الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

كلية: العلـــــوم.

قسم : الفيـــــزياء.

رقم:Ph/TH/09/2022

ميدان: عـــلــــــوم المادة

فرع: الفـــيزيـاء.

تخصص: الفيزياء النظرية

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمـــي

إعداد الطالب(ة): بن لشهب يمينة

تحت عنوان

هاميلتوني معمم مع حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة المتعلقة بالموضع

تمت المناقشة يوم 2022/06/28 أمام اللجنة المكونة من:

د.صبري يوسف	جامعة المسيلة	رئيســا
د.بوفراش كريم	جامعة المسيلة	مشرفا و مقررا
د.مجدل صهيب	جامعة المسيلة	مناقشا

السنة الجامعية: 2022/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

كلمة شكر

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبتوفيقه تتحقق الغايات والصلاة والسلام على خير الأنام الذي قال " لا يشكر الله من لا يشكر الناس".

نشكر الله عز وجل الذي بتوفيق منه وبفضل منه تمكنا من إنجاز هذه المذكرة المتواضعة .

وأتقدم بخالص الشكر إلي الأستاذ المشرف بوفراش كريم .

كما أتقدم بالشكر إلى الأساتذة مجدل صهيب وصبري يوسف على قبولهم مناقشة المذكرة .

كما أشكر كل من ساعدني من قريب أو بعيد .

الإهداء

إلى من شرفني بحمل إسمه والدي الكريم أطال الله عمره ومده بالصحة والعافية .

إلى نور عيني وضوء دربي ومهجة حياتي أمي ...... من كانت

دعواتها وكلماتها رفيق الألف والنجاح.

إلى السند والساعد أختي فاطمة و

إلى إخوتي وأخواتي .

إلى صديقتي فايزة أزف لكم الإهداء حبا ورفعة وكرامة

إلى كل من علمني حرفا وإلى كل من ساندي .

الفهرس

الفصل IV: النتائج والمناقشة

قائمة الأشكال

مقدمة عامة

مقدمة عامة :

تعتبر دراسة الأنظمة الميكانيكية الكمية ذات الكتلة الفعالة المتعلقة بالموضع (**P**osition **D**ependent **M**asse≡ **PDM**) ،من أهم المجالات التي لقت إهتمام من طرف الباحثين الفيزيائين في السنوات الأخيرة ،هذه الأنظمة لها تطبيقات كثيرة في فيزياء المادة المكثفة ،ونظرية أنصاف النواقل [3,1] والفيزياء النووية [4] ، ونظرية الآبار والنقاط الكمومية [5] ،وفي مجالات أخرى ذات صلة بالبحث النظري .

البحث عن حلول دقيقة لمعادلة شرودينغر مع كتلة فعالة متعلقة بالموضع(PDM)، أصبح موضوعا مثيرا لإهتمام لأن مثل هذه الحلول يمكن أن توفر مفهوم لظواهر فيزيائية معينة، كما تحتل معادلة شرودينغر أهمية كبيرة في هذا المجال .

ولقد إعتمدت في تناول هذا الموضوع منهجية خاصة ،أردت التدرج في إعطاء المعلومات اللازمة لفهم دور الأنظمة الكمومية لحل معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن ، وأخص بالذكر خاصية الكتلة الفعالة وتطبيقاتها في مجال الفيزياء الكمية ،إذ في هذا المجال الفيزيائي الهام هناك إعتبارات معينة يجب أخذها ولا يمكن تجاهلها منها خاصية التناظر أو الخاصية الهرميتية إذ يجب أن يكون هاميلتون هارميتيا حتى يكون طيف الجملة المرفق ذات قيم حقيقية قابلة للقياس ،ومن جهة أخرى نكون أمام خاصية الترتيب والتي تفسر كيفية إختيار هاميلتون الأليق والمناسب للجملة ،لأن في هذه الحالة تكون الطاقة الحركية متعلقة بالوضعية .

ولقد نال هذا الموضوع إهتمامات كبيرة من طرف الفيزيائين حول كيفية إختيار الهاميلتون ومن ثم عرضت نماذج عديدة كما نشرت أبحاث معتبرة في مجلات عالمية .

وقد حاولنا تقسيم المذكرة إلى أربعة فصول وفق التنظيم التالي:

فالفصل الأول ابتدأته بإعطاء معلومات عامة عن أنصاف النواقل ودراسة الكتلة الفعالة لكل من الثقوب والإلكترونات ،ثم تطرقنا إلى إسهامات مختلف الباحثين في إختيار هاميلتوني حسب التسلسل ،بعد ذلك قمنا بحل معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن بإختيار هاميلتوني فون روس لحل المعادلة :

$$\mathrm{H_{VR}} = \frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\gamma}(\hat{x}) + m^{\gamma}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\alpha}(\hat{x})\right] + V(\hat{x})$$

من أجل $\alpha+\beta+\gamma=-1$ ،بحيث يكون هاميلتوني هرميتي .

في الفصل الثاني والثالث ،سنقوم بحل معادلة شرودينغر المعممة المستقلة عن الزمن بتطبيق شروط الإستمرارية و حساب النتائج التحليلية والعددية للدوال الموجية ومعاملات النفوذ (العبور) من أجل حاجز

مستطيل وحاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة (متغيرة) وتأكيد النتائج الذي حصل عليها **Lévy-Leblond** .

أما الفصل الرابع وهو موضوع عملنا الرئيسي ، سنقوم بتوضيح ومناقشة النتائج المتحصل عليها في الفصلين السابقين من خلال رسم منحنيات معاملات النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل متغيرة من أجل حاجز مستطيل وحاجز مستطيل مضاعف.

كما ختمنا هذه المذكرة بخلاصة عامة، حيث استطعنا شرح وذكر أهم النتائج المحصل عليها.

الفصل الأول

هاميلتوني معمم

I-مقدمة:

لقد تناولت العديد من الأبحاث موضوع هاميلتوني معمم لكتلة فعالة متعلقة بالموضع، هذه الأبحاث لها نتائج مباشرة في مختلف المجالات (الفيزياء النووية، فيزياء المواد المكثفة، أنصاف النواقل...)، في هذا الفصل سنقوم بجمع وتلخيص إسهامات مختلف الباحثين في هذا المجال.

يحتوي هذا الفصل على جزئيين، نبذة تاريخية وأخر نظري، في الجزء الأول سندرس بشكل تسلسلي أهم مساهمات المهمة لفهم الخصائص المتعلقة بالأنظمة المعتمدة على الكتلة الفعالة متعلقة بالموضع، وفي الجزء الثاني نستنتج إيجاد الحل الدقيق لمعادلة شرودينغر من أجل هاميلتوني متعلق بالموضع.

I-1- أنصاف النواقل:

تحظى المواد النصف ناقلة في الوقت الراهن بأهمية بالغة وذلك لإستخدامها في تصنيع معظم الأجهزة الإلكترونية الحديثة، وقد جاءت الدراسة الشاملة لهذه المواد لغرض فهم سلوكها الكهربائي. ونخص بالذكر الكتلة الفعالة التي يمكن القول عنها أنها تملك قيمة ظاهرة تختلف حسب الوسط أو المادة التي تنتمي إليها، كما تعتبر أيضا من أهم خصائص أنصاف النواقل وذلك لما تلعبه من دور كبير في هذه المواد فهي تساهم في تحديد نوعية الحركة وذلك حسب إشارتها، حيث لوحظ أنها تكون موجبة بالنسبة للإلكترونات وتكون سالبة بالنسبة للثقوب، وبالتالي فهي تأثر بشكل كبير على النقل الكهربائي.

ولتفسير هذه النظرية نتطرق لدراسة كل من:

I-1 -1- الكتلة الفعالة للإلكترونات:

يتميز الإلكترون المتحرك بأن له خاصية مزدوجة من حيث أنه يمكن النظر إليه كجسيم كتلته m وكمية تحركه P كما يمكن النظر إليه على أنه يتحرك في الشبكة البلورية كأمواج موقوفة طول موجة دبرولي المصاحبة له هي $\lambda = \mathrm{h}/\mathrm{P}$.

وبذلك يمثل الإلكترون في كمون بلوري (إلكترون شبه حر) بجزيء حر يملك شحنة "$\mathrm{e}-$" وكتلة m_e^* تسمى بالكتلة الفعالة تعطى بالعلاقة التالية:

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dK^2} \qquad (1-\mathrm{I})$$

I-1 -2- الكتلة الفعالة للثقوب:

إن أهمية الثقوب في أنصاف النواقل تعادل تماما أهمية الإلكترونات، وذلك لأنها تستخدم أيضا في نقل الكهرباء وتعرف بنفس طريقة الإلكترونات لحزمة التوصيل:

$$m_h^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dK^2} \qquad (2-\mathrm{I})$$

حيث m_h^* تمثل الكتلة الفعالة للثقوب

I-2- معادلة شرودينغر:

من معلوم في الميكانيك التقليدية أنه يمكن دراسة حركة جسيم بإختيار دالة هاميلتون $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{r}, \mathrm{p}, \mathrm{t})$ وحل المعادلات القياسية المناسبة بإعتماد الشروط الإبتدائية وإذا كان H مستقلا عن الزمن أي $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{t}} = 0$ فإن هذه المعادلات تملك تكاملا يسمى بتكامل الطاقة:

$$\mathrm{H} = \mathrm{E} \qquad (3-\mathrm{I})$$

حيث E – طاقة جسيم، أما دالة هاميلتون فبتواجد الطاقة الكامنة $\mathrm{V}(\mathrm{r})$ تساوي:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{P}^2}{2\mathrm{m}} + \mathrm{V}(\mathrm{r}) \qquad (4-\mathrm{I})$$

(P–اندفاع الجسيم،m كتلة)

$$\mathrm{E}\psi = \mathrm{H}\psi \qquad (5-\mathrm{I})$$

حيث يعطى مؤثر دالة هاميلتون بالعلاقة:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{P}^2}{2\mathrm{m}} + \mathrm{V}(\mathrm{r}) = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2 + \mathrm{V}(\mathrm{r}) \qquad (6-\mathrm{I})$$

من خلال دالة هاميلتون نحصل على معادلة شرودينغر تكتب بالشكل التالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\Delta + \mathrm{V}(\mathrm{r})\psi = \mathrm{E}\psi \qquad (7-\mathrm{I})$$

- $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457.10^{-34} js$
- Δ هو مؤثر لابلاسيان
- m هي كتلة الجسيم
- $\mathrm{V}(\mathrm{r})$ هي الطاقة الكامنة

وتعرف هذه المعادلة الأخيرة بمعادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن.

I-3- نبذة تاريخية:

I-3-1-دي.ج. بن دانيال.وس.ب.ديك D. J. Ben Daniel et C. B. Duke (1966):

في هذا المقال [6] ، نموذج بيث-سومرفيلد **(Bethe -Sommerfeld)** للتأثير النفقي للإلكترون يؤخذ كإطار لدراسة العبور من خلال الحاجز.كما أنهم درسوا الحالة التي يختلف فيها الإنحناء (كتلة الإلكترون) ومركز سطح الطاقة الثابتة للإلكترون عبر التقاطع. وفي الأخير، نكتب الشكل المناسب لهاميلتوني:

$$H_{BDD} = \frac{1}{2}\left[P\frac{1}{m(x)}P\right] \qquad (8-I)$$

حيث:

$$P = -i\hbar\frac{d}{dx} \qquad (9-I)$$

I-3-2-ثاديوس غورا وفيرد ويليامزThaddeus Gora et Ferd Williams (1968):

في هذا المقال [7] ، درس ثاديوس غورا وفيرد ويليامز أنصاف النواقل المتدرجة ببطء مع كتلة فعالة متعلقة بالموضع ،والتي تكتب من حيث هاميلتوني فعال، يكتب هذا الأخير في شكل هرميتي.

$$H_{GW(B)} = \frac{1}{4}\left[P^2\frac{1}{m(x)} + \frac{1}{m(x)}P^2\right] \qquad (10-I)$$

يمكن إثبات أن أنصاف النواقل التي يتم تصنيفها ببطء في التركيب تحتوي على فجوات في النطاق متعلقة بالموضع وكتلة فعالة متعلقة بالموضع ،ويمكن أيضا وصفها من حيث هاميلتوني فعال في معادلة الكتلة الفعالة .إن الهاميلتوني الفعال الذي تم الحصول في المعادلة أعلاه ،هيرميتي .

مشكلة ظواهر النقل لحامل الشحنة الأقلية للأنظمة المتدرجة يحكمها حقل فعال يتضمن الحقل الكهروستاتيكي (الكهرباء الساكنة) بالإضافة إلى مصطلح متعلق بتدرج ميل النطاق ،ومصطلح أخر متعلق بتدرج الكتلة الفعالة.

I-3-3- فون روس von Roos (1982):

في هذا المقال [8] إعتبر فون روس أن حركة الحاملات الحرة (الإلكترونات والثقوب) في أنصاف النواقل ذات التركيب الكيميائي الغير المنتظم يتم وصفها أحيانا بواسطة هاميلتوني يمتلك كتلة فعالة متعلقة بالموضع.

I-3-4- ريتشاد أ.مورو و كينيت ر.براونشتاين Richard A. Morrow et Kenneth R. Brownstein (1983):

في هذا المقال [9]يعتبر مورو فئة من هاميلتوني هرميتي لكتلة فعالة التي تكون طاقتهم الحركية من الشكل:

$$\frac{1}{4}\left[m(x)^{\alpha}Pm(x)^{\beta}Pm(x)^{\gamma}+m(x)^{\gamma}Pm(x)^{\beta}Pm(x)^{\alpha}\right] \qquad (11-\mathrm{I})$$

حيث: $\alpha+\gamma+\beta=-1$

قام بتطبيق هاميلتوني على إرتباط غير متجانس مفاجئ بين بلورتين ثم بحث عن شروط الإستمرارية المقابلة من خلال دالة الموجة للكتلة الفعالةψ و مشتقها مكاني ψ^* ووجد $\alpha\neq\gamma$، يجب أن تلغى دالة الموجة عند التقاطع، مما يعني أن التقاطع يعمل كحاجز غير عابر لذلك يجب التحقق من الحالات القابلة للتطبيق $\alpha=\gamma$، مما يعني أن $m(x)^{\alpha}\psi$ و $m(x)^{\alpha+\beta}\psi$ يجب أن تكون مستمرة عند التقاطع .

في مساهمة ثانية [10] يقترح مورو وجود إرتباط غير متجانس مفاجئ بين إثنين من أنصاف النواقل أحادية البعد غير المنتظمة للإستخدام هاميلتوني لكتلة فعالة.

I-3-5- جان. مارك ليفي .ليبلوند Jean-Marc Lévy-Leblond (1995):

جان. مارك ليفي .ليبلوند[11] طبق مفهوم الثبات الغاليلي اللحظي لإظهار فكرة الكتلة الفعالة المتعلقة بالموضع مفيدة بالإضافة الى ذلك ، هذا يؤدي الى شروط إستمرارية دالة الموجة ψ و$\frac{1}{m}\partial_x\psi$. هذه النتائج تقترح أيضا في حالة إرتباط غير متجانس مفاجئ في تقريب دالة مغلف (enveloppe) .

في مقال أخر [12] تطرق أيضا الى أبسط المشاكل، وتحديدا تلك المتعلقة بالحاجز والشبكة لكل من الكمون والكتلة ،بتطبيق شروط الإستمرارية المعدلة ،وأكد على الخصائص الجديدة لهذه النماذج الكمومية الأولية ذات الكمون الثابت المعتمد على الكتلة الفعالة المتعلقة بالموضع .

I-3-6-ساسولي من بيانشي و دي فينترا M. Sassoli de Bianchi a and M. Di Ventra (1998):

في هذا المقال[13] تحت عنوان "ملاحظة على حد الطاقة العالية ومشكلة الإنتشار لكتلة فعالة متعلقة بالموضع ، هذان الباحثان توصل إلى إستنتاج أن معامل النفوذ لمشكلة الانتشار يمكن تحديده بواسطة معادلة شرودينغر:

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}+E-V(x)\right\}\psi(x)=0 \qquad (12-\mathrm{I})$$

يميل نحو الوحدة عندما تزداد الطاقة إلى أجل غير مسمى، بشرط أن تكون الكتلة التي تم إدخالها في معادلة شرودينغر هي دالة مستمرة. بحيث تمثل الحالة الأخيرة الوضع الحالي في تقدم الإنجازات العملية لـلأجهزة، والتطورات في نمو البنية غير المتجانسة وتقنيات الحزمة الجزيئة حاليا بإدراك واجهات مفاجئة في مختلف المواد.

I-3-7-مصطفى ومزاريموسوي Mustafa et Mazharimousavi (2007):

إستخدم هذان الباحثان [14] مفهوم مؤثر الشبه - عزم للوصول إلى إستنتاج بأن "الرتبة الجيدة" هو الإختيار $\left(\boldsymbol{\beta}=\frac{-1}{2},\boldsymbol{\alpha}=\frac{-1}{4}\right)$.

غالبًا ما يتم وصف حركة الإلكترونات في أنصاف النواقل بواسطة معادلة شرودينغر المعتمدة على الكتلة الفعالة المتعلقة بالموضع، هو في الحقيقة حول الكتلة الفعالة للإلكترون التي تتحرك داخل أنصاف النواقل والتي تعتمد القيمة على طبيعة المادة $[15-21]$.

بالنسبة لنظام الكتلة المتعلقة بالموضع، فإن الكتلة ومؤثر الكتلة لم يعد ينتقل وبالتالي، تنشأ مشكلة إختيار الترتيب الصحيح لهذين المؤثرين من حيث الطاقة الحركية لهاميلتوني الفعال هذا السؤال له علاقة مباشرة بشروط الإستمرارية لدالة الموجة من خلال التقاطع مفاجئ. لذلك فون روس [8] أول من إقترح هاميلتوني الفعال بالشكل التالي :

$$H=-\frac{1}{4}\left[m^{\alpha}\hat{P}m^{\beta}\hat{P}m^{\gamma}+m^{\gamma}\hat{P}m^{\beta}\hat{P}m^{\alpha}\right]+V \qquad (13-\mathrm{I})$$

I-4-حل معادلة شرودينغر للهاميلتوني مع كتلة فعالة متعلقة بالموضع:

حسب فون روس:

$$\mathrm{H_{VR}}=-\frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\gamma}(\hat{x})+m^{\gamma}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\alpha}(\hat{x})\right]+V(\hat{x}) \qquad (14-\mathrm{I})$$

حيث:

$$\alpha+\beta+\gamma=-1 \qquad (15-\mathrm{I})$$

لدينا معادلة شرودينغر:

$$H\psi(x)=E\psi(x) \qquad (16-\mathrm{I})$$

مؤثر الاندفاع هو:

$$\hat{P}(x)=-i\hbar\partial_x \qquad (17-\mathrm{I})$$

هاميلتوني فعال معمم يكتب بالشكل التالي:

$$H=-\frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\,\hat{P}m^{\gamma}(\hat{x})+m^{\gamma}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\alpha}(\hat{x})\right]+V(\hat{x}) \qquad (18-\mathrm{I})$$

نضع $\hat{P}$ و H في علاقة $(16-\mathrm{I})$ نجد :

$$\{-\frac{1}{4}[m(x)^{\alpha}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\gamma}+m(x)^{\gamma}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\alpha}]+V(x)-E\}\psi(x)=0 \qquad (19-\mathrm{I})$$

نشتق المعادلة التالية:

$$m(x)^{\alpha}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\gamma}\psi(x)=m(x)^{\alpha}\frac{d}{dx}\{\gamma m(\mathrm{x})'m(x)^{\gamma+\beta-1}+m(x)^{\beta+\gamma}\frac{d}{dx}\}\,\psi(x) \qquad (20-\mathrm{I})$$

$$m(x)^{\gamma}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\alpha}\psi(x)=m(x)^{\gamma}\frac{d}{dx}\{\alpha m(\mathrm{x})'m(x)^{\alpha+\beta-1}+m(x)^{\beta+\alpha}\frac{d}{dx}\}\psi(x) \qquad (21-\mathrm{I})$$

نشتق مرة ثانية:

$$m(x)^{\alpha}\frac{d}{dx}[\gamma m(\mathrm{x})'m(x)^{\gamma+\beta-1}+m(x)^{\beta+\gamma}\frac{d}{dx}]=[\gamma m''(x)m(x)^{\gamma+\beta-1}+\gamma(\gamma+\beta-1)m'(x)^2m(x)^{\gamma+\beta-2}+\gamma m(\mathrm{x})'m(x)^{\gamma+\beta-1}\frac{d}{dx}+(\gamma+\beta)m'(x)m(x)^{\gamma+\beta-1}\frac{d}{dx}+m(x)^{\gamma+\beta}\frac{d^2}{dx^2}] \qquad (22-\mathrm{I})$$

أو:

$$m(x)^{\gamma}\frac{d}{dx}[\alpha m(\mathrm{x})'m(x)^{\alpha+\beta-1}+m(x)^{\beta+\alpha}\frac{d}{dx}]$$
$$=[\alpha m''(x)m(x)^{\alpha+\beta-1}+\alpha(\alpha+\beta-1)m'(x)^2m(x)^{\alpha+\beta-2}$$
$$+\alpha m(\mathrm{x})'m(x)^{\alpha+\beta-1}\frac{d}{dx}+(\alpha+\beta)m'(x)m(x)^{\alpha+\beta-1}\frac{d}{dx}$$
$$+m(x)^{\alpha+\beta}\frac{d^2}{dx^2}] \qquad (23-\mathrm{I})$$

لدينا $m'(x)$ و $m''(x)$ هي المشتقة الأولى والمشتقة الثانية من التوزيع والكتلة $m(x)$ متعلقة بالمتغير x.

بإستخدام العلاقة $(22-\mathrm{I})$ و$(23-\mathrm{I})$ نجد:

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{h}^2}{4}\left[\gamma\frac{\mathrm{m}''(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}+\gamma(\gamma+\beta-1)\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})^2}{\mathrm{m}^3(\mathrm{x})}+\gamma\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}+(\gamma+\beta)\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}-\frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\right.$$
$$+\alpha\frac{\mathrm{m}''(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}+\alpha(\alpha+\beta-1)\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})^2}{\mathrm{m}^3(\mathrm{x})}+\alpha\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}+(\alpha+\beta)\frac{\mathrm{m}'(\mathrm{x})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$$
$$\left.-\frac{1}{\mathrm{m}(\mathrm{x})}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\right]+\mathrm{V}(\mathrm{x}) \qquad (24-\mathrm{I})$$

بعد التبسيط ،يكتب هاميلتوني بالشكل التالي:

$$H=\left\{-\frac{1}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx}\right\}+\tilde{V}(x) \qquad (25-\mathrm{I})$$

حيث $\tilde{V}(x)$ يكتب بالعلاقة التالية:

$$\tilde{V}(x)=V(x)-[(1+\beta)m'(x)m''(x)-2(\beta+1)+\alpha(\beta+\alpha+1)]\frac{1}{4m^3(x)} \qquad (26-\mathrm{I})$$

وفي الأخير، نكتب معادلة شرودينغر كما يلي:

$$\left\{-\frac{1}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m'(x)}{2m^2(x)}\frac{d}{dx}+\tilde{V}(x)-E\right\}\psi(x)=0 \qquad (27-\mathrm{I})$$

الفصل الثاني

الحساب التحليلي للدوال الموجية ومعاملات النفوذ

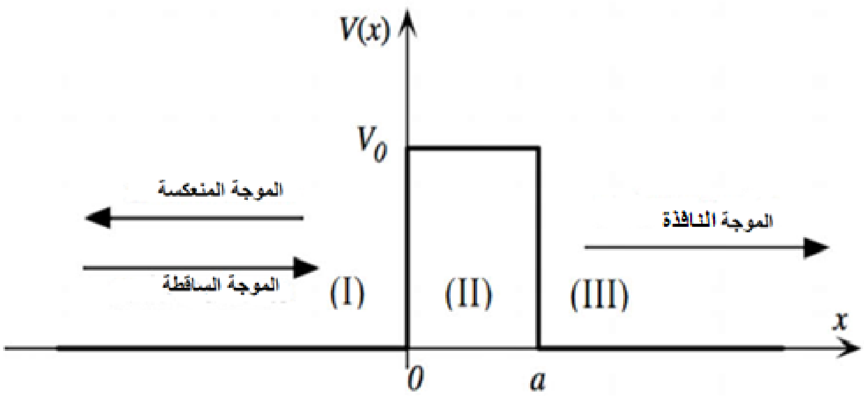
II-1- مقدمة :

في هذا الفصل سنتطرق لدراسة سلوك الموجة عبرحاجز مستطيل من خلال هذا الحاجز نميز حالتين، الحالة الأولى لما تكون الطاقة الكلية للجسيم أكبر من الطاقة الكامنة ،و الحالة الثانية لما تكون الطاقة الكلية للجسيم أقل من الطاقة الكامنة .كما سنتطرق أيضا الى حل معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن وحساب معامل النفوذ بتطبيق شروط الإستمرارية.

II-2- حل معادلة شرودينغر المعممة لكل من الكمون والكتلة (ثابتة):

II-2-1- الحاجز الكموني:

نتناول في هذا الجزء دراسة حركة جسيمات لها طاقة كلية E تسقط على حاجز كموني مستطيل الشكل إرتفاعه V_0 وعرضه a ،كما هو مبين في الشكل أدناه .



الشكل(II-1):الحاجز الكموني أحادي البعد

الحاجز الكموني المعرف بـــ:

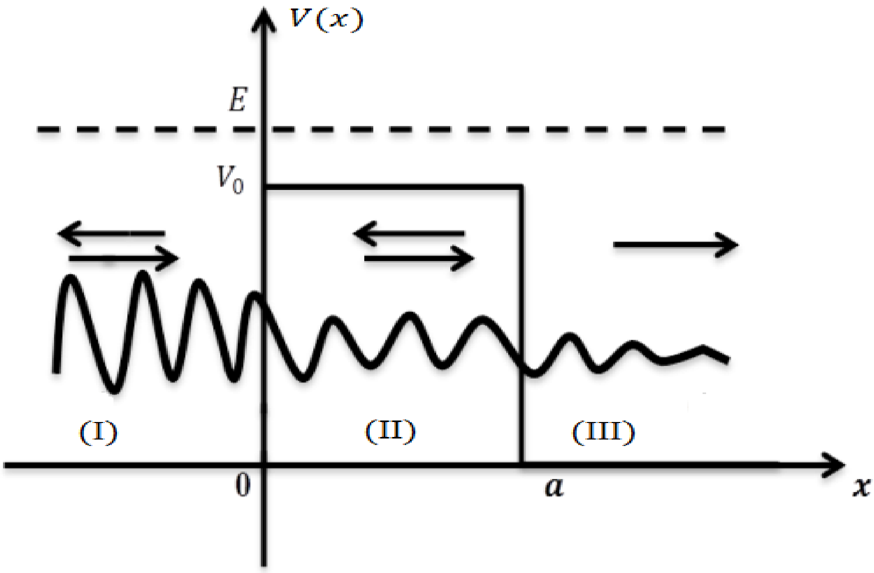
$$V(x)=\begin{cases}0 & x<0 \quad \text{المنطقة I} \\ V_0 & 0<x<a \quad \text{المنطقة II} \\ 0 & x>a \quad \text{المنطقة III}\end{cases}$$

(1 − II)
(2 − II)
(3 − II)

إذا كانت الطاقة الكلية للجسيم أقل من إرتفاع الحاجز $(\mathrm{E} < V_0)$ وسقطت هذه الجسيمات على حاجز الكمون الموضح في الشكل أعلاه ،فإن هذه الجسيمات ستنعكس دائما الى المنطقة الأولى ،بناء على الميكانيك التقليدية .ولكن تنص ميكانيك الكم بأن هناك إحتمالا لوجود الجسيمات في المنطقة الثالثة. ويكون هذا

الاحتمال كبيرا عندما يكون المقدار $(V_0 - \mathrm{E})$ وعرض الحاجز a صغيرين. أما إذا كانت طاقة هذه الجسيمات كبيرة بالمقارنة مع إرتفاع حاجز الكمون $(\mathrm{E} > V_0)$ ستنتقل كل الجسيمات الساقطة ،بناء على الميكانيك التقليدية ولكن في ميكانيك الكم نجد أن هناك نسبة صغيرة لا تساوي الصفر، قد إنعكست من هذه الجسيمات عند مرورها فوق حاجز الكمون. سوف نعالج هذه المسألة بناء على ميكانيك الكم ،وذلك بحل معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في ثلاثة المناطق الموضحة في الشكل أدناه.

II-2-2- الحالة الأولى $\mathrm{E} > V_0$:



الشكل(II-2):الحاجز الكموني$(\mathrm{E} > V_0)$

نكتب معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في المنطقة الأولى، حيث $V(x) = 0$ ،على الصورة التالية:

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}(x) = 0 \qquad (4-\mathrm{II})$$

أو:

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} + K_1^2\psi_{\mathrm{I}}(x) = 0 \qquad (5-\mathrm{II})$$

حيث:

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (6-\text{II})$$

وفي المنطقة الثانية حيث $V(x) = V_0$ ،تكون معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في الصورة التالية:

$$\frac{d^2\psi_{\text{II}}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\text{II}}(x) = 0 \qquad (7-\text{II})$$

أو:

$$\frac{d^2\psi_{\text{II}}(x)}{dx^2} + K_2^2\psi_{\text{II}}(x) = 0 \qquad (8-\text{II})$$

حيث:

$$K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0) \qquad (9-\text{II})$$

وفي المنطقة الثالثة حيث $V(x) = 0$ ،نكتب معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن على الصورة :

$$\frac{d^2\psi_{\text{III}}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\text{III}}(x) = 0 \qquad (10-\text{II})$$

أو:

$$\frac{d^2\psi_{\text{III}}(x)}{dx^2} + K_1^2\psi_{\text{III}}(x) = 0 \qquad (11-\text{II})$$

حيث:

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (12-\text{II})$$

نجد أن الحل العام للمعادلات أعلاه يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{cases} \psi_{\text{I}}(x) = A_1 e^{ik_1x} + \acute{A_1}\, e^{-ik_1x} & (13-\text{II}) \\ \psi_{\text{II}}(x) = A_2 e^{ik_2x} + \acute{A_2}\, e^{-ik_2x} & (14-\text{II}) \\ \psi_{\text{III}}(x) = A_3 e^{ik_1x} + \acute{A_3}\, e^{-ik_1x} & (15-\text{II}) \end{cases}$$

وبما أن الموجات لا تتحرك ناحية اليسار بعد خروجها من الحاجز فإنه يكون $\acute{A_3} = 0$ وتصبح الدالة أعلاه في الشكل $\psi_{\mathrm{III}}(x) = A_3 e^{ik_1 x}$

لدينا A_1 , $\acute{A_1}$:ثوابت إختيارية

$A_1 e^{ik_1 x}$و $\acute{A_1}\, e^{-ik_1 x}$: دالة الموجة الساقطة والمنعكسة

شروط الإستمرارية:

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين I وII :

إستمرارية دالة الموجة عند نقطة الإبتدائية $x = 0$

إستمرارية دالة الموجة :

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow A_1 + \acute{A_1} = A_2 + A_2' \qquad (16-\mathrm{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة:

$$\begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}'(0) = \psi_{\mathrm{II}}'(0) & (17-\mathrm{II}) \\ K_1(A_1 - A_1') = K_2(A_2 - A_2') & (18-\mathrm{II}) \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} (A_1 + A_1') = (A_2 + A_2') & (19-\mathrm{II}) \\ (A_1 - A_1') = \dfrac{K_2}{K_1}(A_2 - A_2') & (20-\mathrm{II}) \end{cases}$$

بجمع $(19-\mathrm{II})$و $(20-\mathrm{II})$ نحصل على المعادلة $(21-\mathrm{II})$ ونحصل على المعادلة$(22-\mathrm{II})$ بطرح $(19-\mathrm{II})$ من $(20-\mathrm{II})$:

$$A_1 = \left(\frac{K_1 + K_2}{2K_1}\right) A_2 + \left(\frac{K_1 - K_2}{2K_1}\right) A_2' \qquad (21-\mathrm{II})$$

$$A_1' = \left(\frac{K_1 - K_2}{2K_1}\right) A_2 + \left(\frac{K_1 + K_2}{2K_1}\right) A_2' \qquad (22-\mathrm{II})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين II وIII :

$$\psi_{\mathrm{II}}(a) = \psi_{\mathrm{III}}(a) \Rightarrow A_2 e^{ik_2 a} + A_2' e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \qquad (23-\mathrm{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة عند x=a:

$$\psi'_{\mathrm{II}}(a) = \psi'_{\mathrm{III}}(a) \Rightarrow A_2 e^{ik_2 a} - A'_2 e^{-ik_2 a} = \frac{K_1}{K_2}\left(A_3 e^{ik_1 a}\right) \qquad (24-\mathrm{II})$$

لدينا:

$$\begin{cases} A_2 e^{ik_2 a} + A'_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} & (25-\mathrm{II}) \\ A_2 e^{ik_2 a} - A'_2 e^{-ik_2 a} = \dfrac{K_1}{K_2}\left(A_3 e^{ik_1 a}\right) & (26-\mathrm{II}) \end{cases}$$

بجمع $(25-\mathrm{II})$و $(26-\mathrm{II})$ نحصل على المعادلة $(27-\mathrm{II})$ ونحصل على المعادلة$(28-\mathrm{II})$ بطرح $(25-\mathrm{II})$ من $(26-\mathrm{II})$:

$$\begin{cases} A_2 = \left(\dfrac{K_1 + K_2}{2K_2}\right) e^{i(k_1-k_2)a} A_3 & (27-\mathrm{II}) \\ A'_2 = \left(\dfrac{K_2 - K_1}{2K_2}\right) e^{i(k_1+k_2)a} A_3 & (28-\mathrm{II}) \end{cases}$$

معامل الإنعكاس ومعامل النفوذ :

يعرف معامل الإنعكاس (R) بأنه نسبة الجسيمات الساقطة التي تعاني إنعكاسا من حاجز الكمون ورياضيا يعطى:

$$R = \frac{|j_r|}{j_i} = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} \qquad (29-\mathrm{II})$$

j_iهو تيار الاحتمالية للموجة الساقطة

j_rهو تيار الاحتمالية للموجة المنعكسة

$$j_i = \frac{\hbar K_1}{m}|A_1|^2 \Rightarrow j_i = \hbar v_1 |A_1|^2 \qquad (30-\mathrm{II})$$

$$j_r = \frac{\hbar K_2}{m}|A'_1|^2 \Rightarrow j_r = \hbar v_2 |A'_1|^2 \qquad (31-\mathrm{II})$$

وكما يعرف معامل النفوذ T بأنه نسبة من الجسيمات الساقطة التي تعاني نفاذا من خلال حاجز الكمون و رياضيا يعطى:

$$T = \frac{j_t}{j_i} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \qquad (32-\mathrm{II})$$

j_tهو تيار الاحتمالية للموجة النافذة

j_iهو تيار الاحتمالية للموجة الساقطة

$$j_t = \frac{\hbar K_1}{m}|A_3|^2 \Rightarrow j_t = \hbar v_1 |A_3|^2 \qquad (33-\text{II})$$

ولكي يكون عدد الجسيمات محفوظا يجب أن يكون:

$$j_i = j_r + j_t \Rightarrow T + R = 1$$

نعوض $(27-\text{II})$ و$(28-\text{II})$ في العلاقة $(21-\text{II})$ و$(22-\text{II})$ نجد:

$$A_3 = \frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a} - (k_1-k_2)^2e^{+ik_2a}}A_1 \qquad (34-\text{II})$$

لدينا:

$$\sin(k_2a) = \frac{e^{+ik_2a} - e^{-ik_2a}}{2} \qquad (35-\text{II})$$

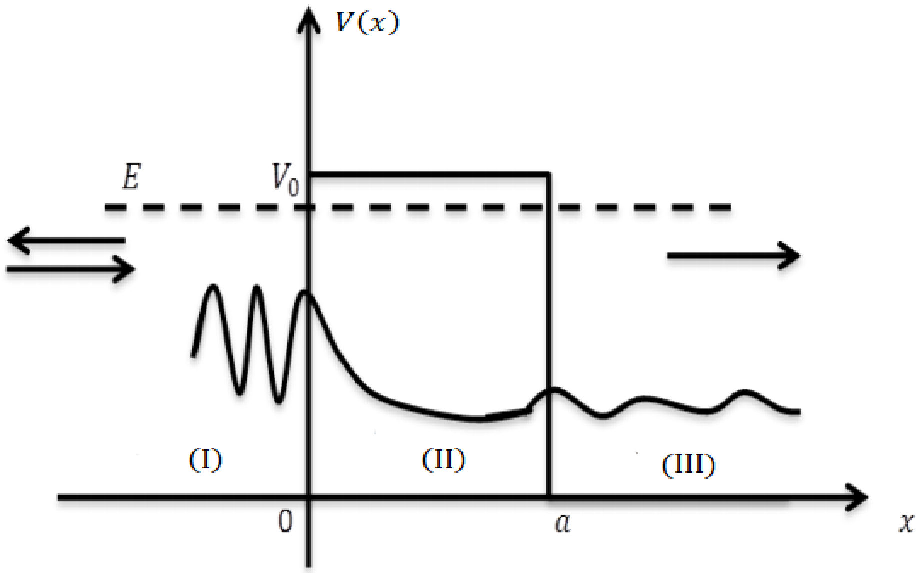
بتعويض قيمة k_1 و k_2 نجد أن:

$$T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + sin^2\left[\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}\;a\right]} \qquad (36-\text{II})$$

نضع $\frac{E}{V_0} = \text{x}$:

$$T = \frac{4(x^2-x)}{sin^2\left[\sqrt{2(x-1)\pi}\,\right] + 4(x^2-x)} \qquad (37-\text{II})$$

II-2-3- الحالة الثانية $E < V_0$:



الشكل(3-II):الحاجز الكموني$(E < V_0)$

الحل العام للمناطق الثلاثة يكتب بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}(x) = A_1 e^{ik_1x} + A_1' \, e^{-ik_1x} \\ \psi_{\mathrm{II}}(x) = A_2 e^{k_2x} + A_2' \, e^{-k_2x} \\ \psi_{\mathrm{III}}(x) = A_3 e^{ik_1x} + A_3' \, e^{-ik_1x} \end{cases} \qquad (38-\mathrm{II})$$

لدينا:

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad ; \qquad K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

شروط الإستمرارية:

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين I وII :

إستمرارية دالة الموجة عند النقطة الإبتدائية $x = 0$

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2' \qquad (39-\mathrm{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة :

$$\begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}'(0) = \psi_{\mathrm{II}}'(0) & (40-\mathrm{II}) \\ iK_1(A_1 - A_1') = K_2(A_2 - A_2') & (41-\mathrm{II}) \end{cases}$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين II وIII :

$$\psi_{\mathrm{II}}(a)=\psi_{\mathrm{III}}(a)\Rightarrow A_2e^{k_2a}+A_2'e^{-k_2a}=A_3e^{ik_1a} \qquad (42-\mathrm{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة عند x=a:

$$\psi_{\mathrm{II}}'(a)=\psi_{\mathrm{III}}'(a)\Rightarrow k_2(A_2e^{k_2a}-A_2'e^{-k_2a})=ik_1(A_3e^{ik_1a}) \qquad (43-\mathrm{II})$$

إذا لدينا:

$$\begin{cases}(A_1+A_1')=(A_2+A_2') & (44-\mathrm{II})\\ ik_1(A_1-A_1')=k_2(A_2-A_2') & (45-\mathrm{II})\end{cases}$$

و:

$$\begin{cases}A_2e^{k_2a}+A_2'e^{-k_2a}=A_3e^{ik_1a} & (46-\mathrm{II})\\ k_2(A_2e^{k_2a}-A_2'e^{-k_2a}=ik_1\left(A_3e^{ik_1a}\right) & (47-\mathrm{II})\end{cases}$$

من هذا نستنتج :

$$A_3=\frac{4ik_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1+ik_2)^2e^{k_2a}-(k_1-ik_2)^2e^{-k_2a}}A_1 \qquad (48-\mathrm{II})$$

في حالة $k_2a\gg 1$ ،وبالتالي يصبح معامل النفوذ بالعلاقة التالية:

$$T=\frac{16K_1^2K_2^2}{(K_1^2+K_2^2)^2}e^{-2k_2a} \qquad (49-\mathrm{II})$$

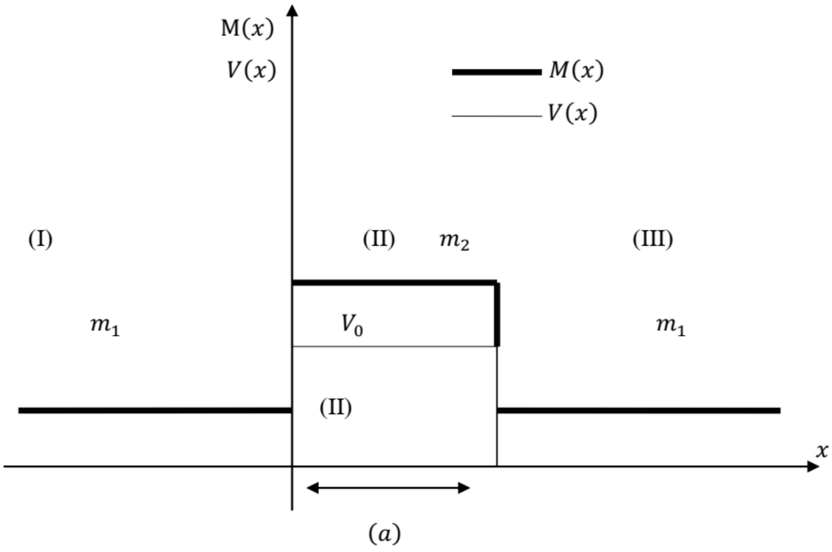
بتعويض قيمة k_1 و k_2 نجد أن:

$$T=\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{2(1-\frac{E}{V_0})}} \qquad (50-\mathrm{II})$$

نضع $\frac{E}{V_0}=\mathrm{x}$:

$$T=16(x-x^2)\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{2(1-x)}} \qquad (51-\mathrm{II})$$

II -3- حل معادلة شرودينغر المعممة لكل من الكمون والكتلة(متغيرة):



الشكل(4-II): يمثل حاجز مستطيل لكل من الكمون و الكتلة

نعتبر جسيم في حاجز كموني V(x) وكتلة m(x).

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\ \text{I المنطقة} \\ V_0 & (a>x>0)\text{II المنطقة} \\ 0 & (x>0)\ \text{III المنطقة}\end{cases} \qquad (52-\text{II})$$

$$m(x)=\begin{cases}m_1 & (x<0)\ \ \text{I المنطقة} \\ m_2 & (a>x>0)\text{II المنطقة} \\ m_3 & (x>0)\ \text{III المنطقة}\end{cases} \qquad (53-\text{II})$$

لدينا:

$$H\psi(x)=E\psi(x) \qquad (54-\text{II})$$

أو:

$$H=\frac{1}{4}\left(m^{\alpha}(\hat{x})\hat{p}m^{\beta}(\hat{x})\hat{P}m^{\gamma}(\hat{x})+m^{\gamma}(\hat{x})\hat{P}m^{\beta}(\hat{x})\hat{p}m^{\alpha}(\hat{x})+V(\hat{x})\right) \qquad (55-\text{II})$$

تصبح معادلة شرودينغر كما يلي:

$$-\frac{1}{2m(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{m(x)'}{2m^2(x)}\frac{d\psi(x)}{d(x)}+(V(x)-\varepsilon)\psi(x)$$
$$+\left[(1+\beta)m(x)m(x)''-2\big(\beta+1+\alpha(\alpha+\beta+1)\big)m'^2(x)\right]\frac{\psi(x)}{4m^3(x)}$$
$$=0 \qquad (56-\mathrm{II})$$

حل معادلة شرودينغر يسمح بحساب دالة الموجة لكل منطقة من الحاجز يتم من خلالها إستنتاج معامل النفوذ والإنعكاس، أولا علينا حل المعادلة بشكل منفصل من يسار الى اليمين عند x=0 وx=l ثم إتصال الحلول عند x=0 وx=a بتطبيق شروط الإستمرارية.

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن تكتب بالشكل التالي:

$$H\psi(x)=E\psi(x) \qquad (57-\mathrm{II})$$

لما $E>V_0$:

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في المناطق الثلاثة تكتب كما يلي:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\psi_{\mathrm{I}}(x)}{dX^2}+\dfrac{2m_1E}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}(x)=0\\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{II}}(x)}{dX^2}+\dfrac{2m_2}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\mathrm{II}}(x)=0\\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{III}}(x)}{dX^2}+\dfrac{2m_1E}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{III}}(x)=0\end{cases} \qquad (58-\mathrm{II})$$

حيث:

$$K_1^2=\frac{2m_1E}{\hbar^2} \qquad ; \qquad K_2^2=\frac{2m_2}{\hbar^2}(E-V_0)$$

الحل العام للمعادلات يكتب كالتالي:

$$\begin{cases}\psi_{\mathrm{I}}(x)=A_1e^{ik_1x}+\acute{A_1}\,e^{-ik_1x}\\ \psi_{\mathrm{II}}(x)=A_2e^{ik_2x}+\acute{A_2}\,e^{-ik_2x}\\ \psi_{\mathrm{III}}(x)=A_3e^{ik_1x}+\acute{A_3}\,e^{-ik_1x}\end{cases} \qquad (59-\mathrm{II})$$

حيث A_1 ، $\acute{A_1}$، A_2 ، $\acute{A_2}$، A_3 و $\acute{A_3}$ ثوابت يمكن إيجادها بإستخدام شروط الحدية.

نجد أن الحد الأول في المعادلة (59) يمثل الموجة الساقطة، e^{ik_1x} و A_1 سعتها، (في المنطقة الأولى)،و e^{-ik_1x} الموجة المنعكسة و $\acute{A_1}$ سعتها. ويمثل الثابت A_2 سعة الموجة المنتقلة إلى المنطقة الثانية و $\acute{A_2}$ سعة الموجة المنعكسة .ويمثل الثابت A_3 سعة الموجة المنتقلة في المنطقة الثالثة والثابت $\acute{A_3}$ سعة

الموجة المنعكسة .وبما أن الجسيمات لا تنعكس بعد إنتقالها إلى المنطقة الثالثة، فإن شدتها ($|\acute{A_3}|^2$) تكون صفرا، أي 0= $\acute{A_3}$ وتصبح الدالة الثالثة في المعادلة 59 على الصورة $\psi_{\mathrm{III}}(x) = A_3 e^{ik_1 x}$.

II-3-1- شروط الإستمرارية:

لنتأكد من إستمرارية الدالة الموجة ومشتقها(ψ مستمرو $\frac{\psi'}{m}$ مستمر، نختار **Lévy-Leblond**)

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين I وII :

إستمرارية دالة الموجة عند النقطة الإبتدائية $x = 0$

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow A_1 + \acute{A_1} = A_2 + \acute{A_2} \qquad (60-\mathrm{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة /الكتلة:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m_1}\psi_{\mathrm{I}}'(0) = \dfrac{1}{m_2}\psi_{\mathrm{II}}'(0) & (61-\mathrm{II}) \\ \dfrac{k_1}{m_1}(A_1 - A_1') = \dfrac{k_2}{m_2}(A_2 - A_2') & (62-\mathrm{II}) \end{cases}$$

نعوض $\nu_i = \frac{K_i}{m_i}$:

شروط الإستمرارية تؤدي الي النظام:

$$\begin{cases} (A_1 + A_1') = (A_2 + A_2') & (63-\mathrm{II}) \\ (A_1 - A_1') = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}(A_2 - A_2') & (64-\mathrm{II}) \end{cases}$$

بجمع $(63-\mathrm{II})$و $(64-\mathrm{II})$ نحصل على المعادلة $(65-\mathrm{II})$ ونحصل على المعادلة$(66-\mathrm{II})$ بطرح $(63-\mathrm{II})$ من $(64-\mathrm{II})$:

$$A_1 = \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2K_1}\right)A_2 + \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2K_1}\right)A_2' \qquad (65-\mathrm{II})$$

$$A_1' = \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2 + \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2' \qquad (66-\mathrm{II})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين II وIII :

$$\psi_{\text{II}}(a)=\psi_{\text{III}}(a)\Rightarrow A_2e^{ik_2a}+A_2'e^{-ik_2a}=A_3e^{ik_2a} \qquad (67-\text{II})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة / كتلة عند x=a

$$\frac{1}{m_1}\psi_{\text{II}}'(a)=\frac{1}{m_2}\psi_{\text{II}}'(a)\Rightarrow A_2e^{ik_2a}-A_2'e^{-ik_2a}=\frac{\nu_1}{\nu_2}A_3e^{ik_1a} \qquad (68-\text{II})$$

لدينا:

$$\begin{cases}A_2e^{ik_2a}+A_2'e^{-ik_2a}=A_3e^{ik_2a} & (69-\text{II})\\ A_2e^{ik_2a}-A_2'e^{-ik_2a}=\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\left(A_3e^{ik_1a}\right) & (70-\text{II})\end{cases}$$

بجمع $(69-\text{II})$و $(70-\text{II})$ نحصل على المعادلة $(71-\text{II})$ ونحصل على المعادلة$(71-\text{II})$ بطرح $(69-\text{II})$ من $(70-\text{II})$:

$$\begin{cases}\mathrm{A}_2=\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a}A_3 & (71-\text{II})\\ A_2'=\left(\dfrac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1+k_2)a}A_3 & (72-\text{II})\end{cases}$$

نعوض $(7-\text{II})$و $(8-\text{II})$ في $(3-\text{II})$ نجد:

$$\mathrm{A}_1=\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a}A_3+\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1+k_2)a}A_3 \qquad (73-\text{II})$$

ومنه نستنتج أن:

$$A_3=\frac{4\nu_1\nu_2e^{-ik_1a}}{(\nu_1+\nu_2)^2e^{-ik_2a}-(\nu_1-\nu_2)^2e^{+ik_2a}}A_1 \qquad (74-\text{II})$$

II-3-2- معامل النفوذ:

يعرف معامل النفوذ (العبور)T للحاجز:

$$T=\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \qquad (75-\text{II})$$

لدينا في المنطقة I و II نفس شعاع الموجة ،بالتالي نجد أن :

$$T=\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}=\left|\frac{4\nu_1\nu_2e^{-ik_1a}}{(\nu_1+\nu_2)^2e^{-ik_2a}-(\nu_1-\nu_2)^2e^{+ik_2a}}\right|^2 \qquad (76-\text{II})$$

إذا $E < V_0$:

لدينا $k_2 = \pm i\widetilde{k_2}$

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \left|\frac{4v_1v_2e^{-ik_1a}}{(v_1+v_2)^2e^{\widetilde{k_2}a} - (v_1-v_2)^2e^{-\widetilde{k_2}a}}\right|^2 \quad (77-\text{II})$$

إذا $E > V_0$:

$$T = \frac{(4v_1v_2)^2}{((v_1+v_2)^2e^{-ik_2a} - (v_1-v_2)^2e^{+ik_2a})((v_1+v_2)^2e^{+ik_2a} - (v_1-v_2)^2e^{-ik_2a}))} \quad (78-\text{II})$$

بعد التبسيط نحصل على المعامل أدناه:

$$T = \frac{(4\,v_1v_2)^2}{(v_1+v_2)^4 + (v_1-v_2)^4 - 2(v_1+v_2)^2(v_1-v_2)^2\cos(2k_2a)} \quad (79-\text{II})$$

والتي يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$T = \frac{4(v_1v_2)^2}{4(v_1v_2)^2 + (v_1^2-v_2^2)^2 sin^2(k_2a)} \quad (80-\text{II})$$

أخيرا:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(v_1^2-v_2^2)^2}{4(v_1v_2)^2} sin^2(k_2a)} \quad (81-\text{II})$$

$$\frac{(v_1^2-v_2^2)^2}{4(v_1v_2)^2} = \frac{[(m_1-m_2)E - m_1V_0]^2}{4m_1m_2E(E-V_0)} \quad (82-\text{II})$$

ومعامل الإنعكاس يكتب بالشكل :

$$R = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right| = \left|\frac{(v_2+v_1)(v_2+v_1)(e^{iK_2a} - e^{-iK_2a})}{((v_2^2+v_1^2+2v_1v_2)e^{-iK_2a} - (v_2^2+v_1^2 - (v_2^2+v_1^2+2v_1v_2)e^{iK_2a})}\right|^2 \quad (83-\text{II})$$

بالتبسيط نجد أن :

$$R = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right| = \left|\frac{(v_2+v_1)(v_2+v_1)\sin(K_2a)}{((v_2^2+v_1^2)\sin(K_2a)+2iv_1v_2\cos(K_2a)}\right|^2 \qquad (84-\text{II})$$

والتي يمكن كتابته أيضا بالشكل التالي:

$$R = \frac{(v_1^2-v_2^2)^2 sin^2(K_2a)}{(v_1^2+v_2^2)^2 sin^2(K_2a)+4(v_1v_2)^2} \qquad (85-\text{II})$$

إذا $E > V_0$ نعوض قيمة v_1 و v_2 نجد أن:

$$T = \frac{1}{1+\frac{\left(\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{E}{V_0}-1\right)^2}{4\frac{m_2}{m_1}\frac{E}{V_0}\left(\frac{E}{V_0}-1\right)} sin^2(\pi\sqrt{2(\frac{E}{V_0}-1)})} \qquad (86-\text{II})$$

نضع $\frac{E}{V_0} = x$ نجد:

$$T = \frac{1}{1+\frac{\left(\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)x-1\right)^2}{4\frac{m_2}{m_1}x(x-1)} sin^2(\pi\sqrt{2(x-1)})} \qquad (87-\text{II})$$

نعوض $\frac{m_2}{m_1} = 1$:

$$T = \frac{1}{1+\frac{sin^2(\pi\sqrt{2(x-1)})}{4(x^2-x)}} \qquad (88-\text{II})$$

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{8}{10}$:

$$T = \frac{1}{1+\frac{5\left(-1+\frac{x}{5}\right)^2 sin^2(\pi\sqrt{2(x-1)})}{16(x^2-x)}} \qquad (89-\text{II})$$

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{10}{8}$:

$$T=\frac{1}{1+\frac{\left(-1-\frac{x}{4}\right)^{2}sin^{2}(\pi\sqrt{2(x-1)})}{5(x^{2}-x)}} \qquad (90-\text{II})$$

$$: \frac{m_2}{m_1}=\frac{7}{10}$$

$$T=\frac{1}{1+\frac{5\left(-1+\frac{3x}{10}\right)^{2}sin^{2}(\pi\sqrt{2(x-1)})}{14(x^{2}-x)}} \qquad (91-\text{II})$$

$$: \frac{m_2}{m_1}=\frac{10}{7}$$

$$T=\frac{1}{1+\frac{7\left(-1+\frac{-3x}{7}\right)^{2}sin^{2}(\pi\sqrt{2(x-1)})}{40(x^{2}-x)}} \qquad (92-\text{II})$$

$$: \frac{m_2}{m_1}=\frac{1}{4}$$

$$T=\frac{1}{1+\frac{\left(-1+\frac{3}{4}x\right)^{2}sin^{2}(\pi\sqrt{2(x-1)})}{4(x^{2}-x)}} \qquad (93-\text{II})$$

$$: \frac{m_2}{m_1}=4$$

$$T=\frac{1}{1+\frac{(-1-3x)^{2}sin^{2}(\pi\sqrt{2(x-1)})}{16(x^{2}-x)}} \qquad (94-\text{II})$$

لما $E < V_0$:

$$T=\frac{16}{\left(\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{\frac{E}{V_0}}{(1-\frac{E}{V_0})}+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}{\frac{E}{V_0}}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-\frac{E}{V_0})}}} \qquad (95-\text{II})$$

نضع $x=\frac{E}{V_0}$ نجد:

$$T=\frac{16}{\left(\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{x}{(1-x)}+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{(1-x)}{x}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (96-\text{II})$$

نعوض $\frac{m_2}{m_1}=1$:

$$T=\frac{16(x-x^2)}{e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (97-\text{II})$$

لدينا $\frac{m_2}{m_1}=\frac{8}{10}$:

$$T=\frac{16}{\left(\frac{8x}{10(1-x)}+\frac{10(1-x)}{8x}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (98-\text{II})$$

$\frac{m_2}{m_1}=\frac{10}{8}$:

$$T=\frac{16}{\left(\frac{10x}{8(1-x)}+\frac{8(1-x)}{10x}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (99-\text{II})$$

$\frac{m_2}{m_1}=\frac{7}{10}$:

$$T=\frac{16}{\left(\frac{7x}{10(1-x)}+\frac{10(1-x)}{7x}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (100-\text{II})$$

$\frac{m_2}{m_1}=\frac{10}{7}$:

$$T=\frac{16}{\left(\frac{10x}{7(1-x)}+\frac{7(1-x)}{10x}+2\right)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (101-\text{II})$$

لدينا $\frac{m_2}{m_1}=\frac{1}{4}$:

$$T=\frac{16}{(\frac{x}{4(1-x)}+\frac{4(1-x)}{x}+2)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (102-\mathrm{II})$$

$\frac{m_2}{m_1}=4$:

$$T=\frac{16}{(\frac{4x}{(1-x)}+\frac{(1-x)}{4x}+2)e^{2\pi\sqrt{2(1-x)}}} \qquad (103-\mathrm{II})$$

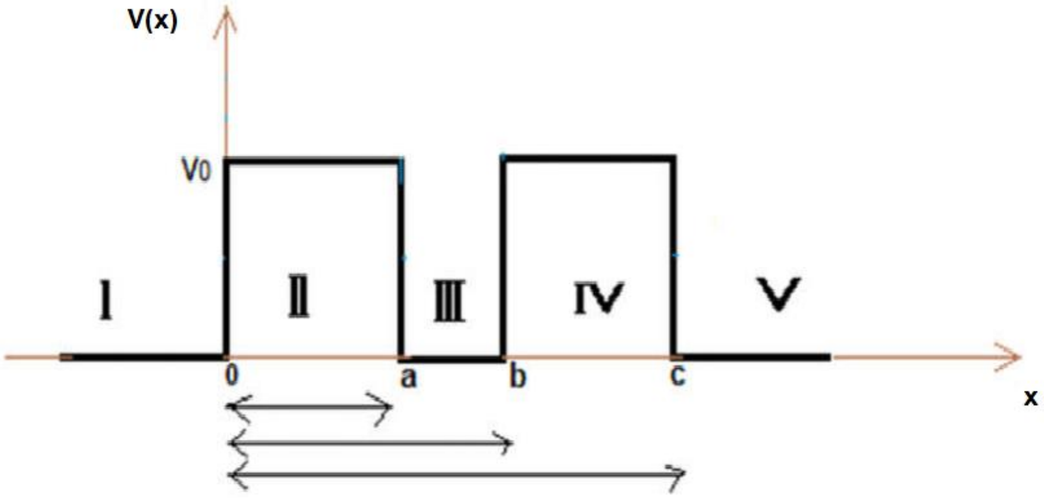
الفصل الثالث

حل معادلة شرودينغر المعممة مع حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون و الكتلة

III-1-مقدمة:

في هذا الفصل سنقوم بحل معادلة شرودينغر المعممة المستقلة عن الزمن وحساب معامل النفوذ من أجل حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة المتغيرة .

III-2 - حل معادلة شرودينغر المعممة مع حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة :



الشكل(III -1): يمثل حاجز كموني مستطيل مضاعف

لدينا:

$$b = 2a\,,\quad c = 3a \qquad (1-\text{III})$$

حيث:

$$a = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{m_1 V_0}} \qquad (2-\text{III})$$

لما يكون $E > V_0$:

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن تكتب على الشكل التالي:

$$H\psi(x) = E\psi(x) \qquad (3-\text{III})$$

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في المناطق الخمسة تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{I}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{II}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\mathrm{II}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{III}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{III}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{IV}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\mathrm{IV}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\mathrm{V}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{V}}(x) = 0 \end{cases} \qquad (4-\mathrm{III})$$

حيث:

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad , \qquad K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)$$

الحل العام للمعادلات أعلاه يكتب بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}(x) = A_1 e^{ik_1x} + \acute{A_1}\, e^{-ik_1x} \\ \psi_{\mathrm{II}}(x) = A_2 e^{ik_2x} + \acute{A_2}\, e^{-ik_2x} \\ \psi_{\mathrm{III}}(x) = A_3 e^{ik_1x} + \acute{A_3}\, e^{-ik_1x} \\ \psi_{\mathrm{IV}}(x) = A_4 e^{ik_2x} + \acute{A_4}\, e^{-ik_2x} \\ \psi_{\mathrm{V}}(x) = A_5 e^{ik_1x} \end{cases} \qquad (5-\mathrm{III})$$

III-2-1- شروط الإستمرارية:

لنتأكد من إستمرارية الدالة الموجية ومشتقها(ψ مستمرو $\frac{\psi'}{m}$ مستمر، نختار **Lévy-Leblond)**

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين I وII :

إستمرارية دالة الموجة عند النقطة الإبتدائية $x = 0$

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow A_1 + \acute{A_1} = A_2 + \acute{A_2} \qquad (6-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة:

$$\begin{cases} \psi'_{\mathrm{I}}(0) = \psi'_{\mathrm{II}}(0) & (7-\mathrm{III}) \\ K_1(A_1 - A'_1) = K_2(A_2 - A'_2) & (8-\mathrm{III}) \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases}(A_1 + A_1') = (A_2 + A_2') & (9-\text{III})\\ (A_1 - A_1') = \dfrac{K_2}{K_1}(A_2 - A_2') & (10-\text{III})\end{cases}$$

بجمع $(9-\text{III})$ و $(10-\text{III})$ نحصل على المعادلة $(11-\text{III})$ ونحصل على المعادلة$(12-\text{III})$ بطرح $(9-\text{III})$ من $(10-\text{III})$:

$$A_1 = \left(\frac{K_1 + K_2}{2K_1}\right)A_2 + \left(\frac{K_1 - K_2}{2K_1}\right)A_2' \qquad (11-\text{III})$$

$$A_1' = \left(\frac{K_1 - K_2}{2K_1}\right)A_2 + \left(\frac{K_1 + K_2}{2K_1}\right)A_2' \qquad (12-\text{III})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين II وIII :

$$\psi_{\text{II}}(a) = \psi_{\text{III}}(a) \Rightarrow A_2 e^{ik_2 a} + A_2' e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} + A_3' e^{-ik_1 a} \qquad (13-\text{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة عند x=a:

$$\psi_{\text{II}}'(a) = \psi_{\text{III}}'(a) \Rightarrow A_2 e^{ik_2 a} - A_2' e^{-ik_2 a} = \frac{K_1}{K_2}\left(A_3 e^{ik_1 a} - A_3' e^{-ik_1 a}\right) \qquad (14-\text{III})$$

لدينا:

$$\begin{cases}A_2 e^{ik_2 a} + A_2' e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} + A_3' e^{-ik_1 a} & (15-\text{III})\\ A_2 e^{ik_2 a} - A_2' e^{-ik_2 a} = \dfrac{K_1}{K_2}\left(A_3 e^{ik_1 a} - A_3' e^{-ik_1 a}\right) & (16-\text{III})\end{cases}$$

بجمع $(15-\text{III})$و $(16-\text{II})$ نحصل على المعادلة $(17-\text{III})$ ونحصل على المعادلة$(18-\text{III})$ بطرح $(15-\text{III})$ من $(16-\text{III})$:

$$\begin{cases}A_2 = \left(\dfrac{K_1 + K_2}{2K_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a}A_3 + \left(\dfrac{K_1 - K_2}{2K_2}\right)e^{-i(k_1+k_2)a}A_3' & (17-\text{III})\\ A_2' = \left(\dfrac{K_2 - K_1}{2K_2}\right)e^{i(k_1+k_2)a}A_3 + \left(\dfrac{K_1 + K_2}{2K_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a}A_3' & (18-\text{III})\end{cases}$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين III وIV :

إستمرارية دالة الموجة:

$$\psi_{\text{III}}(b) = \psi_{\text{IV}}(b) \Rightarrow A_3 e^{ik_1 b} + A_3' e^{-ik_1 b} = A_4 e^{ik_2 b} + A_4' e^{-ik_2 b} \qquad (19-\text{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة :

$$\psi'_{\mathrm{III}}(b) = \psi'_{\mathrm{IV}}(b) \Rightarrow A_3 e^{ik_1 b} - A'_3 e^{-ik_1 b} = \frac{K_2}{K_1}\left(A_4 e^{ik_2 b} - A'_4 e^{-ik_2 b}\right) \qquad (20-\mathrm{III})$$

بجمع $(19-\mathrm{III})$ و$(20-\mathrm{III})$ نحصل على المعادلة $(21-\mathrm{III})$ ونحصل على المعادلة$(22-\mathrm{III})$ بطرح $(21-\mathrm{III})$ من $(22-\mathrm{III})$:

$$\begin{cases} A_3 = \left(\dfrac{K_1+K_2}{2K_1}\right) e^{i(k_2-k_1)b} A_4 + \left(\dfrac{K_1-K_2}{2K_1}\right) e^{-i(k_1+k_2)b} A'_4 & (21-\mathrm{III}) \\ A'_3 = \left(\dfrac{K_1-K_2}{2K_1}\right) e^{i(k_1+k_2)b} A_4 + \left(\dfrac{K_1+K_2}{2K_1}\right) e^{i(k_1-k_2)b} A'_4 & (22-\mathrm{III}) \end{cases}$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين IV وV :

إستمرارية دالة الموجة:

$$\psi_{\mathrm{IV}}(c) = \psi_{\mathrm{V}}(c) \Rightarrow A_4 e^{ik_2 c} + A'_4 e^{-ik_2 c} = A_5 e^{ik_1 c} \qquad (23-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة:

$$\psi'_{\mathrm{IV}}(c) = \psi'_{\mathrm{V}}(c) \Rightarrow A_4 e^{ik_2 c} - A'_4 e^{-ik_2 c} = \frac{K_1}{K_2} A_5 e^{ik_1 c} \qquad (24-\mathrm{III})$$

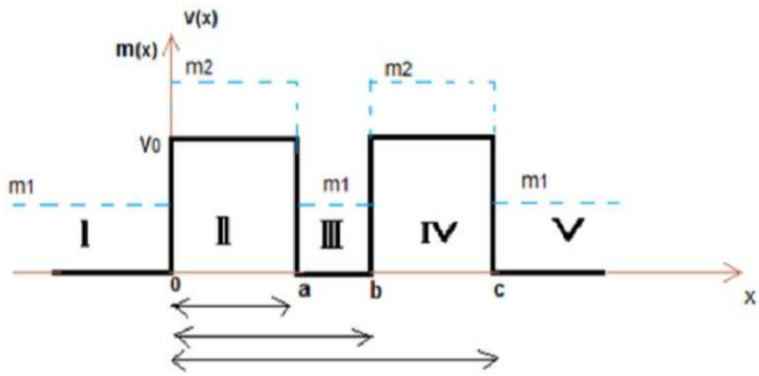
$$\begin{cases} A_4 e^{ik_2 c} + A'_4 e^{-ik_2 c} = A_5 e^{ik_1 c} & (25-\mathrm{III}) \\ A_4 e^{ik_2 c} - A'_4 e^{-ik_2 c} = \dfrac{K_1}{K_2} A_5 e^{ik_1 c} & (26-\mathrm{III}) \end{cases}$$

بجمع $(25-\mathrm{III})$و $(26-\mathrm{III})$ نحصل على المعادلة $(27-\mathrm{III})$ ونحصل على المعادلة$(28-\mathrm{III})$ بطرح $(25-\mathrm{III})$ من $(26-\mathrm{III})$:

$$A_4 = \left(\frac{K_1+K_2}{2K_2}\right) e^{i(k_1-k_2)c} A_5 \qquad (27-\mathrm{III})$$

$$A'_4 = \left(\frac{K_2-K_1}{2K_2}\right) e^{i(k_1+k_2)c} A_5 \qquad (28-\mathrm{III})$$

III-3-حل معادلة شرودينغر المعممة مع حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة (متغيرة):



الشكل (III-2) : حاجز مستطيل مضاعف لكل من الكمون والكتلة

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن تكتب على الشكل التالي:

$$H\psi(x) = E\psi(x) \qquad (29-\text{III})$$

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في المناطق الخمسة تكتب كما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_{\text{I}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m_1E}{\hbar^2}\psi_{\text{I}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\text{II}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m_2}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\text{II}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\text{III}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m_1E}{\hbar^2}\psi_{\text{III}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\text{IV}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m_2}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\text{IV}}(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_{\text{V}}(x)}{dx^2} + \dfrac{2m_1E}{\hbar^2}\psi_{\text{V}}(x) = 0 \end{cases} \qquad (30-\text{III})$$

حيث:

$$K_1^2 = \frac{2m_1E}{\hbar^2} \quad ; \quad K_2^2 = \frac{2m_2}{\hbar^2}(E - \text{V}_0)$$

الحل العام للمعادلات أعلاه يكتب بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \psi_{\text{I}}(x) = A_1e^{ik_1x} + \acute{A_1}\, e^{-ik_1x} \\ \psi_{\text{II}}(x) = A_2e^{ik_2x} + \acute{A_2}\, e^{-ik_2x} \\ \psi_{\text{III}}(x) = A_3e^{ik_1x} + \acute{A_3}\, e^{-ik_1x} \\ \psi_{\text{IV}}(x) = A_4e^{ik_2x} + \acute{A_4}\, e^{-ik_2x} \\ \psi_{\text{V}}(x) = A_5e^{ik_1x} \end{cases} \qquad (31-\text{III})$$

III -1-3- شروط الإستمرارية:

لنتأكد من استمرارية الدالة الموجية ومشتقها(ψ مستمرو$\frac{\psi'}{m}$ مستمر، نختار **(Lévy-Leblond**

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين I وII :

إستمرارية دالة الموجة عند النقطة الإبتدائية $x = 0$

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow A_1 + \acute{A_1} = A_2 + \acute{A_2} \qquad (32-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m_1}\psi_{\mathrm{I}}^{'}(0) = \dfrac{1}{m_2}\psi_{\mathrm{II}}^{'}(0) & (33-\mathrm{III}) \\ \dfrac{k_1}{m_1}(A_1 - A_1^{'}) = \dfrac{k_2}{m_2}(A_2 - A_2^{'}) & (34-\mathrm{III}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_1 + A_1') = (A_2 + A_2') & (35-\mathrm{III}) \\ (A_1 - A_1') = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}(A_2 - A_2') & (36-\mathrm{III}) \end{cases}$$

بجمع $(35-\mathrm{III})$ و $(36-\mathrm{III})$ نحصل على المعادلة $(37-\mathrm{III})$ ونحصل على المعادلة$(38-\mathrm{III})$ بطرح $(35-\mathrm{III})$ من $(36-\mathrm{III})$:

$$A_1 = \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2 + \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2' \qquad (37-\mathrm{III})$$

$$A_1' = \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2 + \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2\nu_1}\right)A_2' \qquad (38-\mathrm{III})$$

لدينا:

$$A_1 = q_1 A_2 + q_2 A_2' \qquad (39-\mathrm{III})$$

$$A_1' = q_2 A_2 + q_1 A_2' \qquad (40-\mathrm{III})$$

حيث:

$$q_1 = \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2\nu_1}\right) \qquad (41-\mathrm{III})$$

$$q_2 = \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_1}\right) \qquad (42-\mathrm{III})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين II وIII :

$$\psi_{\mathrm{II}}(a)=\psi_{\mathrm{III}}(a)\Rightarrow A_2e^{ik_2a}+A_2'e^{-ik_2a}=A_3e^{ik_2a}+A_3'e^{-ik_1a} \qquad (43-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق دالة الموجة /كتلة عند x=a:

$$\frac{1}{m_2}\psi_{\mathrm{II}}'(a)=\frac{1}{m_1}\psi_{\mathrm{III}}'(a)\Rightarrow A_2e^{ik_2a}-A_2'e^{-ik_2a}=\frac{\nu_1}{\nu_2}(A_3e^{ik_1a}-A_3'e^{-ik_1a}) \qquad (44-\mathrm{III})$$

لدينا:

$$\begin{cases}A_2e^{ik_2a}+A_2'e^{-ik_2a}=A_3e^{ik_2a}+A_3'e^{-ik_1a} & (45-\mathrm{III})\\ A_2e^{ik_2a}-A_2'e^{-ik_2a}=\dfrac{\nu_1}{\nu_2}(A_3e^{ik_1a}-A_3'e^{-ik_1a}) & (46-\mathrm{III})\end{cases}$$

بجمع $(45-\mathrm{III})$و $(46-\mathrm{II})$ نحصل على المعادلة $(47-\mathrm{III})$ ونحصل على المعادلة$(48-\mathrm{III})$ بطرح $(45-\mathrm{III})$ من $(46-\mathrm{III})$:

$$\begin{cases}\mathrm{A}_2=\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a}A_3+\left(\dfrac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right)e^{-i(k_1+k_2)a}A_3' & (47-\mathrm{III})\\ A_2'=\left(\dfrac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1+k_2)a}A_3+\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right)e^{i(k_2-k_1)a}A_3' & (48-\mathrm{III})\end{cases}$$

لدينا :

$$\mathrm{A}_2=Q_1A_3+Q_2A_3' \qquad (49-\mathrm{III})$$
$$A_2'=Q_2^*A_3+Q_1^*A_3' \qquad (50-\mathrm{III})$$

حيث:

$$Q_1=\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right)e^{i(k_1-k_2)a} \qquad (51-\mathrm{III})$$
$$Q_2=\left(\frac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right)e^{-i(k_1+k_2)a} \qquad (52-\mathrm{III})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين III وIV :

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{III}}(b)=\psi_{\mathrm{IV}}(b)\Rightarrow A_3e^{ik_1b}+A_3'e^{-ik_1b}=A_4e^{ik_2b}+A_4'e^{-ik_2b} \qquad (53-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق الدالة:

$$\frac{1}{m_1}\psi'_{\mathrm{III}}(b)=\frac{1}{m_2}\psi'_{\mathrm{IV}}(b)\Rightarrow A_3e^{ik_1b}-A'_3e^{-ik_1b}=\frac{v_2}{v_1}\left(A_4e^{ik_2b}-A'_4e^{-ik_2b}\right)\quad(54-\mathrm{III})$$

ومنه:

$$\begin{cases}A_3e^{ik_1b}+A'_3e^{-ik_1b}=A_4e^{ik_2b}+A'_4e^{-ik_2b} & (55-\mathrm{III})\\ A_3e^{ik_1b}-A'_3e^{-ik_1b}=\dfrac{v_2}{v_1}\left(A_4e^{ik_2b}-A'_4e^{-ik_2b}\right) & (56-\mathrm{III})\end{cases}$$

بجمع $(55-\mathrm{III})$ و$(56-\mathrm{III})$ نحصل على المعادلة $(57-\mathrm{III})$ ونحصل على المعادلة$(58-\mathrm{III})$ بطرح $(55-\mathrm{III})$ من $(56-\mathrm{III})$:

$$\begin{cases}\mathrm{A}_3=\left(\dfrac{v_1+v_2}{2v_1}\right)e^{i(k_2-k_1)b}A_4+\left(\dfrac{v_1-v_2}{2v_1}\right)e^{-i(k_1+k_2)b}A'_4 & (57-\mathrm{III})\\ A'_3=\left(\dfrac{v_1-v_2}{2v_1}\right)e^{i(k_1+k_2)b}A_4+\left(\dfrac{v_1+v_2}{2v_1}\right)e^{i(k_1-k_2)b}A'_4 & (58-\mathrm{III})\end{cases}$$

لدينا:

$$\mathrm{A}_3=s_1A_4+s_2A'_4\quad(59-\mathrm{III})$$
$$A'_3=s_2^*A_4+s_1^*A'_4\quad(60-\mathrm{III})$$

حيث:

$$s_1=\left(\frac{v_1+v_2}{2v_1}\right)e^{i(k_2-k_1)b}\quad(61-\mathrm{III})$$
$$s_2=\left(\frac{v_1-v_2}{2v_1}\right)e^{-i(k_1+k_2)b}\quad(62-\mathrm{III})$$

تطبيق شروط الإستمرارية عند المنطقتين IV وV :

إستمرارية الدالة:

$$\psi_{\mathrm{IV}}(c)=\psi_V(c)\Rightarrow A_4e^{ik_2c}+A'_4e^{-ik_2c}=A_5e^{ik_1c}\quad(63-\mathrm{III})$$

إستمرارية مشتق الدالة:

$$\frac{1}{m_2}\psi'_{\mathrm{IV}}(c)=\frac{1}{m_1}\psi'_{\mathrm{V}}(c)\Rightarrow A_4e^{ik_2c}-A'_4e^{-ik_2c}=\frac{v_1}{v_2}A_5e^{ik_1c}\quad(64-\mathrm{III})$$

$$\begin{cases} A_4 e^{ik_2c} + A_4' e^{-ik_2c} = A_5 e^{ik_1c} & (65-\text{III}) \\ A_4 e^{ik_2c} - A_4' e^{-ik_2c} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} A_5 e^{ik_1c} & (66-\text{III}) \end{cases}$$

بجمع $(65-\text{III})$و $(66-\text{III})$ نحصل على المعادلة $(67-\text{III})$ ونحصل على المعادلة$(68-\text{III})$ بطرح $(65-\text{III})$ من $(66-\text{III})$:

$$A_4 = \left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right) e^{i(k_1-k_2)c} A_5 \qquad (67-\text{III})$$

$$A_4' = \left(\frac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right) e^{i(k_1+k_2)c} A_5 \qquad (68-\text{III})$$

لدينا:

$$A_4 = z_1 A_5 \qquad (69-\text{III})$$

$$A_4' = z_2 A_5 \qquad (70-\text{III})$$

حيث:

$$z_1 = \left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2\nu_2}\right) e^{i(k_1-k_2)c} \qquad (71-\text{III})$$

$$z_2 = \left(\frac{\nu_2-\nu_1}{2\nu_2}\right) e^{i(k_1+k_2)c} \qquad (72-\text{III})$$

III-3-2- معامل النفوذ:

نعوض العلاقة $(69-\text{III})$و$(70-\text{III})$ في العلاقة $(59-\text{III})$ و$(60-\text{III})$ نجد أن:

$$\begin{cases} A_3 = (s_1 z_1 + s_2 z_2) A_5 & (73-\text{III}) \\ A_3' = (s_2^* z_1 + s_1^* z_2) A_5 & (74-\text{III}) \end{cases}$$

$$A_3 = m A_5 \qquad (75-\text{III})$$

$$A_3' = m' A_5 \qquad (76-\text{III})$$

حيث:

$$m = (s_1 z_1 + s_2 z_2) \qquad (77-\text{III})$$

$$m' = (s_2^* z_1 + s_1^* z_2) \qquad (78-\text{III})$$

نعوض العلاقة $(75-\text{III})$و$(76-\text{III})$ في العلاقة $(49-\text{III})$ و$(50-\text{III})$ نجد أن:

$$\begin{cases} A_2 = (Q_1 m + m' Q_2) A_5 & (79-\text{III}) \\ A_2' = \quad (Q_2^* m + Q_1^* m') A_5 & (80-\text{III}) \end{cases}$$

نعوض العلاقة $(79-\text{III})$و$(80-\text{III})$ في العلاقة $(39-\text{III})$ نجد أن:

$$A_1 = [q_1(Q_1 m + m' Q_2) + q_2(Q_2^* m + Q_1^* m')]A_5 \qquad (81-\text{III})$$

معادلة معامل النفوذ تكتب بالشكل التالي:

$$T = \left|\frac{A_5}{A_1}\right|^2 \qquad (82-\text{III})$$

حيث:

$$T = \left|\frac{1}{q_1(Q_1 m + m' Q_2) + q_2(Q_2^* m + Q_1^* m')}\right|^2 \qquad (83-\text{III})$$

بتعويض قيمة ν_1 و ν_2 وتعويض $\frac{E}{V_0} = \mathrm{x}$ نجد أن:

$$\begin{aligned}
T = \Bigg|1/\Bigg(&\Bigg(\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\right.\\
&+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\Bigg(1\\
&-\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\Bigg)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\right(1\\
&+\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\Bigg)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\\
&+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\\
&+\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\right.\\
&+\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[-i\pi\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\Bigg(\frac{1}{4}\Bigg(1\\
&-\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\Bigg)\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(5\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\\
&+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[i\pi\left(5\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\Bigg)\Bigg|^2
\end{aligned} \qquad (84-\text{III})$$

عندما يكون $\mathbf{E} < V_0$:

$$
\begin{aligned}
T = \Bigg| 1/ \Bigg(\Bigg(& \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\left(1+i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(i\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right] \\
& +\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\Bigg(1 \\
& -i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\Bigg)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(i\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\Bigg(\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\Bigg(1 \\
& +i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\Bigg)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(i\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right] \\
& +\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\left(1-i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(i\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg) \\
& +\Bigg(\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\left(1-i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(-i\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right] \\
& +\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\right)\left(1+i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(-i\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\Bigg(\frac{1}{4}\Bigg(1 \\
& -\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}\Bigg)\left(1+i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\right)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(5i\sqrt{2x}-\sqrt{2(x-1)}\right)\right] \\
& +\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{x}{-x+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}+1\right)\Bigg(1 \\
& -i\sqrt{\frac{-x+1}{x}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\Bigg)\mathrm{Exp}\left[\pi\left(5i\sqrt{2x}+\sqrt{2(x-1)}\right)\right]\Bigg)\Bigg)\Bigg|^2 \qquad (85-\mathrm{III})
\end{aligned}
$$

الفصل الرابع

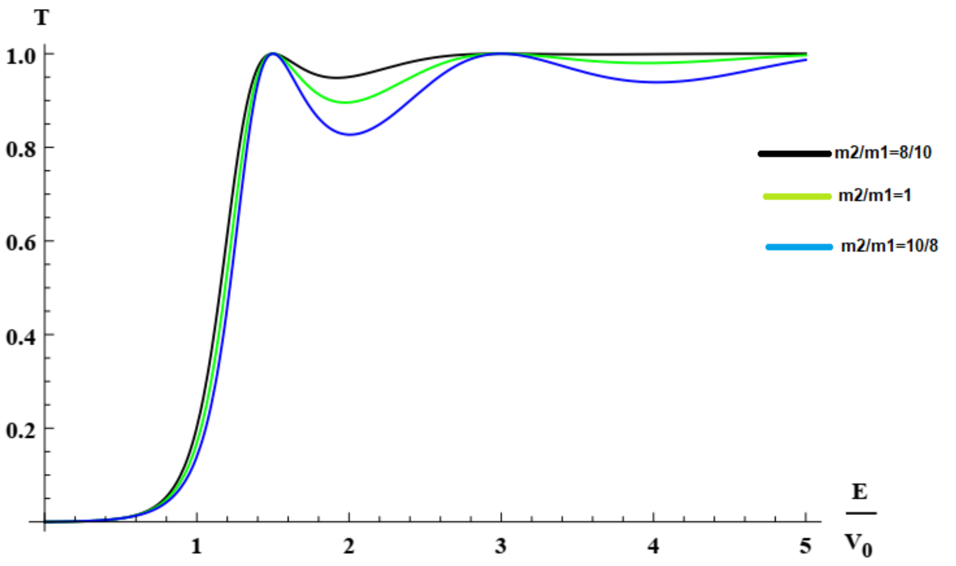
النتائج العددية والمناقشة

IV -1- مقدمة:

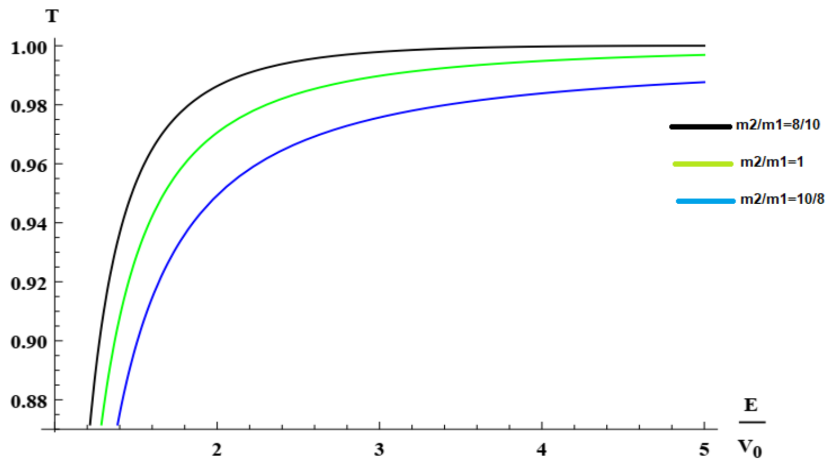
في ميكانيك الكم غير النسبية ،يتم إستخدام معامل النفوذ(العبور) لوصف سلوك الموجات الواقعة على الحاجز و يمثل معامل النفوذ التدفق الإحتمالي للموجة النافذة بالنسبة إلى الموجة الساقطة وكثيرا ما يستخدم هذا المعامل لوصف إحتمال وجود جسيمات نفق من خلال الحاجز.

من خلال تعريف معامل النفوذ سنقوم في هذا الفصل بتحليل ومناقشة منحنيات معاملات النفوذ بدلالة الطاقة وتغير كتلة عند قيم مختلفة.

IV-2- منحنيات معاملات النفوذ لحاجز كموني وكتلة مستطيلة :



الشكل(1-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقةعند كتل مختلفة $(E > V_0)$



الشكل(2-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(E < V_0)$

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = 1$:

لما $E > V_0$ ،من خلال الرسم البياني نلاحظ أن معامل النفوذ يزداد بشكل سريع بزيادة الطاقة ليصل إلى

أقصى قيمة T=1 عند $E = 1.5V_0$ مما يعني مرور الإلكترونات بنسبة (100%)ثم يتناقص بشكل تدريجي إلى أن يصل لأدنى قيمة T=0.9 عند $E = 2V_0$ ويزداد مرة أخرى إلى أن يصل أقصى قيمة T=0.9 عند $E = 3V_0$ ثم يثبت عند قيمة T=0.95 .

لما $E < V_0$ ، يزداد معامل النفوذ عند قيمة T=0.99 ، علما أن هناك زيادة في الطاقة

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = \frac{8}{10}$:

لما $E > V_0$ ،من خلال الرسم البياني نلاحظ أن معامل النفوذ يزداد بشكل سريع بزيادة الطاقة ليصل إلى أقصى قيمة T=1 عند $E = 1.5V_0$ ، ثم يتناقص بشكل تدريجي إلى أن يصل لأدنى قيمة T=0.95 عند $E = 2V_0$ ثم يثبت عند قيمة T=1 .

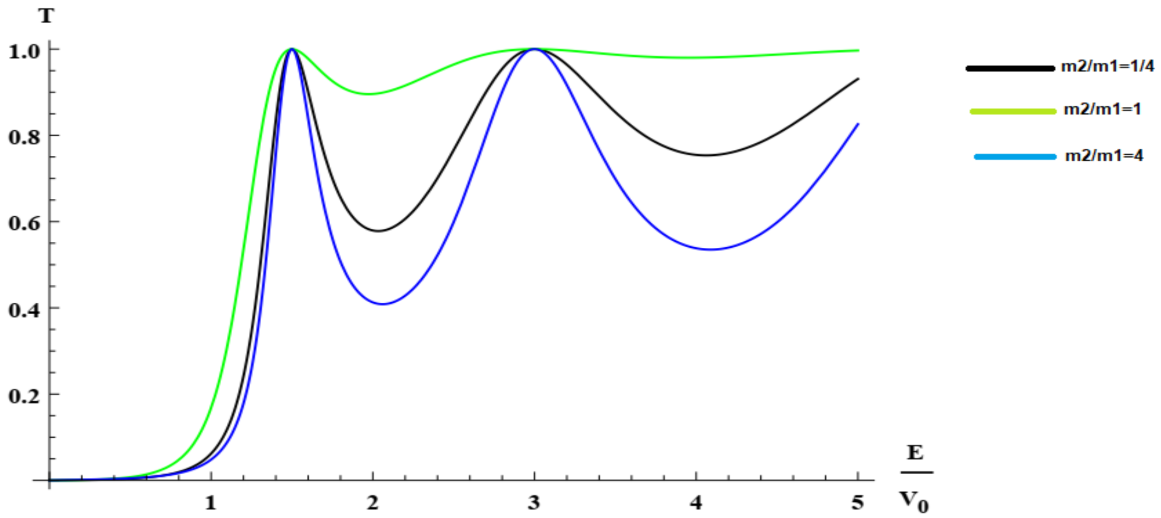
لما $E < V_0$ ، يزداد معامل النفوذ بشكل مقارب نحو الوحدة(T=1) ، علما أن هناك زيادة في الطاقة.

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = \frac{10}{8}$:

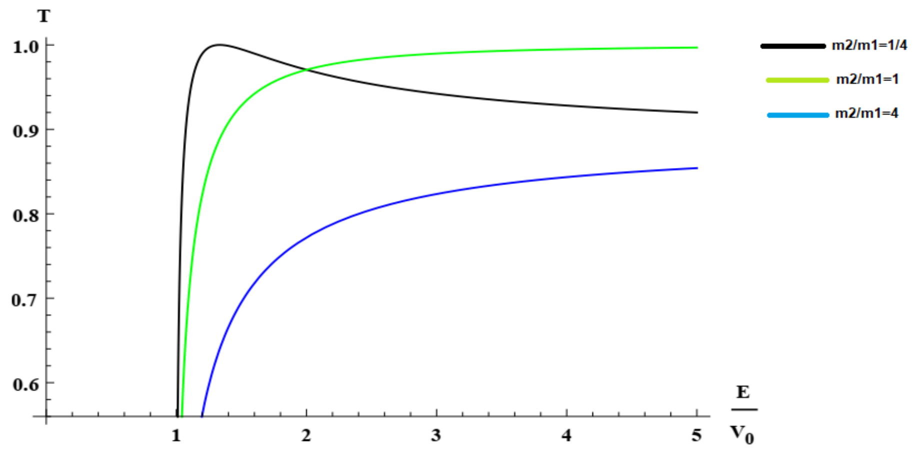
لما $E > V_0$ ،من خلال الرسم البياني نلاحظ أن معامل النفوذ يزداد بشكل سريع بزيادة الطاقة ليصل إلى أقصى قيمة T=1 عند $E = 1.5V_0$ مما يعني مرور الإلكترونات بنسبة (100%)ثم يتناقص بشكل تدريجي إلى أن يصل لأدنى قيمة T=0.85 عند $E = 2V_0$ ويزداد مرة أخرى الى أن يصل أقصى قيمة T=1 عند $E = 3V_0$ ثم تقريبا يثبت عند قيمة T=0.90 .

لما $E < V_0$ ، يزداد معامل النفوذ عند قيمة T=0.98، علما أن هناك زيادة في الطاقة.

من خلال الرسم البياني نستنتج كلما كان قيمة كتلة m_2 أكبر من m_1 زاد معامل النفوذ ومرور الإلكترونات ،ونلاحظ أيضا عندما تكون الطاقة E كبيرة جدا بالمقارنة مع إرتفاع الحاجز الكمون V_0، نجد أن $T \approx 1$.



الشكل(3-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\mathrm{E} > V_0)$



الشكل(4-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\mathrm{E} < V_0)$

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = 1$:

لما $\mathrm{E} > V_0$ ،معامل النفوذ يخضع لإهتزازات " مثبطة" سريعة جدا، ثم يثبت عند قيمة $\mathrm{E} = 3V_0$.

لما $\mathrm{E} < V_0$ ، يزداد معامل النفوذ بشكل مقارب نحو الوحدة(T=1) ، علما أن هناك زيادة في الطاقة.

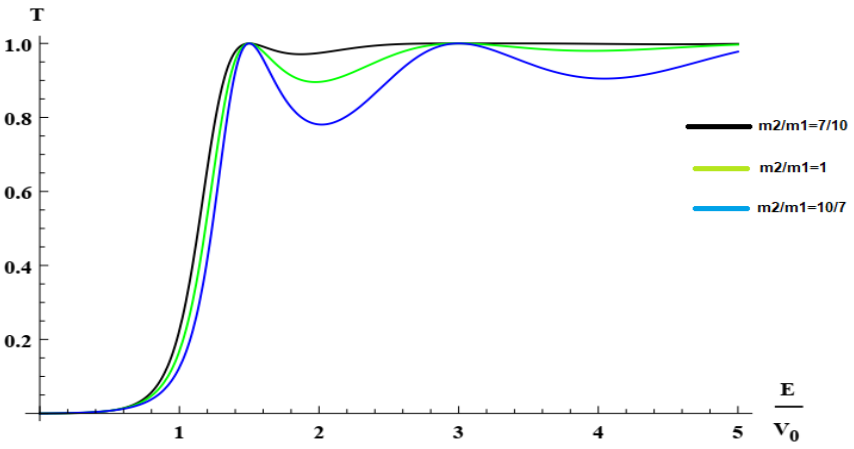
في حالة $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$ و $\frac{m_2}{m_1} = 4$:

لما $\mathrm{E} > V_0$ ، نلاحظ أن معامل النفوذ يهتز بين القيمة الأقصى والأدنى ،نلاحظ أيضا كلما زادت الطاقة زاد الحد الأدنى لمعامل النفوذ.

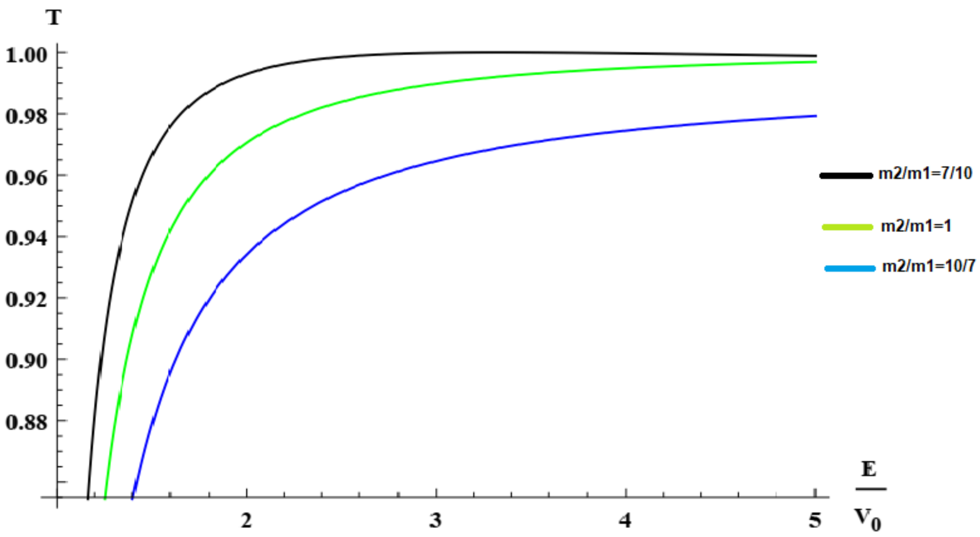
$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$:

لما $\text{E} < V_0$ ، يزداد معامل النفوذ بشكل سريع إلى أن يصل T=1 ثم يتناقص ببطء عند T=0.93

$\frac{m_2}{m_1} = 4$: يزداد معامل النقل ببطء حتى يصل إلى T=0.88



الشكل(5-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\text{E} > V_0)$

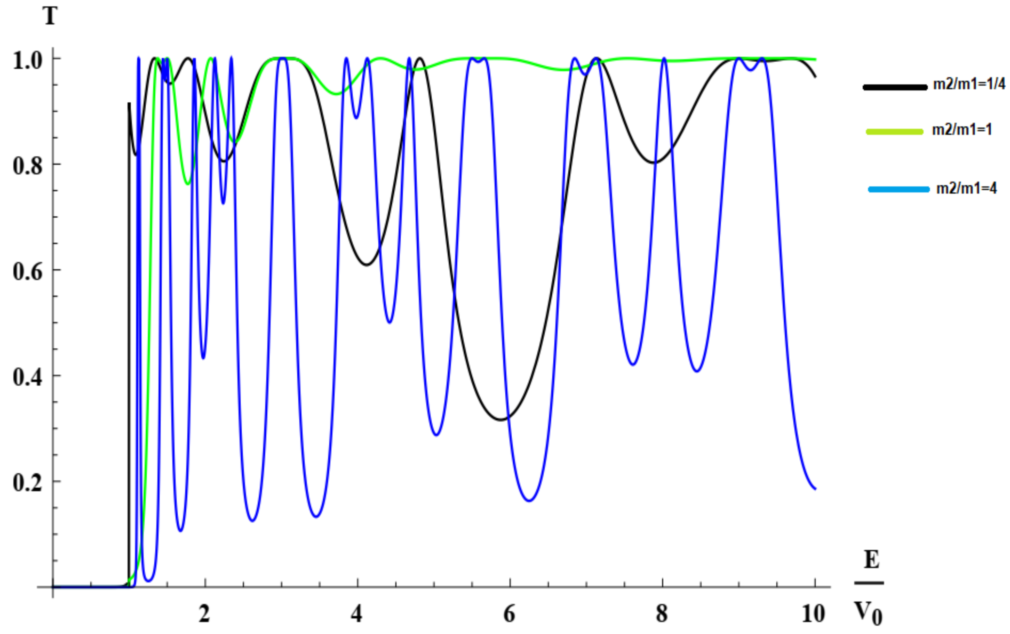


الشكل(6-IV): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\text{E} < V_0)$

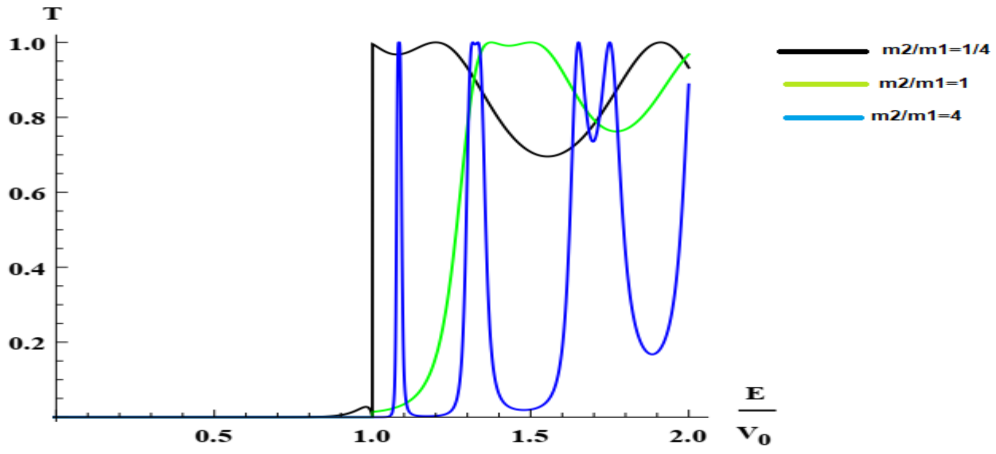
تفسير المنحنى:

بالمقارنة الشكل(1-IV) و الشكل(5-IV)، نلاحظ أن كلما كان تغير كتلة m2/m1 أصغر زاد إرتفاع معامل النفوذ (العبور).

IV-2- منحنيات معاملات النفوذ مع حاجز مستطيل مضاعف وكتلة متغيرة :



الشكل(IV-7): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\mathrm{E} > V_0)$



الشكل(IV-8): تغير معامل النفوذ بدلالة الطاقة عند كتل مختلفة $(\mathrm{E} < V_0)$

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = 1$:

لما $\mathrm{E} > V_0$ ،معامل النفوذ يخضع لإهتزازات 'مثبطة' سريعة جدا ،إلى أن يثبت عند قيمة $\mathrm{E} = 7.5V_0$.

لما $\mathrm{E} < V_0$ ،نلاحظ يزداد معامل النفوذ بشكل سريع إلى أن يصل إلى الوحدة ثم يتناقص إلى أن يصل قيمة أدنى T=0.8 عند $\mathrm{E} = 1.8V_0$ ثم يزداد بشكل بطئ.

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$:

لما $\mathrm{E} > V_0$ ، عند طاقات صغيرة ،يهتز معامل النفوذ بشكل سريع غير منتظم عند القيمة العظمى والسفلى.

لما $\mathrm{E} < V_0$ ،يهتز معامل النفوذ بشكل بطئ بين القيمة الأقصى والأدنى.

في حالة $\frac{m_2}{m_1} = 4$:

لما $\mathrm{E} > V_0$ ، يهتز معامل النفوذ بإنتظام بين الوحدة والقيمة الأدنى للطاقة ،في الطاقات العالية يقترب المعامل اكثر فأكثر من الوحدة .نلاحظ أيضا أن الحد الأدنى الخاص به يكون دائما أقل من الحالة السابقة.

لما $\mathrm{E} < V_0$ ،يهتز معامل النفوذ بشكل بطئ عند الوحدة ثم يتعرض لإهتزاز يعرقل إرتفاعه عند القيمة $\mathrm{E} = 1.2V_0$ و $\mathrm{E} = 1.5V_0$ ،وهذا ما يعرف بتأثير النفق.

خاتمة :

لقد إستعرضنا في هذه المذكرة دراسة الأنظمة الكمية مع كتلة فعالة متعلقة بالموضع (PDM)، والتي هيا موضوع الكثير من الأبحاث العلمية، هذه النماذج لها دور فعال في وصف الخصائص الإلكترونية لأنصاف النواقل ،والفيزياء النووية و المادة المكثفة .

كما قمنا بدراسة هاميلتوني معمم التي تكون فيه الكتلة متعلقة بالموضع ، وتطرقنا إلى إسهامات مختلف الباحثين في هذا المجال.

أما الجانب الأساسي الذي تطرقنا إليه هو حساب الدوال الموجية الناتجة عن معادلة شرودينغر المعممة من أجل أشكال مختلفة للكمونات والكتل التي تكون متعلقة بالموضع والتي منها نستخلص معاملات النفوذ (العبور) والإنعكاس وبعد ذلك ندرس معاملات النفوذ بدلالة الطاقة من أجل ،حاجز مستطيل وحاجز مستطيل مضاعف .

عند مناقشة منحنيات معاملات النفوذ بدلالة الطاقة، نستنتج أن كلما كانت الطاقة كبيرة مقارنة مع إرتفاع حاجز الكمون ، نلاحظ أن معامل النفوذ يزداد نحو الوحدة $T \approx 1$ وبالتالي مرور الإلكترونات بنسبة (100%) .

قائمة المصادر والمراجع

[1] R. Petersen, “Theoretical Investigation of the Resonant Tunneling Phenomena and its Applications in Resonant Tunneling Diodes”, Mini-project, 6th Semestre NanoPhysics Student, Aalborg University (2007).

[2] J. Smoliner , D. Rakoczy, M. Kast, “Hot electron spectroscopy and microscopy”, Phys, Vol 67, Issue 10, 1863, (2004).

[3] O. Pinaud,” Transient simulations of a resonant tunneling diode”, Journal of Applied Physics, vol. 92, Issue 4, 1987, (2002).

[4] P. Ring and P. Shuck, “The Nuclear Many-Body Problem” (Springer-Verlag, New York), (1980).

[5] A.C. Cheung, D.M. Rank, C.H. Townes, D.D. Thornton, and W.J. Welch,” Le Puits Double L’Exemple Standard de la Molécule d’Ammoniac”, Phys. Rev. Lett., Vol. 21 No25, (1968).

[6] D.J. Ben Danial, C.B. Duke, Space-Charge Effects on Electron Tunneling, Phys. Rev.152, 683–692 (1966).

[7] T. Gora, F. Williams, Theory of Electronic States and Transport in Graded MixedSemiconductors, Phys. Rev. 177, 1179–1182 (1969).

[8] O.Von Roos, Position-dependent effective masses in semiconductor theory, Phys. Rev. B 27, 7547–7552 (1983).

[9] O. Von Roos and H. Mavromatis , Phys. Rev. B 31, 2294 (1985).

[10] A. Arda and R. Sever,” Bound State Solutions of Schrödinger Equation for Generalized Morse Potential with Position-Dependent Mass”, Theor. Phy, Vol 56, Issue 1, 51, (2011).

[11] O. Von Roos, Phys. Rev. B 27,7547 (1983).

[12] D. de Souza, J. Phys. A : Maht. Theor. 39, 203 (2006).

[13] Q. G. Zhu and H. Kroemer , Phys, Rev, B 27, 3519 (1983).

[14] O. Mustafa, S. Habib Mazharimousavi, “Ordering ambiguity revisited via position dependent mass pseudo-momentum operators”, Int. J.Theory.Phys. 46, 1786, (2007).

[15] R. A.MorrowandK. R. Brownstein, Phys, Rev, B 30,678 (1984).

[16] R. A. Morrow, Phys. Rev. B 35, 8074 (1987).

[17] J. Thomsen, G. T. Einevoll and P. C. Hemmer, Phys-Rev. B 39, (1989).

[18] T. Li and K.J. Kuhn, Phys. Rev.B 47, 12760 (1993).

[19] O. Mustafa and S.H. Mazharimousavi, Int. J. Theor. Phys., 46, (2007).

[20] O. Mustafa and S. H. Mazharimousavi, Phys. Lett. A 373,325 (2009).

[21] T. Tanaka,J.Phys. A:Math.Theor. 39, 219 (2006).

[22] K. Bouferrache, " Calcul des Coefficients de Transmission pour une Barrière Trapézoïdale en Potentiel et en Masse pour L'hamiltonien Généralisé à des Masses Dépendant de la position", Mémoire de Magister, Université de Médéa, (2011).

[23] Ahlem. Zaoui, «La barrière rectangulaire de potentiel » mémoire master, université de m’sila, 2013.

[24] أرباب إبراهيم أرباب،إبراهيم بشرى تمساح ،مقدمة في ميكانيك الكم ،الدار النشر الدولي ،الرياض ،2006 .

[25] ا.سوكولوف ،ا.تيرنوف.ف.جوكوفسكى ،الميكانيكا الكوانتية ،حسن سلمان ،دار ميرموسكو،2010 .

[26] ذكرى. بوراس ،الحركية في الآبار الكوانتية لأنصاف النواقل، مذكرة ماستر ،جامعة العربي بن مهيدي ،2013 .

ملخص:

في هذا العمل سلطنا الضوء على دراسة هاميلتوني معمم من أجل كمون وكتلة متعلقة بالموضع (PDM)، و إسهامات مختلف الباحثين في هذا المجال. كما قدمنا حلول دقيقة لمعادلة شرودينغر ومعامل النفوذ (العبور) حيث تناولنا إختيار بن دانيال ديك ($\alpha = \gamma = 0$ و $\beta = 1$) من أجل حاجز كموني وحاجز مستطيل مضاعف وكتلة متغيرة .

الكلمات المفتاحية: هاميلتون ،الكتلة الفعالة ،معادلة شرودينغر المعممة ،معامل النفوذ

Abstract:

In this work we highlighted the study of a generalized Hamiltonian with the choice of Ben Daniel ($\alpha = \gamma = 0$ and $\beta = 1$) for a potential and position dependent mass (PDM), and his analytic solutions of Schrödinger equation associated. We calculated the transmission coefficien thereafter and its numerical solutions as a function of energy, for a potential barrier, double barrier and mass.

Keywords : Hamiltonian, the effective mass, the generalized Schrödinger equation, the transmission coefficients.

Résumé:

Dans ce travail nous avons mis en évidence l'étude d'un l'Hamiltonien généralisé avec le choix de Ben Daniel ($\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = 1$) pour un potentiel et masse dépendant de la position (PDM), et ses solutions analytiques de l'équation de Schrödinger associé. Nous avons calculé les coefficients de transmission par la suite et ses solutions numériques en fonction de l'énergie, pour une barrière de potentiel, double barrière en masse.

Mots clés : Hamiltonien, la masse effective, l'équation de Schrödinger généralisée, les coefficients de transmission.