text{ , d'apèrs le lemme 3.3} \\ &\leq c\left\|Q_{k+1}f\right\|_{p_1}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2} \text{ , d'après l'inégalité de Hölder} \\ &\leq c\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j\ f\right\|_{p_1},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}2^{ks}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_p &\leq \left(c2^{ks}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)\sum_{j=0}^{k+1}\left\|\Delta_j\ f\right\|_{p_1} \\ &\leq c\left(2^{kr}\left\|\tilde{\Delta}_k g\right\|_{p_2}\right)2^{k(s-r)}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j(s-r)}\left(2^{js}\left\|\Delta_j\ f\right\|_{p_1}\right),\end{aligned}$$

alors

$$2^{ks}\left\|\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_p \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left(2^{k(s-r)}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j(s-r)}\left(2^{js}\left\|\Delta_j\ f\right\|_{p_1}\right)\right) . \tag{3.12}$$

On prend la relation 3.12 en norme de ℓ^{q_1}, donc

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^p)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left\|2^{k(s-r)}\sum_{j=0}^{k+1}2^{-j(s-r)}\left(2^{js}\left\|\Delta_j\ f\right\|_{p_1}\right)\right\|_{\ell^{q_1}},$$

d'après le lemme 3.2 $(car\ s-r<0)$, alors

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(2)}(f.g)\right\|_{\ell^{q_1}(L^p)} \leq c\left\|g\right\|_{B^r_{p_2,\infty}}\left\|f\right\|_{B^s_{p_1q_1}} .$$

Donc

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(2)} (f.g) \right\|_{\ell^{\,q_1}(L^p)} \leq c \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,p_2}} \left\| f \right\|_{B^s_{p_1 q_1}} \quad .$$

Estimation de $\Delta_{k(3)} (f.g)$.

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_p &= \left\| \sum_{j=k}^{\infty} \Delta_k \left(\Delta_j f . \bar{\Delta}_j g \right) \right\|_p \\
&\leq c \sum_{j=k}^{\infty} \left\| \Delta_j f . \bar{\Delta}_j g \right\|_p \\
&\leq c \sum_{j=k}^{\infty} \left\| \Delta_j f \right\|_{p_1} \left\| \bar{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \quad ,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
2^{ks} \left\| \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_p &\leq c 2^{ks} \sum_{j=k}^{\infty} \left\| \Delta_j f \right\|_{p_1} \left\| \bar{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \\
&\leq c 2^{-kr} 2^{k(s+r)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\,(s+r)} \left(2^{jr} \left\| \bar{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \right) \left(2^{js} \left\| \Delta_j f \right\|_{p_1} \right) \\
&\leq c 2^{-kr} \left\| 2^{k(s+r)} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\,(s+r)} \left(2^{jr} \left\| \bar{\Delta}_j g \right\|_{p_2} \right) \left(2^{js} \left\| \Delta_j f \right\|_{p_1} \right) \right\|_{\ell^\infty} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.2 sur 3.13 , donc

$$\begin{aligned}
2^{ks} \left\| \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_p &\leq c 2^{-kr} \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,\infty}} \left\| f \right\|_{B^s_{p_1 .\infty}} \\
&\leq c \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,p_2}} \left\| f \right\|_{B^s_{p_1 q_1}} \quad . \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

On prend la relation 3.14 en norme de ℓ^{q_1}, alors

$$\left\| 2^{ks} \Delta_{k(3)} (f.g) \right\|_{\ell^{\,q_1}(L^p)} \leq c \left\| g \right\|_{B^r_{p_2,p_2}} \left\| f \right\|_{B^s_{p_1 q_1}} \quad .$$

Preuve.de (ii) .

Estimation de $\Delta_{k(1)} (f.g)$. ■

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)(x)\right| &= \left|\Delta_k\left(Q_{k+1}g.\tilde{\Delta}_k f\right)(x)\right| \\
&= 2^{kn}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\tilde{\Delta}_k f(x-y)\,Q_{k+1}g(x-y)\,dy\right| \\
&\leq 2^{kn}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)\left(2^k y\right)\right|\left|\tilde{\Delta}_k f\ \ (x-y)\right|\left|Q_{k+1}g(x-y)\right|dy \\
&\leq 2^{kn}\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\left(2^k y\right)\right)\right|\left|\tilde{\Delta}_k f(x-y)\right|dy \\
&\leq 2^{kn}\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\left(\ \tilde{\Delta}_k^{*,a}f\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\left(2^k y\right)\right)\left(1+\left|2^k y\right|^a\right)dy \\
&\leq c\left\|Q_{k+1}g\right\|_\infty\left(\ \tilde{\Delta}_k^{*,a}f\right),
\end{aligned}
$$

alors, on a

$$
\left|\Delta_{k(1)}(f.g)\right| \leq c\left\|g\right\|_\infty\left(\ \tilde{\Delta}_k^{*,a}f\right)\ . \tag{3.15}
$$

Donc

$$
2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{p_1} \leq c\left\|g\right\|_\infty 2^{ks}\ \ \left\|\tilde{\Delta}_k^{*,a}f\right\|_{p_1},
$$

donc

$$
\sup_{k\geq 0}\left(2^{ks}\left\|\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{p_1}\right) \leq c\left\|g\right\|_\infty\sup_{k\geq 0}\left(2^{ks}\ \ \left\|\tilde{\Delta}_k^{*,a}f\right\|_{p_1}\right),
$$

i.e.

$$
\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}(f.g)\right\|_{\ell(L^{p_1})} \leq c\left\|g\right\|_\infty\left\|2^{ks}\Delta_k^{*,a}f\right\|_{\ell^\infty(L^{p_1})}
$$

Choisissons $a > \frac{n}{P_1}$, alors d'après la proposition 3.4

$$
\left\|2^{ks}\Delta_k^{*,a}f\right\|_{\ell^\infty(L^{p_1})} \leq c\left\|f\right\|_{B^s_{p_1,\infty}}.
$$

Donc

$$\left\|2^{ks}\Delta_{k(1)}\left(f.g\right)\right\|_{\ell^{\infty}(L^{p_1})}\leq c\left\|g\right\|_{\infty}\left\|f\right\|_{B^{s}_{p_1,q_1}}\ \ ,\ \ \left(car\ \ B^{s}_{p_1,q_1}\hookrightarrow B^{s}_{p_1,\infty}\right)\ .$$

Par la mème méthode on éstime $\Delta_{k(2)}\left(f.g\right)$ et $\Delta_{k(3)}\left(f.g\right)$. ∎

Chapitre 4

Application d'espace de Besov

Dans ce dernier chapitre on va donner un exemple d'application générale dans l'espace de Besov en équation dispersives géométriqe .

4.1 Equation dispersives géométrique

L'équation dispersives géométrique est utilisé dans les applications d'onde .

4.1.1 L'équation des applications d'onde

Présentation de l'éqution et résultats connus

Forme générale : soit une varié riemannienne N . Par le théorème de Nash , N s'injecte isométriquement dans un espace eulidien de dimension suffisamment , et nous considérons dans la suite N comme une sous variété de l'espace eulidien .

une application $u\left(t,x\right)$ $\left(\text{où } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\right)$ à valeurs dans N est appelée une application d'onde avec données de Cauchy (u_0,u_1) s'elle vérifie

$$(A)\quad\begin{cases} u\ \left[(\partial_t u)^2-(\nabla u)^2\right]\perp T_{u(x,t)}N \\ (u,u_t)_{t=0}=(u_0,u_1)\end{cases},$$

où l'on a noté T_yN l'espace tangent à N au point y .

Les solutions de cette équation sont invariantes par le scaling

$$(\text{pour } \lambda\in\mathbb{R})\quad \mathrm{u}_0\left(x\right)\longrightarrow \mathrm{u}_0\left(\lambda x\right)\ \text{ et } \mathrm{u}\left(x,t\right)\longrightarrow \mathrm{u}\left(\lambda x,\lambda t\right)$$

Caractère bien posé : Rapplons tout d'abord que équation d'onde semi-linéaires générales sont bien posées pour $(u_0, u_1) \in H^{\frac{d}{2}+1} \times H^{\frac{d}{2}}$. Cependant, la non-linéarité de (A) présente une structure de forme nulle ; en utilisant ce fait

et des espaces de type $X^{s,b}$, Klainerman(voir par exemple l'article de revue avec Selberg [8])

a pu montrer que l'équation est bien posée dans $H^{\frac{d}{2}+\epsilon} \times H^{\frac{d}{2}+1+\epsilon}$. Ce seuil a été abaissé par Tataru [16] à $B_{2,1}^{\frac{d}{2}} \times B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}$, qui est au scaling de l'équation, mais qu'il semble naturel de vouloir remplacer par $H^{\frac{d}{2}} \times H^{\frac{d}{2}-1}$. Ceci est particulièrement vrai en dimension

2 puisqu'alors il s'agit de l'espace d'énergie . L'équation (A) n'est en fait pas bien posée au niveau de $H^{\frac{d}{2}} \times H^{\frac{d}{2}-1}$, mais on peut obtenir des solutions globales qui préservent la régularité . Ceci est dû à Tao [18] [19] pour la sphère , en dimension quelconque , et grâce l'utilisation d'une jauge microocale ; Shatah et Struwe[15] ont, en utilisant l'outil des moving frames, étendu ce résultat à des variétés cibles arbitraires en

dimension d ≥ 4 .

Réduction équivariante : la réduction équivariante qui va être présentée de permet de réduire (A) à un probléme en 1+1 dimensions . Supponsons que la métruque de N peut s'écrire, dans des coordonnées $(\psi, \chi) \in \mathbb{R} \times S^{d-1}$

$$ds^2 = d\psi^2 + g(\psi)^2 \, d\chi$$

(ceci signifie que N présente une symétrie par rolation ; si par exemple N=S^2, on peut prendre pour ψ et χ les coordonnées sphériques classique).

Notons d'autre part (τ, ω) pour les coordonnées polaires du plan euclidien $\mathbb{R}^d$.

Soit enfin χ : $S^{d-1} \longrightarrow S^M$ (M est un entier , a priori grand) une application harmonique propre, c'est à dire que (pour une constante k)

$$|\nabla \chi|^2 = k \text{ et } \Delta_{S^{d-1}} \chi + K\chi = 0 \ .$$

On dit alors que l'application u est équivariante s'elle s'écrit, dans les systèmes de coordonnées (τ, ω) et (ψ, χ)

$$u \ (\tau, \omega) = (\psi(\tau), \chi(\omega))$$

(le cas le plus simple est celui où χ est l'identité et u une application de $\mathbb{R}^d$ dans S^d telle que $u\left(\tau,\omega\right)=\left(\psi\left(\tau\right),\omega\right)$

L'équation (A) devient alors l'équation suivante pour $\psi\left(t,\tau\right)$

$$(O)\quad\left\{\begin{array}{c}\partial_t^2\psi-\partial_\tau^2-\frac{d-1}{\tau}\partial_\tau\psi+\frac{k}{\tau^2}g\left(\psi\right)\acute{g}\left(\psi\right)=0\\ \left(\psi,\psi_t\right)_{t=0}=\left(\psi_0,\psi_1\right)\end{array}\right.$$

Formation de singularités : Les investigations sur la formation de singlarités sont pour l'instant limitées au cadre équivariant . Les résultats connus sont les suivants .

•**En dimension 2,** (A) critique. Il a récemment été prouvé par Rondnianski et Sterbenz[12] et Krieger , Tataru et Schlag [9] que si N=S^2, L'équation (O) développe des singularités à partir de soultions régulières.

•**En dimension d** ≥ 3, on doit à Shatah [14] et Cazenave , Shatah et Tahvildar-Zadeh [2] des exemple de solution autosimilaires , c'est à dire du type $\psi\left(t,\tau\right)=\phi\left(\frac{\tau}{t}\right)$, où ϕ est de classe C^∞ ; ces solutions présentent bien sur une singularité pour t=0 .

Données initiales $(u_0,u_1)\in B_{2,\infty}^{d/2}\times B_{2,\infty}^{d/2-1}$

Nous avons vu plus haut que (A) a une solution globale et unique pour données initiales $(u_0,u_1)\in H^{\frac{d}{2}}\times H^{\frac{d}{2}-1}$. on peut aussi prouve que (O) est bien posée pour ce type de données .

Comme $B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}}\times B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}-1}$ est un espace plus grand que $H^{\frac{d}{2}}\times H^{\frac{d}{2}-1}$, montrer que (O) est bien posée dans $B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}}\times B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}-1}$ représente une amélioration technique ; cela a aussi un intérêt intrinsèque comme nous allons le voir.

Une queston complètement ouverte est la stabilité des solutions sxplosives auto-similaires de Shatah [14] et Cazenave , Shatah et Tahvildar-Zadeh [2] présenté plus la suivante : au lien de perturber une telle solution avant l'explosion et d'essayer de comrendre comment la dynamique est affectée , pourquoi ne pas résoudre à partir du temps d'explosion ?

Soit u=$\phi\left(\frac{\tau}{t}\right)$ une solution auto-similaire . Il est facile de voir que sa trace à t=0 est du type $\left(c_0,\frac{c_1}{\tau}\right)$, pour des constantes c_0 et c_1. Réciproquement , les solution issues de telles données initiales sont , au moins formellement auto-similaires . Cependant , ce type de données n'appartient pas à $H^{\frac{d}{2}}\times H^{\frac{d}{2}-1}$, mais à $B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}}\times B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}-1}$: il apparait donc naturel de s'intéresser à de telles donnèes .

Notre premier théorème concerne le cas de données petites dans un espace très proche $B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}}\times B_{2,\infty}^{\frac{d}{2}-1}$; afin de ne pas sombrer dans de trop grandes complications techniques, nous énonçons le théorème pour cet espacede Besov , et renvoyons à l'article correspondant pour l'énoncé exact .

Théorème 4.1 *L'équation* (O) *est bien posée globalement pour* (u_0, u_1) *petit dans* $B^{\frac{d}{2}}_{2,\infty} \times B^{\frac{d}{2}-1}_{2,\infty}$. *La solution* u *correspondante appartient à* $L^\infty\left( ] -\infty, \infty[\ , \ B^{\frac{d}{2}}_{2,\infty} \right)$.

Preuve. La preuve de ce théorème repose sur un argument de point fixe standard ,et les inégalites de Strichartz .La preuve requiert cependant une analyse en fréquence assen fine .

■

Bibliography

[1] Bourdaud,G.,Moussai,M.: *Continuite des commutateurs d'intégrales singulière sur les espace de Besov.* Bull. Sc. Math. **188**(1994).

[2] Cazenave,T.,Shtah,J.,Tahvidar-Zadeh,S:*Harmonic maps of the hyperbolic space and develepemen of singularitiesin wave maps and yang-Mills ann.Inst.H.Poincar Phys.Thor.86* (1998),315-344.

[3] Drihem,D.,Moussai,M.: *Pointurise multiplictation in Besov and Lizorkin-Triebel spaces* (Article en préparation) .

[4] Drihem,D.,Moussai,M.:Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces .Z.Anal.Anwendungen 21(2002) ,179-184.

[5] Drihem,D.: *Tèse magister. universitè de M'sila ,2001.*

[6] Ferahtia,N.:*Tèse magister.*universitè deM' sila ,2004.

[7] Franke,J.:*On the spaces $F_p^{s,q}$ of Triebel-Lizorkin type* : pointwise multipliers and spaces on domains.Math.Nach.125(1986) .

[8] Klainerman,S.,Selberg,S.:*Bilinear estimates and applications to nonlinear* wave equtions .Commun.Contemp.Math.4(2002) ,223-295.

[9] Krieger,J.,Sahlag,W.,Tataru,D.: *Renoralization and blow up for chargeone equivariant critical wave maps.*Invent.Math.171(2008) ,on.3,543-615.

[10] Moussai,M. : *Analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$.* M' sila,le 29 octobre 1997.

[11] Peetre,J. :New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series 1,Durham,1976.

[12] Rodnianski,I.,Sterbenz, J.:*On the Formation of Singularities in the Critical* $O(3)$ Sigma-Model,arXiv: $math/0605023$.

[13] RUNST,T.,SICKEL,W.:*Sobolev spaces of fractional order,Nemytskij operators and nomlinear partial differential equations,*de Gruyter,Berlin 1996.

[14] SHATAH,J.:*Weak solutions and development of singularities of the* $SU(2)\,\sigma-$model.Comm.Pure Appl.Math.41(1988) ,459-469.

[15] SHATAH,J.,STRUWE,M.:*The Couchy problem for wave maps*.Int.Math.2002,555-571.

[16] TATARU,D.:*On glolal existence and scattering for the wave maps equation.*Amer.Math.123(2001) ,37-77.

[17] TAO,T.:*Global regularity of wave maps I.Small critical sobolev norm in high dimension.*Internat.Math.Notices 2001,299-328.

[18] TAO,T.:*Global regularity of wave maps II.Small energy in two dimensions.*Comm.Math.224(2001),443-544.

[19] TAO,T.:*Global regularity of wave maps III.Large energy from* $\mathbb{R}^{1+2}$ *to hyperbolic spaces.*arXiv:0805.4666.

[20] TAO,T.:*Global regularity of wave maps IV.Absence of stationary or self-similar solutions* in the enetgy class.arXiv:0806.3592.

[21] TRIBEL,H. :*Theory of function spaces.*Birkhäuser I,Basel (1983) .

[22] .TRIBEL,H.:*Theory of function spaces.*Birkhäuser II,Basel (1992) .