



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et de L'informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs

Présenté par

Krim Rebiha

Sujet

Étude d'un problème parabolique à donné L^1

Soutenu le :27/06/2021

Devant le jury :

Mr. Hallal Abdelazize

M.A.A. Univ de M'sila

Président

Mr. Rabah Mecheter

M.C.B. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Dachoucha Nouredine

M.A.A. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2020/2021

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Rabah MECHETER**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,,

-A me mari,

-A mes frères,

-A mes sœurs,

-A toute la famille krim,

-A tous mes amis et toute ma famille de département

de Mathématiques,

-A toutes mes adorables que j'ai connu pendant

toute ma vie ...

Ben krim rebiha

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Notation	5
Introduction générale	7
1 Préliminaires et outils de base	10
1.1 Quelques notations	10
1.2 Définitions et premières propriétés	10
1.3 Inégalités principales	12
1.4 Théorèmes de convergence	13
1.5 Théorème d'injection de sobolev	16
1.6 Opérateurs monotones	17
1.7 Opérateurs bornés	17
1.8 Opérateurs hémicontinus	18
2 Problème parabolique a donné régulière	19
2.1 L'opérateur p-Laplacien	19
2.2 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien	19
2.3 Opérateurs pseudo-monotones	22
2.4 L'espace $L^p(0, T; V)$	24
2.5 Théorème d'Existence	26
3 Problème parabolique a donné L^1	28
3.1 Positions du problème	28
3.1.1 Pourquoi la condition $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$	28
3.2 Approximation de (P)	30

3.3	Estimations uniformes des solutions approchées	31
3.4	passage à la limite	37
Abstract		44

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

\mathcal{H}	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X .
(\cdot, \cdot)	: Définit un produit scalaire.
$L^p(0, T; V)$	$\doteq \left\{ v : [0, T] \rightarrow V \text{ mesurable et } \int_0^T \ v\ _V^p dt < \infty, \right\}$.
\mathbb{R}^N	espace euclidien de dimension N , N un nombre naturel non nul
x	vecteur de \mathbb{R}^N , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
dx	mesure de Lebesgue N -dimensionnelle
$ E $	ou $\text{mes}(E)$ mesure de Lebesgue d'un ensemble E
χ_E	fonction caractéristique de E
Ω	partie ouverte de \mathbb{R}^N
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité entre X et son dual
$\int_{\Omega} f(x) dx$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue
$\text{supp } u$	Support de la fonction u
$\nabla u = Du$	$\triangleright = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ gradient de u
$\text{div } u$	divergence du vecteur u , $\text{div } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N}$
$f_n \rightarrow f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f .
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge faible vers f .
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left(\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right)^{1/p} < +\infty \text{ tel que } 1 \leq p < \infty\}$
$ u _p$	$= \left[\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right]^{1/p} = u _{L^p}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists M > 0 \mid u(x) \leq M \text{ p.p.}\}$
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
q	conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

p.p. presque partout

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées et ce domaine devient de plus en plus important à l'époque moderne. Les EDP ont une grande utilité dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes comme la physique, la chimie, la biologie et d'autres sciences. Autrement dit, les EDP interviennent dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations. Ces problèmes se ramènent à des modèles mathématiques écrits en général sous forme

$$L(u) = f, \quad (1)$$

où L est un opérateur défini d'un espace de fonctions E dans un espace fonctionnel F , u est la fonction inconnue et f une fonction donnée. Les EDP sont probablement apparues pour la première fois au cours du 17^{ème} siècle. Ensuite le domaine des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. Cependant, l'étude systématique des EDP est bien plus récente et c'est seulement au cours du 20^{ème} siècle que les mathématiciens ont commencé à développer et en effet cette théorie a connu récemment un très grand avancement théorique et pratique. L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est de poser la question : pouvons-nous obtenir des solutions explicitement ? Alors ce que les mathématiques peuvent

faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précieusement certaines propriétés de ces solutions. Donc, généralement une solution exacte du problème (1) n'est pas facile à trouver et parfois nous ne pouvons même pas trouver la solution explicite. Ce qui conduit à introduire la notion de la solution faible qui apparue en 1934 dans les travaux de Jean Leray. Par conséquent, dans la plupart des cas il est très difficile, voir impossible, d'exhiber les solutions d'une EDP. Dans certains cas nous arrivons à essayer de montrer que le problème admet une unique solution (on dit qu'il est bien posé). Mais nous pouvons parfois calculer des approximations numériques des solutions.

Ce travail a pour objet l'étude d'une équation parabolique à données L^1 . Cette étude porte sur l'existence et la régularité d'une solution du problème :

Pour $T > 0$ un nombre réel et Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N , trouver u une fonction mesurable telle que

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Nous supposons que $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$, et le nombre réel p satisfais

$$p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}.$$

L'opérateur A défini par

$$Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

.

Cette étude s'appuie essentiellement sur l'article [15] " SOME QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS" publié en 1991 par JEAN MICHEL RAKOTOSON au journal J.Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 17, No 12, pp. 1163-1175 (cas particulier à prendre L'opérateur principale $Au = -\Delta_p$).

Dans le cas parabolique et $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$. nous avons défini la solution faible d'une

équation parabolique $\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f$ par

$$u \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \text{ et}$$

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx dt = \int_{Q_T} f \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Pour résoudre le problème (P), on passe par les étapes suivantes :

a) Approximation de problème (P) par une suite de problèmes (P_n) réguliers à données L^∞ dans l'espace $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ avec

$$p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}.$$

b) Passage à la limite dans (P_n) . Pour pouvoir le réaliser, comme dans [16], nous établissons des estimations uniformes sur les solutions approchées (u_n) de (P_n) , et en utilisant, le lemme 1.8 qui donne la convergence p.p. des gradients (∇u_n) , Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier, nous donnons des définitions et les propriétés des espaces de Sobolev, et quelques des inégalités principales, Théorèmes de convergence, Théorème d'injection de Sobolev .

Dans le second chapitre, nous rappelons l'opérateur p-Laplacien et ses propriétés (monotones, hémicontinu, pseudo monotones). Ce chapitre basée sur les espaces sous forme $L^p(0, T; V)$ avec V est un espace de Banach prend un exemple l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ ou l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ et basée aussi sur le théorème d'Existence (2.6) qui donne l'existence d'une solution pour la même problème (P) Mais avec seconde membre f dans l'espace dual.

Enfin, le chapitre 3 est consacré à la preuve du théorème d'existence 3.1 qui exige les 3 étapes principales mentionnées ci-dessus

Préliminaires et outils de base

Ce premier chapitre a pour but de présenter un certain nombre d'outils d'analyse de théorie des espaces de Sobolev qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations.

1.1 Quelques notations

Dans tout ce qui suit Ω désignera un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, i.e. un ouvert connexe et borné de \mathbb{R}^N . Sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\bar{\Omega}$.

Soit $u = u(x_1, \dots, x_N)$ un fonction définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En supposant qu'il exist, on appelle gradient de u au point x le vecteur

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right)$$

La norme euclidienne de ∇u est notée par $|\nabla u|$:

$$|\nabla u| = \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^2 \right]^{1/2}$$

1.2 Définitions et premières propriétés

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et p un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire. De plus si $p = +\infty$ on a :

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} | f(x) | .$$

Définition 1.1. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}.$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_p + \| \nabla u \|_p \tag{1.1}$$

et pour $p = \infty$

$$\| u \|_{W^{1,\infty}} = \max(\| u \|_{L^\infty}, \| \nabla u \|_{L^\infty}).$$

Remarque 1.1. pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial_i x}, \frac{\partial v}{\partial_i x} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

Lemme 1.1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme (1.1) est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$, il est réflexif pour $1 < p < +\infty$ et séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.2. L'espace $D(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , et pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini par la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, relativement à la norme (1.1). Autrement dit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Cette espace muni d'une norme équivalente à la norme (1.1), donnée par

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Pour les résultats sur les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ le lecteur pourra trouvé toutes les démonstrations dans l'ouvrage de Adams [1]. Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ ne coïncident pas.

Théorème 1.1 ([1]). Soient $1 < p < \infty$ et $p' = \frac{p}{p-1}$. Le dual de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est $W^{-1,p'}(\Omega)$.

1.3 Inégalités principales

Soit $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ deux réels et p' l'exposant conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme 1.2 (Inégalité de Hölder). *Si $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\| f \cdot g \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| f \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

En particulier

$$L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq p' < \infty$$

Lemme 1.3. *Soient $p_i \in [1, +\infty]$ des exposants avec $1 \leq i \leq k$ tels que :*

$1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1$. Alors, pour toutes fonctions $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons $f = f_1 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder généralisée

$$\| f \|_p \leq \| f \|_{p_1} \dots \| f \|_{p_k} .$$

Lemme 1.4 (Inégalité de Young). *Soient a et b deux réels positifs. Soit $p > 1$, alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \text{avec } p' = \frac{p}{p-1}. \tag{1.2}$$

Lemme 1.5 (Inégalité d'interpolation). *Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$,*

Pour tout $r \in [p, q]$ et

$$\| f \|_{L^r(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)}^\alpha \| f \|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{avec } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$.

Lemme 1.6 (Inégalité de Poincaré). *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante C dépend de p telle que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} . \tag{1.3}$$

De plus, par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité (1.3) reste vraie pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.2. Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).

Lemme 1.7 (Formule de la divergence et de Green). Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^N , et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières, w un champ de vecteurs définis sur Ω . Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n \, d\sigma \quad (\text{formule de la divergence})$$

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma \quad (\text{formule de green})$$

1.4 Théorèmes de convergence

dans cette section, nous présentons quelques définitions et les résultats sur la convergence des suites de fonctions mesurables

Définition 1.3. Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω et u une fonction mesurable sur Ω

— La suite (u_n) converge presque partout sur Ω vers u si et seulement si

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : u_n(x) \text{ ne converge pas vers } u(x)\} = 0,$$

— La suite (u_n) est dite Cauchy en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $\eta > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$, alors

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |u_n(x) - u_m(x)| > \eta\} \leq \varepsilon$$

Lemme 1.8. [14] Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} . Si (u_n) de Cauchy en mesure alors il existe une sous-suite de (u_n) convergeant presque partout

Lemme 1.9. [12] *Soit f une fonction mesurable strictement positive. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \subset \Omega$ mesurable on ait*

$$\int_A f dx < \delta \Rightarrow \text{meas}(A) < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Théorème 1.2. (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)[12] *Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que*

(a) $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ p.p. Sur Ω .

(b) *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω . Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Théorème 1.3 (Giuseppe Vitali convergence theorem [5]). *soit $p \in [1, \infty[$ et (f_n) une suite des fonctions dans $L^p(\Omega)$ tels que*

— $f_n \rightarrow f$ p.p. dans Ω

— (f_n) *equi-integrable in Ω , i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset \Omega$ avec $|E| \leq \delta$, telle que*

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou

$$\limsup_{|E| \rightarrow 0} \int_E |f_n(x)|^p dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ and } f_n \rightarrow f \text{ in } L^p(\Omega) \text{ fortement.}$$

Lemme 1.10 (J.Simon[18]). *Soient $X \subset B \subset Y$ trois espaces de Banach tels que l'injection de X dans B soit compacte. Si*

— F est borné dans $L^p(0, T; X)$ avec $(1 \leq p < \infty)$, et

— $F_t = \partial_t F$ est borné dans $L^1(0, T; Y)$,

Alors, F est relativement compacte dans $L^p(0, T; B)$.

Lemme 1.11 (Stampacchia). *soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction globalement lipschitzienne, i.e.*

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad |T(s) - T(t)| \leq C|s - t|, \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

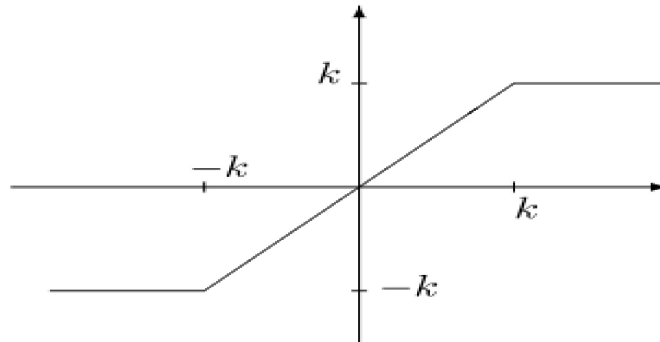
telle que $T(0) = 0$. Alors, $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ on a :

$$T(v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T(v) = T'(v)\nabla v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad p.p \quad \text{dans} \quad \Omega$$

Exemple 1.1 (Troncature). *Soit $k > 0$. On appelle troncature aux niveaux $-k$ et k la fonction T_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par*

$$T_k(r) = \begin{cases} k, & \text{si } r \geq k, \\ r, & \text{si } |r| < k, \\ -k, & \text{si } r \leq -k. \end{cases}$$

On peut vérifier que la fonction T_k est une fonction globalement lipschitzienne satisfaisant



$|T_k(r)| \leq k$ et $|T_k(r)| \leq |r|$ et sa primitive $\Theta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ défini par :

$$\Theta_k(r) = \int_0^r T_k(t) dt = \begin{cases} \frac{r^2}{2}, & \text{si } |r| \leq k \\ k|r| - \frac{k^2}{2}, & \text{si } |r| > k \end{cases}$$

Nous utiliserons par la suite le résultat suivant

$$\int_0^T \langle \partial_t v, T_k(v) \rangle dt = \int_{\Omega} \Theta_k(v(T)) - \int_{\Omega} \Theta_k(v(0)). \quad (1.5)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente la dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.5 Théorème d'injection de sobolev

Enonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N

Définition 1.4. On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :

- a) X est un sous-espace de Y .
- b) il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in X$: $\|u\|_Y \leq c\|u\|_X$

Définition 1.5. On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si :

- i) X s'injecte de façon continue dans Y .
- ii) toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y .

Théorème 1.4. (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) Soit $1 \leq p < N$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{ou } p^* \quad \text{est donnée par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p; N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $1 < p \leq N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

et pour le cas limite $p = N$, on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty[$$

Corollaire 1.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit $1 \leq p < \infty$, on a

Si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[.$

Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$

Théorème 1.5. (Théorème de Rellich-Kondrachov)[4] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , on a :

Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[. \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$

Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[.$

Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

En particulier l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < N$ est compacte.

1.6 Opérateurs monotones

V désigne un espace de banach réel, V' son dual topologique de V

Définition 1.6. Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dit :

- monotone si $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in V$
- strictement monotone si $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \forall u, v \in V, u \neq v$

Exemple 1.2. L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par $Au = -\Delta u$ est monotone, $H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme du gradient. En effet, pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) \\ &= \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

1.7 Opérateurs bornés

Définition 1.7. Soit V et W deux espaces de banach et soit $A : V \rightarrow W$ un opérateur. On dira que A est borné s'il envoie tout borné de V dans un borné de W ; i.e

$$\forall \rho > 0, \quad \exists C_\rho > 0 : \quad A(B_V(0, \rho)) \subset B_W(0, C_\rho)$$

1.8 Opérateurs hémicontinus

Définition 1.8. *Un opérateur $A : V \rightarrow W$ est dit hémicontinu au point u_∞ de V si pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u_∞ , la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement vers Au_∞ dans W . En d'autres termes :*

$$\forall v \in V, \quad \forall \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_n \rightarrow 0, \quad A(u_\infty + \lambda_n v) \rightharpoonup Au_\infty$$

faiblement dans W .

Si A est hémicontinu en tout point de V , on dit qu'il est hémicontinu sur V . Dans les espaces réflexifs et pour $W = V'$, et passant du séquentiel au continu, on peut définir l'hémicontinuité sur V en exigeant que :

$$\forall u, v, w \in V \quad \text{l'application} \quad \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w \rangle \in \mathbb{R}$$

est continue.

Exemple 1.3. *L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par*

$Au = -\Delta u = -\text{div}(\nabla u)$ est hémicontinu. En effet; soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle A(u + \lambda v), w \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla w \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w + \lambda \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \\ &= a + b\lambda. \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ est continue.

Problème parabolique a donné régulière

Nous consacrons ce chapitre à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation parabolique non linéaire du type suivant

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur }]0, T[\times \Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega, \end{cases}$$

Pour $T > 0$ un nombre réel et Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N et $f \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. L'opérateur A défini par $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ avec $1 < p < \infty$

2.1 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

cet opérateur sous forme divergence lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$; le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel Δ

2.2 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et soit l'opérateur

$$A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow V' = W^{-1,p'}(\Omega)$$

défini par

$$Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

On a d'après la formule de green on a

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) : \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

Proposition 2.1. *L'opérateur $Au = -\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$*

Démonstration. De l'expression de la norme dans un espace dual, soit $\rho > 0$, pour $u \in B_V(0, \rho)$, on peut écrire :

$$\| Au \|_{V'} = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \right|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \| Au \|_{V'} &\leq \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \cdot |\nabla \varphi| \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| u \|_V^{p-1} \\ &\leq \rho^{p-1} \end{aligned}$$

D'où $\| Au \|_{V'} \leq \rho^{p-1}$. cela montre que $A(B_V(0, \rho)) \subset B_{V'}(0, \rho^{p-1})$

□

Proposition 2.2. *l'opérateur A est hémicontinu de V dans V' .*

Démonstration. soit $v \in V$, et $\{\lambda_n\}$ une suite réelle qui converge vers 0

$$\forall g \in V, \quad \langle A(u_{\infty} + \lambda_n v), g \rangle \rightarrow \langle Au_{\infty}, g \rangle$$

on a

$$\langle Au_{\infty}, g \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_{\infty}|^{p-2} \nabla u_{\infty} \cdot \nabla g$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle A(u_\infty + \lambda_n v), g \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla(u_\infty + \lambda_n v)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda_n v) \nabla g \\ &= \int_{\Omega} |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v) \nabla g \end{aligned}$$

$$1. \quad |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v) \nabla g \xrightarrow{p,p} |\nabla u_\infty|^{p-2} (\nabla u_\infty) \nabla g$$

on peut mettre $|\lambda_n| \leq 1$, Alors

$$\begin{aligned} \left| |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v) \nabla g \right| &= |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)^{p-1} \nabla g| \\ &\leq \left[|\nabla u_\infty| + |\lambda_n| |\nabla v| \right]^{p-1} |\nabla g| \\ &\leq \left[|\nabla u_\infty| + |\nabla v| \right]^{p-1} |\nabla g| \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^\alpha \leq \max\{1, N^{\alpha-1}\} \sum_{i=1}^N a_i^\alpha, \quad \forall a_i \geq 0, \alpha > 0 \quad (2.1)$$

En utilisant l'inégalité de Young (1.4) et (2.1), on écrit

$$\begin{aligned} \left| |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v) \nabla g \right| &\leq \frac{|\nabla g|^p}{p} + \frac{\left[|\nabla u_\infty| + |\nabla v| \right]^p}{p'} \\ &\leq \frac{1}{p} |\nabla g|^p + \frac{\max(1, 2^{p-1})}{p'} \left(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p \right). \end{aligned}$$

Le fait que $g, v, u_\infty \in W_0^{1,p}(\Omega)$, implique que

$$\frac{1}{p} |\nabla g|^p + \frac{2^{p-1}}{p'} \left(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p \right) \in L^1(\Omega)$$

D'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A(u_\infty + \lambda_n v), g \rangle = \langle A(u_\infty), g \rangle$$

d'où l'hémicontinuité de A . □

Proposition 2.3. *l'opérateur A est coercitif de V dans V' .*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|_V} &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p}{\|v\|_V} \\
 &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\|v\|_V^p}{\|v\|_V} \\
 &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \|v\|_V^{p-1} = +\infty \quad \text{car } 1 < p < +\infty.
 \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *l'opérateur A est monotone de V dans V' .*

Démonstration. On rappelle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x - y) \geq \alpha|x - y|^p, \alpha > 0$

Alors $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned}
 \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) \nabla(u - v) \\
 &\geq \int_{\Omega} \alpha |\nabla u - \nabla v|^p \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

2.3 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 2.1. *Un opérateur $A : V \rightarrow V'$*

i) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 1) s'il est

— pour tout $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au_n, u - v \rangle, \quad \forall v \in V$$

ii) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 2) s'il est

— pour tout $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible avec $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle \xi, u \rangle$$

on a

$$\xi = A(u) \quad \text{et} \quad \langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$$

Proposition 2.5. *Si $A : V \rightarrow V'$ est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone (au sens 1).*

Démonstration. a) Soit $\{u_j\}$ une suite convergeant faiblement vers u dans V . Supposons que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \leq 0$$

Si A est monotone, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \rightarrow 0 \tag{2.2}$$

En effet, la monotonie de A et la convergence faible de $\{u_j\}$ vers u implique que

$$\langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \langle Au, u_j - u \rangle \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad j \rightarrow \infty$$

Et donc

$$0 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au, u_j - u \rangle = 0$$

D'où (2.2)

b) pour $v \in V$ et $t \in]0, 1[$, posons $w = (1-t)u + tv$. On a $\langle Au_j - Aw, u_j - w \rangle$ de sorte que :

$$t \langle Au_j, u - v \rangle \geq - \langle Au_j, u_j - u \rangle + \langle Aw, u_j - u \rangle - t \langle Aw, v - u \rangle.$$

D'où, grâce à (2.2) :

$$t \liminf_j \langle Au_j, u - v \rangle \geq -t \langle Aw, v - u \rangle,$$

d'où, en divisant par t et tenant compte de (2.2) :

$$\liminf_j \langle Au_j, u_j - v \rangle \geq \langle Aw, u - v \rangle \quad (2.3)$$

$$w = (1 - t)u + tv \quad \forall t \in]0, 1[$$

En faisant tendre t vers 0 dans (2.3), et en utilisant l'hémi-continuité, on déduit

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle, \quad \forall v \in V$$

Ce qui signifie que A est pseudo-monotone au sens 1 . □

2.4 L'espace $L^p(0, T; V)$

Soit $1 \leq p < \infty$, $L^p(a, b; V)$ est un espace des fonctions mesurables $u : [a, b] \rightarrow V$ tel que

$$\| u \|_{L^p(a, b; V)} = \left(\int_a^b \| u \|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$L^\infty(a, b; V)$ est un espace des fonctions mesurables telles que :

$$\| u \|_{L^\infty(a, b; V)} = \sup_{[a, b]} \| u \|_V < \infty.$$

Rappelons que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(a, b; V)$ est un espace de Banach. De plus, si $1 \leq p < +\infty$ et V' l'espace dual de V est séparable alors l'espace dual de $L^p(a, b; V)$ peut être identifié avec $L^{p'}(a, b; V')$

pour notre but V sera principalement soit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ ou l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$ et Ω sera un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^N . puisque, dans ce cas, V est séparable, nous avons que $L^p(a, b; L^p(\Omega)) = L^p((a, b)\Omega)$, l'espace ordinaire de Lebesgue défini dans $(a, b)\Omega$ et $L^p(a, b; W_0^{1,p}(\Omega))$ se compose de toutes les fonctions

$u : [a, b]\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui appartiennent à $L^p((a, b)\Omega)$ et de telle sorte que $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$ appartient à $L^p((a, b)\Omega)^N$ de plus

$$\left(\int_a^b \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme équivalente par l'inégalité de Poincaré.

Pour $a = 0, b = T$ on définit l'espace suivant

$$L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \doteq \left\{ v : [0, T] \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ mesurable} \right. \\ \left. \int_0^T \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt < \infty, \right\},$$

la norme dans cet espace donné par

$$\|v\| = \left(\int_0^T \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions mesurables telles que :

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} = \sup_{[0, T]} \|u\|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Théorème 2.1 (Densité). *Pour tout $1 \leq p < +\infty$ l'espace $\mathcal{C}([0, T]; V)$ est dense dans $L^p(0, T; V)$.*

Démonstration. : Voir [21, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.2 (Séparabilité). *Si V est séparable alors pour tout $1 \leq p < +\infty$ l'espace $L^p(0, T; V)$ est séparable.*

Démonstration. : Voir [21, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.3. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace $L^p(0, T; V)$ est de Banach.*

Démonstration. : Voir [17, Satz 1.22., p. 39], [21, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.4. *Si V s'injecte continûment dans un espace de Banach W , $p, r \in [1, +\infty]$, $p \leq r$, alors $L^r(0, T; V)$ s'injecte continûment dans $L^p(0, T; W)$.*

Démonstration. : Voir [8, Proposition 2.2.5., p. 128]. □

Définition 2.2. Soient $V \subset W$ (avec injection continue) deux espaces de Banach, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Nous disons qu'une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ a une dérivée faible dans $L^q(0, T; W)$ s'il existe une fonction $g \in L^q(0, T; W)$ telle que

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = - \int_0^T \varphi(t)g(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

(Cette égalité a lieu en W). Si une telle fonction g existe, il est unique et nous notons

$$\frac{du}{dt} = g.$$

Théorème 2.5 (Inégalité de Hölder). Si $u \in L^p(0, T; V)$ et $v \in L^{p'}(0, T; V')$, alors

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle|_{V'V} dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V'}^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Voir [21, Proposition 23.6., p. 411]. □

2.5 Théorème d'Existence

Théorème 2.6. Soient V un espace de Banach réflexif et séparable et $A : V \rightarrow V'$ un opérateur

- borné
- hémicontinu
- coercitif, au sens que

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

- monotone

Soient f et u_0 donnés avec

$$f \in L^{p'}(0, T; V'), \quad u_0 \in H \quad (\text{espace de Hilbert})$$

Alors, il existe une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ et une seule telle que

$$\partial_t u + Au = f \quad \text{et} \quad u(0, x) = u_0(x)$$

Pour la preuve de ce théorème, on peut renvoyer le lecteur au livre [11]

Théorème 2.7. *Soient $f \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Alors le problème (P_0) possède au moins une solution faible $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. pour tout $1 < p \leq +\infty$.*

Démonstration. D'après les propositions précédentes, on a l'opérateur principale $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ et pseudo-monotone c'est à dire borné, hémicontinu, monotone et coercitif, alors d'après le Théorème 2.6 le problème (P_0) possède au moins une solution faible $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. pour tout $1 < p \leq +\infty$. □

Remarque 2.1. *D'après les résultats dans le livre (voir [11]), la solution u est dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$*

Problème parabolique à donné L^1

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel qui permet la résolution d'un problème parabolique à donné L^1 . Nous précisons la notion de solution faible du problème (P) . Nous l'approchons par une suite de problèmes (P_n) dont on démontre l'existence de solution (u_n) . Nous établissons, sur ces solutions approchées, des estimations uniformes qui nous permettent passer à la limite, grâce à des propriétés de compacité (pour passer à la limite dans les termes non linéaires).

3.1 Positions du problème

Nous supposons que T un nombre réel positif, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et (P) est posé dans un cylindre $Q =]0, T[\Omega$ du type suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Nous supposons que $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$, et le nombre réel p satisfais

$$p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}. \quad (3.1)$$

3.1.1 Pourquoi la condition $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$

Pour justifier la condition $p > 2 - \frac{1}{N+1}$, on se rappelle que la solution (modèle) du problème (elliptique)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \delta & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{U}) \\ u = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{U}, \end{cases}$$

où δ est la mesure de Dirac à l'origine et \mathcal{U} la boule euclidienne unité ouverte de \mathbb{R}^N , est donnée par :

$$u_{mod} = \begin{cases} C(|x|^{\frac{p-N}{p-1}} - 1) & \text{si } p \neq N; \\ C \log |x| & \text{si } p = N; \end{cases}$$

dans le cas $p \neq N$, on a

$$|\nabla u_{mod}| = C_1 |x|^{\frac{p-N}{p-1}-1} = C_1 |x|^{\frac{1-N}{p-1}}$$

de sorte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{mod}| dx &= C_1 \int_{B(0,1)} |x|^{\frac{1-N}{p-1}} dx \\ &= C_2 \int_0^1 r^{\frac{1-N}{p-1}} r^{N-1} dr \\ &= C_2 \int_0^1 r^{\frac{1-N}{p-1} + N-1} dr \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si $\frac{1-N}{p-1} + N - 1 > -1$, donc, si $p > 2 - \frac{1}{N}$. Ce calcul montre que :

$$u_{mod} \text{ n'est dans } W_0^{1,1}(B(0,1)) \text{ que si } p > 2 - \frac{1}{N}.$$

Alors

$$u_{mod} \in W_0^{1,1}(\Omega) \Leftrightarrow p > 2 - \frac{1}{N}.$$

Donc (dans le cas parabolique)

$$u_{mod} \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \Leftrightarrow p > 2 - \frac{1}{N+1}.$$

Définition 3.1. On dit que u est une solution faible du problème (P) si :

$$\begin{aligned} u &\in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \text{ et} \\ \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx dt &= \int_{Q_T} f \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T). \end{aligned}$$

Notre resultat principale dans ce mémoire est :

Théorème 3.1. Soit $1 + \frac{N}{N+1} < p$. Alors le problème (P) possède au moins une solution faible $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$. pour tout $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}[$.

La preuve de ce théorème exige plusieurs étapes : approximation du problème (P) par une suite de problèmes (P_n) qu'on sait résoudre, estimations uniformes des solutions approchées (u_n) et enfin, passage à la limite en utilisant des résultats de compacités comme dans [16].

3.2 Approximation de (P)

Soit (f_n) avec $f_n = T_n(f)$ une suite de $L^\infty(Q)$ qui converge vers f dans $L^1(Q)$ et qui vérifie l'inégalité

$$\begin{cases} \|f_n\|_{L^1(Q)} \leq \|f\|_{L^1(Q)}, \\ |f_n| \leq n. \end{cases}$$

Soit (u_{0n}) avec $u_{0n} = T_n(u_0)$ une suite de $L^\infty(\Omega)$ qui converge vers u_0 dans $L^1(\Omega)$ et qui vérifie l'inégalité

$$\begin{cases} \|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \\ |u_{0n}| \leq n. \end{cases}$$

où T_n la troncature au niveau $-n$ and n (Voir l'exemple 1.1). Nous approchons le problème (P) par la suite de problèmes :

$$(P_n) \quad \begin{cases} \partial_t u_n + Au_n = f_n \text{ sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u_n(0, x) = u_{0n}(x) \text{ dans } \Omega; \\ u_n = 0 \text{ sur } \Gamma_T \doteq]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Pour l'existence de la suite des solutions $u_n \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. pour tout $1 < p \leq +\infty$ de problème (P_n), voir le théorème 2.7 dans le chapitre 2.

Lemme 3.1 ([13]). *Soit la fonction $v \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $\partial_t v \in L^{p'}(0, T; (W_0^{1,p}(\Omega))')$ et soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne bornée telle que $\phi(0) = 0$, on a*

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle v'(\sigma), \phi(v(\sigma)) \rangle d\sigma &= \int_\Omega dx \int_0^{v(t,x)} \phi(\sigma) d\sigma \\ &\quad - \int_\Omega dx \int_0^{v(0,x)} \phi(\sigma) d\sigma, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

où \langle, \rangle denote le crochet de dualité entre $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec

$$p' = p/(p - 1).$$

3.3 Estimations uniformes des solutions approchées

Dans cette section, nous prouvons des estimations uniformes pour les solutions du problème (P_n) . Comme nous avons seulement $\|f_n\|_{L^1(Q)} \leq C$, $\forall n \geq 1$ pour pouvoir majorer le terme $\int_{Q_T} f_n \varphi$ uniformément par rapport à n , nous devons choisir comme fonction test

$$\varphi \text{ une fonction de } u_n \text{ telle que } \|\varphi(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \forall n \geq 1 \text{ avec } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Pour choisir les fonctions tests nous utilisons le résultat dans le lemme de tampacchia 1.11

Lemme 3.2. *On suppose que $p > 1 + \frac{N}{N+1}$. Alors, la suite (u_n) des solutions approchées de problème (P_n) reste dans un borné de $L^\infty(0, T, L^1(\Omega))$.*

Démonstration. Nous définissons pour $\nu > 0$ fixée, la fonction S_ν par

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, S_\nu(\sigma) = \begin{cases} \text{sign } \sigma, & \text{si } |\sigma| > \nu; \\ \frac{\sigma}{\nu}, & \text{si } |\sigma| \leq \nu. \end{cases}$$

où la fonction sign définie par :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma > 0; \\ 0, & \text{si } \sigma = 0; \\ -1, & \text{si } \sigma < 0. \end{cases}$$

En prenant $S_\nu(u_n)$ comme fonction test dans (P_n) et en intégrant sur l'intervalle $[0, t] \subset [0, T[$, on voit que :

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t u_n, S_\nu(u_n) \rangle dt + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n S'_\nu(u_n) dx dt \\ = \int_0^t \int_\Omega f_n S_\nu(u_n) dx dt \end{aligned}$$

On a

$$\left| \int_\Omega \int_0^{u_n(0,x)} S_\nu(\sigma) d\sigma dx \right| \leq \int_\Omega \int_0^{|u_n(0,x)|} |S_\nu(\sigma)| d\sigma dx$$

Grâce au lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t u_n, S_\nu(u_n) \rangle dt &= \int_\Omega dx \int_0^{u_n(t,x)} S_\nu(\sigma) d\sigma \\ &\quad - \int_\Omega dx \int_0^{u_n(0,x)} S_\nu(\sigma) d\sigma, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Et comme $S'_\nu \geq 0$, $|S_\nu| \leq 1$, on obtient après suppression d'un terme positif ($\int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n S'_\nu(u_n) dx dt$) :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^{u_n(t,x)} S_\nu(\sigma) d\sigma dx &\leq \int_0^t \int_\Omega |f_n| |S_\nu(u_n)| dx dt + \int_\Omega \int_0^{|u_n(0,x)|} |S_\nu(\sigma)| d\sigma dx \\ &\leq \|f_n\|_{L^1(Q)} + \int_\Omega \int_0^{|u_n(0,x)|} 1 d\sigma dx \\ &\leq \|f_n\|_{L^1(Q)} + \|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comme

$$\int_0^\alpha S_\nu(\sigma) d\sigma = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2\nu}, & \text{si } |\alpha| \leq \nu; \\ -\frac{\nu}{2} + |\alpha|, & \text{si } |\alpha| > \nu. \end{cases}$$

et

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_0^\alpha S_\nu(\sigma) d\sigma = |\alpha|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

En faisant tendre ν vers 0 dans l'inégalité (3.2) et utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_n(t, x)| dx &\leq \|f_n\|_{L^1(Q)} + \|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

donc, on obtient que

$$\int_\Omega |u_n(t, x)| dx \leq C, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.3. Soit $\delta > 0$, il existe une constante C_δ indépendante de n telle que

$$\int_Q \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} dx dt \leq C_\delta, \quad \forall n \geq 1.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$. La fonction ψ_δ donnée par

$$\psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma|)^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{1}{(1 + |t|)^\delta} \right) \text{sign}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

est globalement lipschitzienne, $\psi_\delta(0) = 0$ et $|\psi_\delta(t)| \leq \frac{1}{\delta}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. En Prenant $\psi_\delta(u_n)$ pour fonction test dans (P_n) , on obtient :

$$\langle \partial_t u_n, \psi_\delta(u_n) \rangle + \langle Au_n, \psi_\delta(u_n) \rangle = \langle f_n, \psi_\delta(u_n) \rangle, \quad Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t u_n, \psi_\delta(u_n) \rangle dt + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \psi_\delta(u_n) dx dt \\ = \int_0^t \int_\Omega f_n \psi_\delta(u_n) dx dt \end{aligned}$$

comme, d'après le lemme 3.1

$$\int_0^t \langle \partial_t u_n, \psi_\delta(u_n) \rangle = \int_\Omega dx \int_0^{u_n(t,x)} \psi_\delta(\sigma) d\sigma - \int_\Omega dx \int_0^{u_n(0,x)} \psi_\delta(\sigma) d\sigma$$

et le fait que

$$\nabla \psi_\delta(u_n) = \nabla u_n \psi'_\delta(u_n) \quad \text{avec} \quad \psi'_\delta(u_n) = \frac{1}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} \quad \text{et} \quad \int_\Omega dx \int_0^{u_n(t,x)} \psi_\delta(\sigma) d\sigma \geq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \psi_\delta(u_n) dx dt &= \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi'_\delta(u_n) dx dt \\ &= \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} dx dt \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} dx dt &\leq \int_0^t \int_\Omega f_n \psi_\delta(u_n) dx dt + \int_\Omega dx \int_0^{u_n(0,x)} \psi_\delta(\sigma) d\sigma \\ &\leq \frac{1}{\delta} (\|f_n\|_{L^1(Q)} + \|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)}) \\ &\leq \frac{1}{\delta} (\|f\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)}) = C_\delta \end{aligned}$$

C_δ = une constante indépendante de n □

Lemme 3.4. Soient $1 < p \leq N$, $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}[$. Alors,

posons $q^* = \frac{Nq}{N-q}$, il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que

$$\int_Q |u_n(t, x)|^d dx dt \leq \mathcal{C} \int_0^T \|u_n(t, \cdot)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q dt,$$

où $d = q \frac{N+1}{N}$.

Démonstration. Utilisant l'inégalité d'interpolation et le lemme 3.2 on obtient

$$\begin{aligned} \|u_n(t, \cdot)\|_{L^d(\Omega)} &\leq \|u_n(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}^{1-\tau} \|u_n(t, \cdot)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^\tau \\ &\leq C \|u_n(t, \cdot)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^\tau, \quad \tau = \frac{1-d}{1-q^*} \frac{q^*}{d}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Choisissons $d = q \frac{N+1}{N}$, on voit que

$$\tau = \frac{N}{N+1} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{q^*(1-d)}{1-q^*} = q$$

Maintenant, intégrant (3.3) sur $[0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_Q |u_n(t, x)|^d dx dt &\leq C_\infty \int_0^T \|u_n(t, \cdot)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{d\tau} dt \\ &\leq C_\infty \int_0^T \|u_n(t, \cdot)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

donc,

$$\|u_n\|_{L^d(0, T; L^d(\Omega))}^d \leq C_\infty \|u_n\|_{L^q(0, T; L^{q^*}(\Omega))}^q \quad (3.5)$$

□

Lemme 3.5. Soient p et q tels que

$$1 + \frac{N}{N+1} < p \leq N \quad \text{et} \quad q \in \left[1, p - \frac{N}{N+1}\right]$$

Alors

— la suite (∇u_n) reste dans un borné de $L^q(Q)$. i.e

il existe une constante $C = C(q) > 0$ telle que :

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n|^q dx dt \leq C$$

Démonstration. Remarquer que $1 \leq q < p - \frac{N}{N+1} < p$.

Notons q^* l'exposant de Sobolev associé à q , i.e., $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N} \Leftrightarrow q^* = \frac{Nq}{N-q}$. Considérons

$d = q \frac{N+1}{N}$ et $\delta > 0$ tel que $d = (1 + \delta) \frac{q}{p-q}$, il existe d'après le lemme 3.3 une constante

$C = C(\delta) > 0$ telle que :

$$\int_Q \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} dx \leq C, \quad \forall n \geq 1$$

Nous pouvons écrire :

$$y_n = \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{(1 + |u_n|)^{(1+\delta)q/p}} (1 + |u_n|)^{(1+\delta)q/p} dx dt$$

grâce à l'inégalité de Hölder , on voit que

$$\begin{aligned} y_n = \int_Q |\nabla u_n|^q dx dt &\leq \left(\int_Q \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{(1+\delta)}} \right)^{q/p} \cdot \left(\int_Q (1 + |u_n|)^{(1+\delta)\frac{q}{p-q}} \right)^{1-q/p} \\ &\leq C^{q/p} \left(\int_Q (1 + |u_n|^d) \right)^{1-q/p} \end{aligned} \quad (3.6)$$

On rappelle que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty \quad \text{et } a, b \geq 0 \quad (3.7)$$

En utilisant (3.7), on écrit

$$\begin{aligned} y_n = \int_Q |\nabla u_n|^q dx dt &\leq C^{q/p} (2^{d-1})^{1-q/p} \left(\int_Q 1 dx dt + \int_Q |u_n|^d dx dt \right)^{1-q/p} \\ &\leq C^{q/p} (2^{d-1})^{1-q/p} \left\{ |Q|^{1-q/p} + \left(\int_Q |u_n|^d dx dt \right)^{1-q/p} \right\} \\ &\leq C_1 + C_2 \left(\int_Q |u_n|^d dx dt \right)^{1-q/p}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

À partir de l'inégalité de Sobolev, la relation (3.5) avec (3.8) donne :

$$y_n \leq C_1 + C_3 y_n^{(1-\frac{q}{p})} \quad (3.9)$$

Comme, dans le cas $p \leq N$, on a : $1 - \frac{q}{p} < 1$ alor l'inégalité précédente (3.9), vérifiée par y_n , montre que cette suite est bornée.

Dans le cas $p > N$, on reprend les calculs , mais en choisissant q^* comme tout nombre fini supérieur à 1 et satisfaisant $(1 - \tau)r = q$. □

Lemme 3.6. *Soit*

$$1 + \frac{N}{N+1} < p \leq \infty \quad \text{et} \quad q \in \left[1, p - \frac{N}{N+1} \right[$$

Alors,

$(\partial_t u_n)$ reste dans un borné de $L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega))') + L^1(Q)$ et r' est le conjugué de r .

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\partial_t u_n = \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) + f_n,$$

comme f_n est une suite bornée dans $L^1(Q)$, il nous reste à montrer que

$$Av_n = \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \subset \left(\text{borné de } L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega)))' \text{ avec } r > 1 \right).$$

où r' est le conjugué de r , on a pour $r > 1$, nous écrivons, pour toute fonction $\varphi \in W_0^{1,r'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle Av_n, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \varphi Av_n dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Par Hölder, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle Av_n, \varphi \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla \varphi| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Av_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'} &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle Av_n, \varphi \rangle| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En intégrant (3.10) sur $[0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \|Av_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'}^r dt &\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{r}{r}} dt \\ &\leq \int_Q |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx dt \end{aligned}$$

Le membre de gauche est borné si (∇u_n) est bornée dans $L^{(p-1)r}(Q)$, donc grâce au lemme 3.5, il vient que

$$1 \leq (p-1)r < \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$$

où encore,

$$1/(p-1) \leq r < \frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$$

Avant de terminer, on peut remarquer que l'existence de $r > 1$ est garantit car :

$$\frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right) > 1.$$

Donc, on obtient

$$\int_0^T \|v_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'}^r dt \leq C$$

□

3.4 passage à la limite

Lemme 3.7. *On peut extraire de la suite des solutions approchées (u_n) une sous-suite (notée de même), qui converge vers une fonction $u \in L^1(Q)$ et faiblement dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$, pour tout $q \in [1, (p - \frac{N}{N+1})[$.*

Démonstration. grâce au lemme 3.5, la suite (u_n) est bornée dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q \in [1, (p - \frac{N}{N+1})[$ et nous avons déjà mentionné que $(\partial_t u_n)$ demeure dans un borné de $L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega))') + L^1(Q)$ avec $r < \frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$. De plus $L^1(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega)$ pour tout $r < N/(N-1)$ (Voir le corollaire 1.1) et comme $p > 2 - 1/(N+1)$ on a $\frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right) < N/(N-1)$ et on a aussi f_n est borné dans $L^1(Q) = L^1(0, T; L^1(\Omega))$, l'est aussi dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$ pour tout r , donc la suite $(\partial_t u_n)$ reste bornée dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$. Ainsi

- (u_n) est bornée dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$
- $(\partial_t u_n)$ est bornée dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$

donc, d'après le lemme 1.10, la suite (u_n) est relativement compact dans $L^q(0, T; L^q(\Omega)) \subset L^1(Q)$. Par conséquent, la suite (u_n) est converge fortement vers une fonction $u \in L^1(Q)$, ce qui garantit l'existence d'une sous-suite (u_n) , notée de même, telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1(Q) \text{ et p.p. dans } Q \quad (3.11)$$

□

Lemme 3.8. *La suite (∇u_n) converge presque partout vers ∇u*

Démonstration. Montrons que (∇u_n) est de Cauchy en mesure, ce qui entrainera

$\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ presque partout, pour une sous suite. Cela consiste à prouver que

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall p, q \geq n_0 \quad \text{meas}\{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |(\nabla u_p - \nabla u_q)(t, x)| \geq \delta\} \leq \varepsilon$$

Pour cela, fixons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, et remarquons que pour $\lambda > 0$ et $\eta > 0$ nous avons

$$\{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |(\nabla u_p - \nabla u_q)(t, x)| \geq \delta\} \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

où

$$E_1 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |\nabla u_p| \geq \lambda\}, \quad E_2 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |\nabla u_q| \geq \lambda\}$$

$$E_3 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |u_p - u_q| \geq \eta\}$$

et

$$E_4 = \{|\nabla u_p - \nabla u_q| \geq \delta, |\nabla u_p| \leq \lambda, |\nabla u_q| \leq \lambda, |u_p - u_q| \leq \eta\}.$$

D'après le lemme 3.5, en choisissant λ grand, nous pouvons rendre $\text{meas}(E_1)$ et $\text{meas}(E_2)$ arbitrairement petits. Par exemple

$$\text{meas}(E_1) = \int_{E_1} 1 dx dt = \frac{1}{\lambda} \int_{E_1} \lambda dx dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_{E_1} |\nabla u_p| dx dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_T} |\nabla u_p| dx dt \leq \frac{C}{\lambda}$$

Alors,

$$\text{meas}(E_1) \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Pour $\text{meas}(E_3)$, on a

$$\text{meas}(E_3) \leq \frac{1}{\eta} \int_{E_3} |u_p - u_q| dx dt \leq \frac{1}{\eta} \int_Q |u_p - u_q| dx dt$$

Puisque (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$, alors pour $\eta > 0$ fixe, on voit que

$$\text{meas}(E_3) \rightarrow 0 \quad \text{si } p, q \rightarrow +\infty$$

Il reste à contrôler $\text{meas}(E_4)$. D'après la monotonie de la fonction $a(t, x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ (Voir chapitre 2), nous avons $(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) > 0$ or l'ensemble des

$\{(\xi_1, \xi_2) \mid |\xi_1| \leq \lambda, |\xi_2| \leq \lambda, |\xi_1 - \xi_2| \leq \delta\}$ est un ensemble compact et a est continue en ξ , donc $\left(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2)\right)(\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\mu(t, x)$ tel que

$$(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq \mu(t, x) > 0.$$

Par conséquent, par (1.4) on a pour tout $\tau > 0$ il existe $\tau' > 0$ tel que

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt < \tau' \Rightarrow \text{meas}(E_4) < \tau. \quad (3.12)$$

Pour obtenir $\text{meas}(E_4) < \tau$, il suffit de montrer que $\int_{E_4} \mu(x) dx < \tau'$. Par la définition de $\mu(t, x)$ et E_4 , on peut écrire

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt \leq \int_{E_4} \left(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \right) \nabla (u_p - u_q) \mathbf{1}_{\{|u_p - u_q| \leq \eta\}} dx dt$$

de plus le terme intégral est positif et $\nabla T_\varepsilon(u_p - u_q) = \nabla (u_p - u_q) \mathbf{1}_{\{|u_p - u_q| \leq \eta\}}$, donc nous avons

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt \leq \int_{E_4} \left(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \right) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \quad (3.13)$$

où T_η la troncature au niveau $-\eta$ and η (Voir l'exemple 1.1), et T'_η défini par

$$T'_\eta(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \leq \eta; \\ 0, & |\sigma| > \eta. \end{cases}$$

En prend $T_\eta(u_p - u_q)$ comme une fonction de test dans (P_n) pour u_p et u_q , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u_p, T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f_n T_\eta(u_p - u_q) \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u_q, T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f_n T_\eta(u_p - u_q). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Puis soustrayant l'inégalité résultant (3.14) et de (3.15) , on trouve

$$\int_0^T \langle \partial_t(u_p - u_q), T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt = 0.$$

Par (1.5) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Theta_\eta(u_p - u_q)(T) dx - \int_\Omega \Theta_\eta(u_p - u_q)(0) dx \\ & + \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt = 0. \end{aligned}$$

le premier terme est positif ($\Theta_\eta(x) \geq 0$) et ($\Theta_\eta(x) \leq \eta|x|$), donc

$$\int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \leq \eta \int_\Omega |u_0^p - u_0^q| dx.$$

le fait que $u_0 \in L^1(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ & \leq C\eta \rightarrow^{\eta \rightarrow 0} 0 \text{ (uniformément dans p and q)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour η assez petit, (3.13) and (3.16) impliquent

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt < \tau',$$

et aussi par (3.12) nous avons $mes(E_4) \leq \tau$. Ainsi, nous avons la convergence de ∇u_n vers ∇u en mesure, ainsi que le lemme 1.8 (après extraction d'une sous suite)

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{p.p dans } (0, T)\Omega.$$

Fin de la preuve du théorème 3.1

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, on a

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx dt = \int_{Q_T} \varphi(t, x) f_n dx dt.$$

1) Passage à la limite dans $\int_0^T \langle \partial_t u_n, \varphi \rangle dt$ et $\int_{Q_T} \varphi(t, x) f_n dx dt$.

On a

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, \varphi \rangle dt = - \int_{Q_T} u_n \partial_t \varphi dx dt - \int_{\Omega} \varphi(0, x) u_0 dx$$

La convergence forte de la suite (u_n) vers u dans $L^1(Q)$ et l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \left| \int_Q u_n \partial_t \varphi - \int_Q u \partial_t \varphi \right| &= \left| \int_Q (u_n - u) \partial_t \varphi \right| \\ &\leq C \|u_n - u\|_{L^1(Q)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

assurent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Q u_n \partial_t \varphi = \int_Q u \partial_t \varphi.$$

et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Q \varphi f_n = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(0, x) u_{0n} = \langle u_0, \varphi \rangle.$$

2) Passage à la limite dans $\int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx dt$.

Comme $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p. dans Q , on a :

$$|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \rightarrow |\nabla u|^{p-2} \nabla u \quad \text{p.p. dans } Q. \quad (3.17)$$

Choisissons $r > 1$ avec $r \in \left[1/(p-1), \frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1}\right)\right]$ (comme dans le lemme 3.6), pour $E \subset Q$, on a :

$$\begin{aligned} \int_E ||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi| dx dt &= \int_E |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla \varphi| dx dt \\ &\leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(Q)} \int_E |\nabla u_n|^{p-1} dx dt \\ &\leq C \left(\int_E |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx dt \right)^{1/r} |E|^{1-1/r} \\ &\leq C' |E|^{1-1/r}. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus montre l'équi-intégrabilité de la suite $(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi)$ dans $L^1(Q)$.

Il résulte alors du théorème de convergence de Vitali et de (3.17) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Q |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx dt = \int_Q |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx dt.$$

On a donc prouvé que u est une solution du problème (P). Le théorème 3.1 est alors démontré. \square

Bibliographie

- [1] R.Adams, *Anisotropic sobolev inequalties*. Casopis pro pestovani matematiky **113**, 276-279 (1988).15
- [2] A. Benedek and Panzone.R. *The space L^p with mixed norme*. Duke Math. **J28**, 301-324 (1961).17
- [3] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1987).117
- [4] H.Brézis, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*. Annales de l'institut Fourier 18.1 115-175 (1968).
- [5] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [6] Dall'aglio.Aand Orsina.L. *Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data*, Differential and Integral Equations, **5**,1335-1354 (1992).90,98,100
- [7] A. El Hamidi and Rakotoson.J.M. *On a pertubed anisotropic equation with a critical exponent*, Ricerche di Mathematica **55**,55-69 (2006).76
- [8] L. Gasinski and N. S. Papageorgiou, Nonlinear Analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 9. (2006).
- [9] J. Haskovec and Schmeiser.C.*A note on the anisotropic generalizations of the sobolev and morrey embedding theorems*. Monatshefte für Math **158**,181-195 (2009). 29
- [10] F.Li, *Anisotropic Elliptic Equations in L^{m*}* , Nonlinear Analisis **8** 417-422 (2001).28
- [11] J.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes au limites*. Dunod, Paris, (1969).130,143,149

-
- [12] R. Mecheter, *ANISOTROPIC PARABOLIC PROBLEM IN R^N WITH VARIABLE EXPONENT AND LOCALLY INTEGRABLE DATA* university of Msila. Algeria (2020).
- [13] F. Mokhtari, *Anisotropic parabolic problems with measur data*. Differential Equations and Applications **2**, 123-150 (2010). 5,7
- [14] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel* UMPA-ENS Lyon France (1997).
- [15] J.M.Rakotoson, *SOME QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 17, No 12, pp. 1163-1175, 1991
- [16] J.M.Rakotoson, *A Compactness Lemma for Quasilinear Problems : Application to Parabolic Equations*, J. Funct. Analysis **106**, 358-374 (1992).3,5
- [17] M. Ruzicka, *Nichtlineare Funktionalanalysis : Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2006.
- [18] J.Simon, *Compact sets -in the space $L^p(0,T;B)$* . Ann. Mat. Pura App **146** 65-96 (1987).133
- [19] R. Temam, *Navier Stokes equations, theory and numerical analysis*. North Holland, Amesterdam (1984).
- [20] M.Troisi, *Theoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat **18**,3-24 (1969).35
- [21] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A : Linear Monotone Operators*. 1990.

Abstract

in this work, we prove the existence and regularity of a weak solution of an parabolic problem (P) defined by

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq \Omega]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

the operator $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ is a pseudo-monotone operator. The method of solving our problem consist of obtaining local estimates for suitable approximate problems and then passing to the limit.

keywords : Sobolev spaces, pseudo-monotone, operator nonlinear, parabolic equation

Résumé

Dans ce travail, nous prouvons l'existence et la régularité d'une solution faible d'un problème parabolique à donnée L^1 définie par

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq \Omega]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

L'opérateur $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ est un opérateur pseudo-monotone. Les étapes principales de la preuve consister à approcher par une suite de problèmes à donnée dans L^∞ , ensuite obtenir des estimations uniformes et locales pour la suite des solutions approchées u_n et ∇u_n , puis le passage à la limite.

mots-clés : Espace de Sobolev, pseudo-monotone, opérateur non linéaire, équation parabolique .

ملخص

في هذه المذكرة نسعى الى اثبات وجود وصقالة الحلول التكافئية وغير الخطية للمعادلة المعرفة كما يلي: $\partial_t u + Au = f$ تحت الشروط التالية $u(0, x) = u_0(x)$ و $u = 0$ حيث ان الطرف الايمن f ينتمي الى الفضاء $L^1(Q_T)$ و u_0 في الفضاء $L^1(\Omega)$ المؤثر $Au = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ معرف بشكل جيد بين الفضاء $W_0^{1,p}$ وفضاءه

الثنوي، الخطوات الرئيسية للاثبات تتمحور فيمايلي:

نقرب الجملة (P) بمتتالية جمل (P_n) ثم نبرهن ان الجملة المقربة تتمتع بحل ضعيف محدود u_n ثم الحصول على التقديرات لمتتالية الحلول التقريبية u_n و ∇u_n . وفي الاخير نمر بالنهاية في المسألة التقريبية للحصول على حل للجملة (P)

كلمات مفتاحية: معادلات تكافئية غير خطية ، مؤثر غير خطي، فضاء سوبولاف،