



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

EDPs et morphologie mathématique

Présenté par :

M^r DJAIDJA Rami

Soutenu publiquement le : 30/06/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r MERZOUGUI.A.*

M.C.A, Université de M'sila

Encadreur : *M^r BENHAMIDOUCHE.N.*

Pr, Université de M'sila

Examineur : *M^r CHOUDER.R*

M.C.B, Université de M'sila

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Egalement, je remercie infiniment Monsieur N.BENHAMIDOUICHE, mon enseignant, mon inspecteur, mon professeur et mon encadreur de recherche pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder en acceptant de diriger ce mémoire, pour la qualité de son encadrement, ses précieuses orientations, sa simplicité et sa patience.

Je tiens à exprimer aussi mes remerciements aux membres de jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce travail. A tous les enseignants du Département des Mathématiques de l'université de M'sila qui ont assuré notre formation durant ce cursus universitaire.

Je remercie mon ami LACHACHE MOHAMED pour son soutien et sa collaboration.

Je remercie mes amis BOUCHERIE, SALEM, DJELID et SAOUDI pour ses encouragements.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont participé de près ou de loin pour l'achèvement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles
et sans limite de
mes chers parents, le symbole de tendresses, pour leurs encouragements et leurs
conseils, qui ne cessent de
me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis
maintenant.

Que Dieu vous protège et que la réussite soit à ma portée pour que je puisse
vous combler de bonheur.

Je dédie ce travail
À tous mes frère et mes sœurs : Wahid, Wassim, Ilham, Lima.
Et à toute ma famille.

À tous ceux qui mon appris à lire et à écrire.

À tous mes enseignants tout au long de ma vie.

À tous mes camarades de la promotion
2018-2019.

Table des matières

1	Traitement de l'image : définitions et propriétés	8
1.1	Une image numérique et mathématique	9
1.1.1	Une image numérique	9
1.1.2	Une image mathématique	10
1.2	Traitement de l'image	10
1.2.1	Définition.	10
1.2.2	Type de traitement de l'image.	11
1.3	Équation de la chaleur et traitement de l'image	14
2	Morphologie Mathématique	16
2.1	Opérateurs morphologiques dans le cas binaire	17
2.1.1	Définition d'une treillis complet	17
2.1.2	L'élément structurant	17
2.1.3	Dilatation binaire	18
2.1.4	L'érosion binaire	21
2.1.5	L'ouverture binaire	23
2.1.6	La fermeture binaire	26
2.2	Opérateurs morphologiques dans le cas fonctionnel	28
2.2.1	Dilatation fonctionnelle	28
2.2.2	Érosion fonctionnelle	29
2.2.3	L'ouverture fonctionnelle	31
2.2.4	La fermeture fonctionnelle	32
2.3	Procédure pratique	34
2.3.1	Langage de programmation utilisé	34
2.3.2	Description de l'application	34
2.4	Etude de différents traitements	35
2.4.1	L'élément structurant utilisé	35
2.4.2	Dans le cas binaire	36
2.4.3	Dans le cas fonctionnel	40
3	EDP et Morphologie	42
3.1	Erosions et dilatations des ensembles/fonctions avec les échelles	43
3.2	Les EDPs associées aux érosions et aux dilatations	44
3.3	Les axiomes morphologiques	46
3.4	Un exemple d'analyse multi-échelles	47
3.4.1	L'équation de la chaleur	47

Table des figures

1.1 Exemple d'image en niveaux de gris, avec son code des pixels du carré sélectionné dans l'image.	9
1.2 Exemple de restauration d'image : à gauche c'est l'image originale bruitée et à droite l'image filtrée par le filtre median.	10
1.3 Exemple de convolution numérique.	11
1.4 Exemple du filtrage de convolution : à gauche l'image initiale en niveaux de gris et à droite l'image filtrée.	12
1.5 Exemple illustre la grossièrement d'un objet par la dilatation et son rétrécissement par l'érosion.	12
1.6 Dilatation (droite) et érosion (gauche) de l'objet binaire en utilisant un élément structurant B circulaire [14].	13
1.7 Exemple d'ouverture d'image avec un élément structurant circulaire à gauche et à droite la fermeture d'image par un élément structurant circulaire[1].	13
1.8 Image gatlin2 (en droit filtrage par le EDP de la chaleur)[1].	14
2.1 Un exemple de treillis : le treillis des couleurs primaires additives	17
2.2 Quelques exemples d'éléments structurants.	18
2.3 Illustration de dilatation binaire de X par B.	18
2.4 Exemple de dilatation binaire[3].	20
2.5 Exemple de dilatation dans le cas d'image représentée comme matricielle.	20
2.6 Illustration de l'érosion binaire de X par B.	21
2.7 Exemple de l'érosion dans l'image binaire[3].	22
2.8 Exemple de l'érosion en cas l'image représentée comme matricielle.	23
2.9 L'ouverture d'un ensemble X par un élément structurant B.	24
2.10 Exemple de l'ouverture dans l'image binaire[3].	25
2.11 L'élément structurant s	25
2.12 La fermeture de l'ensemble A par un élément structurant B[6].	26
2.13 Exemple de la fermeture dans l'image binaire[3].	27
2.14 La dilatation de la fonction f(x) par un élément structurant B[19].	28
2.15 Exemple de dilatation numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, dilatation par un disque de taille 3)[3].	29
2.16 L'érosion de la fonction f(x) par un élément structurant B[19].	30
2.17 Exemple d'érosion numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, érosion par un disque de taille 3)[3].	30
2.18 L'ouverture de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B[19].	31

2.19	Exemple d'ouverture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, ouverture par un disque de taille 3)[3].	32
2.20	La fermeture de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B [19].	32
2.21	Exemple de la fermeture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, fermeture par un disque de taille 3)[3].	33
2.22	L'interface de Matlab	34
2.23	Exemple d'élément structurant de taille 3.	35
2.24	Dilatations (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille $[1, 5, 10]$	36
2.25	L'érosion (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille $[1,5,10]$	37
2.26	L'ouverture (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille $[1,3,5]$	38
2.27	La fermeture (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille $[2, 5, 10]$	39
2.28	Exemple de dilatation numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, dilatation par un disque de taille $[5, 10, 20]$).	40
2.29	Exemple d'érosion numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, érosion par un disque de taille $[2, 5, 10]$).	40
2.30	Exemple d'ouverture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, ouverture par un disque de taille $[5,10,20]$).	41
2.31	Exemple de la fermeture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, fermeture par un disque de taille $[5,10,20]$)	41
3.1	(a) L'originale du signal de $f(x)$ à l'échelle $t = 0$. (b) L'érosion multi-échelle $E(x, t) = (f \ominus tB)(x)$, et (c) la dilatation multi-échelle $D(x, t) = (f \oplus tB)(x)$ de $f(x)$ par $B = [-1, 1]$ à l'échelle $t = [0, 30]$ [12].	43
3.2	Exemple d'ouverture multi-échelle d'image originale dans la première ligne (Le paramètre d'échelle a été défini comme : la variance des gaussiennes pour les convolutions linéaires dans la deuxième ligne et la dernière ligne : le rayon de l'élément structurant d'un disque) le paramètre d'échelle vers droite : $t=4, t=8, t=16, t=32$ [12]	50

Introduction générale

La morphologie mathématique est une théorie essentiellement non linéaire, utilisée en particulier en analyse d'images. Elle ont été développée à l'origine à l'école des Mines de Paris. Elle repose essentiellement sur les travaux de G. Matheron [17] effectués dans les années 60-70, puis sur ceux de J. Serra et de son équipe.

Depuis ces premiers développements, elle a pris une ampleur internationale et plusieurs équipes s'y consacrent. La morphologie[3] a commencé par l'étude des ensembles aléatoires pour des applications à l'industrie minière. Elle a rapidement été appliquée au traitement et à l'analyse des images dans un cadre déterministe, d'abord dans un cadre d'images binaires, puis en niveaux de gris, puis encore plus tard sur des images en couleur, multispectrales. le but est l'étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur.

Dans cette théorie (voir [2], [3], [11]) il y en a quatre opérateurs morphologiques qui sont la dilatation, l'érosion, l'ouverture et la fermeture. Ces dernières sont des filtres non linéaires qui son appliqué par un structurant simple (carré, cercle...), ou par un structurant plus complexe.

Le but de ce mémoire est de développer et étudier les concepts de morphologie mathématique aux principes d'algèbrique avec les notions de treille, et principes d'analyse multi-échelles pour les EDPs. Car une relation mathématique très intéressante a lié les EDPs au phénomène de morphologie mathématique basée sur l'idée de l'analyse multi-échelle de Marr-Hildreth-Koenderink-Witkin ('l'espace d'échelle') de l'équation de la chaleur $\partial u / \partial t = \Delta u$ constitue l'exemple typique, et proposée précédemment par certains transformations fondamentales apparaissant dans la morphologie mathématique (dilatation et érosion), donné par : $\partial u / \partial t = \pm |Du|$ sera donc caractérisé par des axiomes de la morphologie mathématique.

Dans le **chapitre 01** intitulé **traitement d'images**, nous parlerons de certaines définitions de traitement d'images, et exactement des filtres linéaires comme la convolution et non linéaires comme les opérateurs de la morphologie mathématique, ainsi de rappel d'EDP de la chaleur .

Dans le **chapitre 02** intitulé **Morphologie Mathématique**, nous présentons tous les opérateurs de la morphologie mathématique, les opérateurs de la base c'est l'érosion, la dilatations et la plus complexe comme l'ouverture et la fermeture avec son définition mathématique, propriétés... et nous donnerons les exemples des images de ces filtres dans les deux cas (le cas binaire avec des images binaire et le cas fonctionnel avec des images niveaux de gris) Ainsi nous donnerons un procédure pratique.

Dans le **chapitre 03** intitulé **EDP et morphologie**, nous présentons les opérateurs de la morphologie (dilatation/érosion) avec l'échelle et leur axiomes, ainsi nous donnerons la relation entre la morphologie mathématique et les équations aux dérivées partielles sous forme $\partial u / \partial t = \pm |Du|$ et le EDP de la chaleur.

TRAITEMENT DE L'IMAGE : DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Dans le **chapitre 01** que nous titrerons **traitement d'images**, nous parlerons de certaines définitions de traitement d'images, et exactement des filtres linéaires comme la convolution et non linéaires comme les opérateurs de la morphologie mathématique, ainsi de rappel d'EDP de la chaleur .

1.1 Une image numérique et mathématique

1.1.1 Une image numérique

Les images numériques peuvent se décrire par un ensemble fini de valeurs entières qui s'appellent les pixels avec sont situés sur une grille régulière.

A chaque pixel de la grille est associé une couleur ou une nuance de gris. La taille d'une image est déterminée par les dimensions de ce tableau de pixels. La largeur de l'image est le nombre de colonnes et la hauteur de l'image est le nombre de lignes dans le tableau, matrice de pixels est une matrice de M colonnes \times N lignes. Pour désigner un pixel spécifique dans la matrice d'image, nous définissons sa coordonnée en x et y . Le système de coordonnées des matrices d'images définit x comme croissant de gauche à droite et y comme croissant du haut vers le bas.

Les images numériques en trois modèles basés sur les valeurs de pixel : l'image binaire signifie des pixels 0 pour le noir et 1 pour le blanc, l'image en niveaux de gris signifie des pixels composées de 0 (noir) à 255 (blanc) et l'image en couleur est inclut des informations pour chaque pixel, pour des résultats visuellement acceptables, il est nécessaire (et presque suffisant) de fournir trois échantillons pour chaque pixel, qui sont interprétés comme des coordonnées dans un espace de couleur. L'espace couleur Rouge, Vert, Bleu (RVB) est le plus utilisé pour le maniement des imgs numériques.

Exemple pour une image numérique :

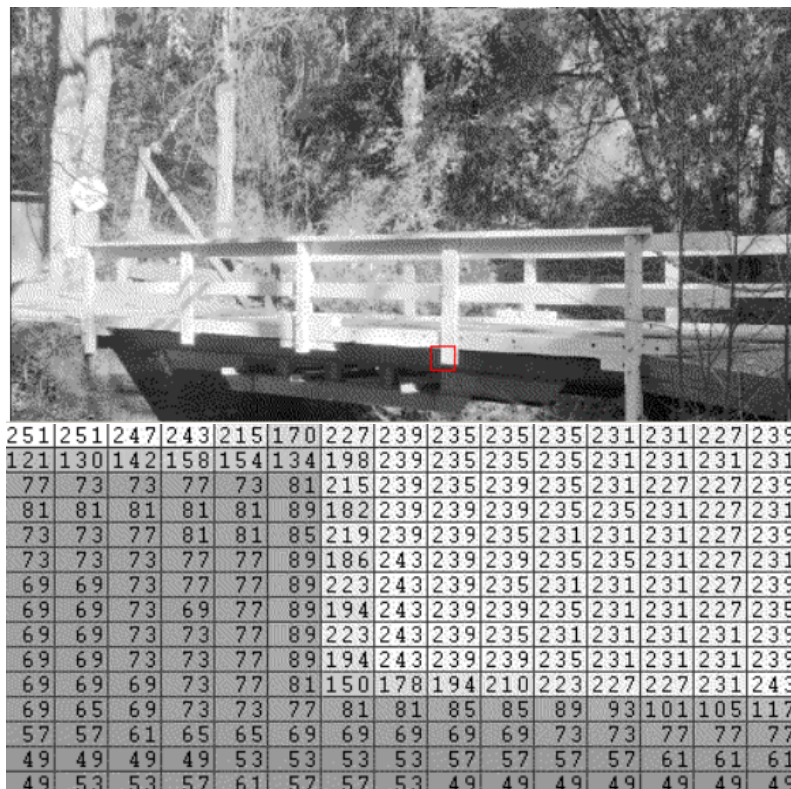


FIGURE 1.1 – Exemple d'image en niveaux de gris, avec son code des pixels du carré sélectionné dans l'image.

1.1.2 Une image mathématique

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Une image est définie comme une fonction

$f : \Omega$ dans \mathbb{R} , (pour une image niveau de gris),

et

$f : \Omega$ dans \mathbb{R}^3 , (pour une image couleur).

1.2 Traitement de l'image

1.2.1 Définition.

Le traitement d'images est un domaine très vaste, qui consiste de tout ensemble des techniques et des méthodes permettant à modifier les pixels d'une image numérique, dans le but d'améliorer ou d'en extraire des informations d'images.

Ce traitement d'image transforme les images en de nouvelles images (avec peut-être moins de bruit par exemple).

Exemples de traitement d'images.

- **Amélioration** : augmenter la qualité de la perception visuelle qu'on a d'une image.
- **Restauration** : compenser les dégradations (bruit, flou, ...).
- **Compression** : stocker et transférer efficacement.
- **Dilatation** : augmenter la taille des objets dans l'image.
- **Analyse** : convertir des informations.



FIGURE 1.2 – Exemple de restauration d'image : à gauche c'est l'image originale bruitée et à droite l'image filtrée par le filtre median.

1.2.2 Type de traitement de l'image.

il existe plusieurs types dans l'entourage de domaine du traitement d'image, nous en mentionnons deux :

1.2.2.1 Filtrage linéaire

Le principe du filtrage modifie la valeur des pixels d'une image, généralement dans le but d'améliorer son aspect. En pratique, il s'agit de créer une nouvelle image en se servant de valeurs des pixels de l'image d'origine. Le filtrage est une opération de voisinage, dans laquelle la valeur de n'importe quel pixel donné dans l'image de sortie est déterminée en appliquant un certain algorithme aux valeurs des pixels dans le voisinage du pixel d'entrée correspondant. Ce voisinage d'un pixel est un ensemble de pixels définis par leurs emplacements par rapport à ce pixel.

Soit I une image numérique.

Soit h une fonction de $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ à valeur réelles. La convolution de I par h est définie par :

$$(I * h) = \sum_{i=x_1}^{x_2} \sum_{j=y_1}^{y_2} h(i, j) \cdot I(x - i, y - j). \quad (1.1)$$

Avec h c'est le noyau de la convolution.

Les nouvelles valeurs du pixel sont calculées par produit scalaire entre le noyau de convolution et le voisinage correspondant du pixel.

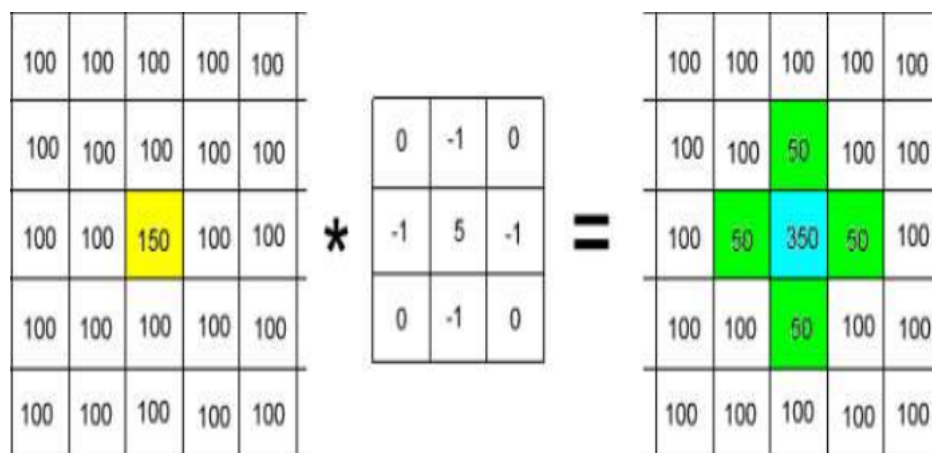


FIGURE 1.3 – Exemple de convolution numérique.



FIGURE 1.4 – Exemple du filtrage de convolution : à gauche l'image initiale en niveaux de gris et à droite l'image filtrée.

1.2.2.2 Morphologie mathématique

Définition 1.1. la morphologie mathématique est une théorie essentiellement non linéaire, utilisée en particulier en analyse d'images, dont le but est l'étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur. Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'images (filtrage, segmentation, mesures, analyse de texture) et fournit ainsi des outils pour la reconnaissance des formes. Dans cette théorie, il y en a quatre opérateurs morphologiques qui sont la dilatation, l'érosion, l'ouverture et la fermeture. Ces dernières sont des filtres non linéaires qui peuvent s'appliquer soit aux images binaires, soit aux niveaux de gris.

1. La dilatation.

C'est une opération sous forme algébrique et fonctionnelle, qui est son effet d'abord d'élargir la figure, la hauteur et largeur de la figure dilatée seront les sommes respectivement des hauteurs et largeurs de la figure originale et de l'élément structurant.

2. L'érosion.

L'effet de l'érosion est d'abord de rétrécir la figure, la hauteur et largeur de la figure érodée seront les différences respectivement des hauteurs et largeurs de la figure originelle et de l'élément structurant (en particulier si l'élément structurant est plus large ou plus haut que la figure, l'érosion de celle-ci sera vide).



FIGURE 1.5 – Exemple illustre la grossièrement d'un objet par la dilatation et son rétrécissement par l'érosion.

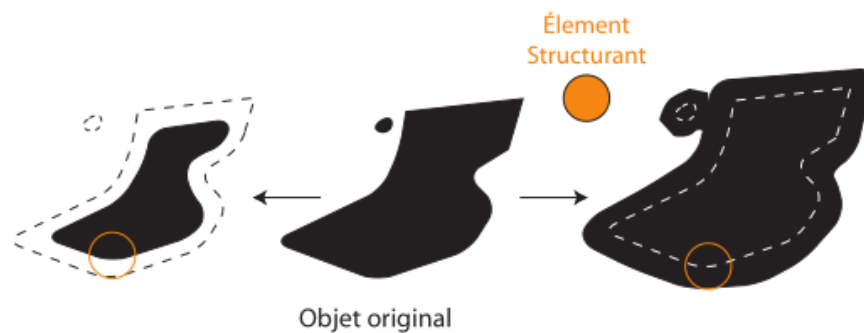


FIGURE 1.6 – Dilatation (droite) et érosion (gauche) de l'objet binaire en utilisant un élément structurant B circulaire [14].

3. L'ouverture et la fermeture.

La composition d'érosion suivie d'une dilatation avec le même élément structurant, qui nous donne l'**ouverture** et la composition d'une dilatation suivie d'érosion avec le même élément structurant, donne la **fermeture**.

(a) La différence entre l'ouverture et la fermeture :

1. Les deux sont conserve (souvent) la taille et la forme des objets, mais l'ouverture est élimine les composantes connexes plus petites que l'élément structurant (séparation en plusieurs composantes connexes) et la fermeture est bouche les trous plus petits que l'élément structurant (fusion de composantes séparées).
2. Les deux sont des filtres du débruitage, mais l'ouverture pour enlever les pics isolés et la fermeture pour enlever les creux isolés.

Dans l'image (1.6) à droite, lorsqu'on effectue une fermeture avec un élément structurant en forme de disque, les contours sont lissés, les canaux fins sont fusionnés, de petits trous sont éliminés et les trous dans les contours sont remplis. Et en à gauche, l'ouverture lisse le contour, rompt les points d'union et élimine des pics.

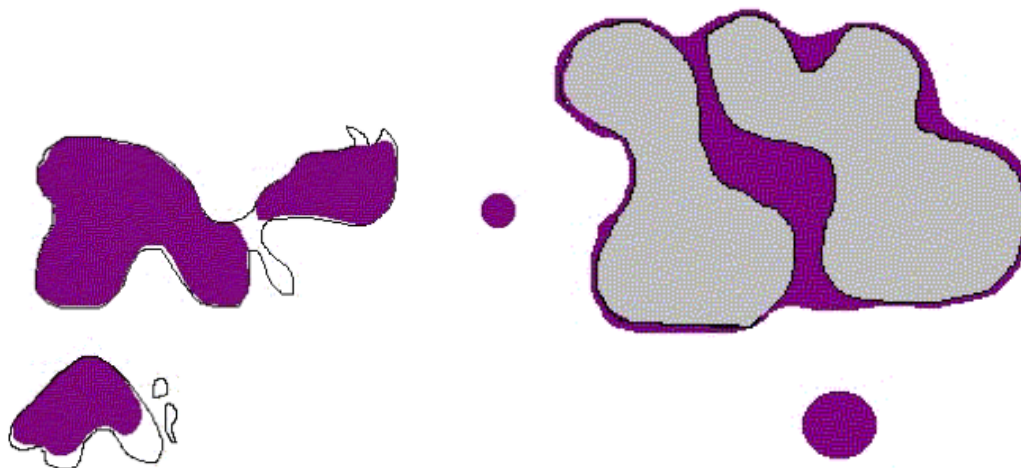


FIGURE 1.7 – Exemple d'ouverture d'image avec un élément structurant circulaire à gauche et à droite la fermeture d'image par un élément structurant circulaire[1] .

1.3 Équation de la chaleur et traitement de l'image

Koenderink a démontré en 1984, que la convolution d'une image bruitée par un filtre gaussien est la solution de l'équation de la chaleur pour $\sigma = \sqrt{2t}$.

1. Equation de la chaleur sur \mathbb{R} .

Soit le problème de la chaleur suivant[18] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t \succ 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

On sait que pour $f(x)$ continue, bornée, la solution du problème s'écrit comme :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy, \quad K \succ 0. \quad (1.3)$$

Et on peut écrire la solution comme produit de convolution :

$$u(x, t) = f * g_{\sqrt{2t}}, \quad (1.4)$$

avec le filtre Gaussien :

$$g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}. \quad (1.5)$$

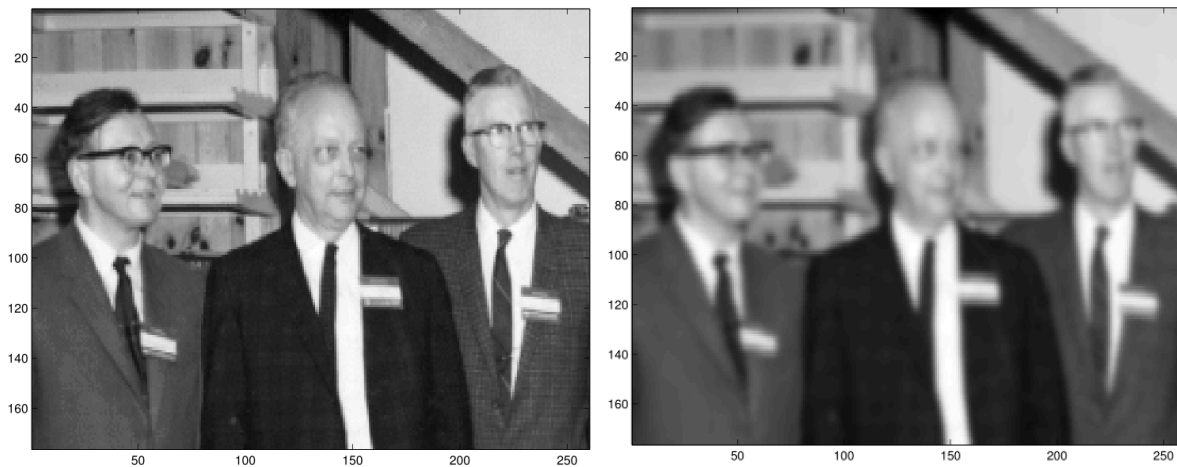


FIGURE 1.8 – Image gatin2 (en droit filtrage par le EDP de la chaleur)[1].

2. **Equation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.** La première EDP à avoir été utilisée en traitement d'images est certainement l'équation de la chaleur[18].

Soit l'image définie par :

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit l'équation de la chaleur donnée par,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t); & t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y). \end{cases} \quad (1.6)$$

Pour f continue et bornée, la solution est donnée par :

$$u(x, y, t) = (f * g_{\sqrt{2t}})(x, y). \quad (1.7)$$

Avec :

$$g_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}. \quad (1.8)$$

On peut remarquer que la solution de l'équation de la chaleur représente un filtrage linéaire d'une image initial f par le filtre Gaussien à l'échelle $\sqrt{2t}$.

σ : Indique la position du contour de l'image en fonction de σ .

Ce filtrage ne permet pas de détecter des contours d'images on a recoure aux filtrage non linéaire.

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

Dans le **chapitre 02** que nous titrerons **Morphologie Mathématique**, nous présentons tous les opérateurs de la morphologie mathématique, les opérateurs de la base c'est l'érosion, la dilatations et la plus complexe comme l'ouverture et la fermeture avec son définition mathématique, propriétés... et nous donnerons les exemples des images de ces filtres dans les deux cas (le cas binaire avec des images binaire et le cas fonctionnel avec des images niveaux de gris) Ainsi nous donnerons un procédure pratique.

2.1 Opérateurs morphologiques dans le cas binaire

Pour pouvoir définir les opérateurs binaires de la morphologie mathématique, on passe par la notion abstraite de treillis complet. On sera ensuite capable de «faire» de la morphologie sur tout treillis.

2.1.1 Définition d'un treillis complet

Un treillis (E, \leq) [2] est la donnée d'un ensemble E , muni d'une relation d'ordre \leq réflexive ($x \leq x$), antisymétrique ($x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$) et transitive ($x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$).

Un treillis est dit **complet**, si toute partie P de E admet une borne supérieure (le plus petit des majorants de P) et une borne inférieure (le plus grand des minorants de P).

2.1.1.1 Exemple de treillis

Un exemple de treillis est donné en figure 2.1 : le treillis des couleurs primaires additives (rouge, vert et bleu). 0 représente la couleur absente et 1 la couleur présente.

La couleur noire est $[0, 0, 0]$, le blanc $[1, 1, 1]$, le rouge pur $[1, 0, 0]$, le vert pur $[0, 1, 0]$, etc.

Dans ce treillis, on ne peut pas comparer rouge et vert, ou encore violet et jaune, mais le blanc est supérieur (plus brillant) à toutes les autres, et le noir inférieur (plus sombre aux autres). Quel que soit l'ensemble des couleurs choisies, par exemple jaune et bleu, on peut définir un supremum et un infimum, bien que l'ordre des couleurs ne soit pas total.

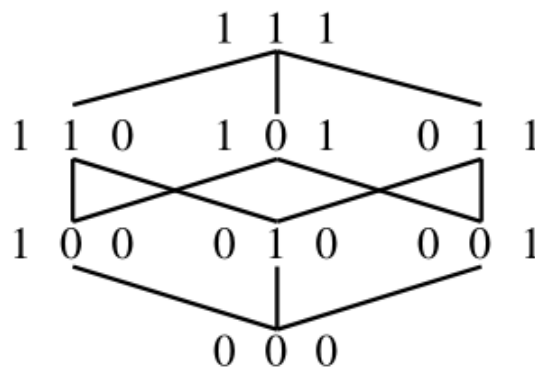


FIGURE 2.1 – Un exemple de treillis : le treillis des couleurs primaires additives

2.1.2 L'élément structurant

Définition 2.1. Des premières applications à l'étude des milieux poreux est née l'approche ensembliste de la morphologie mathématique. Elle s'applique à des images ou objets binaires et les étudie sous l'angle de leurs relations avec un ensemble fixé. Cet ensemble, dont on choisit la forme et la taille, est appelé élément structurant. Un élément structurant est un ensemble qui a les caractéristiques suivantes :

1. il possède une forme (géométrie connue),
2. cette forme a une taille,
3. cet élément est repéré par son origine appartenant généralement à l'élément structurant.

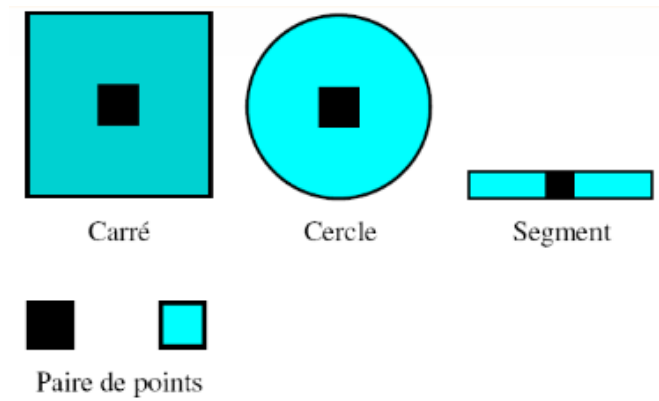


FIGURE 2.2 – Quelques exemples d'éléments structurants.

Généralement pour faire la facilité du calcul les opérateurs élémentaires de la morphologie, il faut considérer le cas le plus simple de l'élément structurant comme (la figure 2.2).

2.1.3 Dilatation binaire

Soit X une image binaire. C'est-à-dire un sous-ensemble de E , le translaté de X par $p \in E$ est l'ensemble[3],

$$X_p = x + p, \quad x \in X \quad (2.1)$$

La dilatation binaire d'un ensemble X par un élément structurant B est définie par :

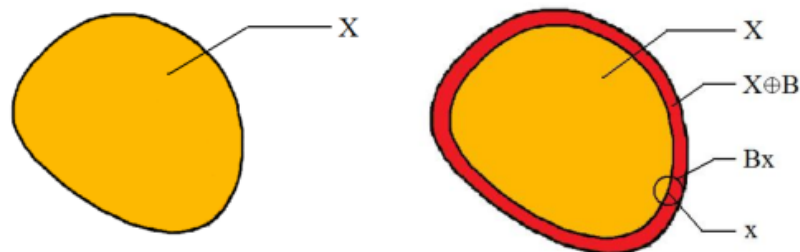
$$\delta_B(X) = X \oplus B, \quad (2.2)$$

$$= \bigcup_{b \in B} X_b, \quad (2.3)$$

$$= \bigcup_{x \in X} B_x, \quad (2.4)$$

$$= \{x + b, \quad x \in X, b \in B\}. \quad (2.5)$$

Avec $X \oplus B$ c'est la définition classique de l'addition de Minkowski de deux ensembles, qui correspond à l'addition vectorielle.

FIGURE 2.3 – Illustration de dilatation binaire de X par B .

La figure 2.3 représente la dilatation δ d'un ensemble X par un élément structurant B , et on remarque qu'il augmente la taille de l'ensemble X par l'union de tous les translations B_x .

2.1.3.1 Propriétés de la dilatation

La dilatation a les propriétés suivantes (voir [2] et [3]) :

1. La dilatation est **extensive** :

$$X \subset \delta_B(X).$$

2. La dilataion est **croissante** :

$$X \subset Y \implies \delta_B(X) \subset \delta_B(Y). \quad (2.6)$$

3. Elle est **commutatif** avec la réunion mais pas avec l'intersection :

$$\begin{aligned} \delta_{B \cup B'}(X) &= \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X). \\ \delta_{B \cap B'}(X) &\subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Démonstration. En utilisant les formules 2.4 et 2.5 dans tous les démonstrations :

1. **Extensivité :**

Il est évidemment voir que

$$X \subset \{x + b, \quad x \in X, b \in B\}$$

2. **Croissance :**

$$X \subset Y \implies x \leq y, x \in X, y \in Y, \quad (2.8)$$

$$\implies x + b \leq y + b, \forall b \in B, \quad (2.9)$$

$$\implies \delta_B(X) \subset \delta_B(Y). \quad (2.10)$$

3. **Commutativité :**

Pour tout $x \in X$ et B, B' deux éléments structurants, alors

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \left\{ x + b, \quad x \in X, b \in B \cup B' \right\}, \quad (2.11)$$

$$= \left\{ x + b, \quad x \in X, b \in B \text{ ou } b \in B' \right\}, \quad (2.12)$$

$$= \left\{ \left\{ x + b, \quad x \in X, b \in B \right\} \text{ ou } \left\{ x + b, \quad x \in X, b \in B' \right\} \right\}, \quad (2.13)$$

$$= \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X). \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

□

Ces propriétés algébriques ont des conséquences importantes sur les applications de cette transformation. Par exemple, la relation d'itération permet de calculer une dilatation par un disque de rayon $2cm$ soit directement, soit comme une suite de deux dilatations par un disque de rayon $1cm$.

2.1.3.2 Exemples de la dilatation

1. Dans cet exemple, la dilatation par un disque a pour effet d'augmenter la taille des objets selon la taille du disque, de relier entre elles les composantes proches et de boucher les petits trous (plus petits que l'élément structurant).

L'image à gauche c'est une image initiale, le centre c'est le résultat après la dilatation par un disque de taille 3 et l'image à droite c'est la différence : en blanc, les parties rajoutées par la dilatation.

La figure 2.4 illustre ces effets.

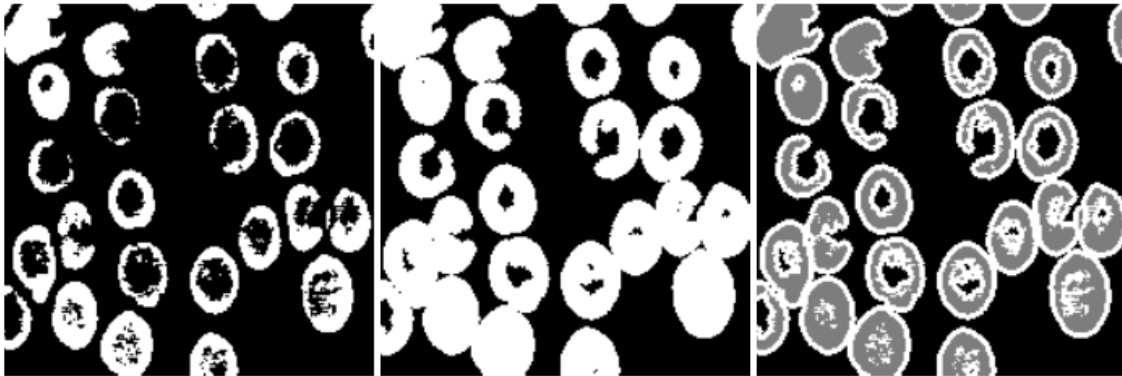


FIGURE 2.4 – Exemple de dilatation binaire[3].

2. On suppose que l'ensemble X soit représenté par les pixels marqués en image binaire. Dans la figure 2.5 l'image à gauche c'est l'initiale représenté par $X = \{(2, 2), (3, 2)\}$, le centre c'est l'élément structurant représenté par $S = \{(-1, -1), (0, -1), (1, -1), \dots, (1, 1)\}$ et l'adroite c'est le résultat.

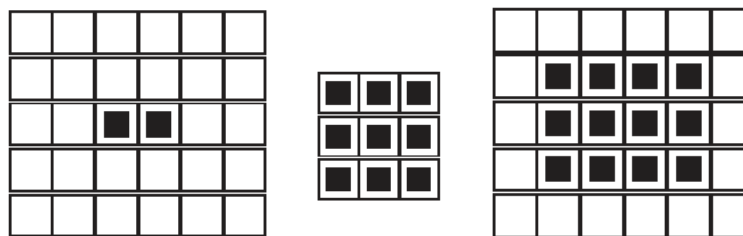


FIGURE 2.5 – Exemple de dilatation dans le cas d'image représentée comme matricielle.

La dilatation δ de X par la structurant S égale à l'ensemble de tous les ajouts possibles d'un élément de X et S :

$$\delta_S(X) = \{x + s, x \in X \wedge s \in S\}.$$

Par exemple, $(2, 2) + (-1, -1) = (1, 1)$ et $(3, 2) + (1, 1) = (4, 3)$.

2.1.4 L'érosion binaire

Soit X une image binaire. L'érosion binaire d'un ensemble X par un élément structurant B est définie par[3] :

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B, \quad (2.16)$$

$$= \bigcap_{b \in B} X_{-b}, \quad (2.17)$$

$$= \{x \in E, B_x \subseteq X\}. \quad (2.18)$$

Avec X_b c'est le translaté de X en point p et X ($X \ominus B$) le différence de Minkowski.

— L'érosion est le lieu géométrique des points p tels que, B_p est inclus dans X . Une érosion «réduit» l'ensemble X .

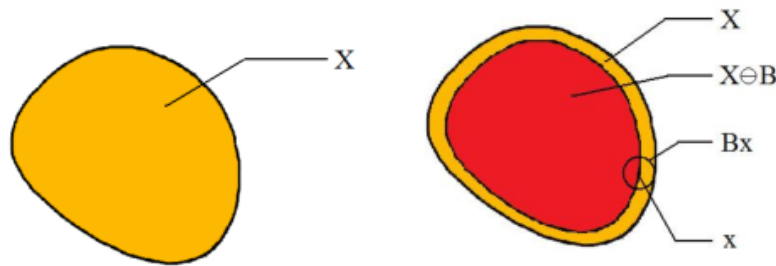


FIGURE 2.6 – Illustration de l'érosion binaire de X par B .

— La figure 2.6 représente l'érosion ε d'un ensemble X par un élément structurant B , et on remarque qu'il diminué la taille de l'ensemble X par l'intersection de tous les translations de l'ensemble symétrique de B , donc vraiment que l'érosion est réduit l'ensemble X .

2.1.4.1 Propriétés de l'érosion

La propriété essentielle de l'érosion est qu'elle est la transformation **duale** de la dilatation par rapport à la complémentation ([2] et [3]) :

$$\varepsilon_B(X) = [\delta_B(X^c)]^c \quad (2.19)$$

Cette propriété peut également être présentée comme définition, dont on déduit alors l'expression (2.7) :

$$[\delta_B(X^c)]^c = [X^c \oplus B]^c, \quad (2.20)$$

$$= \left[\bigcup_{b \in B} X_b^c \right]^c, \quad (2.21)$$

$$= \bigcap_{b \in B} X_{-b}, \quad (2.22)$$

$$= \varepsilon_B(X). \quad (2.23)$$

Ainsi que l'érosion a les propriétés algébriques suivantes (elles peuvent être démontrées soit directement à partir des formules (2.7) et (2.8) :

1. L'érosion est **anti-extensive** :

$$\varepsilon_B(X) \subset X.$$

2. L'érosion est **croissante** :

$$X \subset Y \implies \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y).$$

3. Elle satisfait les relations suivantes par rapport à la réunion et à l'intersection (en particulier, elle commute avec l'intersection) :

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y).$$

$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y).$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X).$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X).$$

4. Elle satisfait la relation d'itération suivante :

$$\varepsilon_{B'}[\varepsilon_B(X)] = \varepsilon_{B \oplus B'}(X).$$

2.1.4.2 Exemples de l'érosion

1. Dans cet exemple l'érosion est diminuer l'objet selon la taille de l'élément structurant, les composantes connexes de l'objet plus petites que l'élément structurant sont supprimées.

L'image à gauche c'est une image initiale, le centre c'est le résultat après l'érosion, par un disque de taille 3 et l'image à droite c'est le différence : en blanc, les parties supprimées par l'érosion.

La figure 2.7 illustre ces effets :

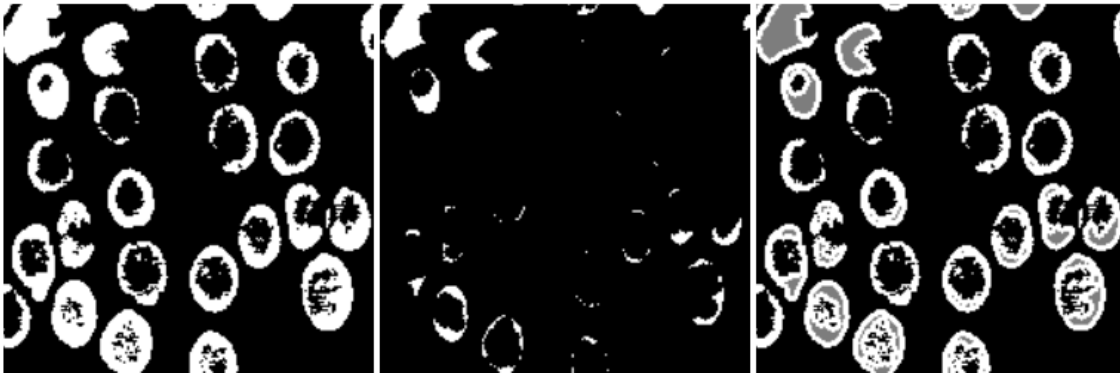


FIGURE 2.7 – Exemple de l'érosion dans l'image binaire[3].

2. Dans la figure 2.8 l'image représenté par 0 le noir et 1 c'est le blanc, en à gauche c'est l'initiale représenté par $X = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (5, 5)\}$, le centre c'est l'élément structurant représenté par $S = \{(-1, -1), (0, -1), (1, -1), \dots, (1, 1)\}$ et l'adroite c'est le résultat.

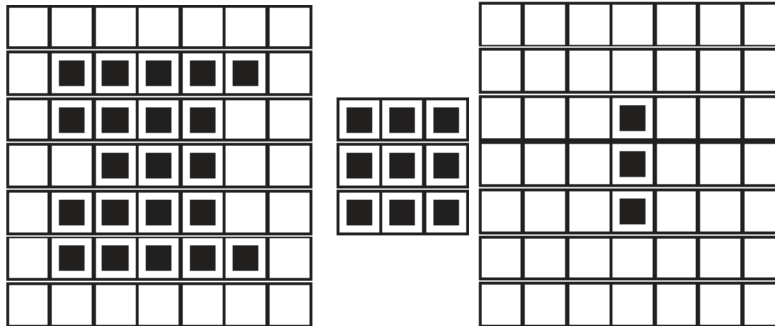


FIGURE 2.8 – Exemple de l'érosion en cas l'image représentée comme matricielle.

Pour appliquer l'érosion en élément $(1, 1)$ par exemple, on utilise l'expression (2.8) : malgré $(1, 1) \in X$ mais : $(1, 1) + (-1, -1) = (0, 0) \notin X$, donc $(1, 1) = 1$.

Un autre : $(3, 2) \in X$ et $(3, 2) + (1, 1) = (4, 3) \in X$.

2.1.5 L'ouverture binaire

Quand on applique d'abord une érosion puis une dilatation, les composantes connexes de l'objet qui ont été supprimées par l'érosion (à cause de leur petite taille) ne peuvent plus être recouvertes par la dilatation et sont donc définitivement perdues. On construit donc ainsi une nouvelle transformation par composition d'une érosion et d'une dilatation et ce qu'on appelle l'ouverture.

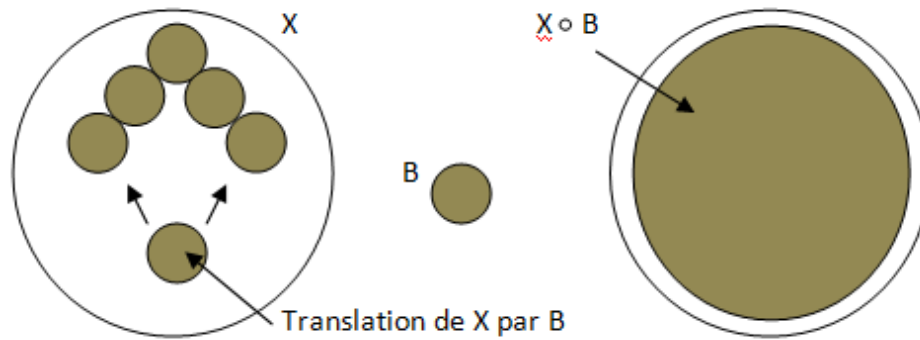
Alors, l'ouverture de X par B est définie par [3] :

$$\gamma_B(X) = X \circ B, \quad (2.24)$$

$$= (X \ominus B) \oplus B, \quad (2.25)$$

$$= \bigcup \{B_p, p \in E \text{ et } B_p \subseteq X\}. \quad (2.26)$$

- Interprétation simple de l'ouverture d'un ensemble X ce qu'on recherche du réunion de tous les translations B_p qui contienne à X .
- Le contour de $X \circ B$ est donné par les points de X qui sont recouverts par B quand on le fait glisser à l'intérieur des contours de X , comme la figure 2.9.

FIGURE 2.9 – L'ouverture d'un ensemble X par un élément structurant B .

2.1.5.1 Propriétés d'ouverture binaire

L'ouverture a les propriétés algébriques suivantes (Ces propriétés sont fondamentales puisqu'elles font de l'ouverture un filtre morphologique)[2][3] :

1. L'ouverture est **anti-extensive** :

$$\gamma_B(X) \subset X. \quad (2.27)$$

2. L'ouverture est **croissante** :

$$X \subset Y \implies \gamma_B(X) \subset \gamma_B(Y). \quad (2.28)$$

3. Elle est **idempotente** :

$$[\gamma_B]_B(X) = \gamma_B(X). \quad (2.29)$$

4. On a de plus :

$$B \subset B' \implies \gamma_{B'}(X) \subset \gamma_B(X), \quad (2.30)$$

et si γ_n désigne l'ouvert de X par un élément structurant de taille n , alors

$$(\gamma_n)_{n'} = (\gamma_{n'})_n = \gamma_{\max(n,n')}. \quad (2.31)$$

2.1.5.2 Exemple de l'ouverture

1. Dans cet exemple l'ouverture est supprimer les parties des objets plus petites que l'élément structurant, et lisser les contours en supprimant les petites excroissances. Elle ne réduit pas systématiquement toutes les structures comme le fait l'érosion. L'image à gauche c'est une image initiale, le centre c'est le résultat après l'ouverture par un disque de taille 3 et l'image à droite c'est le différence : en blanc, les parties supprimées par l'ouverture.

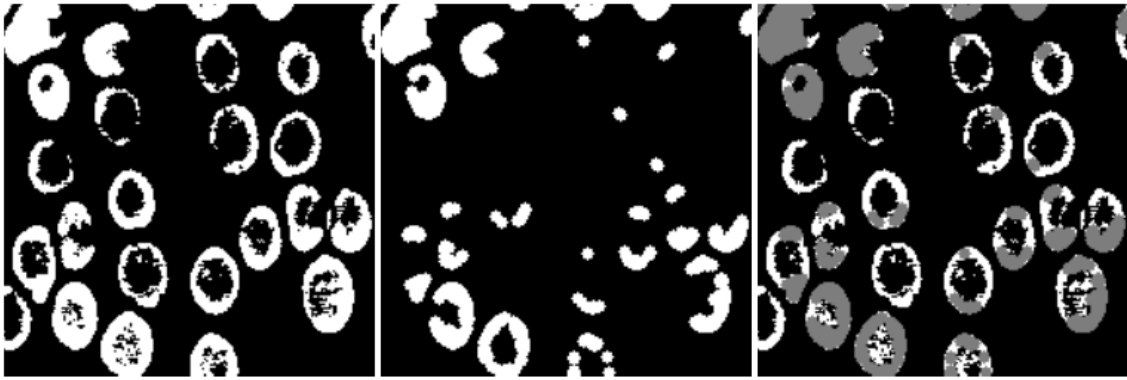
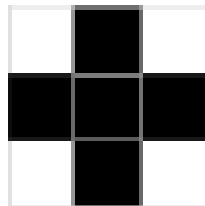


FIGURE 2.10 – Exemple de l'ouverture dans l'image binaire[3].

2. Soit l'image f représenté par :

1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Il n'y a pas de méthode directe pour calculer l'ouverture de f , sauf si on calcule premièrement l'érosion puis la dilatation : donc on calcule l'érosion $\varepsilon_B(X)$ et la dilatation $\delta_B(X)$ par un élément structurant s :

FIGURE 2.11 – L'élément structurant s

$$\varepsilon_B(X) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \delta_B(X) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Donc l'ouverture $\gamma_B(X)$:

$$\gamma_B(X) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

2.1.6 La fermeture binaire

La fermeture morphologique est l'opération duale de l'ouverture, et consiste à réaliser une dilatation suivie d'une érosion par le même d'élément structurant.

La fermeture φ de X par B est définie par[3] :

$$\varphi_B(X) = X \bullet B, \quad (2.32)$$

$$= (X \oplus B) \ominus B. \quad (2.33)$$

- Interprétation simple de la fermeture c'est le contour $X \bullet B$ est donné par les points de X qui sont recouverts par B quand on le fait glisser à l'extérieur des contours de X .

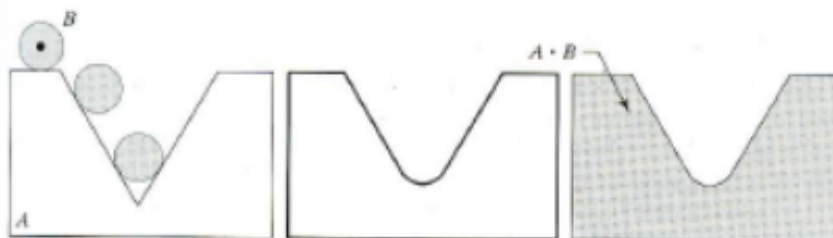


FIGURE 2.12 – La fermeture de l'ensemble A par un élément structurant B [6].

2.1.6.1 Propriétés de la fermeture binaire

La fermeture a les propriétés algébriques suivantes [3] :

1. La fermeture est **extensive** :

$$X \subset \varphi_B(X). \quad (2.34)$$

2. La fermeture a vérifié les propriétés des expressions (2.22),(2.23),(2.24) et (2.25).

2.1.6.2 Exemples de la fermeture

1. Dans cette exemple, la fermeture a pour effet de boucher les trous des objets qui sont plus petits que l'élément structurant, et lisse les contours des objets en rajoutant des points dans les concavités étroites.

L'image à gauche c'est une image initiale, le centre c'est le résultat après la fermeture par un disque de taille 3 et l'image à droite c'est la différence : en blanc, les parties rajoutées par la fermeture.

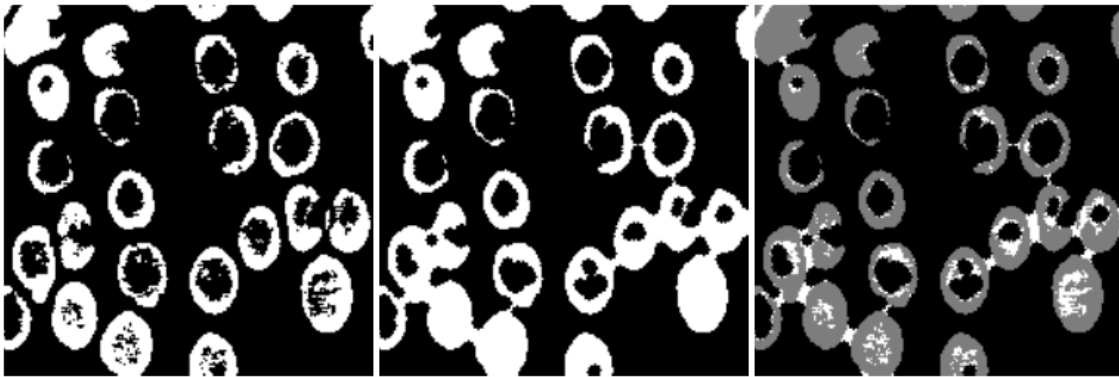


FIGURE 2.13 – Exemple de la fermeture dans l'image binaire[3].

2.2 Opérateurs morphologiques dans le cas fonctionnel

La morphologie mathématique fonctionnelle, à la différence de la morphologie mathématique ensembliste, s'applique aux images en niveaux de gris.

Les transformations d'images en morphologie mathématique fonctionnelle se pratiquent comme pour la morphologie mathématique ensembliste : l'élément structurant B est déplacé de façon à ce que son origine x passe par toutes les positions de l'image. Pour chaque position, on comparera les valeurs prises par les pixels inclus dans le domaine de l'élément structurant. Le pixel central prendra soit la valeur minimale (lors d'une érosion) soit la valeur maximale (lors d'une dilatation).

2.2.1 Dilatation fonctionnelle

Définition 2.2. (Dilatation par un élément structurant binaire)

La dilatation d'une fonction f par un élément structurant B est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \delta_B(f) = \sup \{f(y) \mid y \in B_x\}. \quad (2.35)$$

- Cette définition fait apparaître explicitement que les valeurs de f intervenant dans le résultat de l'opération en un point sont celles prises dans un voisinage de ce point, ce voisinage étant défini par l'élément structurant.
- Pour obtenir la fonction dilatée de $f(x)$, on attribue à $f(x)$ la valeur maximale qu'elle prend dans le domaine de B et ce, à chaque nouveau déplacement de B . L'image suivante illustre la dilatation de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B .

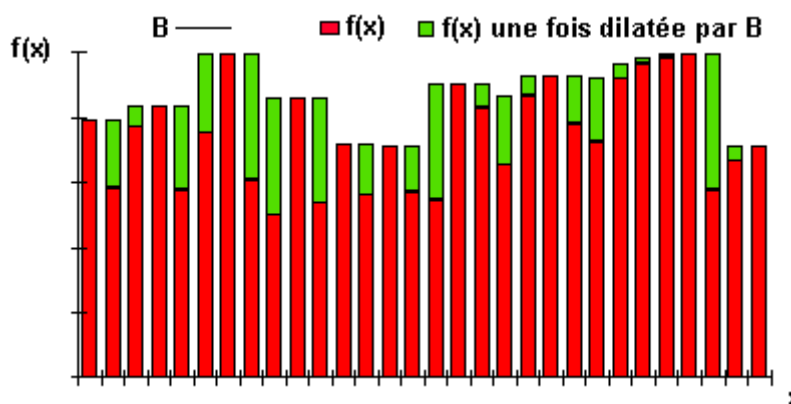


FIGURE 2.14 – La dilatation de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B [19].

Exemple 2.1. Sur une image à niveaux de gris, la dilatation par un disque augmente les niveaux de gris, propage les maxima locaux des niveaux de gris (dans une région correspondant à la taille et à la forme de l'élément structurant).

Généralement, la dilatation soumise à la loi "**plus une valeur est grande, plus elle tend vers le blanc**".

La figure (2.19) illustre ces effets.



FIGURE 2.15 – Exemple de dilatation numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l’espace à deux dimensions, dilatation par un disque de taille 3)[3].

Définition 2.3. (Dilatation par une fonction)

Considérons maintenant des éléments structurants fonctionnels, c’est-à-dire des fonctions g de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, telles que

$$\{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \neq -\infty\} \text{ est borné.}$$

La dilatation d’une fonction f par une fonction g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \delta_g(f) = \sup \{f(y) + g(y - x) / y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.36)$$

2.2.2 Érosion fonctionnelle

Définition 2.4. (Érosion par un élément structurant binaire)

L’érosion d’une fonction f par un élément structurant B est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon_B(f) = \inf \{f(y) / y \in B_x\}. \quad (2.37)$$

- Ici encore, la valeur prise en un point dépend uniquement des valeurs de f dans un voisinage, défini par B , de ce point.
- Pour obtenir la fonction érodée de $f(x)$, on attribue à $f(x)$ la valeur minimale qu’elle prend dans le domaine de l’élément structurant B et ce à chaque nouveau déplacement de B .

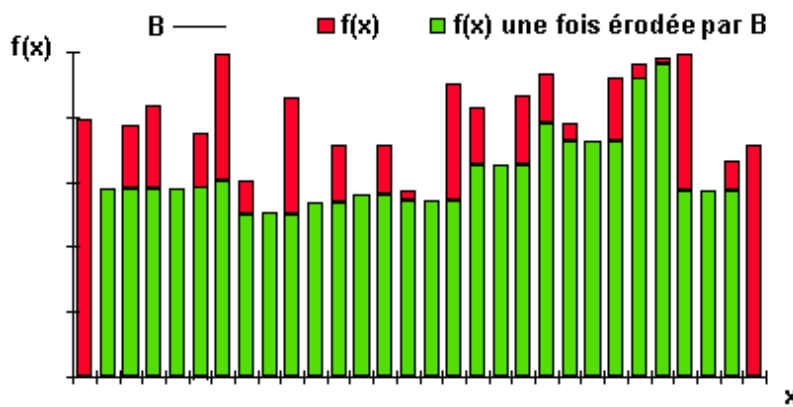


FIGURE 2.16 – L'érosion de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B [19].

Exemple 2.2. L'érosion d'une image à niveaux de gris par un disque a pour effet de diminuer les niveaux, et de propager les minima dans une région définie par l'élément structurant. La figure (2.21) illustre ces effets.



FIGURE 2.17 – Exemple d'érosion numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, érosion par un disque de taille 3)[3].

Définition 2.5. (Érosion par une fonction).

Soit g une fonction de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, telle que

$$\{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \neq -\infty\} \text{ est borné.}$$

L'érosion d'une fonction f par une fonction g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon_g(f) = \inf \{f(y) - g(y - x) / y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.38)$$

* L'intérêt de ces éléments structurants est qu'ils permettent de réaliser des opérations plus fines qu'avec des éléments structurants binaires. Par exemple, il est ainsi possible de modifier un relief (l'écrêter par exemple) dans n'importe quelle direction, et pas seulement parallèlement au plan de l'image comme avec des éléments structurants binaires (plans).

2.2.3 L'ouverture fonctionnelle

L'opération de l'ouverture fonctionnel comme exactement dans la morphologie mathématique ensembliste (binaire), il consiste en une érosion suivie d'une dilatation. Donc l'ouverture d'une fonction f par un élément structurant B est la fonction définie par :

$$\gamma_B(f) = \delta_B [\varepsilon_B(f)]. \quad (2.39)$$

Définition 2.6. (Sur les fonctions) En terme d'opérateur sur les fonctions, on définit l'ouverture par :

$$\gamma_B(X) = \sup \{B / B \subseteq X\}. \quad (2.40)$$

L'ouverture de $f(x)$ par l'élément structurant B a les conséquences suivantes sur la fonction de départ :

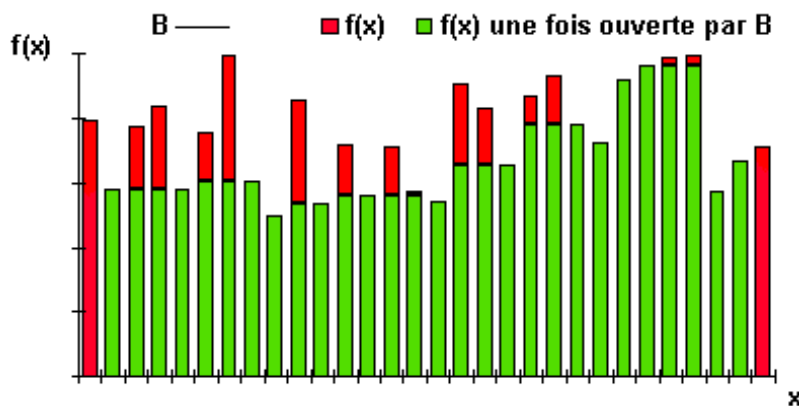


FIGURE 2.18 – L'ouverture de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B [19].

Exemple 2.3. Sur les fonctions, une ouverture laisse les vallées intacte mais enlève les pics, c'est-à-dire l'ouverture supprime les pics mais préserve les vallées, elle homogénéise l'image mais préserve les objets sombres comme l'illustrent des images suivantes :



FIGURE 2.19 – Exemple d’ouverture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l’espace à deux dimensions, ouverture par un disque de taille 3)[3].

2.2.4 La fermeture fonctionnelle

Il n’existe pas d’inverse de la dilatation. Sans information supplémentaire le mieux qu’on puisse faire est d’éroder l’image avec le même ES. Cette approche permet de définir l’opérateur de fermeture.

$$\varphi_B(f) = \varepsilon_B [\delta_B(f)]. \quad (2.41)$$

Définition 2.7. (Sur les fonctions)

En utilisant la notation fonctionnelle :

$$\varphi_B(X) = \inf \{-B \mid X \supseteq -B\}. \quad (2.42)$$

La fermeture de $f(x)$ par l’élément structurant B , quant à elle, a les conséquences suivantes (illustrées en vert) sur la fonction de départ :

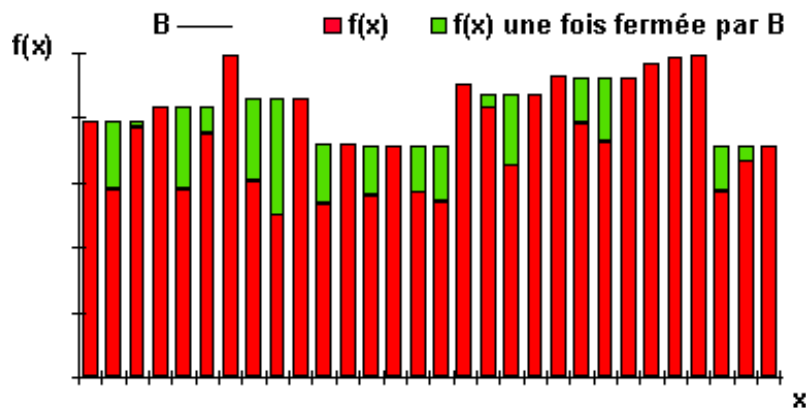


FIGURE 2.20 – La fermeture de la fonction $f(x)$ par un élément structurant B [19].

Exemple 2.4. Sur les fonctions, une fermeture remplit les vallées mais laisse les pics intacts (l'inverse d'ouverture) comme l'illustrent des images suivantes :



FIGURE 2.21 – Exemple de la fermeture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, fermeture par un disque de taille 3)[3].

2.3 Procédure pratique

Nous allons présenter notre application avec les résultats obtenus en appliquant les différents traitements, ainsi que la description de l'environnement de mon travail.

2.3.1 Langage de programmation utilisé

Notre application est implémentée sous l'environnement de programmation du **Matlab** à version 7.11.0.584 (R2010b), qui est développé par la société **The MathWorks**.

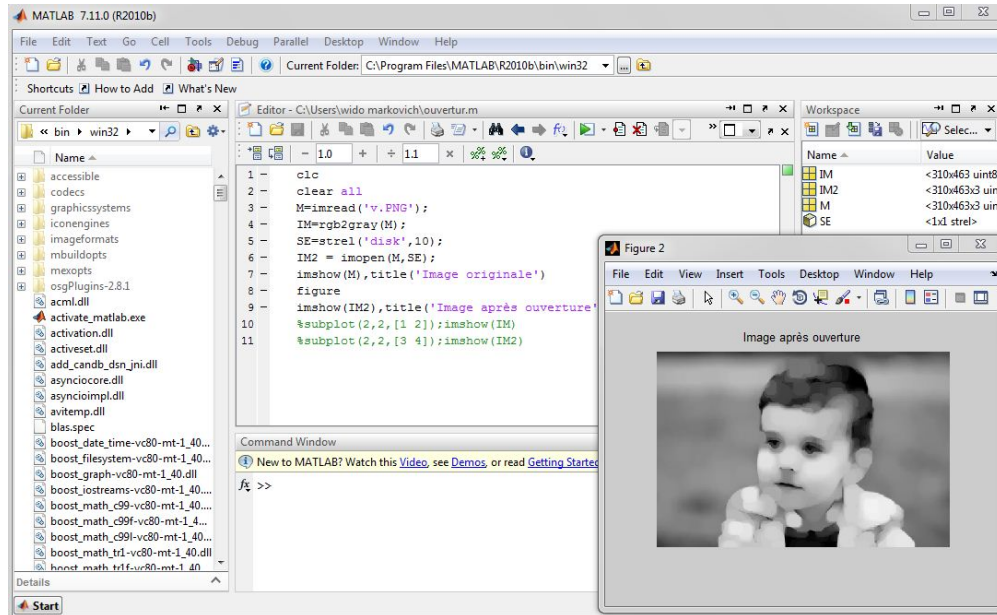


FIGURE 2.22 – L'interface de Matlab

2.3.2 Description de l'application

Cette application est un programme permettant d'appliquer certaines opérations de la Morphologie mathématique sur les images. Elle permet de :

1. Lire des fichiers images et les afficher sur l'écran.
2. Choisir les éléments structurants (carré, cercle, croix).
3. Appliquer tous les opérations morphologique comme : l'érosion, dilatation, ouverture et la fermeture.
4. Afficher les résultats finales.

2.4 Etude de différents traitements

2.4.1 L'élément structurant utilisé

Dans tous les images filtrée par les opérateurs morphologique, nous utiliserons un élément structurant de type disque qui à de tailles différents.

Cet disque, nous avons obtenu par une commande du Matlab :

```
strel('disk',numéro de taille)
```

Exemple 2.5. .

```
>> strel('disk',2 )  
  
ans =  
  
Flat STREL object containing 13 neighbors.  
  
Neighborhood:  
    0    0    1    0    0  
    0    1    1    1    0  
    1    1    1    1    1  
    0    1    1    1    0  
    0    0    1    0    0
```

FIGURE 2.23 – Exemple d'élément structurant de taille 3.

Nous effectuerons tous les opérateurs de la morphologie mathématique dans les deux cas (binaire et fonctionnelle).

2.4.2 Dans le cas binaire

1. **La dilatation** : d'un point de vue purement pratique, la dilatation efface les éléments sombres de l'image selon la taille d'élément structurant.



FIGURE 2.24 – Dilatations (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille [1, 5, 10].

Le programme que nous avons utilisé :

```
clc
clear all
I=imread('figure1.jpg'); % pour lire l'image initiale.
IM=im2bw(I);             % pour transférer l'image initiale vers
                          % image en binaire.
SE=strel('type',N);      % pour choisir le type d'élément
                          % structurant avec N son numéro de taille.
dil=imdilate(IM,SE)      % c'est la commande pour effectuer
                          % la dilatation par un stucturant SE.
imshow(I),title('Image originale') % commande d'affichage
figure
imshow(IM),title('Image en binaire')
figure
imshow(dil),title('La dilatation')
```

2. L'érosion.

L'érosion (en prenant le minimum de valeurs de gris contenu dans l'élément B) efface les éléments clairs contenus dans la taille de l'élément.

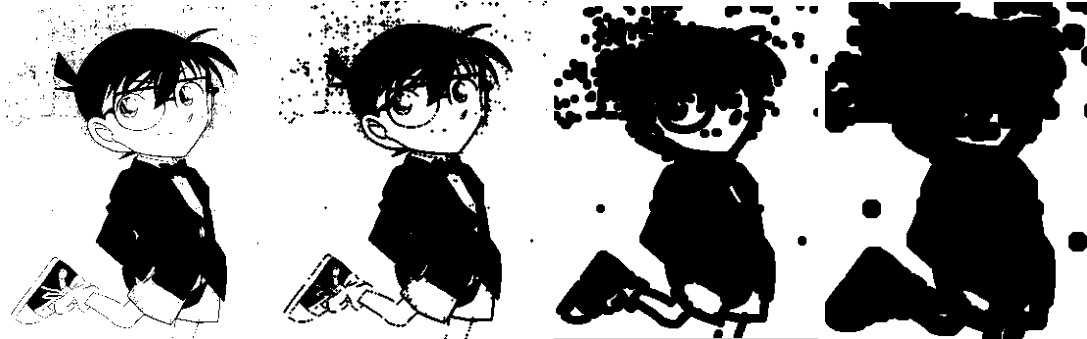


FIGURE 2.25 – L'érosion (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille [1,5,10].

Le programme que nous avons utilisé :

```

clc
clear all
I=imread('figure1.jpg'); % pour lire l'image initiale.
IM=im2bw(I);             % pour transférer l'image initiale vers
                          % image en binaire.
SE=strel('type',N);      % pour choisir le type d'élément
                          % structurant avec N son numéro de taille.
dil=imerode(IM,SE)       % c'est la commande pour effectuer
                          % l'érosion par un structurant SE.
imshow(I),title('Image originale') % commande d'affichage
figure
imshow(IM),title('Image en binaire')
figure
imshow(dil),title('L'érosion')

```

3. L'ouverture :

L'ouverture élimine presque tous les composants connexes plus petites que l'élément structurant.



FIGURE 2.26 – L'ouverture (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille [1,3,5].

Le programme que nous avons utilisé :

```

clc
clear all
I=imread('figure1.jpg'); % pour lire l'image initiale.
IM=im2bw(I);             % pour transférer l'image initiale vers
                          % image en binaire.
SE=strel('type',N);      % pour choisir le type d'élément
                          % structurant avec N son numéro de taille.
dil=imopen(IM,SE)        % c'est la commande pour effectuer
                          % l'ouverture par un structurant SE.
imshow(I),title('Image originale') % commande d'affichage
figure
imshow(IM),title('Image en binaire')
figure
imshow(dil),title('L'ouverture')

```

4. La fermeture :

La fermeture bouche presque tous les trous plus petites que l'élément structurant.

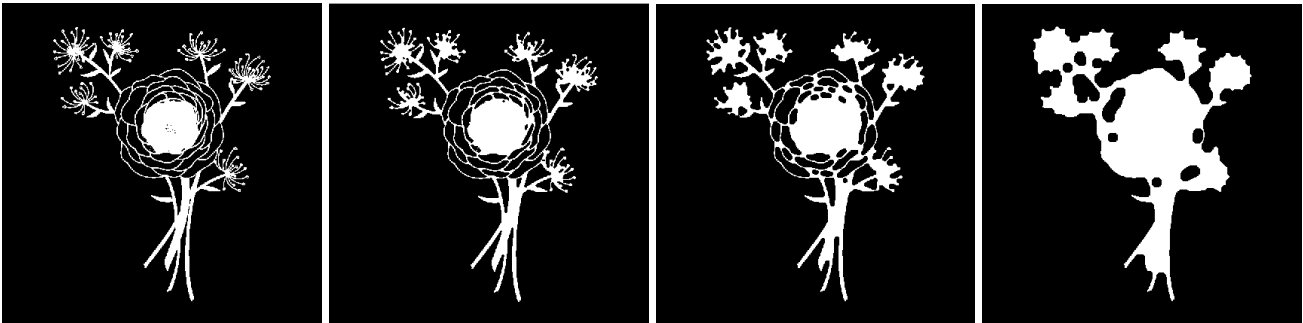


FIGURE 2.27 – La fermeture (vers droite) de l'image originale en binaire, en utilisant un élément structurant de type disque du taille [2, 5, 10].

Le programme que nous avons utilisé :

```

clc
clear all
I=imread('figure1.jpg'); % pour lire l'image initiale.
IM=im2bw(I);             % pour transférer l'image initiale vers
                          % image en binaire.
SE=strel('type',N);      % pour choisir le type d'élément
                          % structurant avec N son numéro de taille.
dil=imclose(IM,SE)       % c'est la commande pour effectuer
                          % la fermeture par un structurant SE.
imshow(I),title('Image originale') % commande d'affichage
figure
imshow(IM),title('Image en binaire')
figure
imshow(dil),title('La fermeture')

```

2.4.3 Dans le cas fonctionnel

Tous les programmes que nous utiliserons sont les mêmes ceux que nous avons déjà utilisé dans le cas binaire, sauf la commande

```
IM=rgb2gray(I);
```

qui a transféré l'image initiale vers l'image en niveaux de gris.

1. La dilatation

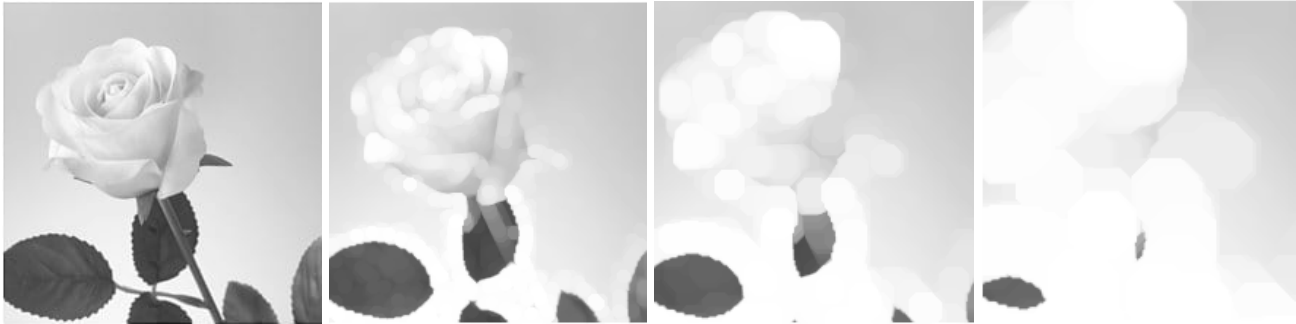


FIGURE 2.28 – Exemple de dilatation numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, dilatation par un disque de taille $[5, 10, 20]$).

2. L'érosion.

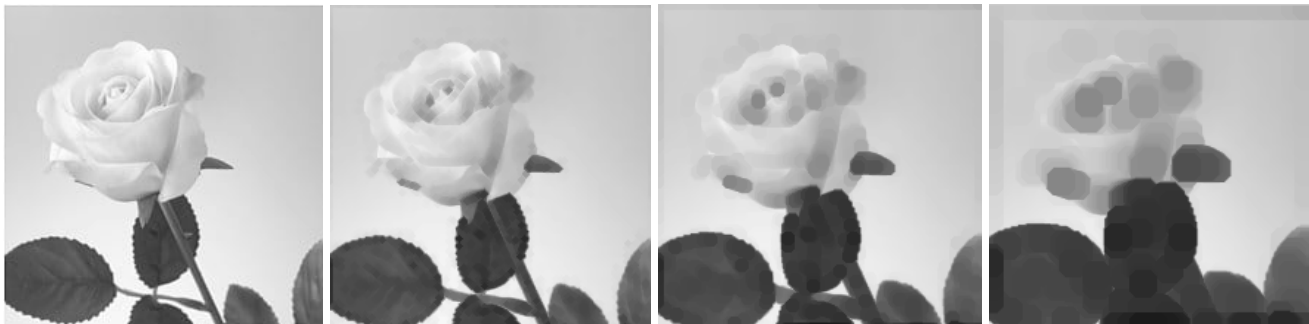


FIGURE 2.29 – Exemple d'érosion numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, érosion par un disque de taille $[2, 5, 10]$).

3. L'ouverture.



FIGURE 2.30 – Exemple d'ouverture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, ouverture par un disque de taille $[5,10,20]$).

4. La fermeture.



FIGURE 2.31 – Exemple de la fermeture numérique (de gauche à droite : image initiale à niveaux de gris, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, fermeture par un disque de taille $[5,10,20]$)

EDP ET MORPHOLOGIE

Dans le **chapitre 03** que nous titrerons **EDPs et Morphologie Mathématique**, nous présentons les opérateurs de la morphologie (dilatation/érosion) avec l'échelle et leur axiomes, ainsi nous donnerons la relation entre la morphologie mathématique et les équations aux dérivées partielles sous forme $\partial u / \partial t = \pm |Du|$ et le EDP de la chaleur.

3.1 Erosions et dilatations des ensembles/fonctions avec les échelles

Nous avons vu au chapitre 02 les définitions des érosions/dilatations par des ensembles des éléments structurants B à la forme la plus simple possible. Maintenant, nous introduisons en fait un paramètre t qui redimensionne la taille de l'élément structurant B et donc considérer les deux opérateurs de la définition suivante.

Définition 3.1. La dilatation d'une fonction $u \in \mathcal{F}$ par l'élément structurant tB à l'échelle $t \geq 0$ est définie par[4] :

$$D_t u(x) = \sup_{y \in tB} u(x - y). \quad (3.1)$$

Avec, $\delta_{tB} u = \delta_t u$.

De la même manière, l'érosion d'une fonction u par $-tB$ est définie par :

$$E_t u(x) = \inf_{y \in -tB} u(x - y). \quad (3.2)$$

Définition 3.2. Soient B un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n , $t \geq 0$ un paramètre d'échelle. L'ensemble des opérateurs \mathcal{D}_{tB} et \mathcal{E}_{tB} sont définies sur l'ensemble $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ par[4] :

$$\mathcal{D}_{tB} X = \mathcal{D}_t X, \quad (3.3)$$

$$= X + tB, \quad (3.4)$$

$$= \{x \mid \exists b \in B, x - tb \in X\}. \quad (3.5)$$

$$\mathcal{E}_{tB} = \mathcal{E}_t, \quad (3.6)$$

$$= \{x \mid x + tb \subset X\}, \quad (3.7)$$

avec $\mathcal{D}_t X$ est appelée la dilatation de l'ensemble X par B à l'échelle t et $\mathcal{E}_t X$ est appelé l'érosion de X par B à l'échelle t .

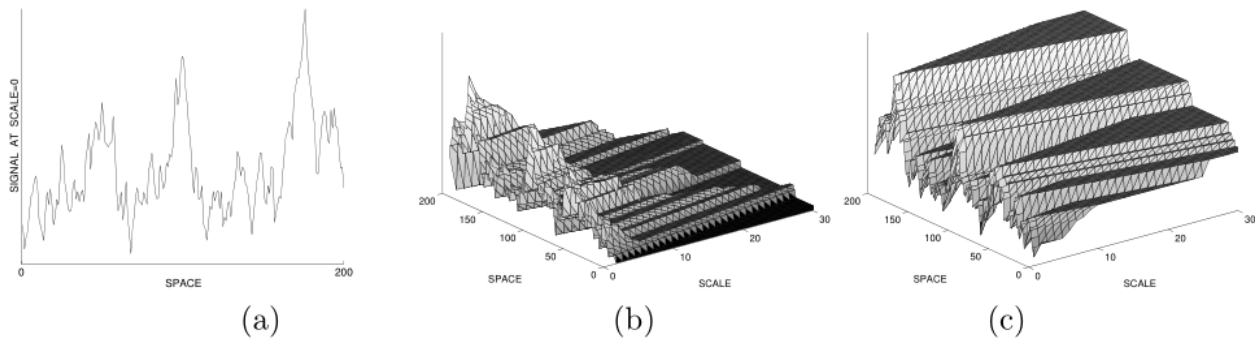


FIGURE 3.1 – (a) L'originale du signal de $f(x)$ à l'échelle $t = 0$. (b) L'érosion multi-échelle $E(x, t) = (f \ominus tB)(x)$, et (c) la dilatation multi-échelle $D(x, t) = (f \oplus tB)(x)$ de $f(x)$ par $B = [-1, 1]$ à l'échelle $t = [0, 30]$ [12].

Définition 3.3. Semi-groupe

On dit que la famille des dilatations $\{D_t \ t > 0\}$ associé à l'élément structurant B est récursive (récursive est aussi appelée un semi-groupe), si $D_t D_s = D_{t+s}$ pour tout $s, t > 0$. Et de même pour la famille d'érosion $\{E_t \ t > 0\}$ [4].

Lemme 3.1. *L'ensemble B est convexe si et seulement si $(s+t)B = sB + tB$, pour tout $s, t \geq 0$.*

Proposition 3.1. *L'ensemble des opérateurs \mathcal{D}_{tB} et \mathcal{E}_{tB} sont récursives, si et seulement si l'élément structurant B est convexe.[4]*

Démonstration. Soit B un ensemble fermé, on a[4]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t \mathcal{D}_s X &= (X + sB) + tB, \\ &= X + sB + tB, \end{aligned} \quad (*)$$

et

$$\mathcal{D}_{s+t} X = X + (s+t)B. \quad (**)$$

Si $* = **$, alors $\mathcal{D}_t \mathcal{D}_s X = \mathcal{D}_{s+t} X$.

Inversement, si $\mathcal{D}_t \mathcal{D}_s X = \mathcal{D}_{s+t} X$ et on prend $X = \{0\}$, donc $(t+s)B = tB + sB$. \square

3.2 Les EDPs associées aux érosions et aux dilatations

Les dilatations et érosions à l'échelle sont associés aux équations $\partial u / \partial t = \pm |Du|$, pour expliquer cette connexion, nous commençons par un ensemble convexe borné B qui contient l'origine, et nous définissons la norme $\|\cdot\|_B$ associé à B par :

$$\|X\|_B = \sup_{y \in B} (x.y). \quad (3.8)$$

Si, B c'est une boule centrée à l'origine avec le rayon 1 alors, $\|\cdot\|_B$ est l'usuelle de norme euclidienne que nous écrivons simplement par $|\cdot|$.

Proposition 3.2. *On suppose que B est une ensemble convexe bornée sur \mathbb{R}^n . Soient $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $u(t, x) = D_t u_0(x)$, avec $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Alors u satisfait l'équation suivant[4] :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|Du\|_{-B}, \quad (3.9)$$

à chaque point (t, x) où u a des dérivées continues en t et x . On a même résultat de E_t avec l'équation $\partial u / \partial t = - \|Du\|_{-B}$.

Démonstration. Premièrement, on démontre le résultat pour D_t à $t = 0$ [5].

Supposons que u_0 de classe C^1 , et de (3.8), on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{u(h, x) - u(0, x)}{h}, \quad (3.10)$$

et

$$\|Du\|_{-B} = \sup_{z \in B} (-Du_0(x) \cdot z). \quad (3.11)$$

D'autre part, on a

$$u_0(x - y) - u_0(x) = -Du_0(x) \cdot y + o(|y|). \quad (3.12)$$

Puisque l'ensemble B est bornée, Alors le terme $o(|y|)$ est uniformément pour $y \in hB$, donc

$$u(h, x) - u_0(x) = h \sup_{z \in B} (-Du_0(x) \cdot z + o(|h|)). \quad (3.13)$$

On peut diviser les deux cotés par h et passer à la limite :

$$\begin{aligned} \frac{u(h, x) - u(0, x)}{h} &= \sup_{z \in B} (-Du_0(x) \cdot z), \\ \implies \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= \|Du_0(x)\|_{-B}. \end{aligned}$$

Pour un arbitraire $t > 0$, on a $D_{t+h} = D_t D_h = D_h D_t$ et on peut écrire :

$$u(t + h, x) - u(t, x) = D_h u(t, \cdot)(x) - u(t, x).$$

En répétant l'argument de $t = 0$, en remplaçant u_0 par $u(t, \cdot)$, on arriver au résultat générale. \square

Remarque 3.1. La démonstration dans le cas d'érosion c'est la même que la dilatation, sauf on utilise inf pour le sup (définition du l'érosion).

Théorème 3.1. Si les dérivées partielles $\frac{\partial D_t}{\partial x}$ et $\frac{\partial E_t}{\partial x}$ existes dans chaque point x et l'échelle t , alors[5]

$$\frac{\partial D_t}{\partial t}(x, t) = \left| \frac{\partial D_t}{\partial x}(x, t) \right| \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}(x, t) = - \left| \frac{\partial E_t}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (3.15)$$

Démonstration. On considère la dilatation et l'érosion de f par une version multi-échelle $g_t : tB \rightarrow \mathbb{R}$ de la fonction structurant g , telle que[5]

$$\begin{aligned} tB &= \{tb \mid b \in B\}, t \geq 0, \\ g_t &= tg(x/t), t > 0, \end{aligned}$$

définies comme les fonctions :

$$D_t(x, t) = (f \oplus g_t)(x) = \sup_{v \in tB} \{f(x - v) + tg(v/t)\}, \quad (3.16)$$

$$E_t(x, t) = (f \ominus g_t)(x) = \inf_{v \in tB} \{f(x + v) - tg(v/t)\}, \quad (3.17)$$

avec : $D_t(x, 0) = E_t(x, 0) = f(x)$.

De la structure semi-groupe des dilatations/érosions multi-échelles, on a

$$D_t(x, t + r) = D_t(x, t) \oplus g_r(x), \quad (3.18)$$

$$E_t(x, t + r) = E_t(x, t) \ominus g_r(x). \quad (3.19)$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_t}{\partial t}(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D_t(x, t+r) - D_t(x, t)}{r}, \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D_t(x, t) \oplus g_r(x) - D_t(x, t)}{r}, \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D_t(x, t) \oplus rg(x/r)(x) - D_t(x, t)}{r}, \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{v \in tB} \{f(x-v) + tg(v/t)\} \oplus rg(x/r) - D_t(x, t)}{r}, \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{v \in rB} \{D_t(x-v, t) + rg(v/r)\} - D_t(x, t)}{r}. \tag{*}
\end{aligned}$$

D'autre part, on note $D_x = \frac{\partial D_t}{\partial x}$ et on utilisant la formule de Taylor du premier ordre :

$$D_t(x+v, t) - D_t(x, t) = D_x v + |v| o(v).$$

Ou $o(v) \rightarrow 0$ si $v \rightarrow 0$ et nous allons considérer $v \in [-r, r]$ par ignorer le terme $o(v)$ par la limite $r \rightarrow 0$, donc de (*) :

$$\frac{\partial D_t}{\partial t}(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{r \in rB} \{D_x v : |v| \leq r\}}{r}, \tag{3.20}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|D_x| r}{r}, \tag{3.21}$$

$$= \left| \frac{\partial D_t}{\partial x} \right|. \tag{3.22}$$

La preuve est similaire pour l'érosion, sauf en remplaçant le sup par inf. \square

3.3 Les axiomes morphologiques

La plupart des axiomes suivants que nous appelons **les axiomes morphologiques**, sont bien connus en morphologie mathématique. Ils affirment que l'analyse des images doit être invariante sous les fluctuations de la lumière et lors des changements de position, d'orientation et d'échelle des formes planes. On définit une analyse multi-échelle comme étant une famille d'opérateurs $\{T_t\}_{t \geq 0}$, qui appliquée à l'image originale $u_0(x)$ conduit à la suite d'images : $u(t, x) = (T_t u_0)(x)$. On donne une liste d'axiomes qu'on souhaiterait être vérifiée par la famille $\{T_t\}_{t \geq 0}$ [11].

(H_1) **Invariance par translations de niveau de gris :**

$$T_t(0) = 0, \quad T_t(u+c) = T_t(u) + c. \tag{3.23}$$

Ou T_t est un filtre linéaire définie par, $T_t u = u * U_t$, à condition de $\int U_t(x) dx = 1$. Pour tout c un constant.

(H₂) **Invariance par translations :**

$$T_t(\tau_h \cdot u) = \tau_h(T_t u), \quad (3.24)$$

ou $(\tau_h \cdot u)(x) = u(x + h), \forall h \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$.

(H₃) **Invariance par isométrie :**

$$T_t(R \cdot u)(x) = R(T_t u)(x). \quad (3.25)$$

ou $(R \cdot u)(x) = u(Rx)$, pour toute transformation R orthogonale.

(H₄) **Récurtivité :**

$$T_0(u) = u, \quad T_s \circ T_t(u) = T_{s+t}(u), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \forall s, t \geq 0. \quad (3.26)$$

3.4 Un exemple d'analyse multi-échelles

3.4.1 L'équation de la chaleur

Le modèle du EDP de la chaleur c'est un bon choix pour étudier les relations entre la morphologie et les équations aux dérivés partielles puisque le modèle est la seule analyse multi-échelle isométriquement, invariant et linéaire (les axiomes morphologique). Si $u(x, y, t) = G_t * u_0$ est la convolution linéaire à plusieurs échelles d'un signal $f(x)$ (l'image originale) avec une fonction Gaussienne $G_t(x, y) = (4\pi)^{-1} t^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/4t)$, dont la variance est proportionnelle à l'échelle t , alors la fonction de l'espace d'échelle u peut être générée à partir de le EDP de la chaleur :

$$\partial u / \partial t = c \Delta u$$

Avec la condition initiale $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Ce modèle est provenu de Marr-Hildreth [?] et il a été formalisé par Witkin [?], Koenderink [10]. Puisque l'étape fondamentale de l'analyse multi-échelles est la convolution de l'image originale, Koenderink [10] a remarqué que la convolution du signale avec gaussiennes à chaque échelle qui était équivalente à la solution de l'équation de la chaleur avec le signale comme condition initiale et nous la définissons par u_0 . L'analyse d'échelle associée à u_0 consiste à résoudre l'équation de la chaleur.

Pour comprendre la relation entre la morphologie et le EDP de la chaleur, on définit une famille d'opérateurs $\{T_t\}_{t \geq 0}$, qui appliquée à l'image originale $u_0(x)$ conduit à la suit d'images :

$$u(t, x) = (T_t u_0(x)).$$

Théorème 3.2. *Si on suppose que T_t satisfait (H_2) , (H_3) et (H_4) . Si on suppose de plus que $u \mapsto T_t u$ est linéaire comme (H_1) , alors[1]*

$$u(t, x) = (T_t u_0)(x), \quad (3.27)$$

est la solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \Delta u, \quad (3.28)$$

ou c est une constante strictement positive.

Démonstration. Commençons par le cas d'indépendant d'échelle. Puisque[11]

$$F(D^2 u, Du) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t u - u}{t}. \quad (3.29)$$

Par (H_1) : F est linéaire en u et satisfait donc,

$$F(rD^2 u + sD^2 v, rDu + sDv) = rF(D^2 u, Du) + sF(D^2 v, Dv), \quad (3.30)$$

$\forall s, r \in \mathbb{R}, \forall u, v \in X, \forall x$. Puisque les valeurs des $Du, Dv, D^2 u$ et $D^2 v$ sont arbitraires et peuvent être considérées indépendantes avec 0, donc soit

$$D^2 u = A, \quad D^2 v = A', \quad Du = P, \quad Dv = P'.$$

Avec A, A' sont des matrices symétriques et P, P' sont des vecteurs. Alors par (3.30) :

$$F(rA + sA', rP + sP') = rF(A, P) + sF(A', P'), \quad (3.31)$$

et

$$F(A, P) = F(A, 0) + F(0, P).$$

Donc

$$F(A, P) = F'(P) + F''(A), \quad (3.32)$$

avec F' et F'' sont linéaires.

Par (H_3) :

$$T_t(R \cdot u)(x) = R(T_t u)(x).$$

On obtient :

$$F(R^t A R, R^t P) = F(A, P), \quad (3.33)$$

pour tout l'isométrie R dans \mathbb{R}^n en prenant $A = 0$, on obtient par (3.33) :

$$F'(RP) = F'(P), \quad \text{pour tout } R \text{ isométrie.}$$

Puisque F est linéaire si et seulement si $F'(P) = 0, \forall P$.
Donc par (3.32) :

$$F(A, P) = F''(A)$$

par (H_3) , nous avons

$$F''(R^t A R) = F''(A), \quad (3.34)$$

pour tout l'isométrie R et A une matrice symétrique.

Puisque chaque matrice symétrique peut être diagonalisée dans une base orthogonale et chaque binôme des bases orthogonales peut être échangée par une certaine isométrie, nous voyons que F'' ne dépend que des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de A , ainsi

$$F''(A) = F''(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Comme les espaces propres peuvent être également échangés par des isométries $F''(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ doit être invariant sous toute permutation des valeurs propres.

Maintenant la seule fonction symétriques et linéaire est la somme. Ainsi $F''(A) = c \cdot \text{trace}(A)$, pour une constante c quelconque.

Nous concluons que :

$$F(D^2 u, Du) = c \Delta u.$$

Puisque F doit augmenter dans A la constante c est non négative. ceci la fine du démonstration. On peut appliquer exactement (H_4) , on obtient

$$F(D^2 u, Du, t) = c(t) \Delta u,$$

pour une fonction non négative continue $c(t)$, donc avec la redimensionnement $\partial t'(t)/\partial t = c(t)$, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\partial u / \partial t - \Delta u = 0. \quad (3.35)$$

□



FIGURE 3.2 – Exemple d’ouverture multi-échelle d’image originale dans la première ligne (Le paramètre d’échelle a été défini comme : la variance des gaussiennes pour les convolutions linéaires dans la deuxième ligne et la dernière ligne : le rayon de l’élément structurant d’un disque) le paramètre d’échelle vers droite : $t=4$, $t=8$, $t=16$, $t=32$ [12]

Résultat expérimentale de le EDP de la chaleur :

Nous déduisons maintenant du théorème (3.2) que $u(t, x) = (T_t u_0)(x)$ est une solution de l’équation de la chaleur, ainsi que $u(x, y, t) = G_t * u_0$ est une solution, Alors nous peuvent dire que

$$T_t \approx G_t.$$

D’après cela, la figure 3.2 représente le filtre d’images par le EDP de la chaleur et l’ouverture par des éléments structurants d’un disques des tailles différents. Donc Nous observons que le changement de la variance des gaussiennes avec l’échelle t c’est un cas où les opérateurs de morphologie comme l’ouverture apparait et applique dans tous les changements des variances avec l’échelle t .

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons analysé et étudié le concept de la morphologie mathématique dans les trois cas : binaire, fonctionnel et le cas des multi-échelles. Nous avons cherché en premier lieu tous les définitions de la morphologie mathématique et se application sur l'image (leur opérateurs sont des filtres d'images).

Dans le cas binaire et fonctionnel, nous avons développé et détaillé les techniques de morphologie mathématique basée sur les principes d'algébrique, ainsi que nous avons donné un procédure pratique dans les deux cas avec de programmes utilisés par l'application sur Matlab. Dans la deuxième partie nous avons présenté une étude détaillée tous les concepts morphologique lié à l'analyse multi-échelle et étudié l'existence d'une relation mathématique entre la morphologie (l'érosion et la dilatation) et les équations aux dérivée partielles sous formes $\partial u / \partial t = \pm |Du|$.

Dans la même partie nous avons introduit une étude de la relation entre les EDPs et la morphologie mathématique basée sur l'équation de la chaleur.

Bibliographie

- [1] J. F. Aujol. *Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles*. DEA, 2005, PP.55.
- [2] T. Hugues. *Introduction à la Morphologie Mathématique, Théorie et applications*. version 2.0, octobre 2010.
- [3] I. Bloch, Y. Gousseau, H. Maitre, D. Matignon. *Le traitement des images*. 08 décembre 2005.
- [4] J. M. Morel et R. Ryan F. Guichard. *Contrast invariant image analysis and PDEs*. Preprint, 2004.
- [5] W. Broucker and P. Maragos. *Evolution equations for continuous-scale morphological filtering*. IEEE, TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, 42(12) :3377–3386, 1994.
- [6] S. Dubuisson. *Morphologie mathématique*. Novembre 2006.
- [7] A. Lagoutte et H. Salat. *Méthode alternative pour les EDP de type Hamilton-Jacobi*. Stage de L3 - Soutenance, juin 2010.
- [8] J. F. Lerallut et J. A. Leehan et V. Medina. *Morphologie Mathématique*. , 1999.
- [9] J. M. Morel F. Guichard. *Images and movies scale-spaces*. Univ. PARIS Dauphine, Place du Marechal de Lattre de Tassigny.
- [10] J. J. Koenderink. *The structure of images*. Biol Cybern, 50 :363–370, 1984.
- [11] P. L. Lions L. Alvarez, F. Guichard and J. M. Morel. *Axioms and fundamental equations of image processing*. Arch. Rational Mech. Anal, pages 199–257, 1993.
- [12] P. Maragos. *PDEs for Morphological scale-spaces and Eikonal applications*. National Technical University of Athens, Greece, Nov.2004.
- [13] N. Benhamidouche. *Equations aux dérivées partielles et traitement de l'image, Cours en Master II, EDPs et applications*. Université M. B de M'sila, 2017-2018.
- [14] M. Volpi. *Cours MATLAB Traitement d'Image Opérateurs Morphologiques*. Université de Lausanne, 24 Nouvermbre 2009.
- [15] S. Brahmi et H. Sihem. *Extraction des différents opérateurs de la morphologie mathématique*. Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Licence en Informatique, Université Abou Bekr Belkaid à Tlemcen, 2014.
- [16] M. Hammouda. *Segmentation d'images médicales par morphologie mathématique*. Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de MASTER en GENIE BIOMEDICAL, Université Abou Bekr Belkaid à Tlemcen, 2015-2016.
- [17] G. Matheron. *On the negligibility of the skeleton* J. Serra, (DIR .), Image Analysis and Mathematical Morphology, vol. 2, Theoretical Advances, p. 239-256, Academic Press, London, 1988

-
- [18] S. KHACHAB. *Classes de solution pour le modèle de Perona-Malik unidimensionnel*. Mémoire de fin d'études pour l'obtention du Diplôme de MASTER, Université MOHAMED BOU-DIAFDE à M'sila, 2017-2018, p : 06-13.
- [19] http://urfist.chartes.psl.eu/anciensite/image_numerique/chapitre3_7.html. *Morphologie mathématique fonctionnelle*.

المخلص:

يتكون العمل المقترح في هذه الرسالة من تحليل ودراسة مفهوم التشكل الرياضي باستخدام المبادئ الجبرية والمعادلات ذات المشتقات الجزئية.

تم تطوير هذه النظرية من قبل ل. ألفارز، ف. جويشارد، ب.ل. ليون و ج.م. مورال، في عام 1992، من خلال إدخال مبدأ مقياس الفضاء (ثبات المقياس، التمدد وما إلى ذلك) في نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية.

يسمى هذا المبدأ -التشكل الرياضي- وهو يرتبط بالمعالجة المورفولوجية للصورة (تمدد الصورة، وما إلى ذلك).

الكلمات المفتاحية: المعادلة ذات المشتقات الجزئية، التشكل الرياضي.

The travail proposé dans ce mémoire consiste à analyser et étudier le concept de morphologie mathématique en utilisant les principes algébriques et les équations aux dérivées partielles.

Cette théorie a été développée par : L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions et J. M. Morel, en 1992, en introduisant le principe espace-échelle (invariance d'échelle, dilatation, etc.), dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Ce principe dit - Morphologie Mathématique - est lié au traitement morphologique de l'image (dilatation de l'image, etc.).

Mots-Clés : Equation aux dérivées partielles, Morphologie Mathématique.

The work proposed in this memoir consists of analyzing and studying the concept of mathematical morphology using the algebraic principles and partial differential equations.

This theory was developed by : L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions and J. M. Morel, in 1992, by introducing the scale-space principle (scale invariance, dilation..., in the theory of partial differential equations.

This principle says - Mathematical Morphology - is related to the morphologie treatment of the image (dilatation of the image...).

Keywords : Partial derivative equation, mathematical morphology.