ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière*:* Mathématiques

Option: Analyse *Mathématiques et Numérique (AMN)*

Présentée par:

AMRANE Khaled

Thème

Approximate solution of linear Volterra integro –differential equation by using Euler polynomial

Soutenue le 19/06/2023 devant le jury composé de:

Bachir GAGUI	**M C A**	**Université de M'sila**	**président**
Noui DJAIDJA	**M C B**	**Université de M'sila**	**Encadreur**
Amina KHIRANI	**M C A**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Année universitaire : 2022/2023

الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية من الرتبة الثانية وذالك باستخدام طريقة التجميع أولر وطريقة غاليركين أولر وفي هذه المذكرة تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطرق المقترحة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية التكاملية لفولتيرا –معادلات فولتيرا التكاملية-كثير الحدود أولر-طريقة التجميع-طريقة غاليركين.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est de trouver des solutions approximatives à l'équation intégro-différentielle de Volterra du deuxième ordre en utilisant la méthode collocation -d'Euler et la méthode Galerkin-d'Euler . Ce mémoire présente différents exemples pour illustrer la précision des méthodes proposées.

Mots clés :

Equations intégro-différentielles de Volterra -équations intégrales de Volterra - Polynôme d'Euler - Méthode de collocation - Méthode de Galerkin.

Abstract:

The objective of this dissertation is to find approximate solutions to the second order of Volterra integro-differential equation using the Euler collocation method and the Euler Galerkin method. This memory present various examples to illustrate the accuracy of the proposed methods.

Key words :

Volterra integro-differential equation,Volterra integral equation,Euler polynomial,collocation Method-Galerkin Method.

Remerciements

Je remercie Allah, le tout puissant, de m'avoir accordé la force et le courage nécessaires pour réaliser ce travail avec succès. Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon superviseur,**Dr. Noui DJAIDJA**, pour son soutien et son encouragement tout au long de la préparation de cette recherche. Je le remercie également pour ses conseils tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury les professeurs **Bachir GAGUI** et **KHIRANI Amina** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de la faculté de mathématiques et d'informatique.

Dédicace

Je souhaite dédier ce travail à des personnes extraordinaires et spéciales dans ma vie. Je veux le dédier à mes chers parents, qui ont été un soutien incommensurable et une source d'inspiration tout au long de ma vie. Ils m'ont offert un amour illimité et un encouragement constant. Sans leur présence aimante et leur soutien, je n'aurais pas pu atteindre cette réalisation. Je tiens également à le dédier à mon frère et ami **ZERROUKI Merouane**, ainsi qu'à toute la famille **AMRANE**.

Je dédie ce travail à mes formidables enseignants académiques qui m'ont fourni savoir et orientation tout au long de mes études. Grâce à eux, j'ai acquis les connaissances et les compétences qui m'ont aidé à accomplir ce travail avec succès. Je leur suis extrêmement reconnaissant et ressens une profonde gratitude envers eux.

Je dédie ce travail à mes chers amis, qui ont toujours été présents pour me soutenir et m'encourager. Merci pour les moments agréables, les conversations inspirantes et le soutien illimité

N'oublions pas de remercier Allah Tout-Puissant pour toutes les bénédictions et les opportunités qu'Il nous a accordées. Demandons-Lui de rendre ce travail accepté, utile et béni.

Table des matières

Introduction

Les équations intégro-différentielles de Volterra sont des équations fonctionnelles qui jouent un rôle important dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie, tels que la physique, la biologie, l'économie etc...

L'équation intégro-différentielle de Volterra prend généralement la forme suivante :

$$\sum_{m=0}^{n} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Elle combinent à la fois des termes différentiels et des termes intégraux, ce qui les rend plus complexes à résoudre analytiquement. Par conséquent, la résolution numérique est souvent nécessaire pour obtenir des solutions approximatives.

L'objectif de ce mémoire est de présenter différentes approches de résolution numérique pour les équations intégro-différentielles de Volterra. Nous nous concentrerons particulièrement sur les méthodes de collocation d'Euler et de Galerkin d'Euler.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres qui couvrent différents aspects de la résolution numérique des équations intégro-différentielles de Volterra.

Le premier chapitre établit les bases nécessaires à la compréhension des problèmes abordés. Il présente les définitions clés et les outils mathématiques fondamentaux qui seront utilisés tout au long de l'étude.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons les équations intégrales linéaires et les équations intégro-différentielles. Nous fournissons des définitions précises de ces types d'équations, ainsi que des exemples pour illustrer leur utilisation dans divers domaines. Une attention particulière est accordée aux propriétés et aux caractéristiques spécifiques de ces équations, qui nécessitent des méthodes de résolution particulières.

Le troisième chapitre se concentre sur les méthodes analytiques pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra. Nous présentons différentes approches analytiques pour obtenir des solutions exactes. En outre, nous introduisons les polynômes de Bernoulli et d'Euler.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations intégrao-différentielles de Volterra. Nous proposons deux méthodes numériques spécifiques pour obtenir des solutions approchées : la méthode de collocation d'Euler et la méthode de

Galerkin-d'Euler. Ces méthodes ont été choisies pour leur efficacité et leur précision démontrées dans la littérature. Nous décrivons en détail les étapes de mise en œuvre de ces méthodes et discutons de leurs performances en les appliquant à plusieurs exemples représentatifs.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales et certaines défnitions et théorémes que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espase vectoriel normé

Les espaces vectoriels normés sont largement utilisés en mathématiques et en physique .Ils permettent de définir des concepts tels que la convergence de suites de vecteurs , la continuité des fonctions et la notion de distance .Les espaces vectoriels normés sont également la base de la théorie de l'analyse fonctionnelle.

Définition 1.1.1 *Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ $(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une norme sur V est une fonction $\| \, . \, \|: V \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

Pour tout x, y de V et λ de $\mathbb{k}$

1. Positivité: $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. Homgénéité absolue : $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

3. Inégalité trianglaire:$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   Un espace vectoriel V muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.

1.1.2 Espace de Banach:

Définition 1.1.2 *(suite de cauchy)Soit V un espace vectoriel normé on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0,\ \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.3 *Un espace vectoriel normé V est dit complet si tout les suites de cauchy convergent dans V.*

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.

Exemple 1.1.1 *Tout espace véctoriel normé de dimension finie (en particulier $\mathbb{R}^n$) est un espace de Banach.*

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.4 *Soit H un espace vectoriel normé. On appelle produit scalaire sur H toute fonction $\langle .,. \rangle :\ H \times H \to \Bbbk$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

Pour tout x, y, z de H, et α, β de $\Bbbk$.

1. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

Définition 1.1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Remarque 1.1.1 *À partir du produit scalaire on peut définir une norme induite par :*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

qui est appellée norme euclidienne ou norme de Hilbert.

Exemple 1.1.2 $L^2([a,b])$ *l'espace des fonctions de carées intégrables est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire:*

$$\forall f, g \in L^2([a,b]) :\ \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

1.2 Notions sur les opérateurs:

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels, une application $A : E \to F$ est appelée opérateur linéaire si*

Pour tout $\varphi, \psi \in E$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A(\varphi) + \beta A(\psi)$$

Rappelons les deux sous espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire A :

-Le noyau de A est le sous-espace de E : $N(A) = \{\varphi \in E, A\varphi = 0\}$.

- L'image de A est le sous-espace de F : $R(A) = \{\psi \in F, \exists\varphi \in E, A\varphi = \psi\}$.

Remarque 1.2.1 *Un opérateur$A : E \to F$ est dit de rang fini si et seulement si son image $R(A)$ est de dimension finie .*

1.2.2 Opérateurs bornés

Définition 1.2.2 *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que:*

$$\|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E$$

Définition 1.2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $L(E, F)$, et $L(E)$ si $E = F$.

Proposition 1.2.1 *Pour tout opérateur linéaire continu la norme $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$ (sur la boule unité) est finie .*

Théorème 1.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A :$E \to F$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) *A est borné.*

2) *A est continu sur E.*

3) *A est continu à l'origine.*

Théorème 1.2.2 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et par conséquent tout sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

1.2.3 Opérateurs compacts

Les opérateurs compacts jouent un rôle essentiel dans divers domaines de matématiques ,tels que l'analyse fonctionnelle,l'équation aux dérives partielles ,la théorie des opérateurs.

Définition 1.2.4 *(Relativement compact).Soit E un espace vectoriel normé et $G \subset E$. G est relativement compact si pour toute suite (u_n) de G, il existe une sous suite $\left(u_{n(k)}\right)$ qui converge dans E.*

Définition 1.2.5 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire. A est dit compact si et seulement si l'une des trois propositions suivantes est vérifiée:*

1) Pour tout ensemble borné $G \subseteq E$, $A(G)$ est relativement compact dans F.

2) L'image de la boule unitaire ouverte $A(B)$ est relativement compacte dans F .

3) Pour toute suite bornée (u_n) dans E, il existe une sous-suite (Au_{nk}) de (Au_n) qui converge dans F.

Théorème 1.2.3 *Soit A_n une suite des opérateurs compacts définis d'un espace normé E dans un espace normé F . Si A_n converge uniformément vers un opérateur A.i.e*

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0$$

alors l'opérateur A est compact.

Théorème 1.2.4 *l'opérateur identique I_d de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

1.2.4 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement.

Opérateurs intégrals

Définition 1.2.6 *On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme*

$$A\varphi\left(x\right)=\int_{G_2}k(x,t)\varphi\left(t\right)dt,\qquad x\in G_1$$

où $k(x\ t)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1\times G_2$ dite noyau de l'opérateur intégral A, et $\varphi\left(t\right)$ est une fonction mesurable définie sur G_1.

Exemple 1.2.1 *(Opérateur intégral de volterra). Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. l'opérateur intégral de volterra défini comme suit :*

$$A\varphi\left(x\right)=\int_a^x k(x,t)\varphi\left(t\right)dt,\qquad a\leq t\leq x\leq b$$

Norme d'un opérateur intégral

Soit A un opérateur intégral défini sur $L^p(G_1)$, alors pour tout p et q conjugués $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ avec $(1\leq p,q\leq\infty)$ la norme de l'opérateur A est donnée par:

$$\left\Vert A\right\Vert_p=\begin{cases}(\int_{G_1}(\int_{G_2}\left\vert k(x,t)\right\vert^q dt)^{\frac{p}{q}}dx)^{\frac{1}{p}}, & 1<p<\infty\\ \int_{G_1}ess\sup\left\vert k(x,t)\right\vert dx, & \text{pour } p=1\\ ess\sup\int_{G_2}\left\vert k(x,t)\right\vert dt, & \text{pour } p=\infty\end{cases}$$

où $k(x,t)$ une fonction mesurable défnie sur un ensemble mesuré $G_1\times G_2$.

Théorème 1.2.5 *Soit A un opérateur intégral de norme finie*

$$\left\Vert A\right\Vert_p<\infty$$

alors A est un opérateur linéaire continu de $L^p(G_1)$ dans $L^p(G_2)$ De plus, on a:

$$\left\Vert A\varphi\right\Vert_p\leq\left\Vert A\right\Vert_p\left\Vert\varphi\right\Vert_p$$

Théorème 1.2.6 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continue est un opérateur compact .*

Preuve. En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$, ($\|\varphi\| \leq M$, pour tout $\varphi \in E$) , on a:

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y\in G} |k(x,t)|\,, \quad \forall x \in G \text{ et } \varphi \in E$$

D'où l'ensemble $A(E)$ est borné. L'ouprateur k est uniformément continu sur le compact, $G \times G$.

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, t, z \in G, |x - y| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(t,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|G|}$$

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon, \text{ pour tout } \varphi \in E, \forall x, t \in G \text{ avec } |x - t| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théoréme d'Arzelà-Ascoli. Alors A est compact . ■

1.3 Notions d'analyse numérique

1.3.1 Méthodes spectrales

L'objectif de cette section est de présenter des méthodes numériques basées sur une approximation spectrale pour les équations intégro-différentielles.

Méthode de collocation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.3.1}$$

L'équation (1.3.1) peut être mise sous la forme d'une équation fonctionnelle linéaire.

$$\varphi(x) - A\varphi(x) = f(x) \tag{1.3.2}$$

Pour la solution de l'équation (1.3.1) dans l'espace fonctionnel complet , $C([a\ \ b])$, ou $L^2([a\ b])$ est généralement pris.

On choisit une suite de sous-espaces de dimension finie V_n $(\dim V_n = n.)$, $n \geq 1$, et soit $\{\psi_1, ...\psi_n\}$ une base de V_n.

On cherche la fonction approximative $\varphi_n(x) \in V_n$ de la fonction $\varphi(x)$ donnée par.

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(x), \quad x \in [a \quad b] \tag{1.3.3}$$

Pour déterminer les coefficients (α_i), on substituant, cette fonction dans l'équation (1.3.3) et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens ou le résidu $r_n(x)$ est nul.

avec

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \varphi(x) - A\varphi(x) - f(x) \\
r_n(x) &= \varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt - f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_a^x k(x,t)\psi_i(t)dt - f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\psi_i(x) - \int_a^x k(x,t)\psi_i(t)dt \right] \alpha_i - f(x)
\end{aligned}$$

Choisissant les points distincts, $x_1, x_2......x_n \in [a \quad b]$ et exiger.

$$r_n(x_j) = 0, \quad j = 1....n \tag{1.3.4}$$

La condition (1.3.4) nous conduit à déterminer les coefficients $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\}$ solution du système linéaire.

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\psi_i(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j,t)\psi_i(t)dt \right] \alpha_i = f(x_j), \quad j = 1, ..., n \tag{1.3.5}$$

qui s'écrit sous la forme $\quad U\alpha = F$

où

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^{n} \left[\psi_i(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j,t)\psi_i(t)dt \right], \ j = 1, ..., n, \\
\alpha &= \alpha_i, \ i = 1, ..., n, \\
F(x_j) &= f(x_j), \quad j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Evidemment, ce systéme admet une solution unique si $\det(U) \neq 0$.

Méthode de Galerkin

Soit V un espcace de Hilbert on se donne une suite de sous espace $V_n \subset V$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base orthonormale de V_n, on cherche une fonction $\varphi(x) \in V_n$ proche de la solution exacte du probléme original (1.3.3).

Donc pour le probléme (1.3.3), l'idée est de minimiser l'erreur:

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (I - A) \psi_i(x) - f(x) \tag{1.3.6}$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (I - A) \psi_i(x) - f(x), \psi_j(x) \rangle = 0, \quad j = 1....n \tag{1.3.7}$$

ce qui implique

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (I - A) \psi_i(x), \psi_j(x) \rangle - \langle f(x), \psi_j(x) \rangle = 0, \quad j = 1...n \tag{1.3.8}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\langle \psi_i(x), \psi_j(x) \rangle - \langle A\psi_i(x), \psi_j(x) \rangle \right] \alpha_i = \langle f(x), \psi_j(x) \rangle, \quad j = 1...n \tag{1.3.9}$$

Ainsi, on obtient le systéme linéaire:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\int_a^b [\psi_i(x) - A\psi_i(x)] \psi_j(x)\, dx \right] \alpha_i = \int_a^b f(x) \psi_j(x)\, dx \tag{1.3.10}$$

de la forme $\quad U\alpha = F$

où,

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_a^b [\psi_i(x) - A\psi_i(x)] \psi_j(x)\, dx \right], \quad j = 1, ..., n, \\ \alpha &= a_i, \quad i = 1, ..., n, \\ F &= \int_a^b f(x) \psi_j(x)\, dx, \ j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

,

Evidemment, ce systéme admet une solution unique si le $\det(U) \neq 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et intégro-différentielles

Dans ce chapitre, on donne des défnitions sur des équations intégrales linéaires et équations intégro-différentielles linéaires.

2.1 Classifcation des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales *linéaires* de Fredholm

Définition 2.1.1 *Les équations intégrales linéaires de Fredholm, sont données par la forme:*

$$\psi(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x)\,, \quad a < x, t < b. \tag{2.1.1}$$

où $k(x,t)$ et $f\ (x)$ sont des fonctions connues et λ un paramétere non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

1) *Si $\psi(x) = 0$ l'équation (2.1.1) s'écrit sous la forme:*

$$\lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x)\,. \tag{2.1.2}$$

appelée équation intégrale de Fredholm du premier espèce.

2) *Si $\psi(x) = 1$ léquation (2.1.1) s'écrit sous la forme:*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2.1.3}$$

appelée équation intégrale de Fredholm du second espèce.

2.1.2 Equations intégrales de Volterra

Définition 2.1.2 *Les équations intégrales linéaires de Volterra, sont données par la forme:*

$$\psi(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad a < x, t < b. \tag{2.1.4}$$

où $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètere non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Il convient de noter que (2.1.4) peut être considéré comme un cas spécial d'équation intégrale de Fredholm lorsque le noyau $k(x,t) = 0$ pour $t > x$.

Comme pour les équations de Fredholm, les équations intégrales de Volterra sont de deux types, selon la valeur de $\psi(x)$ à savoir :

1) *Si $\psi(x) = 0$ l'équation (2.1.4) s'écrit sous la forme:*

$$\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2.1.5}$$

appelée équation intégrale de Volterra du premier espèce.

2) *Si $\psi(x) = 1$ léquation (2.1.4) s'écrit sous la forme:*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2.1.6}$$

appelée équation intégrale de Volterra de second espèce.

2.1.3 Equation intégrale de Volterra-Fredholm

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints, apparait dans une équation intégrale.

Définition 2.1.3 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad x \in [a \;\; b] \tag{2.1.7}$$

où les fonctions $k_1(x,t)$, $k_2(x,t)$ et $f(x)$sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue et λ_1 et λ_2 sont des paraméteres non nuls.

2.2 Classification des équations intégro-différentielles

2.2.1 Equations intégo-différentielles de Fredholm

Définition 2.2.1 *Les équations intégro-différentielles de Fredholm, sont données par :*

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{n} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt \\ \varphi^{(k)}(a) = \alpha_k, \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ indique la $m^{ième}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètere non nul,et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.2.1 *L'équation*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du premier ordre

et l'équation

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du second ordre.

2.2.2 Equations Integro-différentielles de Volterra

Définition 2.2.2 *Les équations intégro-différentielles de Volterra se présentent sous la forme :*

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{n} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt \\ \varphi^{(k)}(a) = \alpha_k, \ 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ indique la $m^{ième}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètere non nul, *et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.*

Exemple 2.2.2 *L'équation*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

est une équation intégro-différentielle de Volterra du premier ordre, et l'équation

$$\begin{cases} \varphi''(x) = -x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 0, \ \varphi'(0) = -1. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

est une équation intégro-différentielle de Volterra du second ordre.

2.2.3 Equation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm, est une combinaison d'intégrales disjointes de Volterra et de Fredholm et d'un opérateur différentiel, peut apparaître dans une seule intégrale.

Définition 2.2.3 *On appelle équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm une équation de la forme*

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{n} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)\,dt \\ \varphi^{(k)}(a) = a_k, \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ indique la $m^{ième}$ dérivée de $\varphi(x)$ et $k_1(x,t)$, $k_2(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ_1 et λ_2 sont des paraméteres non nuls, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.2.3 *L équation intégro-différentielle :*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

est une équation intégro-différentielle de Volterra-Fredholm du premier ordre.

2.3 Conversion d'une équation intégro-différentielle de Volterra à une équation intégrale de Volterra de second espèce

Nous pouvons convertir l'équation intégro-différentielle de Volterra en une équation intégrale de Volterra équivalente, à condition que le noyau $k(x,t) = k(x-t)$. Ceci peut être réalisé en intégrant les deux côtés de l'équation et en utilisant les conditions initiales.Pour déterminer la solution exacte, on utilisant la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^x \varphi(t)\,dtdt &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \\
\int_0^x (\int_0^x (\int_0^x \varphi(t)\,dt)dt)dt &= \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x .... \int_0^x}_{m} \varphi(t)\,\underbrace{dt...dt}_{m} = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x (x-t)^{m-1}\varphi(t)\,dt \tag{2.3.1}$$

Exemple 2.3.1 *Pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante:*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x \varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

en la convertissant en une équation intégrale de Volterra. En intégrant les deux côtés de léquation (2.3.2) de 0 à x et en utilisant la condition initiale, ainsi qu'en convertissant l'intégrale double en intégrale simple. De la formule (2.3.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^x \varphi'(x)\,dx &= \int_0^x (2-\frac{x^2}{4})dx + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x \varphi(t)\,dtdt \\
\varphi(x) - \varphi(0) &= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$$

Chapitre 3

Résolution analytique des E.I.D de Volterra de second ordre

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes Analytiques pour obtenir la solution de l'équations intégro-différentielle de Volterra.

3.1 La méthode de solution sous forme de série

Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra d'ordre m :

$$\varphi^{(m)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^x h(t)\varphi(t)\,dt, \tag{3.1.1}$$

$$\varphi^{(k)}(a) = a_k, \quad 0 \leq k \leq m-1 \tag{3.1.2}$$

supposons que

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t)$$

où les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$, $(i = 1, ..., n)$ sont continues et linéairement indépendantes. et la solution $\varphi(x)$ de (3.1.1) est une fonction analytique, telleque

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3.1.3}$$

où a_k sont des constantes à déterminés.

Exemple 3.1.1 *Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra de second ordre*

$$\varphi''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = 1. \tag{3.1.4}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation,(3.1.3) on trouve:

$$\varphi''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} \tag{3.1.5}$$

En remplaçant l'équation (3.1.5) et (3.1.3) dans l'équation, (3.1.4) on obtient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} = 1 + x + \int_0^x (x-t)\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt \tag{3.1.6}$$

Utilisons les conditions initiales,nous avons $a_0 = a_1 = 1$

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ... = 1 + x + \int_0^x x\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt - \int_0^x t\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt$$

$$= 1 + x + (x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{a_2}{3}x^4 + \frac{a_3}{4}x^5 + ...) - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{a_2}{4}x^4 + \frac{a_3}{5}x^5 + ...) \tag{3.1.7}$$

En identifiant les coefficients de même puissance en x *dans les deux membres, on trouve que:*

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_4 = \frac{1}{4!}$$

où ce résultat donne:

$$a_k = \frac{1}{k!}, \qquad k \geq 0.$$

Pour $k \geq 0$*,en substituant ce résultat dans (3.1.3), on obtient la solution de la série*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\ &= e^x \end{aligned}$$

3.2 La méthode de décomposition d'Adomian

Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra définie par

$$\varphi^{(m)}(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi^{(k)}(a) = a_k, \ \ 0 \leq k \leq m-1 \tag{3.2.1}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ est la m^{ième}dérivée de $\varphi(x)$ par rapport à x et a_k des constantes.

En intégrant les deux côtés de l'équation (3.2.1) de 0 à x, nous obtenons.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1} f(x) + L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right) \tag{3.2.2}$$

la série $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a_k x^k$ est obtenue en utilisant les conditions initiales, et L^{-1} est un opérateur d'intégration. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en définissant la solution $\varphi(x)$ de l'équation (3.2.1) par une série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{3.2.3}$$

En substituant l'équation (3.2.3) à l'équation (3.2.2), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1} f(x) + L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\,dt\right) \tag{3.2.4}$$

Cette équation peut s'écrire explicitement comme suit

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + ... = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1} f(x) + L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt\right)$$

$$+L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi_1(t)\,dt\right) + L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi_2(t)\,dt\right) + L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi_3(t)\,dt\right) + ... \tag{3.2.5}$$

Pour déterminer les composantes $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.... de la solution, $\varphi(x)$ nous établissons la relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1} f(x) && (3.2.6) \\ \varphi_{n+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt\right), \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1 *Utiliser la méthode d'Adomian pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra*

$$\varphi''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 1 \tag{3.2.7}$$

En appliquant l'opérateur intégral double L^{-1} défini par

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dx dx. \tag{3.2.8}$$

aux deux côtés de (3.2.7), c'est-à-dire en intégrant les deux côtés de (3.2.7) deux fois de 0 *à* x*, et en utilisant les conditions initiales données, nous obtenons*

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}(\int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt)$$

En utilisant la série de décomposition (3.2.2) et la relation de récurrence (3.2.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\ \varphi_1(x) &= L^{-1}(\int_0^x (x-t)\, \varphi_0(t)\, dt) \\ &= \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi la solution sous forme de série

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + ...$$

et cela converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = e^x$$

3.3 Polynômes de Bernoulli et d'Euler

3.3.1 Polynômes de Bernoulli

Définition 3.3.1 *Les polynômes de Bernoulli, notés* $B_n(x)$*, attribués à Daniel Bernoulli, peuvent être définis par récurrence au moyen des trois conditions :*

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ \text{pour tout } n &: \quad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \\ \int_0^1 B_n(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

Les nombres de Bernoulli

La relation de récurrence *On définit ces nombres par la relation de récurrence*

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_n &= \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli

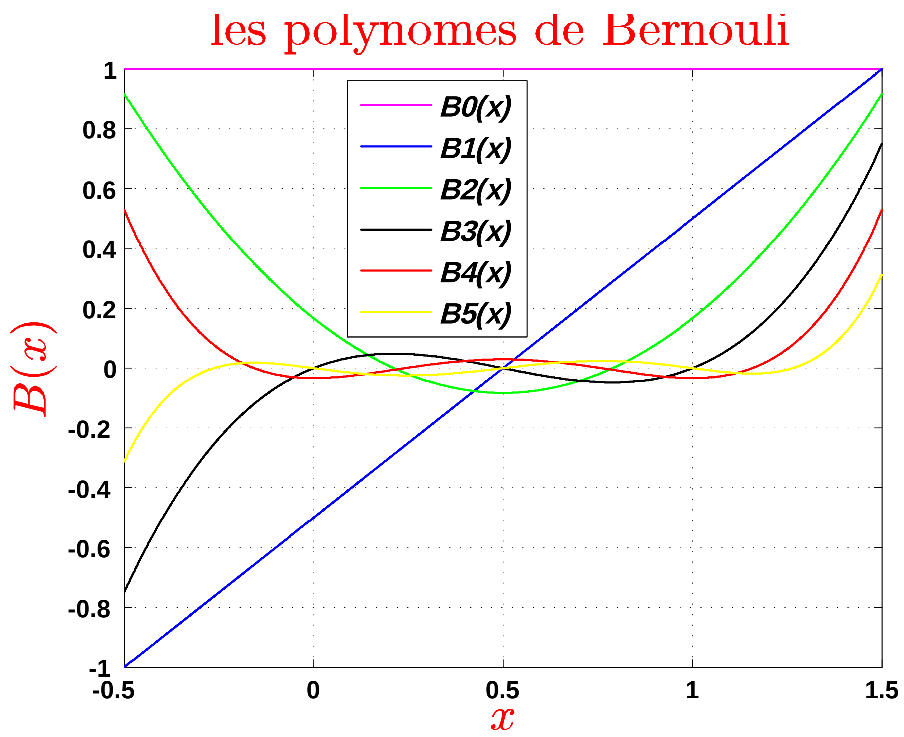
$$B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_3 = 0,\ B_4 = -1/30,\ B_5 = 0$$

La fonction génératrice des polynomes de Bernouli:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}, \qquad n \geq 0$$

Voici les premières polynômes de Bernoulli

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \end{aligned}$$



Propriétés des polynômes de Bernoulli

1)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

2)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

3)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

4)

$$\text{Pour tout } n \geq 0, \qquad B_n(0) = B_n(1)$$

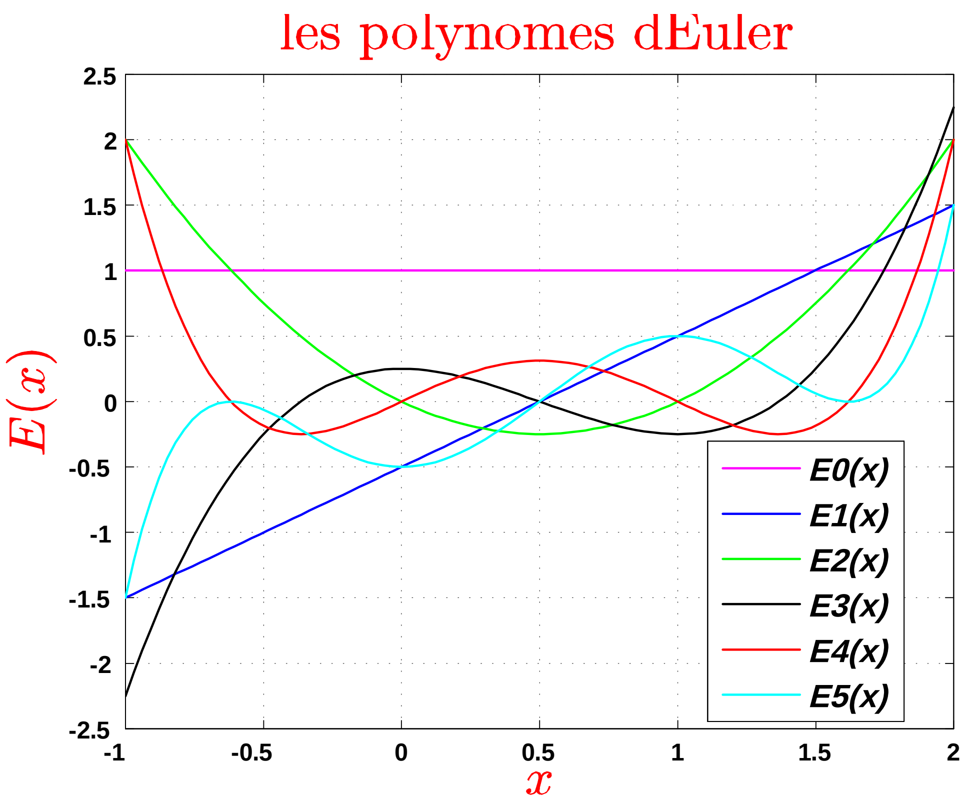
3.3.2 Polynômes d'Euler

Définition 3.3.2 *Les polynômes d'Euler sont les polynômes de degré n, notés $E_n(x)$, définis par :*

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1 \\ E_n(x) &= x^n - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i E_i(x) \quad et \quad , n \geq 1. \end{aligned}$$

Les premiers polynômes d'Euler

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1 \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ E_2(x) &= x^2 - x \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



propriétés des polynômes d'Euler

1)

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$$

2)

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad E'(x) = nE_n(x)$$

3)

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

Chapitre 4

Méthodes numériques pour les équations intégro-différentielles

La résolution analytique des équations intégro-différentielles de Volterra peut être complexe et exige souvent des compétences avancées en mathématiques. Dans certains cas, il peut être nécessaire d'utiliser des méthodes numériques ou des approximations pour obtenir une solution satisfaisante.

4.1 Méthode de collocation d'Euler

On considère l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante:

$$\begin{cases} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \\ \varphi^{(k)}(a) = \alpha_k \ , a \leq t, x \leq \ b \ , \ m \geq 1, \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ indique la m^{ième} dérivée de $\varphi\,(x)$,et $k(x,t)$ une fonction continue et carré integrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi(x)$ la fonction inconnue, λ est un paramétre m est un entier.

On utilse la méthode de collocation la solution approchée est donnée par

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} E_i(x) a_i \tag{4.1.2}$$

où

où $E_i(x)$ sont les polynome d'Euler de degré i $(i = 0, 1, ..., n)$ défini par la relation:

$$E_n(x) = x^n - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i E_i(x),\ n \geq 1.$$

et a_i des coefficients à déterminer.

Posons

$$E(x) = (E_0(x), E_1(x), ..., E_n(x)),\ \text{ et }\ A = (a_0, a_1, ..., a_n)^t$$

En intégrant l'équation integro- différentielle (4.1.1) de a à x, m fois on obtient

$$\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} \varphi^{(m)}(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m} = \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m}(\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m},\quad m \geq 1 \tag{4.1.3}$$

d'où

$$\varphi(x) = (\varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m}) +$$

$$\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m}(\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m}\quad, m \geq 1 \tag{4.1.4}$$

On remplace (4.1.2) dans (4.1.4) nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(x)a_i = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x ... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m}(\lambda \int_a^x k(x,t)\sum_{i=0}^{n} E_i(t)a_i dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m}\quad, m \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{n}(E_i(x) - \lambda \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m}(\int_a^x k(x,t)E_i(t)dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m})a_i =$$

$$\varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m}, m \geq 1 \tag{4.1.5}$$

l'équation (4.1.5) s'écrite sous la forme

$$U(x)A = F(x) \tag{4.1.6}$$

où

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{i=0}^{n}(E_i(x) - \lambda \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\int_a^x k(x,t)E_i(t)dt) \underbrace{dxdx...dx}_{m}) \ , \ m \geq 1. \\ A &= a_i \ , i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

$$F(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... +$$

$$\int_a^x ... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a) \underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x) \underbrace{dxdx...dx}_{m}, \ m \geq 1$$

pour $x_j = a + \dfrac{b-a}{N} j, \ \ j = 0, ..., n$

$$U(x_j)A = F(x_j) \tag{4.1.7}$$

où

$$U(x) = \begin{bmatrix} U_0(x_0) & U_1(x_0) & . & . & U_n(x_0) \\ U_0(x_1) & U_1(x_1) & . & . & U_n(x_1) \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ U_0(x_n) & U_0(x_n) & . & . & U_n(x_n) \end{bmatrix} , \ F(x) = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ . \\ . \\ F(x_n) \end{bmatrix} , \ A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

Ce systéme admet une solution unique si le $\det U(x) \neq 0$.

les conditions initiales du (4.1.1) donnent

$$\varphi_n^{(m-1)}(a) = \sum_{i=0}^{n} E_i(a)\alpha_i = \alpha_{m-1} \tag{4.1.8}$$

Les inconnus (a_i) $(i = 0, 1, .., n)$ sont déterminés en résoudre le systéme linéaires d'équations (4.1.7) et (4.1.8). La substitution de ces valeurs dans (4.1.2) donne la solution approximative.

4.2 Méthode de Galerkin d'Euler

On considére l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante:

$$\begin{cases} \varphi^{(m)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t) \\ \varphi^{(k)}(a) = \alpha_k \ , a \leq t, x \leq \ b \ , \ m \geq 1, \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

où $\varphi^{(m)}(x)$ indique la m^{ième} dérivée de $\varphi(x)$, $k(x,t)$ est une fonction continue et carré integrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi(x)$ la fonction inconnue, λ un paramétre et m un entier.

On utilse la méthode de Galerkin la solution approchée est donnée sous la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} E_i(x) a_i \tag{4.2.2}$$

où $E_i(x)$ sont les polynome d'Euler de degrie i $(i = 0, 1, ..., n)$ définé par la relation:

$$E_n(x) = x^n - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i E_i(x) \quad ,n \geq 1$$

et a_i des coefficients à déterminer.

posons

$$E(x) = [E_0(x), E_1(x), ..., E_n(x)] \quad et \quad A = [a_0, a_1, ...a_n]^t$$

Substitant (4.2.2) dans (4.2.1), et en intégrant l'équation integro- différentielle (4.2.1) de a à x m fois on obtient

$$\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} \varphi^{(m)}(x) \underbrace{dxdx...dx}_{m} = \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x) \underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt) \underbrace{dxdx...dx}_{m}, \ \ m \geq 1 \tag{4.2.3}$$

d'où

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a) \underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+ \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x) \underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt) \underbrace{dxdx...dx}_{m} \quad , m \geq 1 \tag{4.2.4}$$

on remplace (4.2.2) dans l'équation (4.2.4) nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} E_i(x)a_i = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+ \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m} + \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\lambda \int_a^x k(x,t) \sum_{i=0}^{n} E_i(t)a_i dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m} \ \ ,m \geq 1$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} (E_i(x) - \lambda \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\int_a^x k(x,t)E_i(t)dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m})a_i =$$

$$\varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m}$$

$$+ \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m}, \ \ m \geq 1, \ \ \ j = 0...n \tag{4.2.5}$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux ctés de (4.2.5) par E_j et puis en intégrant parraport à x de a à b, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} (\int_a^b (E_i(x) - \lambda \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} \left[\int_a^x k(x,t)E_i(t)dt\right] \underbrace{dxdx...dx}_{m})E_j\,(x)\,dx)a_i =$$

$$\int_a^b (\varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x .... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a)\underbrace{dxdx...dx}_{m})E_j\,(x)\,dx$$

$$+ \int_a^b (\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{m})E_j\,(x)\,dx, m \geq 1, \ \ j = 0...n \tag{4.2.6}$$

l'équation (4.2.6) sécrite sous la forme

$$U(x)A = F(x)$$

où

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{i=0}^{n} (\int_a^b (E_i(x) - \lambda \underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} (\int_a^x k(x,t)E_i(t)dt)\underbrace{dxdx...dx}_{m})E_j\,(x)\,dx), j = 0, ..., n \ ,m \geq 1. \\ A &= a_i, \ i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_a^b (\varphi(a) + \int_a^x \varphi'(a)dx + \int_a^x \int_a^x \varphi''(a)dxdx + ... + \int_a^x ... \int_a^x \varphi^{(m-1)}(a) \underbrace{dxdx...dx}_{m}) E_j(x)\, dx$$

$$+ \int_a^b (\underbrace{\int_a^x ... \int_a^x}_{m} f(x) \underbrace{dxdx...dx}_{m}) E_j(x)\, dx, m \geq 1, \; j = 0...n$$

Ce systéme admet une solution unique si $\det U(x) \neq 0$.

les conditions initiales du (4.2.1) donnent:

$$\varphi_n^{(m-1)}(a) = \sum_{i=0}^{n} E_i(a) a_i = \alpha_{m-1} \tag{4.2.7}$$

Pour déterminer les inconnus (a_i) $(i = 0, 1, ..., n)$ en resolvant le systéme linéaires d'équations (4.2.6) et (4.2.7). La substitution de ces valeurs dans (4.2.2) donne la solution approximative.

4.3 Exemples illustratifs

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégro-différentielles linéaires de Volterra par la méthode de Euler-collocation et Euler -Galarkin.

Exemple 01.Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra:

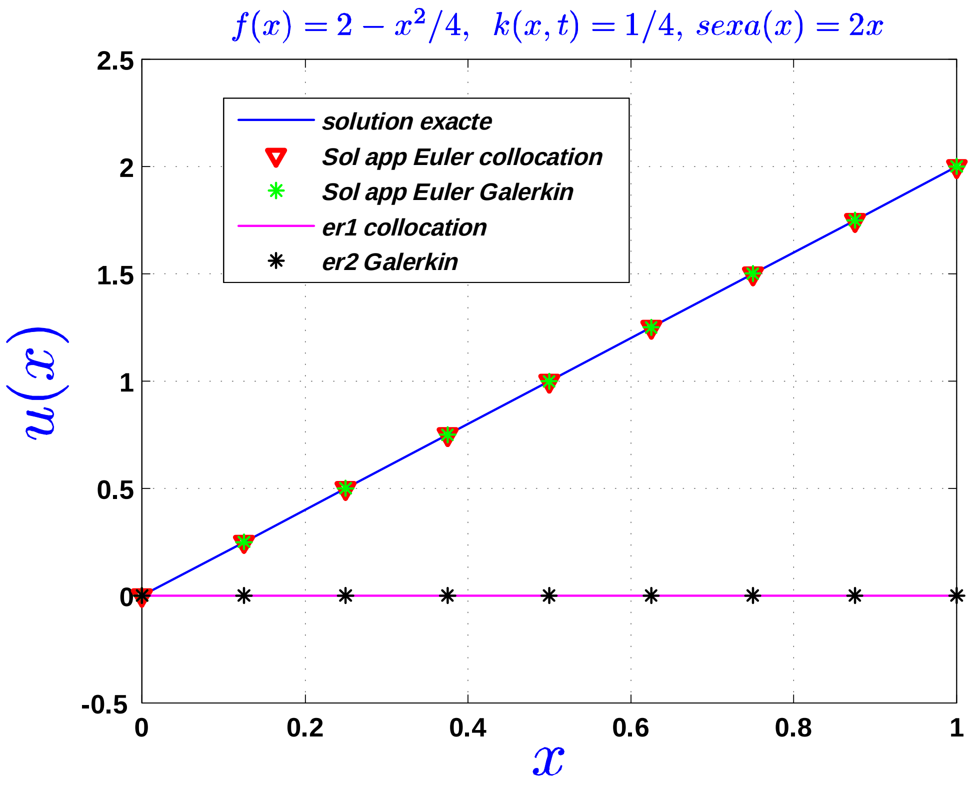
$$\begin{cases} \varphi'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x \varphi(t)\, dt, \; 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = 2x$$

Table 01. *Nous présentons la solution approchée φ_{appE} obtenue par la méthode d'Euler-collocation et d'Euler-Galerkin , l'erreur est calculée pour $N = 8$*

Val de x	$\varphi_{ex}(x)$	$\varphi_{appE}coll$	$\varphi_{appE}Gal$	Err.coll	Err.Gal
0000	0000	-0.0000	-0.0000	2.9416e-012	3.0949e-08
1.25e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	2.5000e-01	1.4349e-011	1.2153e-06
2.50e-01	5.0000e-01	5.0000e-01	5.0000e-01	2.3553e-011	2.2722e-06
3.75e-01	7.5000e-01	7.5000e-01	7.5000e-01	2.9156e-011	2.9807e-06
5.00e-01	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	3.0329e-011	3.2373e-06
6.25e-01	1.2500e+00	1.25000e+00	1.2500e+00	2.6903e-011	3.0046e-06
7.50e-01	1.5000e+00	1.5000e+00	1.5000e+00	1.9389e-011	2.3163e-06
8.75e-01	1.7500e+00	1.7500e+00	1.7500e+00	8.9111e-012	1.2728e-06
1.00e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	2.9416e-012	3.1126e-08



Exemple 02.Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra:

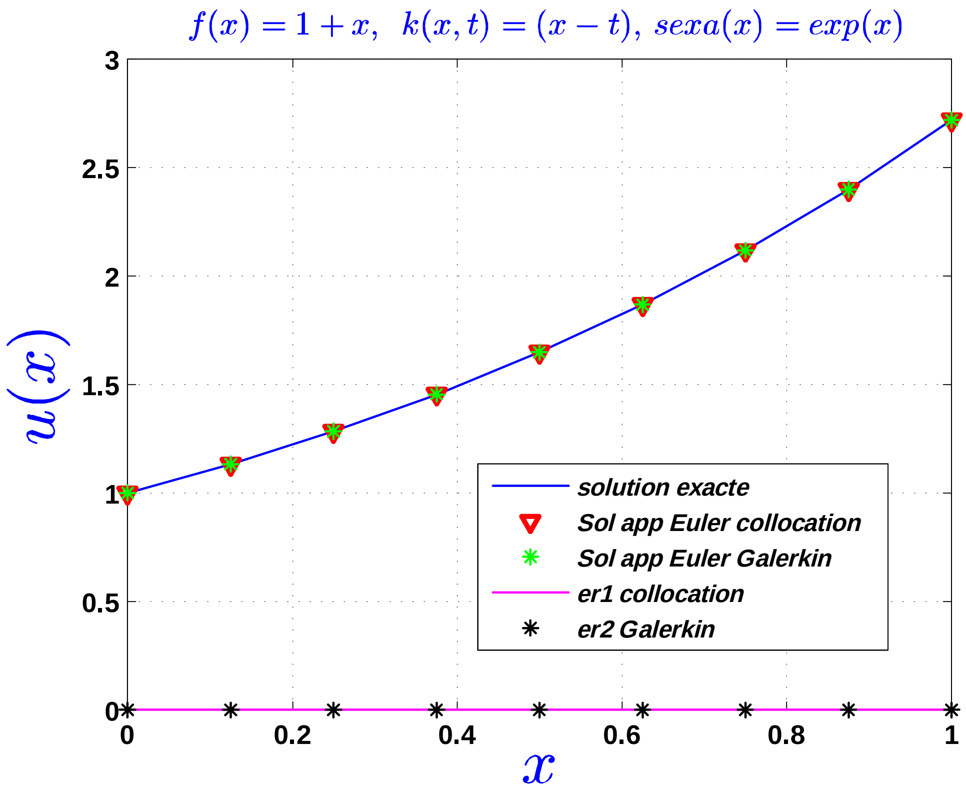
$$\begin{cases} \varphi''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \ 0 \le t \le x \le 1 \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = e^x$$

Table 02. *Nous présentons la solution approchée φ_{appE} , obtenue par la méthode d'Euler-collocation et d'Euler Galerkin l'erreur est calculée pour $N = 8$.*

Val de x	$\varphi_{ex}(x)$	$\varphi_{appE}coll$	$\varphi_{appE}Gal$	Err.coll	Err.Gal
00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.8947e-012	6.5152e-08
1.25e-01	1.1331e+00	1.1331e+00	1.1331e+00	6.7302e-013	2.2672e-07
2.50e-01	1.2840e+00	1.2840e+00	1.2840e+00	6.5725e-013	4.9268e-07
3.75e-01	1.4549e+00	1.4549e+00	1.4549e+00	1.9167e-012	6.8832e-07
5.00e-01	1.6487e+00	1.6487e+00	1.6487e+00	2.9485e-012	7.7572e-07
6.25e-01	1.8682e+00	1.8682e+00	1.8682e+00	3.6373e-012	7.3789e-07
7.50e-01	2.1170e+00	2.1170e+00	2.1169e+00	3.9222e-012	5.8427e-07
8.75e-01	2.3988e+00	2.3988e+00	2.3988e+00	3.8121e-012	3.4668e-07
1.00e+00	2.7182e+00	2.7182e+00	2.7182e+00	3.3964e-012	6.4913e-08



Exemple 03.Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra :

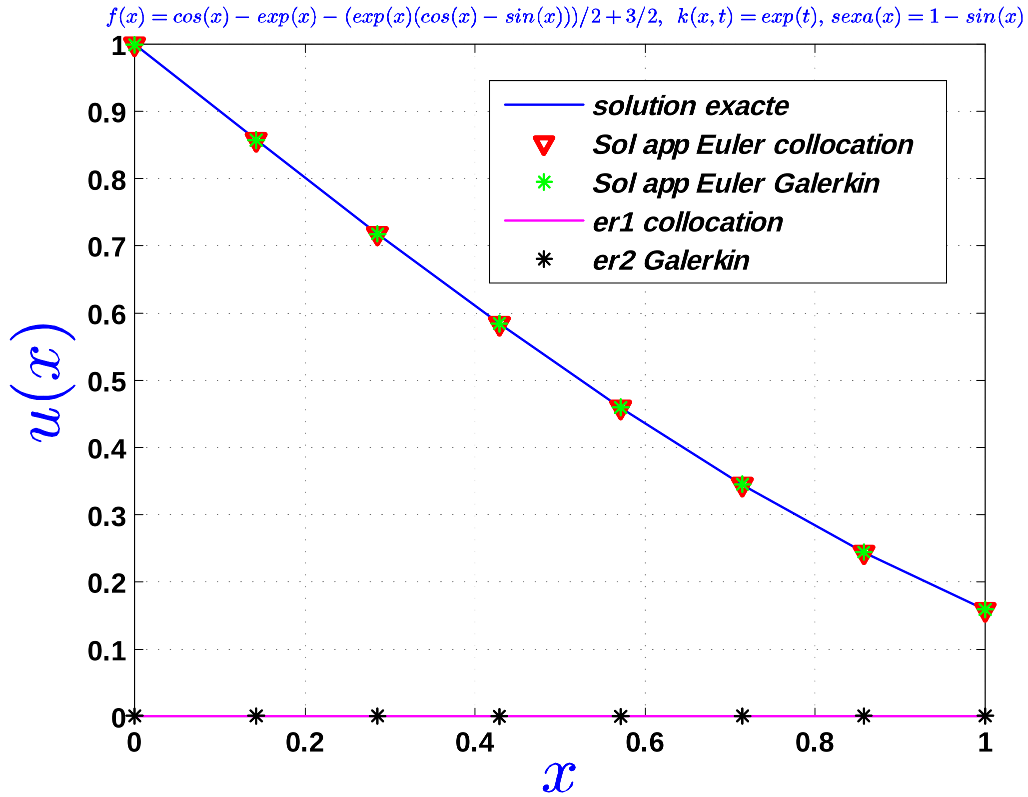
$$\begin{cases} \varphi'''(x) = \cos(x) - e^x - \frac{(e^x(\cos(x)-\sin(x)))}{2} + \frac{3}{2} + \int_0^x e^t \varphi(t)\, dt, \ \ 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = -1, \quad \varphi''(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = 1 - \sin(x)$$

Table 03. *Nous présentons la solution approchée φ_{appE}, obtenue par la méthode d'Euler- collocation et d'Euler Galerkin, l'erreur est calculée pour $N = 7$.*

Val de x	$\varphi_{ex}(x)$	$\varphi_{appE}\,coll$	$\varphi_{appE}\,Gal$	Err.coll	Err.Gal
00	1.0000e+00	1.0000e+00	0.9992e+00	2.6779e-012	7.4878e-04
1.42e-01	8.5762e-01	8.57628e-01	8.5695e-01	2.5033e-012	6.7539e-04
2.85e-01	7.1815e-01	7.1815e-01	7.1768e-01	2.0685e-012	4.6832e-04
4.28e-01	5.8442e-01	5.8442e-01	5.8425e-01	1.6296e-012	1.7065e-04
5.71e-01	4.5916e-01	4.5916e-01	4.5932e-01	1.7055e-012	1.5965e-04
7.14e-01	3.4492e-01	3.4492e-01	3.4538e-01	2.9462e-012	4.5938e-04
8.57e-01	2.4402e-01	2.4402e-01	2.4469e-01	5.7121e-012	6.7031e-04
1.00e+00	1.5852e-01	1.5852e-01	1.5927e-01	1.0320e-011	7.4876e-04



Exemple 04.Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra :

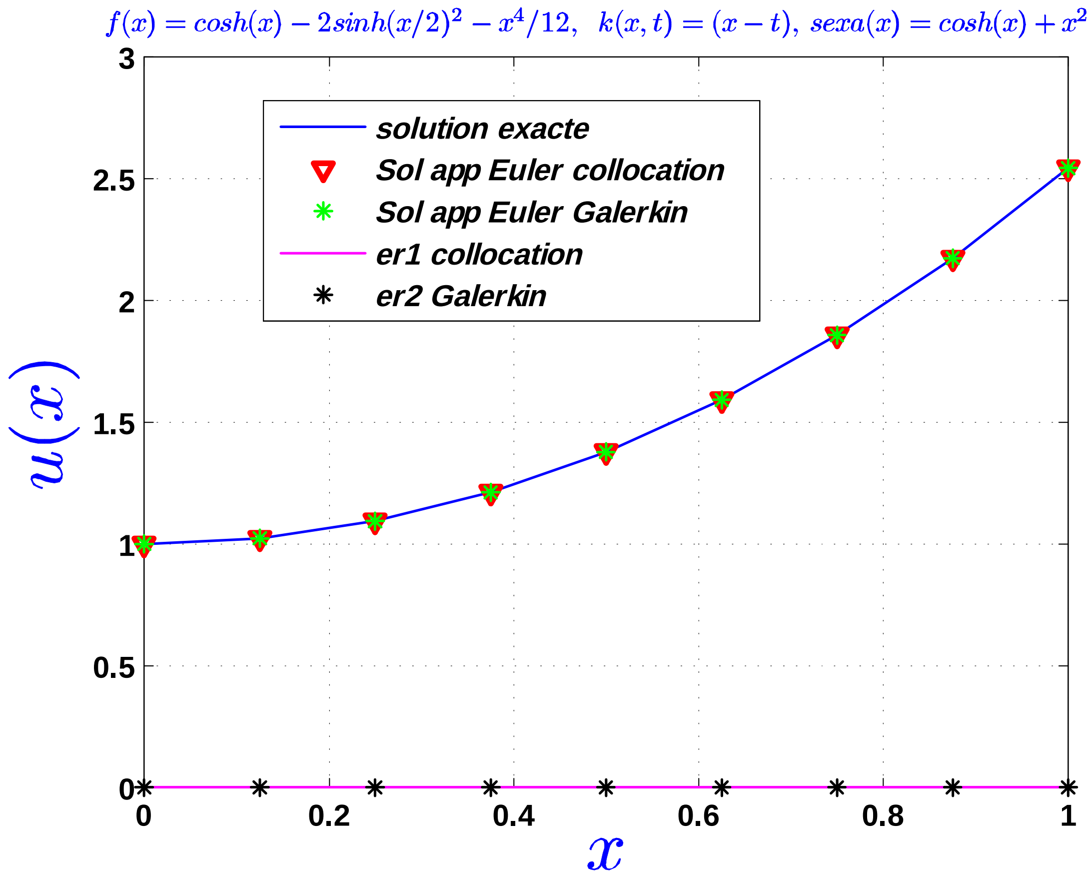
$$\begin{cases} \varphi^{(4)}(x) = \cosh(x) - 2\sinh(\frac{x}{2})^2 - \frac{x^4}{12} + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 3, \quad \varphi'''(0) = 0 \end{cases}$$

la solution exacte donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = \cosh(x) + x^2$$

Table 04. *Nous présentons la solution approchée* φ_{appE} *, obtenue par la méthode d'Euler-collocation et d'Euler Galerkin, l'erreur est calculée pour* $N = 8$.

Val de x	$\varphi_{ex}(x)$	$\varphi_{appE}coll$	$\varphi_{appE}.Gal$	Err.coll	Err.Gal
00	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	2.2649e-014	2.3732e-08
1.25e-01	1.0234e+00	1.0234e+00	1.0234e+00	2.1076e-011	3.0817e-06
2.50e-01	1.0939e+00	1.0939e+00	1.0939e+00	3.8937e-011	5.7143e-06
3.75e-01	1.2117e+00	1.2117e+00	1.2117e+00	5.0863e-011	7.4750e-06
5.00e-01	1.3776e+00	1.3776e+00	1.3776e+00	5.5059e-011	8.0992e-06
6.25e-01	1.5923e+00	1.5923e+00	1.5923e+00	5.0891e-011	7.4934e-06
7.50e-01	1.8571e+00	1.8571e+00	1.8571e+00	3.8981e-011	5.7483e-06
8.75e-01	2.1734e+00	2.1734e+00	2.1734e+00	2.1117e-011	3.1259e-06
1.00e+00	2.5430e+00	2.5430e+00	2.5430e+00	2.2204e-015	2.4162e-08


$f(x) = cosh(x) - 2sinh(x/2)^2 - x^4/12,\ \ k(x,t) = (x-t),\ sexa(x) = cosh(x) + x^2$
solution exacte
Sol app Euler collocation
Sol app Euler Galerkin
er1 collocation
er2 Galerkin
$u(x)$
x
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0.2
0.4
0.6
0.8

Conclusion

Dans ce mémoire, nous proposons une solution numérique basée sur la méthode de collocation d'Euler et la méthode de Galerkin d'Euler pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra. Nous présentons en détail les étapes de ces méthodes. De plus, nous examinons leurs performance en les testant sur plusieurs exemples représentatifs. Les résultats obtenus démontrent que ces méthodes fournissent des approximations précises et robustes des solutions des équations intégro-différentielles de Volterra.

Bibliographie

[1] A. M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

[2] A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific, Singapore,(1997).

[3] A. Rahmoune,Cours d'équations intégrales linéaires et non linéaires,Analyse et techniques de résolution 2018.

[4] Daniel Li ,Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés ,Ellipses Édition Marketing S.A., 2013 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15.

[5] Ganiyu Ajileye , Sikiru A. Amoo ,Numerical solution to Volterra integro-differential equations using collocation approximation,Federal University Wukari Vol 4(1), 2023, pp:1-8.

[6] GI-SANC CHEON, A Note on the Bernoulli and Euler PolynOmials, Applied Mathematics Letters 16 (2003) 365-368, Department of Mathematics, Daejin University Pocheon 487-711, S. Korea.

[7] HAMANI Fatima,Analytical and numerical study of nonlinear integral equations,Thèse de doctorat,Université de M'sila.

[8] Mostefa NADIR and Mustapha DILMI,Euler series solutions for linear integralequations,The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 14, Issue 2, Article 11, pp. 1-7, 2017

[9] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004.

[10] M. Rahman, Integral Equations and their Applications, Dalhousie University, Canada, 2007.

[11] M.M.Rahman, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations Using Galerkin method With Hermite Polynomials, Islamic University Kuchita ,Bangladesh, 201Franck.

[12] Noui DjAIDJA,Etude des équations intégrales de volterra de premiére espéce en utilisant les techniques des splines,Thése de doctorat,Université de M'sila.

[13] Julia Matos,Analyse Fonctionnelle,université de evry 2014/2015.

[14] Shior, M. M, Aboiyar, T. Adee, S. O. and Madubueze, E. C. (2022). A Collocation Method Based on Euler and Bernoulli Polynomials for the Solution of Volterra Integro-Differential Equations. Nig Annals of Pure & Appl Sci. 5(1):281-288.