



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière**: Mathématiques

**Option** : Equations aux dérivées partielles et applications

**Par**

**REZZIG Safia**

**Sujet**

**Résolution numérique des équations intégrales et  
intégréo-différentielles de Fredholm de deuxième espèce  
en utilisant le polynôme de Jacobi**

**Soutenu le 30/06/2019**

**Devant le jury :**

Dr. Arioua Yacin

MCA Univ de M'sila

Président

Dr. Merzougui Abdelkrim

MCA Univ de M'sila

Rapporteur

Dr. Bounab Noura

MCB Univ de M'sila

Examinateur

**Promotion : 2018 / 2019**

# *Remerciements*

Avant tout je remercie Allah, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour finir ce travail.

Je tiens à remercier, particulièrement le prof **.Merzougui Abdelkrim** de l'université de M'sila pour avoir accepté de diriger le travail de cette mémoire, pour sa gentillesse, sa bonne volonté, sa disponibilité et sa patience ainsi ces orientation et ces guidances.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Arioua Yacin**, d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à remercier madame **Bounab Noura**, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Zouareg Yahia**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et sa patience et ses conseils .

Enfin je tiens aussi à remercier mes camarades et mes amies qui m'ont soutenue moralement et à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail .

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues.

Merci ...

---

# Dédicaces

Au nom de Allah chémeut et le miséricordieux.

-Je dédie ce modeste travail.

- A Mon père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la

fierté, la reconnaissance et l'amour que

je te porte. que Dieu le tout puissant te procure, santé et

longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. j'espère rester à la hauteur

de tes espoirs que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

-A ma chère soeur

-A mes frères

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

Enfin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions sur les espaces fonctionnelles</b>	<b>2</b>
1.1 Espace Vectoriel Normé . . . . .	2
1.2 Espace complet . . . . .	3
1.3 Espace Préhilbertien . . . . .	4
1.4 Espace de Hilbert . . . . .	5
1.5 Espace de Banach . . . . .	5
1.6 Notions sur les opérateurs . . . . .	6
1.6.1 Opérateur Continu . . . . .	6
1.6.2 Opérateur inverse . . . . .	7
1.6.3 Opérateur compact . . . . .	7
1.6.4 Opérateurs Adjoints. . . . .	7
1.6.5 Opérateur integral . . . . .	8
<b>2 Equations intégrales et polynômes de Jacobi</b>	<b>9</b>
2.1 Classification des équations intégrales . . . . .	9
2.1.1 <b>Equations intégrales linéaires</b> . . . . .	9
2.1.2 <b>Equations integrales de fredholm</b> . . . . .	10
2.1.3 <b>Equations intégrales de Volterra</b> . . . . .	11

2.1.4	<b>Equations intégrale singulière</b> . . . . .	12
2.2	L'existence et l'unicité de la solution de l'équation integrale . . . . .	12
2.3	Résolution numérique des équations intégrales . . . . .	13
2.3.1	<b>méthode de projection</b> . . . . .	13
2.3.2	Méthode de collocation . . . . .	14
2.3.3	Méthode de Galerkin . . . . .	15
2.3.4	Méthode de Petrov-Galerkin . . . . .	16
2.4	Polynôme de Jacobi . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Analyse numérique pour les équations intégrales</b>	<b>22</b>
3.1	Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation . . . . .	22
3.2	Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin	31
3.3	Discrétisation de l'équation intégro-différentielle . . . . .	44
3.3.1	Résolution de l'équation intégro-différentielle de Fredholm par la méthode de Galerkin . . . . .	45
3.3.2	Résolution de l'équation intégro-différentielle de Fredholm par la méthode de collocation . . . . .	55
	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>

# Liste des Tableaux

Tableau(1) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 4$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 23

Tableau(2) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 4$  et  $\beta = 1$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 25

Tableau(3) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 27

Tableau(4) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 29

Tableau(5) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{-1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 32

Tableau(6) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 34

Tableau(7) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 36

Tableau(8) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 3$  et  $\beta = 4$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 38

Tableau(9) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 4$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 40

Tableau(10) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 3$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 42

Tableau(11) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 5$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 47

Tableau(12) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 49

Tableau(13) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 3$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 51

Tableau(14) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 53

Tableau(15) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 57

Tableau(16) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 59

# Liste des Figures

Figure(1) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 4$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 24

Figure(2) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 4$  et  $\beta = 1$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 26

Figure(3) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 28

Figure(4) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 30

Figure(5) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{-1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 33

Figure(6) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 35

Figure(7) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 37

Figure(8) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 3$  et  $\beta = 4$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 40

Figure(9) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = \beta = 4$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 41

Figure(10) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIF pour  $\alpha = 3$  et  $\beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 43

Figure(11) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 5$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 48

Figure(12) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 50

Figure(13) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 3$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 52

Figure(14) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 54

Figure(15) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 0$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 58

Figure(16) : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de L'EIDF pour  $\alpha = \beta = 2$  et pour différentes valeurs de  $n$  page 60

# Notations

- $H$  : Espace de hilbert.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : Produit scalaire.
- $\|\cdot\|$  : La norme.
- $\mathbb{R}$  : Ensemble des réels.
- $\mathbb{C}$  : Ensemble des Complexe .
- $P_n^{(\alpha, \beta)}$  : Polynôme de Jacobi.
- $P_n$  : Polynôme orthogonaux.
- $\omega(x)$  : Fonction poids.
- $K(x, t)$  : Le noyau de l'équation intégrale.
- $f(x)$  : Fonction donnée.
- $c_j$  : Coefficients de Polynôme de Jacobi.
- $\lambda$  : Un paramètre non nul, réel ou complexe.
- $\Gamma$ : Fonction gamma.
- $\mathbb{R}_n[x]$  : L'espace des polynômes.

# Introduction

Les équations intégrales sont l'une des principaux outils dans divers domaines de la mathématique appliquée, de la physique et de l'ingénierie.

Les équations intégrales de Fredholm sont l'une des équations intégrales les plus importantes, comme pour les équations différentielles ordinaires ou les équations aux dérivées partielles. Il y a peu de analytiques méthode connue pour la résolution des équations intégrales.

Il arrive très souvent, même celles qui présentent des formes apparemment simples ne se laissent pas résoudre avec ces méthodes dites exactes.

Dans ce mémoire, nous présentons deux méthodes numériques dites méthode de projections pour la résolution des équations intégrales et integro-différentielles basé sur la modification de la bases de l'espace des polynômes, la base des polynômes de Jacobi et celle utilisée dans ce mémoire. Les polynômes de Jacobi ont de nombreuses propriétés utiles, parmi ces propriétés .Ils regroupent presque tous les polynômes (Legendre Gegenbauer ,Chebychev de première, deuxième et troisième espèce) .

L'ensemble des polynômes Jacobi de degré  $n$  sur l'intervalle  $[a, b]$  constituent une base complète pour  $(n + 1)$  polynômes continus.

Nous présentons la solution aux équations intégrales et integro-différentielle de Fredholm comme des combinaisons linéaires de ces polynômes  $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  et les coefficients  $c_i$  seront déterminés à l'aide des méthodes de collocation et Galerkin.

# Chapitre 1

## Notions sur les espaces fonctionnelles

### 1.1 Espace Vectoriel Normé

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.1** On appelle une norme sur  $E$  une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \|x\|$$

telle que

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (**homogénéité**)
3.  $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (**inégalité triangulaire**).

**Exemple 1.1.1** 1. Sur l'espace  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir trois normes:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{norme euclidienne}) \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

2. Soit  $a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ( $[a, b]; \mathbb{R}$ ) l'ensemble des applications continues de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ .

On définit les normes:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

---

**Définition 1.1.2** On appelle espace vectoriel normé (e.v.n) le couple  $(E, \|\cdot\|)$  formé d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{k}$ , et une norme définie sur  $E$ .

**Définition 1.1.3** Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace métrique dont la distance  $d$  est définie par:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

## 1.2 Espace complet

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

### Suite de Cauchy

Une suite  $(x_n)$  de  $E$  est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ telle que } n, m \geq n_0.$$

**Exemple 1.2.1** Dans  $E = ]-1, +1[$ , la suite  $\{1 - \frac{1}{n}\}_n$  est de Cauchy mais qui converge vers 1, mais  $1 \notin E$ .

**Corollaire 1.2.1** Toute espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.

**Définition 1.2.1** Soit  $(E, d)$  est une espace métrique, on dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de cauchy est convergente.

**Corollaire 1.2.2** L'espace  $\mathbb{R}$  muni de la norme usuelle est complet.

## 1.3 Espace Préhilbertien

**Définition 1.3.1** *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les propriétés suivantes: Pour tous  $u, v, w \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , on a:*

1.  $\varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \varphi(u, w) + \mu \varphi(v, w)$
2.  $\varphi(u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda} \varphi(u, v) + \bar{\mu} \varphi(u, w)$
3.  $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}$
4.  $\varphi(u, u) \geq 0$
5.  $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

**Exemple 1.3.1** *sur les espaces préhilbertien.*

- $\mathbb{R}^d$  muni du produit scalaire canonique

$$u \cdot v = \sum_{1 \leq j \leq d} u_j \cdot v_j \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$$

Est un espace préhilbertien (réel) .

- $\mathbb{C}^d$  muni du produit scalaire canonique

$$\langle u | v \rangle = \sum_{1 \leq j \leq d} u_j \cdot \bar{v}_j$$

- Soit  $C[0, 1]$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle  $[0, 1]$  à valeurs

dans  $\mathbb{C}$  . On pose  $\varphi(u, v) = \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} dt$  .  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $C[0, 1]$

## 1.4 Espace de Hilbert

**Définition 1.4.1** *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  complet pour la norme induite du produit scalaire (i.e.  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  pour  $u \in E$ )*

**Exemple 1.4.1** *sur les espaces de hilbert.*

- $\mathbb{C}^n$  (ou  $\mathbb{R}$ ) pour le produit scalaire

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C} \text{ (ou } \mathbb{R})$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C} \text{ (ou } \mathbb{R})$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} u_j \cdot \overline{v_j}$$

est un **espace de Hilbert**

- $l^2(\mathbb{C})$  est un **espace de Hilbert**

**Corollaire 1.4.1** *Toute espace préhilbertien de dimension finie est un **espace de Hilbert***

## 1.5 Espace de Banach

**Définition 1.5.1** *On appelle **espace de Banach** un e.v.n complet.*

**Définition 1.5.2** *Soit  $E$  un e.v.n ; L'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$  est un **espace de Banach** .*

**Définition 1.5.3** *Soient  $E$  un **espace de Banach** et  $F \subset E$ , Alors  $F$  est **complet** si et seulement si  $F$  est **fermé** dans  $E$ .*

$$F \text{ complet} \Leftrightarrow F \text{ fermé}$$

## 1.6 Notions sur les opérateurs

### 1.6.1 Opérateur Continu

**Définition 1.6.1** (*Opérateurs linéaires*) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques. On appelle opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$  une application.

$$y = Ax \quad (x \in E, \quad y \in F)$$

Qui vérifie la Condition

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2.$$

**Remarque 1.6.1** L'opérateur  $A$  est dit continu, s'il est continu en tout point  $x \in E$ .

**Définition 1.6.2** (*opérateurs bornés*) L'opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est bornée, s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in E$ .

$$\|Ax\| \leq C \|x\|$$

Le plus petit des nombres  $C$  vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur  $A$  et se note  $\|A\|$ .

**Définition 1.6.3** pour tout opérateur borné  $A$  d'un espace normé dans un espace normé on a:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

## 1.6.2 Opérateur inverse

**Définition 1.6.4** Soient  $A$  un opérateur de  $E$  dans  $F$ ,  $D_A$  son domaine de définition et  $R_A$  le domaine de ses valeurs .

L'opérateur  $A$  est dite inversible, si pour tout  $y \in R_A$  l'équation :

$$Ax = y$$

une et une seule solution.

Si  $A$  est inversible, à chaque  $y \in R_A$  on peut faire correspondre un élément et un seul  $x \in D_A$  à savoir la solution de l'équation  $Ax = y$  . L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de  $A$  et se note  $A^{-1}$ .

**Proposition 1.6.1** L'opérateur  $A^{-1}$ , inverse d'un opérateur linéaire  $A$  est aussi linéaire.

## 1.6.3 Opérateur compact

**Définition 1.6.5** Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est compact si et seulement si , pour tout suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $E$  , on peut extraire de la suite  $(A\varphi_n)$  de  $F$  une sous suite convergente .i.e.,si toute suite de l'ensemble  $\{A\varphi , \varphi \in E , \|\varphi\| \leq 1\}$  contient une sous suite convergente.

## 1.6.4 Opérateurs Adjoint.

**Définition 1.6.6** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $E$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $F$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $F$  dans  $E$  est dite opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in E$  et  $\Psi \in F$

$$\langle A\varphi, \Psi \rangle_F = \langle \varphi, A^*\Psi \rangle_E$$

### 1.6.5 Opérateur integral

**Définition 1.6.7** *On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire  $A$  défini sur un espace normé  $E$  à valeurs dans un espace normé  $F$  donné sous la forme :*

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in \Omega.$$

Où  $k(x, t)$  étant appelé noyau de l'opérateur.

# Chapitre 2

## Equations intégrales et polynômes de Jacobi

### Introduction

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans la quelle la fonction inconnue apparaît sous le signe intégral. Il existe un lieu étroit entre équations différentielles et équations intégrales.

### 2.1 Classification des équations intégrales

#### 2.1.1 Equations intégrales linéaires

**Définition 2.1.1** *On appelle équation intégrale une équation ou la fonction inconnue  $u$  apparait le signe  $\int$  et prend la forme suivante:*

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t) u(x) dt = f(x)$$

*avec  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont deux fonctions connues,  $\lambda$  un paramètre numérique,  $\Omega$  est un ensemble borné et fermé d'un espace Euclidien, et  $k$  est le noyau de*

*l'équation intégrale.*

- Si  $f(x) \neq 0$  l'équation (2.1.1) est dite équation intégrale non homogène.
- Si  $f(x) = 0$  l'équation (2.1.1) est dite équation intégrale homogène.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $u$  qui satisfait l'équation(2.1.1) et peut être écrite sous forme:

$$u - Au = f \tag{2.1.1}$$

avec  $A = \int_{\Omega} k(x, t) dt.$

### 2.1.2 Equations integrales de fredholm

**Définition 2.1.2** On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène une équation de la forme:

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad x \in [a, b] \tag{2.1.2}$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue et  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation intégrale (2.1.3) s'écrit

$$\lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = u(x) \quad x \in [a, b]$$

Est appelée équation intégral homogène de Fredholm de seconde espèce.

- Une équation de la forme

$$-\lambda \int_a^b k(x, t)u(t) = f(x) \quad x \in [a, b]$$

Est appelée équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de première espèce.

- Si  $f(x) = 0$  cette équation est appelée équation intégral homogène de Fredholm de première espèce.

### 2.1.3 Equations intégrales de Volterra

**Remarque 2.1.1** *L'équation intégrale de volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm.*

**Définition 2.1.3** *On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme:*

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x). \quad (2.1.3)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue et  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données et  $\lambda$  un paramètre réel.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation (2.1.4) s'écrit :

$$\lambda \int_a^x k(x, t)u(x) = u(x)$$

Elle est appelée équation intégrale homogène de Volterra de seconde espèce.

- Une équation de la forme

$$-\lambda \int_a^x k(x, t)u(x)dt = f(x)$$

Est appelée équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de première espèce.

- Si  $f(x) = 0$  cette équation est appelée équation intégral homogène de Volterra de première espèce.

### 2.1.4 Equations intégrale singulière

**Définition 2.1.4** On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégrale. Par exemple si le noyau  $k(x, t)$  de l'équation intégrale de Fredholm est de la forme :

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Avec  $M(x, t)$  une fonction bornée sur  $[a, b] \times [a, b]$  ou encore un noyau  $k(x, t)$  logarithmique

$$k(x, t) = M(x, t) \ln |x - t|$$

- Si  $\alpha = 1$  dans l'exemple précédent alors  $k(x, t)$  est appelée **noyau de Cauchy**.

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|}$$

## 2.2 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale

**Théorème 2.2.1** Soit l'équation suivante:

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x)$$

, admet une solution unique  $u \in L^2([a, b])$  avec le noyau  $k$  est continu sur l'intervalle  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $f \in L^2([a, b])$  et  $|\lambda| B < 1$ , avec  $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt}$ .

**Preuve.** voir [5] ■

## 2.3 Résolution numérique des équations intégrales

### 2.3.1 méthode de projection

**Définition 2.3.1** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $F$  un sous espace de  $E$ . Un opérateur borné  $P : E \rightarrow F$ , est appelé projecteur s'il vérifie :

$$\forall u \in E, Pu = u$$

On étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t) u(x) dt = f(x) \quad (2.3.1)$$

où  $\Omega$  est un fermé et borné et  $E$  un espace complet de fonction telle que  $E = C(\Omega)$  ou bien  $E = L^2(\Omega)$  presque partout. On choisit une suite finie d'approximation de sous espaces  $V_n$ , telle que  $V_n \subset E$ ,  $n \geq 1$  et  $V_n$  de dimension  $k_n$ . Soit une base  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k_n}\}$  de  $V_n$  le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions  $u_n$  telle que

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j \Phi_j(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (2.3.2)$$

On introduit le résidu  $r_n(x)$  pour approcher la solution de l'équation intégrale

$$r_n(x) = u_n(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t) u_n(t) dt - f(x) \quad (2.3.3)$$

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \Phi_j(x_i) - \lambda \int_{\Omega} k(x_i,t) \Phi_j(t) dt \right\} - f(x) \quad (2.3.4)$$

dans ce cas  $u_n$  est une approximation de la solution  $u$  de l'équation intégrale(2.3.4)

on note

$$u \approx u_n$$

On remarque aussi que l'équation intégrale(2.3.4) qui peut être écrite sous la forme

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j (I - A) \Phi_j = f. \tag{2.3.5}$$

dans ce cas le résidu  $r_n(x)$  défini par

$$r_n = \sum_{j=1}^{k_n} c_j (I - A) \Phi_j - f \tag{2.3.6}$$

Les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$  doivent être choisis de telle sorte que

$$r_n(x) \rightarrow 0$$

### 2.3.2 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'opérateur

$$u - Au = f \tag{2.3.7}$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (2.3.7) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points, appelés points de collocation. En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces  $V_n \subset E$ ,  $n \geq 1$  de dimension finie, généralement des sous espaces de  $E = C(\Omega)$  ou bien  $E = L^2(\Omega)$ .

Soit une base  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k_n}\}$  de  $V_n$  le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonctions  $u_n$  telle que

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j \psi_j(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{2.3.8}$$

Pour déterminer les coefficients  $(c_j)$ , on substituant cette fonction dans l'équation (2.7.3)

On introduit le résidu  $r_n(x)$  pour approcher la solution de l'équation intégrale

$$r_n(x) = u_n(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t)u_n(t) dt - f(x) \quad (2.3.9)$$

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \psi_j(x_i) - \lambda \int_{\Omega} k(x_i,t)\psi_j(t) dt \right\} - f(x) \quad (2.3.10)$$

Soit nul sur un système de noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_{k_n} \in E$  ( i.e, aux points de collocation )

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \psi_j(x_i) - \lambda \int_{\Omega} k(x_i,t)\psi_j(t) dt \right\} = f(x_i) \quad i = 1 \dots k_n. \quad (2.3.11)$$

de la forme  $\Phi_n X = f_n$  . Ce système admet une solution unique si

$$\det [\Phi_n] \neq 0$$

### 2.3.3 Méthode de Galerkin

La méthode de Galarkin est semblable à la précédente, sauf qu'elle demande des conditions optimales pour les fonctions  $u_n \in V_n$  . Plutôt que rechercher l'orthogonalité avec l'espace transformé  $\widehat{V}_n$ , on cherche simplement l'orthogonalité avec

l'espace  $V_n$ . Si on note  $P_n$  l'opérateur de projection sur  $V_n$ , ces conditions se traduisent par la projection de l'équation(2.3.7)

$$u_n - P_n A u_n = P_n f \quad (2.3.12)$$

On peut expliciter les équations obtenues sur notre base  $v_i$  de  $V_n$  :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \hat{u}_n - f, u_i \rangle &= 0. \\ \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle r_n(x), v_i \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

En recherchant  $u_n$  par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire comme en (2.3.11), ces équations se traduisent par le système:

$$\begin{bmatrix} \langle \hat{u}_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{u}_n, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \hat{u}_1, u_n \rangle & \cdots & \langle \hat{u}_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

### 2.3.4 Méthode de Petrov-Galerkin

Il s'agit d'une méthode essentiellement Hilbertienne, c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un sous espace de dimension finie. Pour ce faire, soit  $E$  un espace d'Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on se donne une suite de sous espace  $V_n \subset E$  de dimension finie. Soit  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  une base orthonormal de  $V_n$ , on cherche une fonction  $u_n \in V_n$  de la forme (2.3.3) qui approche de la solution exacte du problème original. Donc pour le problème (2.3.6), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n = \sum_{j=1}^{k_n} c_j (I - A) \Phi_j - f$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante:

$$\langle r_n, u_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k_n} c_j (I - A) \Phi_j(x_i) - f, u_i(x_i) \right\rangle = 0. \quad i = 1, \dots, k_n \quad (2.3.14)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k_n} c_j (I - A) u_j, u_i \right\rangle - \langle f, u_i \rangle = 0. \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (2.3.15)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{k_n} (c_j \langle u_j, u_i \rangle - \langle Au_j, u_j \rangle) = \langle f, u_i \rangle. \quad i = 1, \dots, k_n \quad (2.3.16)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire

$$c_j - \sum_{j=1}^{k_n} c_j \langle Au_j, u_i \rangle = \langle f, u_i \rangle \quad i = 1, \dots, k_n \quad (2.3.17)$$

## 2.4 Polynôme de Jacobi

Les Polynôme constitues une famille de fonctions tout à fait remarquable en mathématique ils sont aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique notamment dans l'évaluation a l'approximation des fonctions dans les problème d'interpolation et d'extrapolation, dans la résolution des équations intégrales ou équations différentielle . . . etc.

**Définition 2.4.1** *On dit que deux vecteur  $x$  et  $y$  d'un espace euclidien  $E$  sont orthogonaux si*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

**Définition 2.4.2** *Deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  dans  $L^2([a, b])$  sont dites orthogonaux sur l'intervalle  $[a, b]$  par rapport à une donnée continue et fonction positive de poids  $\omega(x)$  si*

$$\int_a^b \omega(x) f(x)g(x)dx = 0.$$

**Définition 2.4.3** *On dit que la famille des polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille des polynômes orthogonaux si:*

- le degré de  $P_i$  est  $i$  pour tout entier  $i$  .
- $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = 0$ .

**Définition 2.4.4** *Soit  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux alors*

- $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n([X])$  pour tout entier  $n$  .

- $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq p \Rightarrow P_n \in (\mathbb{R}_p[X])^\perp.$

**Exemple 2.4.1** *Trois exemples de produit scalaire pour deux polynômes  $P$  et  $Q$*

$$1. \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

$$2. \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$$

$$3. \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$$

**Définition 2.4.5 (Polynôme de Jacobi)**

Le polynôme de Jacobi de degré  $n$ , notés  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  ou  $P_n(x)$ , est le cas le plus générale des polynômes orthogonaux classiques défini dans domaine  $-1 \leq x \leq 1$ .

Tous les autre polynômes orthogonaux classiques de ce domaine sont des cas particuliers.

Le polynôme de Jacobi de degré  $n$  est donné par la formule de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} \quad \alpha, \beta > -1.$$

Cas particuliers, si

1.  $\alpha = \beta = 0$ , on trouve le polynôme de Legendre

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$$

2.  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme deTchebychev de première espèce

$$T_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$$

3.  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme deTchebychev de deuxième espèce

$$U_n(x) = \frac{(n+1)! \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$$

4.  $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de troisième espèce,

$$V_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$$

5.  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ , on trouve le polynôme de Tchebychev de quatrième espèce,

$$W_n(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$$

6.  $\alpha = \beta$ , on trouve le polynôme de Gegenbauer.

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha + n + \frac{1}{2})} P_n^{(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2})}(x)$$

**Définition 2.4.6** le polynôme de Jacobi result de la formule de Leibniz's et peut être défini par :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k! (n-k)!} \times \frac{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n}{(\alpha+1)_{n-k} (\beta+1)_k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k$$

### Relation de Récurrence

Notons ici la relation de récurrence pour le polynôme de Jacobi . Cette relation peut être déduite de la relation de récurrence générale pour  $\alpha, \beta > -1$ .

$$a_n P_{n+1}(x) = (b_n + x c_n) P_n(x) - d_n P_{n-1}(x)$$

initialisée par

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{(\alpha - \beta)}{2} + \left(1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) x.$$

avec les coefficients suivante

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(n+1)(2n+\alpha+\beta)}{(n+\alpha+\beta+1)} \\ b_n &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(n+\alpha+\beta)} \\ c_n &= (2n+\alpha+\beta+2) \\ d_n &= \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.2** Les premiers polynômes sont pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ .

- $P_0(x) = 1.$
- $P_1(x) = \frac{(3x+1)}{2}.$
- $P_2(x) = \frac{(5x^2+2x-1)}{2}.$
- $P_3(x) = \frac{35}{8}x^3 + 15x^2 - \frac{15}{8}x - \frac{3}{8}.$
- $P_4(x) = \frac{63}{8}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}.$
- $P_5(x) = \frac{231}{16}x^5 + \frac{105}{8}x^3 - \frac{35}{3}x^2 + \frac{35}{16}x + \frac{5}{16}.$

La norme du polynôme de Jacobi est:

$$\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

La valeur maximum de polynôme de Jacobi est:

$$\sup_{|x|\leq 1} |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = \max \left\{ \frac{(\alpha+1)_n}{n!}, \frac{(\beta+1)_n}{n!} \right\} \text{ si } \alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}.$$

La dérivée du polynôme de Jacobi satisfait la relation suivante :

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

**Propriétés (du polynôme de Jacobi)**

•

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

• Le polynôme de Jacobi vérifie l'équation différentielle suivante:

$$(1-x^2)[P_n^{(\alpha,\beta)}]'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x][P_n^{(\alpha,\beta)}]' + n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)} = 0$$

•

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \\ P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) &= (-1)^n \left( \frac{(\beta+1)_n}{n!} \right) \end{aligned}$$

### Orthogonalité d'un polynômes de Jacobi

Les polynômes  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  avec  $\alpha, \beta > -1$  sont orthogonaux par rapport à la fonction poids  $\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$

**Preuve.** voir [2] ■

# Chapitre 3

## Analyse numérique pour les équations intégrales et intégrro-differentielle de Fredholm

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales et intégrro-differentielle de Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce par la methode de Galerkin et de collocation via les polynômes de Jacobi. Donc l'objectif est de trouver une solution approchée de la solution exacte.

### 3.1 Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

Le principe de la méthode de collocation consiste à estimer la fonction inconnue  $u(x)$  comme suit :

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (3.1.1)$$

Où  $P_j$  sont les polynômes de Jacobi et  $c_j, j = 0, 1, \dots, k_n$  sont des paramètres inconnus, à déterminer. La méthode consiste à remplacer (3.1.1) dans l'équation (2.3.1) on obtient :

$$\sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) - \lambda \int_a^b \left[ k(x,t) \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(t) dt \right] = f(x). \quad x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ P_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(t) dt \right] = f(x_i). \quad (3.1.2)$$

(3.1.2) représente un système de  $(k_n + 1)$  équations linéaires à  $(k_n + 1)$  inconnus  $(c_j \quad i = 0, 1, \dots, k_n)$  et qui peut être écrit sous matricielle :

$$A_{j,i} X_j = b_i \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

où

$$A_{j,i} = P_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(t) dt. \quad i, j = 0, 1, \dots, k_n$$

et

$$b_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

$$X_j^t = c_j \quad j = 0, 1, \dots, k_n$$

**Exemple 3.1.1** Soit l'équation intégrale de Fredholm:

$$u(x) - \int_0^1 2e^x e^t u(t) dt = \frac{e^{x+2}}{e^2 - 2} - \frac{2e^x}{e^2 - 2}. \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = \frac{e^x}{2-e^2}$ .

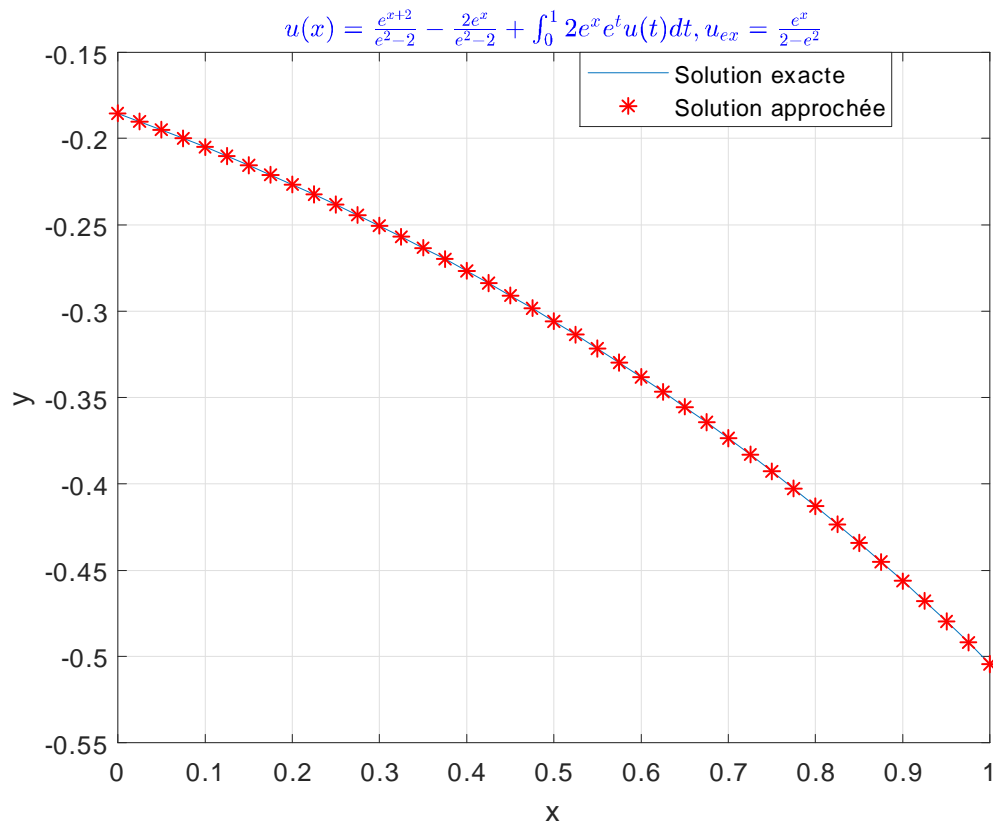
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires (3.1.2) .

- Pour  $\alpha = 4, \beta = 2$  .

3.1. Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	-0.185561	$7.763526e - 03$	$2.034276e - 04$	$2.748222e - 07$	$1.870416e - 07$
2	0.1	-0.205077	$8.567399e - 03$	$2.248222e - 04$	$3.124375e - 07$	$1.926495e - 07$
3	0.2	-0.226645	$9.301084e - 03$	$2.483575e - 04$	$3.481402e - 07$	$2.391362e - 07$
4	0.3	-0.250481	$9.748721e - 03$	$2.730227e - 04$	$3.864726e - 07$	$2.767854e - 07$
5	0.4	-0.276825	$9.671747e - 03$	$2.946360e - 04$	$4.278452e - 07$	$2.987112e - 07$
6	0.5	-0.305939	$8.806507e - 03$	$3.034565e - 04$	$4.679615e - 07$	$3.207234e - 07$
7	0.6	-0.338115	$6.861621e - 03$	$2.815455e - 04$	$4.903848e - 07$	$3.576175e - 07$
8	0.7	-0.373674	$3.515062e - 03$	$1.998504e - 04$	$4.457150e - 07$	$3.939867e - 07$
9	0.8	-0.412974	$1.589066e - 03$	$1.498178e - 05$	$2.080639e - 07$	$3.446476e - 07$
10	0.9	-0.456407	$8.844087e - 03$	$3.343488e - 04$	$5.035490e - 07$	$2.953714e - 09$
11	1.0	-0.504408	$1.868469e - 02$	$9.312650e - 04$	$2.254653e - 06$	$1.074384e - 06$

Tab(1): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



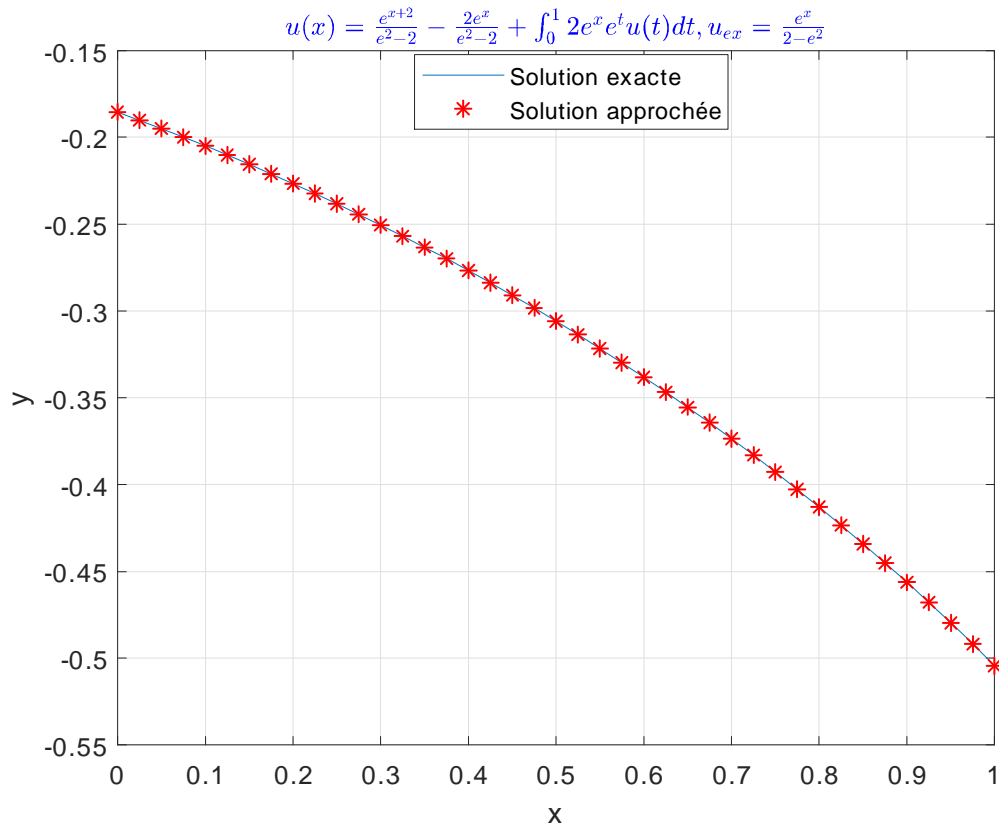
Fig(1): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 20$ .

- pour  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ .

3.1. Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	-0.185561	$7.763526e - 03$	$2.034276e - 04$	$2.474214e - 07$	$1.934589e - 07$
2	0.1	-0.205077	$8.567399e - 03$	$2.248222e - 04$	$2.782092e - 07$	$2.629404e - 07$
3	0.2	-0.226645	$9.301084e - 03$	$2.483575e - 04$	$3.115478e - 07$	$2.912489e - 07$
4	0.3	-0.250481	$9.748721e - 03$	$2.730227e - 04$	$3.485622e - 07$	$3.043358e - 07$
5	0.4	-0.276825	$9.671747e - 03$	$2.946360e - 04$	$3.898362e - 07$	$3.221455e - 07$
6	0.5	-0.305939	$8.806507e - 03$	$3.034565e - 04$	$4.318846e - 07$	$3.529917e - 07$
7	0.6	-0.338115	$6.861621e - 03$	$2.815455e - 04$	$4.576870e - 07$	$3.856049e - 07$
8	0.7	-0.373674	$3.515062e - 03$	$1.998504e - 04$	$4.145976e - 07$	$3.780798e - 07$
9	0.8	-0.412974	$1.589066e - 03$	$1.498177e - 05$	$1.701644e - 07$	$2.414024e - 07$
10	0.9	-0.456407	$8.844087e - 03$	$3.343488e - 04$	$5.666739e - 07$	$1.860239e - 07$
11	1.0	-0.504408	$1.868469e - 02$	$9.312650e - 04$	$2.374943e - 06$	$1.177368e - 06$

Tab(2): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(2): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

**Exemple 3.1.2** Soit l'équation intégrale de Fredholm:

$$u(x) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t)u(t)dt = \sin x - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \pi \sin x \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = \sin(x)$

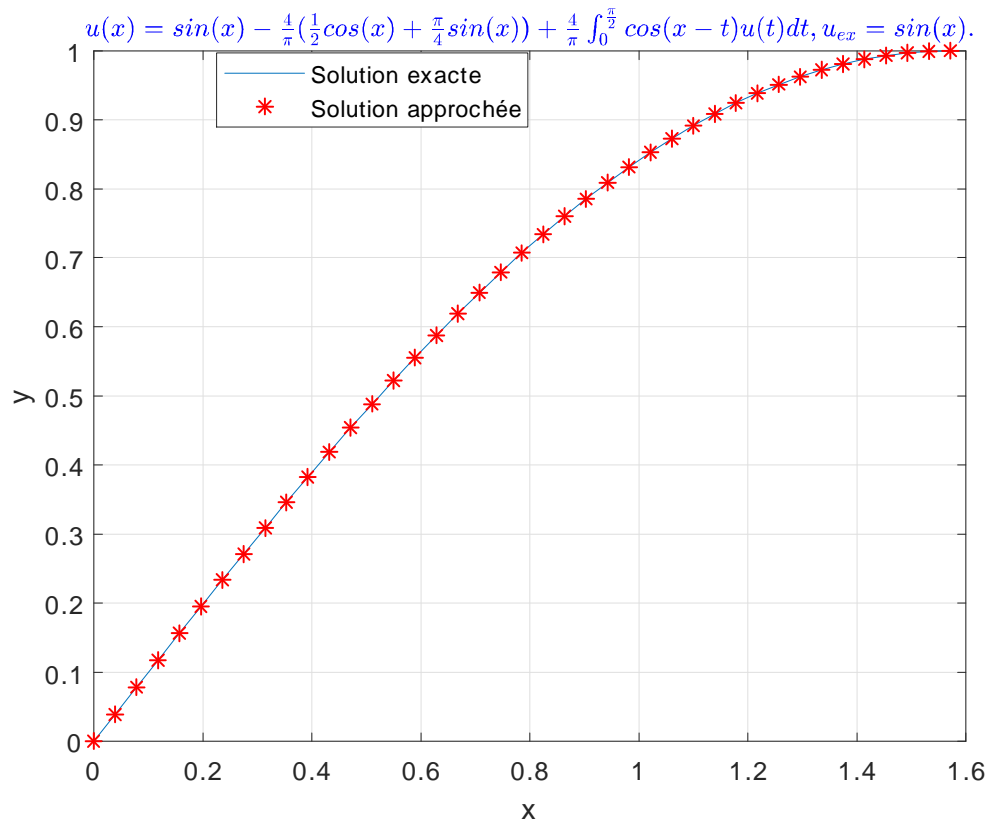
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système des équations linéaires (3.1.2) .

- Pour  $\alpha = \beta = 0$ , (polynôme de Legendre) .

3.1. Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.000	0.000000	$2.754408e - 02$	$2.459105e - 06$	$6.273605e - 08$	$3.978241e - 08$
2	0.118	0.117537	$2.805640e - 02$	$1.810649e - 06$	$6.307120e - 08$	$2.474398e - 08$
3	0.236	0.233445	$2.817921e - 02$	$1.550816e - 06$	$6.129693e - 08$	$1.652070e - 08$
4	0.353	0.346117	$2.790079e - 02$	$1.455567e - 06$	$6.404936e - 08$	$1.336114e - 08$
5	0.432	0.418660	$2.747610e - 02$	$1.419162e - 06$	$6.681296e - 08$	$1.299195e - 08$
6	0.511	0.488621	$2.683679e - 02$	$1.379696e - 06$	$6.839921e - 08$	$1.327329e - 08$
7	0.628	0.587785	$2.539917e - 02$	$1.293440e - 06$	$6.546817e - 08$	$1.377324e - 08$
8	0.707	0.649448	$2.404617e - 02$	$1.212977e - 06$	$5.875525e - 08$	$1.361642e - 08$
9	0.825	0.734323	$2.123900e - 02$	$1.057933e - 06$	$4.161652e - 08$	$1.217285e - 08$
10	0.903	0.785317	$1.870271e - 02$	$9.319974e - 07$	$2.689642e - 08$	$1.036988e - 08$
11	1.021	0.852640	$1.357618e - 02$	$7.025388e - 07$	$4.370081e - 09$	$6.626037e - 09$

Tab(3): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(3): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 20$ .

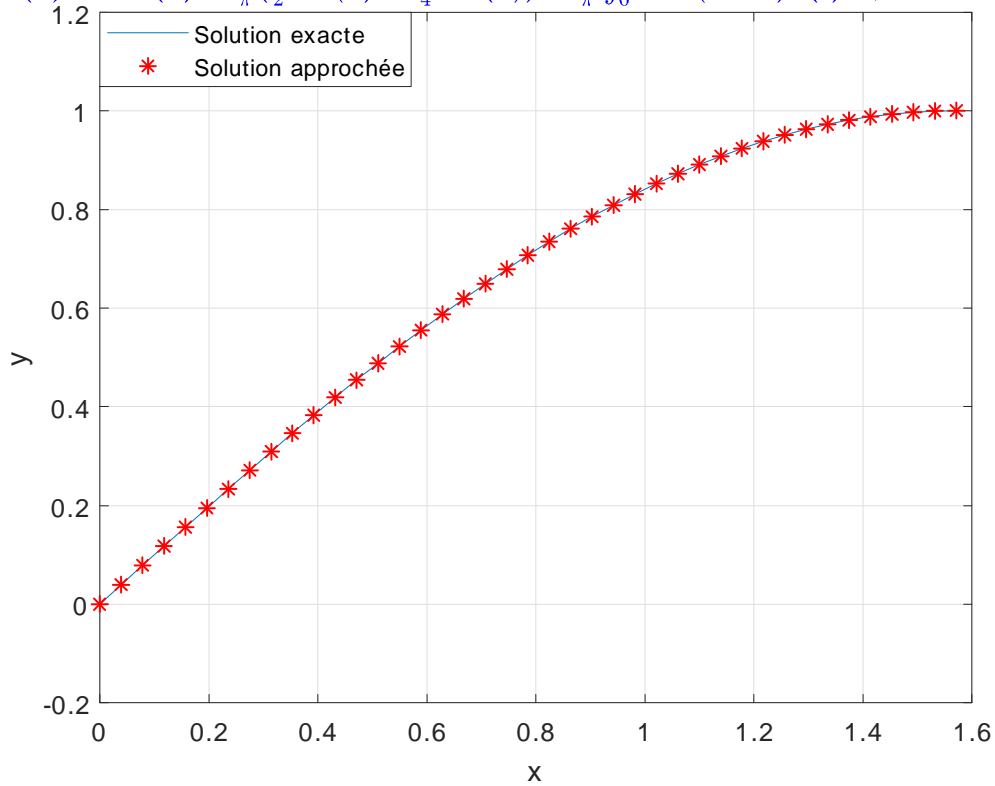
- $\alpha = 1$  ,  $\beta = 2$  .

3.1. Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Collocation

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.000	0.000000	$3.931268e - 02$	$2.754408e - 03$	$3.710207e - 05$	$1.638000e - 05$
2	0.118	0.117537	$4.048525e - 02$	$2.805640e - 03$	$3.743710e - 05$	$1.634177e - 05$
3	0.236	0.233445	$4.099749e - 02$	$2.817921e - 03$	$3.725520e - 05$	$1.623576e - 06$
4	0.353	0.346117	$4.068874e - 02$	$2.790079e - 03$	$3.655790e - 05$	$1.597472e - 05$
5	0.432	0.418660	$3.994940e - 02$	$2.747610e - 03$	$3.581085e - 05$	$1.568725e - 06$
6	0.511	0.488621	$3.873089e - 02$	$2.683679e - 03$	$3.484236e - 05$	$1.529810e - 05$
7	0.628	0.587785	$3.591082e - 02$	$2.539917e - 03$	$3.297889e - 05$	$1.451442e - 06$
8	0.707	0.649448	$3.330979e - 02$	$2.404617e - 03$	$3.145418e - 05$	$1.385480e - 05$
9	0.825	0.734323	$2.823181e - 02$	$2.123900e - 03$	$2.866603e - 05$	$1.263977e - 05$
10	0.903	0.785317	$2.401131e - 02$	$1.870271e - 03$	$2.634626e - 05$	$1.163944e - 05$
11	1.021	0.852640	$1.634924e - 02$	$1.357618e - 03$	$2.166766e - 05$	$9.663515e - 06$

Tab(4): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .

$$u(x) = \sin(x) - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\pi}{4} \sin(x) \right) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t) u(t) dt, u_{ex} = \sin(x).$$



Fig(4): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$ .

## 3.2 Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

Le principe de la méthode de Galerkin consiste à estimer la fonction inconnue  $u(x)$  comme suit

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (3.2.1)$$

Où  $P_j$  sont des polynômes de Jacobi et  $c_j$   $j = 0, 1, \dots, k_n$  sont des paramètres inconnus, à déterminer. On remplace (3.2.1) dans l'équation nous obtenons:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) - \lambda \int_a^b \left[ k(x,t) \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(t) dt \right] &= f(x). \quad x \in [a, b] \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ P_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(t) dt \right] &= f(x). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

En multipliant les deux côtés de (3.2.2) par  $P_i$  et puis en intégrant par rapport à  $x$  entre  $a$  à  $b$ , nous obtenons :

$$\sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ \int_a^b \left[ P_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(t) dt \right] P_i(x) dx \right] = \int_a^b P_i(x) f(x) dx \quad (3.2.3)$$

Ainsi (3.2.3) représente un système de  $(k_n + 1)$  équations linéaires a  $(k_n + 1)$   $(c_j \quad i = 0, 1, \dots, k_n)$  inconnus et qui s'écrit sous forme matricielle :

$$A_{j,i} X_j = b_i \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

avec

$$A_{j,i} = \int_a^b \left[ P_j(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(t) dt \right] P_i(x) dx. \quad i, j = 0, 1, \dots, k_n,$$

$$b_i = \int_a^b P_i(x) f(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, k_n$$

et

$$X_j^t = c_j \quad j = 0, 1, \dots, k_n$$

**Exemple 3.2.1** Soit l'équation intégrale de Fredholm suivant:

$$u(x) - \int_{-1}^1 (-x^4 - t^4) u(t) dt = x. \quad -1 \leq x \leq 1$$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = x$ .

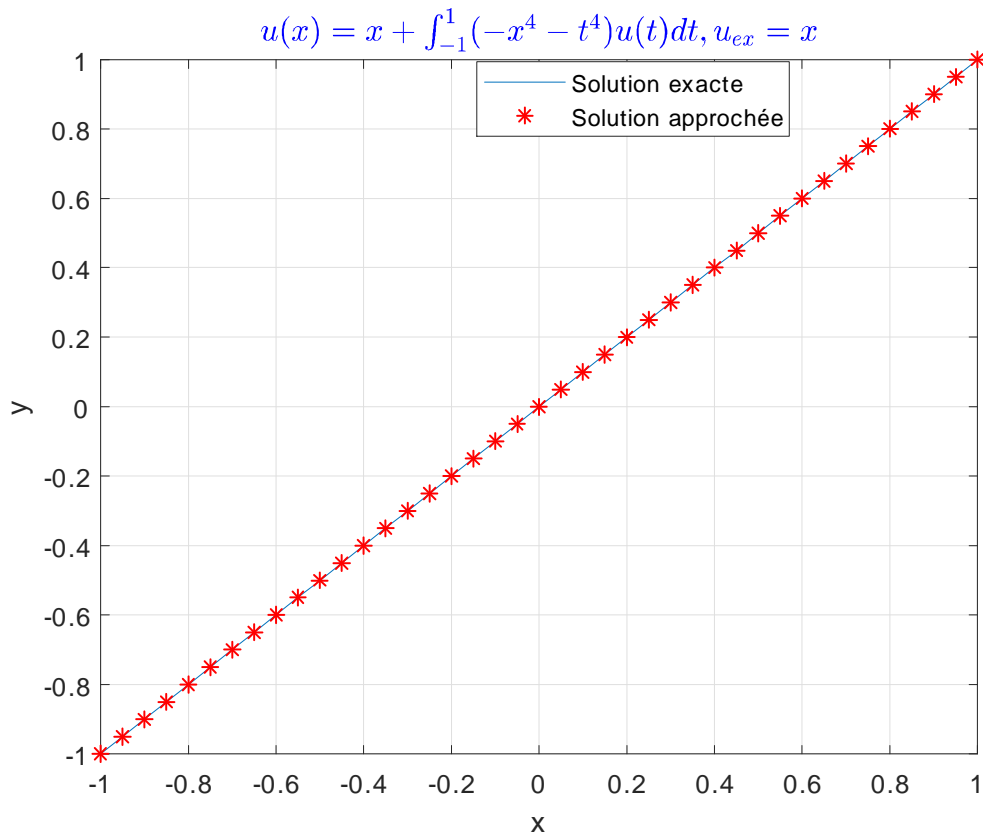
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système des équations linéaires (3.2.3) .

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

- Pour  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2}$ , ( polynôme de Tchebychev de quatrième espèce).

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	-1.0	-3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	-0.8	-2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
3	-0.6	-1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
4	-0.4	-1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	-0.2	-0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.2	0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.4	1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.6	1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.8	2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(5):**comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



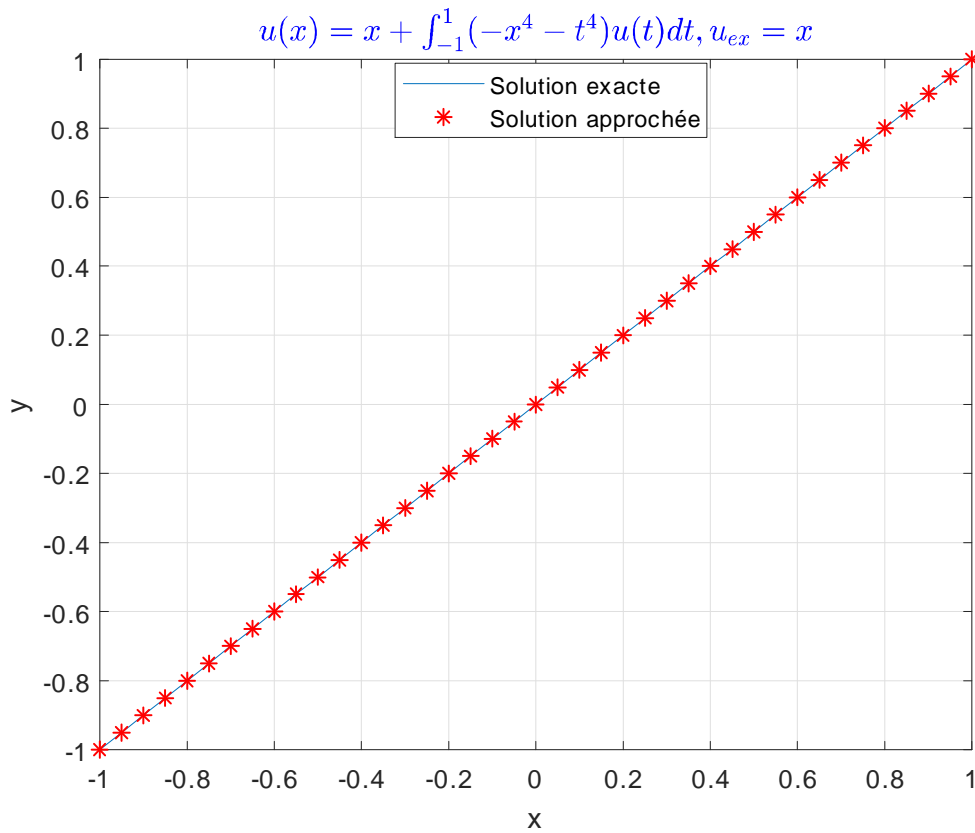
Fig(5): Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$ .

- pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , (polynôme de Tchebychev de deuxième espèce) .

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	-1.0	-1.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	-0.8	-0.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
3	-0.6	-0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
4	-0.4	-0.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	-0.2	-0.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.2	0.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.4	0.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.6	0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.8	0.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	1.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(6):**comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(6):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$  .

**Exemple 3.2.2** Soit l'équation de Fredholm:

$$u(x) - \int_{-1}^1 xt u(t)dt = x. \quad -1 \leq x \leq 1$$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = 3x$ .

La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système des équations linéaires (3.2.3) .

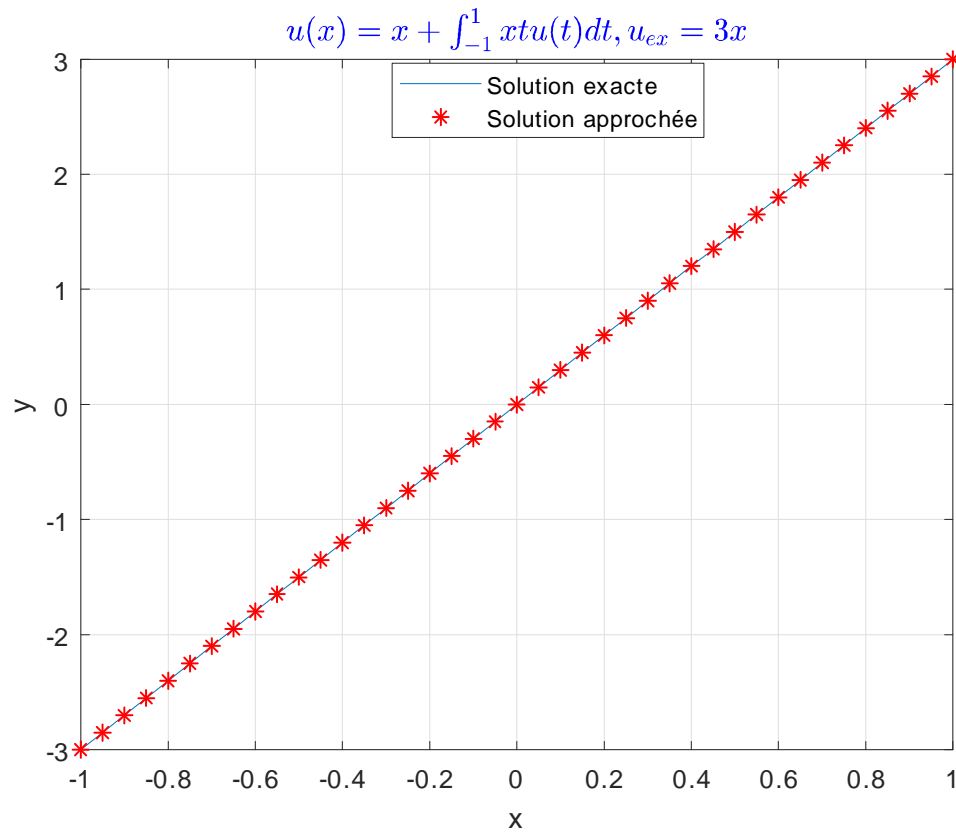
- Pour  $\alpha = \beta = 0$  , ( polynôme de Legendre)

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

---

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	-1.0	-3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	-0.8	-2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
3	-0.6	-1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
4	-0.4	-1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	-0.2	-0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.2	0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.4	1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.6	1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.8	2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(7):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



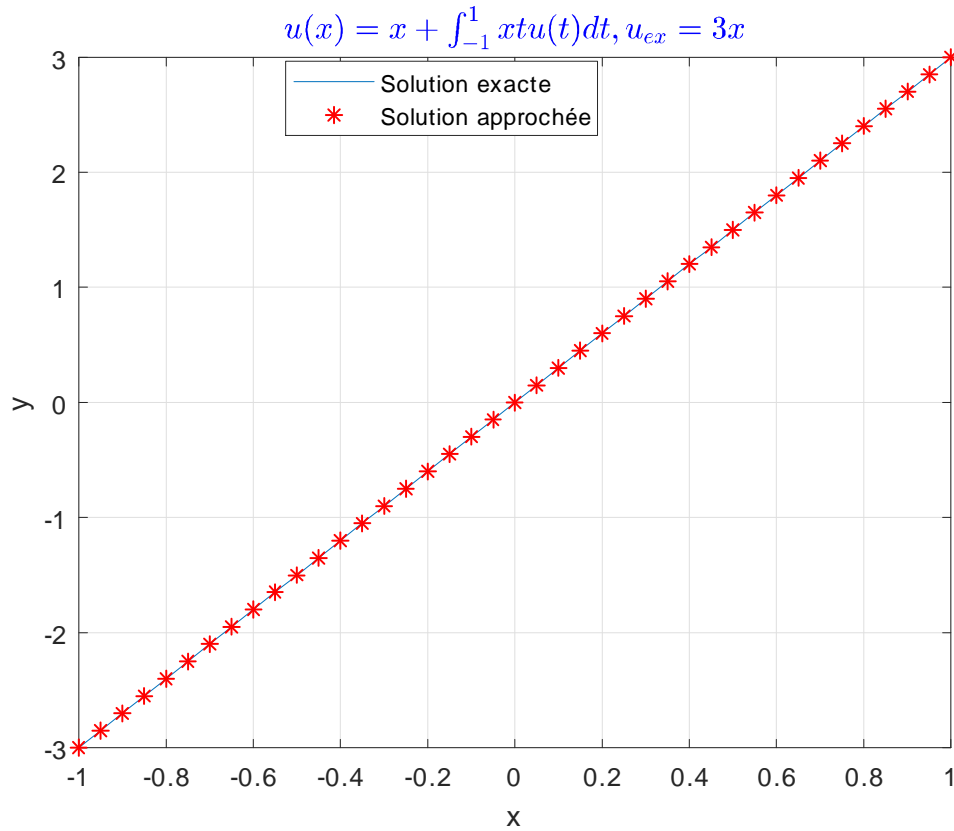
Fig(7):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$ .

- $\alpha = 3, \beta = 4$ .

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

			pourn = 3	pourn = 5	pourn = 8	pourn = 10
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	-1.0	-3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	-0.8	-2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
3	-0.6	-1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
4	-0.4	-1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	-0.2	-0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.2	0.600000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.4	1.200000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.6	1.800000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.8	2.400000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	3.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(8):**comparaison entre la solution exacte et la solution approchée



Fig(8):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$ .

**Exemple 3.2.3** Soit l'équation de Fredholm:

$$u(x) - \int_0^1 e^{-x-t} u(t) dt = e^x + e^{-x}. \quad 0 \leq x \leq 1$$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = e^x$ .

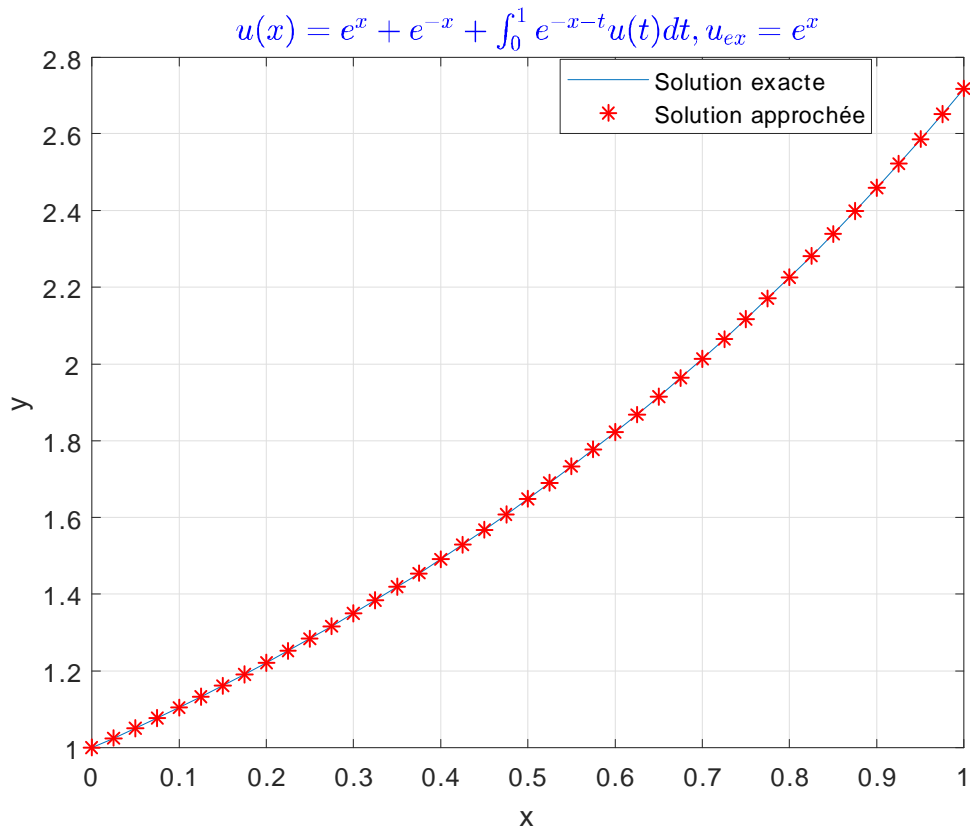
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système des équations linéaires (3.2.3) .

- Pour  $\alpha = \beta = 4$  , ( polynôme de Gegenbauer) .

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	1.000000	$9.399179e - 04$	$2.405884e - 06$	$6.581757e - 07$	$4.827513e - 07$
2	0.1	1.105171	$2.102618e - 04$	$9.560782e - 07$	$3.979230e - 06$	$1.020898e - 07$
3	0.2	1.221403	$3.961964e - 04$	$3.997955e - 07$	$3.540145e - 06$	$2.435232e - 07$
4	0.3	1.349859	$1.263494e - 04$	$7.318094e - 07$	$4.677446e - 07$	$2.245984e - 08$
5	0.4	1.491825	$2.131599e - 04$	$1.733727e - 07$	$2.137388e - 06$	$1.588400e - 08$
6	0.5	1.648721	$3.714233e - 04$	$7.800541e - 07$	$3.097046e - 06$	$3.798293e - 08$
7	0.6	1.822119	$2.469635e - 04$	$2.295944e - 07$	$2.196104e - 06$	$3.445479e - 08$
8	0.7	2.013753	$9.654921e - 05$	$7.290592e - 07$	$4.567386e - 07$	$1.673224e - 07$
9	0.8	2.225541	$4.129291e - 04$	$4.616894e - 07$	$3.581103e - 07$	$1.639166e - 07$
10	0.9	2.459603	$2.542791e - 04$	$1.002195e - 06$	$3.916508e - 06$	$1.121159e - 08$
11	1.0	2.718282	$1.050223e - 03$	$2.598430e - 06$	$3.247237e - 07$	$4.931285e - 08$

**Tab(9):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



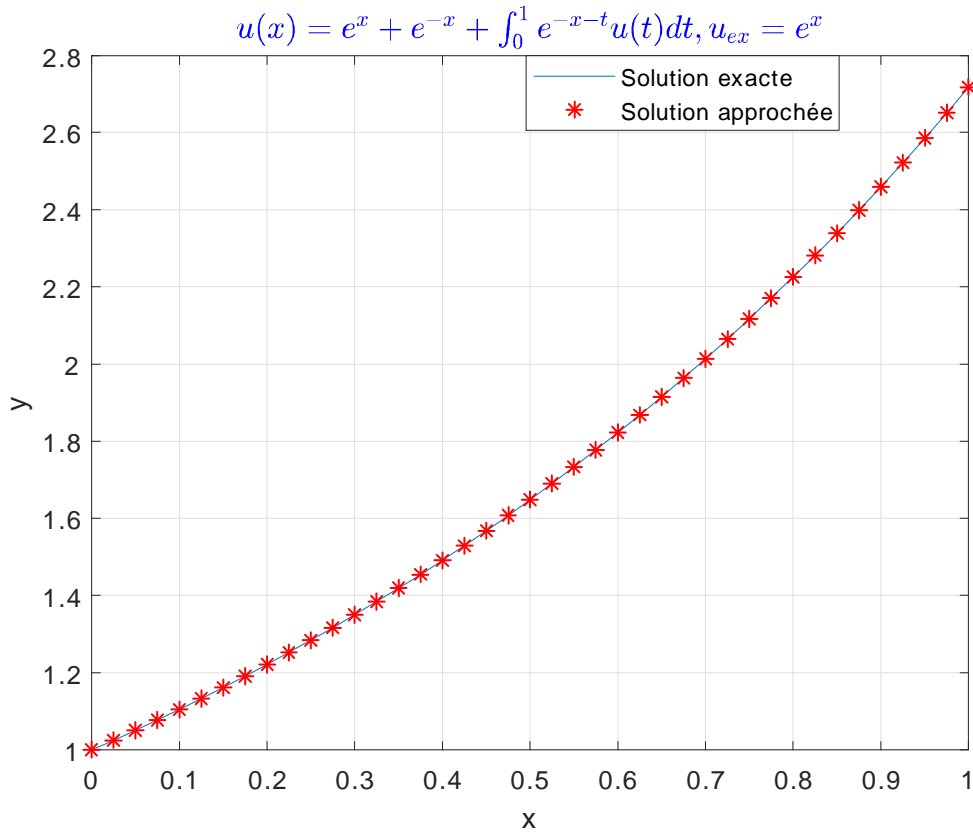
Fig(9):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 7$ .

- $\alpha = 3$  ,  $\beta = 2$  .

3.2. Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de Galerkin

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	1.000000	$8.062107e - 03$	$2.406083e - 06$	$6.798172e - 06$	$8.062107e - 07$
2	0.1	1.105171	$3.571760e - 03$	$9.561012e - 07$	$3.561023e - 06$	$3.571760e - 07$
3	0.2	1.221403	$1.106439e - 03$	$3.997531e - 07$	$2.101811e - 06$	$1.106439e - 07$
4	0.3	1.349859	$4.443432e - 06$	$7.317871e - 07$	$2.634585e - 07$	$4.443432e - 08$
5	0.4	1.491825	$6.639895e - 04$	$1.733999e - 07$	$1.994733e - 07$	$6.639895e - 08$
6	0.5	1.648721	$9.572421e - 04$	$7.801103e - 07$	$9.600035e - 07$	$9.572421e - 08$
7	0.6	1.822119	$4.867324e - 04$	$2.296708e - 07$	$1.202499e - 06$	$4.867324e - 08$
8	0.7	2.013753	$6.101277e - 04$	$7.290041e - 07$	$1.501340e - 06$	$6.101277e - 07$
9	0.8	2.225541	$3.067749e - 03$	$4.616959e - 07$	$2.625767e - 06$	$3.067749e - 07$
10	0.9	2.459603	$8.140398e - 03$	$1.002155e - 06$	$2.885130e - 06$	$8.140398e - 07$
11	1.0	2.718282	$1.704436e - 02$	$2.598309e - 06$	$5.841440e - 06$	$1.704436e - 07$

**Tab(10):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(10):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 6$  .

### 3.3 Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

Dans cette partie, nous cherchons la solution approchée de l'équation intégro-différentielle définie par :

$$\alpha(x) u''(x) + \beta(x) u'(x) + \gamma(x) u(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.1)$$

avec

$$u(a) = r_1 \quad u'(a) = r_2$$

Où  $f(x)$  et  $k(x,t)$  sont des fonctions continues dans  $[a, b]$

Nous transformons cette équation en un système d'équations linéaires. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimer la solution de l'équation intégro-différentielle. Nous choisissons les polynômes de Jacobi comme fonctions de base.

### 3.3.1 Résolution de l'équation intégro-différentielle de Fredholm par la méthode de Galerkin

Nous employons la technique décrite précédemment, nous estimons la fonction inconnue  $u(x)$  comme suite:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.2)$$

donc

$$u'(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j'(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.3)$$

et

$$u''(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j''(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.4)$$

Où  $P_j$  sont les polynômes de Jacobi et  $c_j, j = 0, 1, \dots, k_n$  sont des paramètres inconnus, déterminés. On remplace (3.3.2) et (3.3.3) et (3.3.4) dans l'équation (3.3.1), nous obtenons:

$$\sum_{j=0}^{k_n} \alpha(x) c_j P_j''(x) + \sum_{j=0}^{k_n} \beta(x) c_j P_j'(x) + \sum_{j=0}^{k_n} \gamma(x) c_j P_j(x) + \lambda \int_a^b \left[ k(x, t) \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) \right] dt = f(x) \quad (3.3.5)$$

c.à.d

$$\sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) P_j(x) dt \right] = f(x). \quad (3.3.6)$$

En multipliant les deux côtés de (3.3.6) par  $P_i$  et puis en intégrant entre de  $a$  à  $b$  par rapport à  $x$ , nous aurons :

$$\sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ \int_a^b \left[ \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(x) dt \right] P_i(x) dx \right] = \quad (3.3.7)$$

$$\int_a^b P_i(x) f(x) dx$$

Les conditions initiales du problème (3.3.1) sont données par

$$u(a) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(a) = r_1 \quad (3.3.8)$$

et

$$u'(a) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j'(a) = r_2 \quad (3.3.9)$$

Enfin (3.3.7) représenté un système de  $(k_n + 1)$  équations linéaires a  $(k_n + 1)$ , inconnues donné

$$M_{j,i} X_j = b_i. \quad i, j = 0, 1, \dots, k_n$$

où

$$M_{j,i} = \int_a^b \left[ \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(x) dt \right] P_i(x) dx \quad j = 2, 3, \dots, k_n$$

$$M_{1,i} = P_i(a) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

$$M_{2,i} = P_i'(a) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

$$b_i = \int_a^b P_i(x) f(x) dx \quad i = 2, 3, \dots, k_n.$$

$$b_0 = r_1. \quad et \quad b_1 = r_2.$$

$$X_i^t = (c_j) \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

On pose  $G_{j,i} = \int_a^b \left[ A(x) P_j''(x) + B(x) P_j'(x) + C(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(x) dt \right] P_i(x) dx$   
 alors le système  $M_{j,i} X_j = b_i$  est donné comme suite

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ P_0' & P_1' & \dots & P_n' \\ G_{0,0} & G_{1,0} & \dots & G_{n,0} \\ G_{0,1} & G_{1,1} & \dots & G_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{0,n} & G_{1,n} & \dots & G_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \int_a^b P_2(x) f(x) dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_a^b P_n(x) f(x) dx \end{bmatrix}$$

**Exemple 3.3.1** Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivant:

$$u''(x) + u'(x) + u(x) - \int_0^1 xt u(t) dt = x^2 + \frac{7}{4}x + 2. \quad 0 \leq x \leq 1.$$

avec  $u(0) = 0. \quad u'(0) = 0.$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = x^2.$

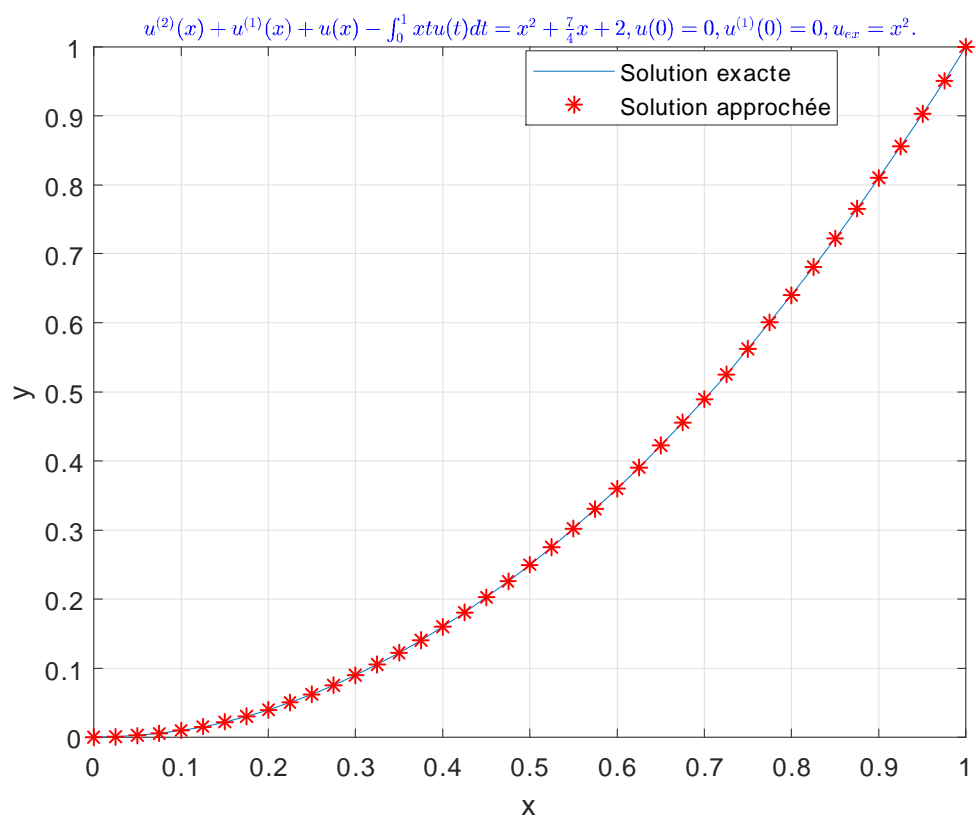
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires (3.3.7) .

- Pour  $\alpha = \beta = 5$  , (polynôme de Gegenbauer) .

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	0.010000	6.938894e - 18	6.938894e - 18	6.938894e - 18	6.938894e - 18
3	0.2	0.040000	2.775558e - 17	2.775558e - 17	2.775558e - 17	2.775558e - 17
4	0.3	0.090000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	0.4	0.160000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.5	0.250000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.6	0.360000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.7	0.490000	5.551115e - 17	5.551115e - 17	5.551115e - 17	5.551115e - 17
9	0.8	0.640000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.9	0.810000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	1.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(11):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



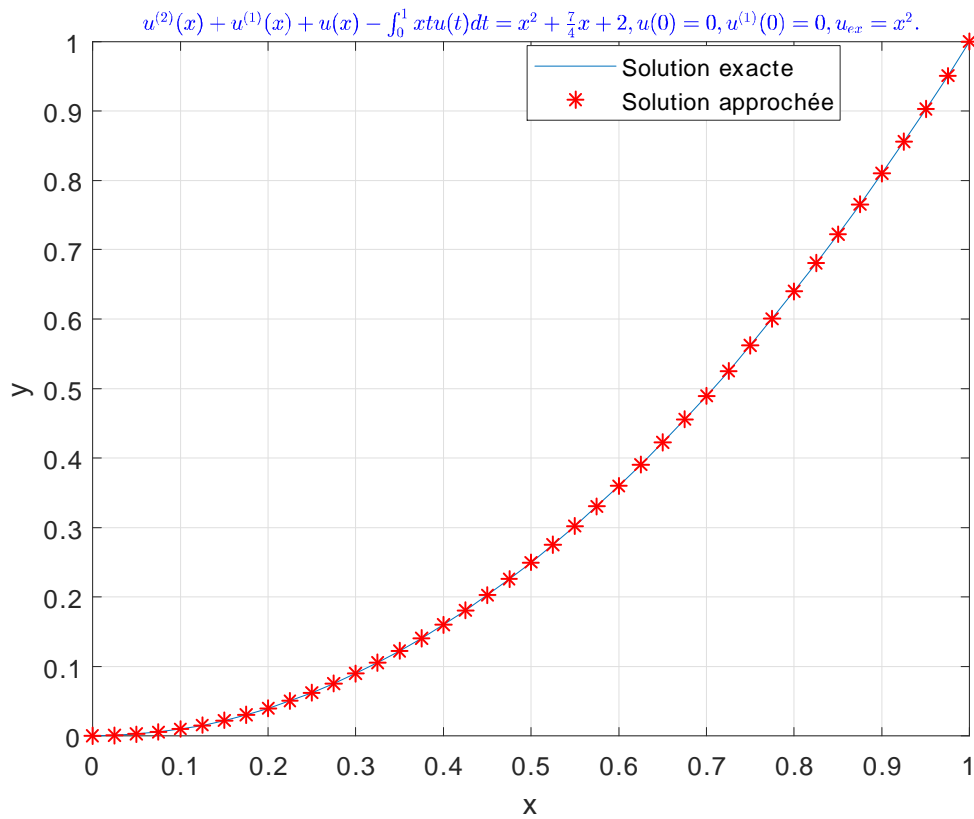
Fig(11):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

- Pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , ( polynôme deTchebychev de deuxième espèce).

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	0.010000	6.938894e - 18	6.938894e - 18	6.938894e - 18	6.938894e - 18
3	0.2	0.040000	2.775558e - 17	2.775558e - 17	2.775558e - 17	2.775558e - 17
4	0.3	0.090000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
5	0.4	0.160000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.5	0.250000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.6	0.360000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
8	0.7	0.490000	5.551115e - 17	5.551115e - 17	5.551115e - 17	5.551115e - 17
9	0.8	0.640000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.9	0.810000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
11	1.0	1.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(12):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(12):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$  .

**Exemple 3.3.2** Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivant:

$$u'(x) + u(x) - \int_0^1 xt u(t) dt = 6x + 3. \quad 0 \leq x \leq 1.$$

avec  $u(0) = 0. \quad u'(0) = 3.$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = 4x^2 + 3x.$

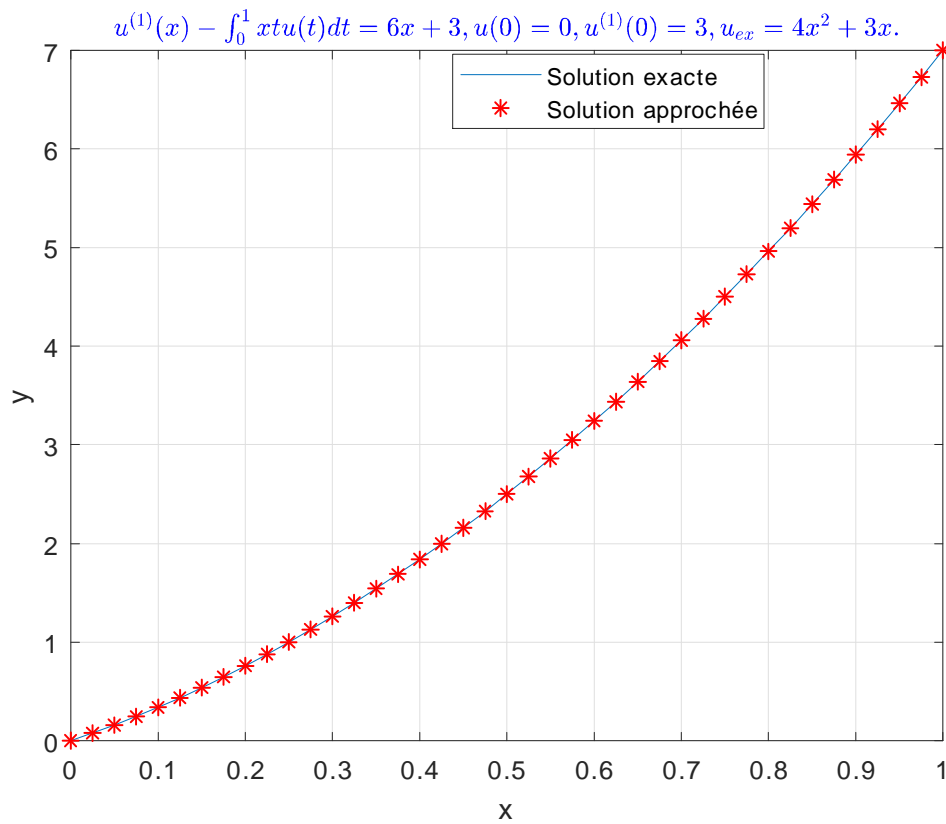
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires (3.3.7) .

- Pour  $\alpha = 1, \beta = 3$  .

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	0.340000	2.220446e - 16	2.220446e - 16	2.220446e - 16	2.220446e - 16
3	0.2	0.760000	1.110223e - 16	1.110223e - 16	1.110223e - 16	1.110223e - 16
4	0.3	1.260000	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16
5	0.4	1.840000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.5	2.500000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.6	3.240000	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16
8	0.7	4.060000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.8	4.960000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.9	5.940000	8.881784e - 16	8.881784e - 16	8.881784e - 16	8.881784e - 16
11	1.0	7.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(13):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



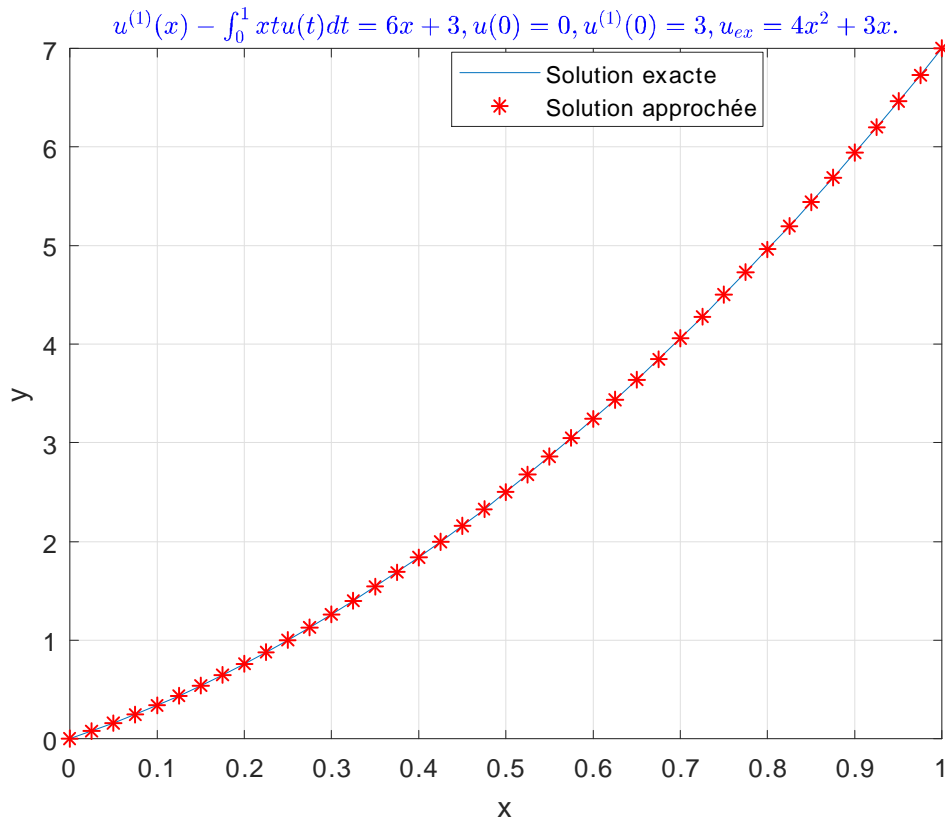
Fig(13):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

- pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , (polynôme deTchebychev de deuxième espèce) .

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	0.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.1	0.340000	2.220446e - 16	2.220446e - 16	2.220446e - 16	2.220446e - 16
3	0.2	0.760000	1.110223e - 16	1.110223e - 16	1.110223e - 16	1.110223e - 16
4	0.3	1.260000	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16
5	0.4	1.840000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
6	0.5	2.500000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
7	0.6	3.240000	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16	4.440892e - 16
8	0.7	4.060000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
9	0.8	4.960000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00
10	0.9	5.940000	8.881784e - 16	8.881784e - 16	8.881784e - 16	8.881784e - 16
11	1.0	7.000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00	0.000000e + 00

**Tab(14):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée



Fig(14):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

### 3.3.2 Résolution de l'équation intégro-différentielle de Fredholm par la méthode de collocation

Maintenant nous employons la technique de la méthode de collocation pour ceci , nous estimons la fonction inconnue  $u(x)$  comme suite:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.10)$$

$$u'(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j'(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.11)$$

$$u''(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j''(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.3.12)$$

Où  $P_j$  sont des polynômes de Jacobi et  $c_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k_n$  sont des paramètres inconnus, à déterminer. On remplace (3.3.10) et (3.3.11) et (3.3.12) dans l'équation (3.3.1), nous obtenons:

$$\sum_{j=0}^{k_n} \alpha(x) c_j P_j''(x) + \sum_{j=0}^{k_n} \beta(x) c_j P_j'(x) + \sum_{j=0}^{k_n} \gamma(x) c_j P_j(x) + \lambda \int_a^b \left[ k(x, t) \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(x) \right] dt = f(x) \quad (3.3.13)$$

$$\sum_{j=0}^{k_n} c_j \left[ \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) P_j(x) dt \right] = f(x). \quad (3.3.14)$$

Les conditions initiales de problème (3.3.1) sont données par

$$u(a) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j(a) = r_1 \quad (3.3.15)$$

et

$$u'(a) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j P_j'(a) = r_2 \quad (3.3.16)$$

Enfin (3.3.14) représente un système de  $(k_n + 1)$  équations linéaires à  $(k_n + 1)$  inconnus, donné par

$$M_{j,i} X_j = b_i \quad i, j = 0, 1, \dots, k_n$$

où

$$M_{j,i} = \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) P_j(x) dt \quad j = 2, 3, \dots, k_n.$$

$$b_i = f(x_i) \quad i = 2, 3, \dots, k_n.$$

$$b_0 = r_1. \quad \text{et} \quad b_1 = r_2.$$

$$M_{1,i} = P_i(a) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

$$M_{2,i} = P'_i(a) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

$$X_j^t = (c_j) \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, k_n.$$

On pose  $G_{j,i} = \alpha(x) P_j''(x) + \beta(x) P_j'(x) + \gamma(x) P_j(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) P_j(x) dt$ .  
 alors le système  $M_{j,i} X_j = b_i$  est donné comme suite

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ P'_0 & P'_1 & \dots & P'_n \\ G_{0,0} & G_{1,0} & \dots & G_{n,0} \\ G_{0,1} & G_{1,1} & \dots & G_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{0,n} & G_{1,n} & \dots & G_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

**Exemple 3.3.3** Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm suivante:

$$xu''(x) + xu'(x) + u(x) - \int_0^1 xu(t) dt = e^{-x} - \left(\frac{e-1}{e}\right)x. \quad 0 \leq x \leq 1.$$

avec  $u(0) = 1. \quad u'(0) = -1.$

La solutions exacte de cette équation est  $u(x) = e^{-x}.$

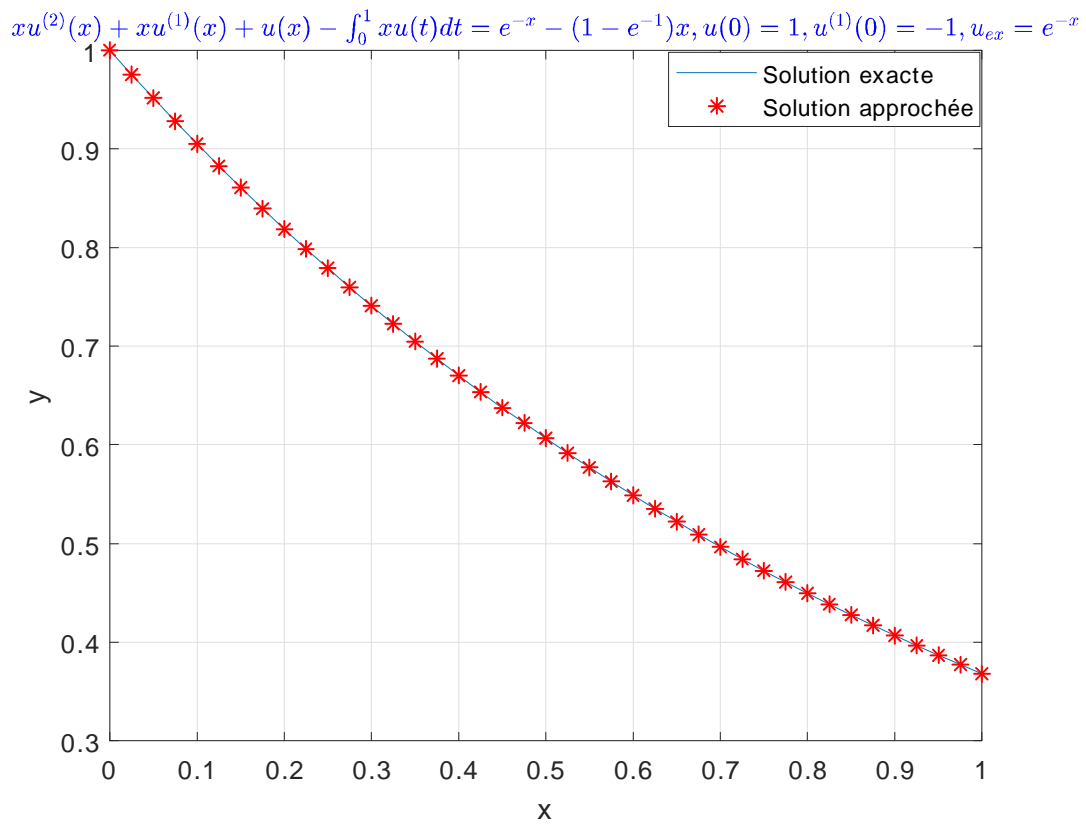
La solutions approché  $\tilde{u}(x)$  de la solutions exacte  $u(x)$  est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires (3.3.14) .

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

- Pour  $\alpha = \beta = 0$  .

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	0.000	$0.000000e + 00$	$1.110223e - 16$	$2.176037e - 14$	$1.027844e - 12$
2	0.1	0.100	$7.545893e - 05$	$7.920452e - 08$	$2.693623e - 12$	$1.855738e - 12$
3	0.2	0.200	$3.170834e - 04$	$4.522096e - 08$	$1.142186e - 11$	$1.492917e - 12$
4	0.3	0.300	$2.039411e - 03$	$3.909845e - 06$	$5.575784e - 11$	$5.814238e - 13$
5	0.4	0.400	$5.871300e - 03$	$2.582516e - 05$	$9.516213e - 10$	$5.151435e - 14$
6	0.5	0.500	$1.251832e - 02$	$9.867981e - 05$	$1.021413e - 08$	$7.003509e - 12$
7	0.6	0.600	$2.261889e - 02$	$2.810022e - 04$	$6.446263e - 08$	$9.297374e - 11$
8	0.7	0.700	$3.675069e - 02$	$6.633501e - 04$	$2.870194e - 07$	$6.778006e - 10$
9	0.8	0.800	$5.543642e - 02$	$1.374092e - 03$	$1.006129e - 06$	$3.515747e - 09$
10	0.9	0.900	$7.914903e - 02$	$2.584639e - 03$	$2.965309e - 06$	$1.438261e - 08$
11	1.0	1.000	$1.083165e - 01$	$4.514177e - 03$	$7.662858e - 06$	$4.928574e - 08$

**Tab(15):**comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



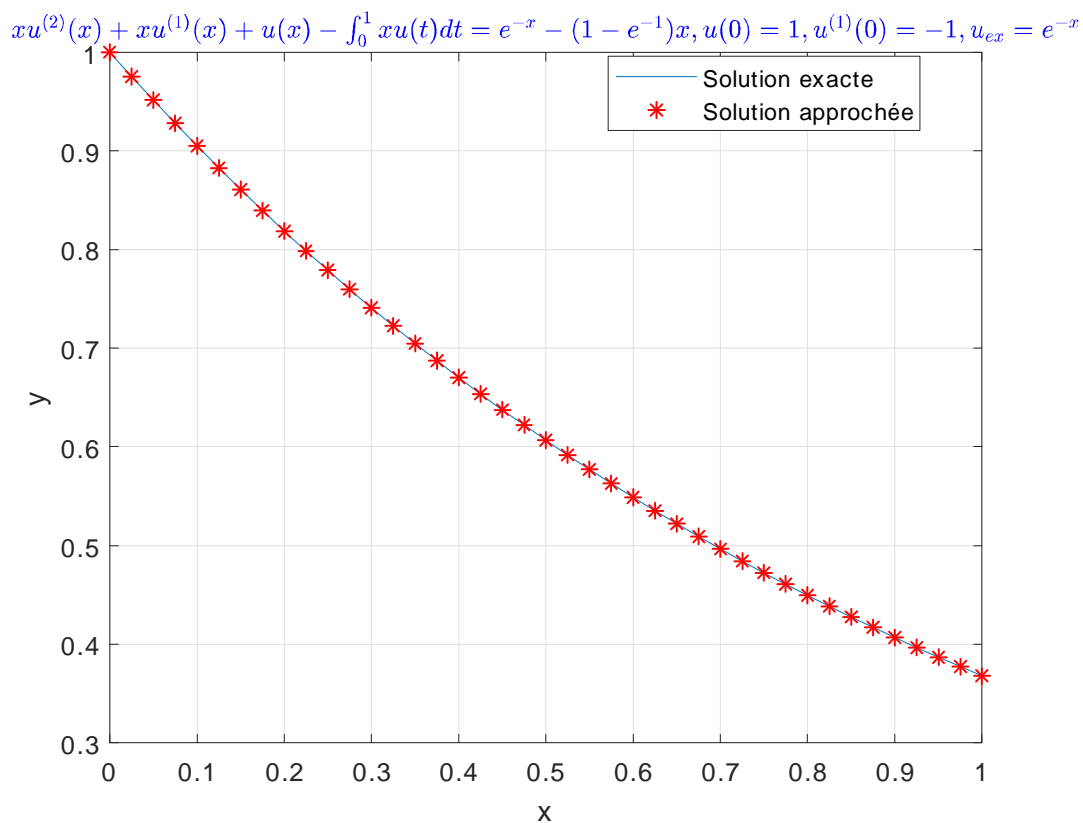
Fig(15):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

- $\alpha = \beta = 2$  ,( polynôme de Gegenbauer).

### 3.3. Discrétisation de l'équation intégro-différentielle

			pour $n = 3$	pour $n = 5$	pour $n = 8$	pour $n = 10$
n	x	Sol exacte	Erreur	Erreur	Erreur	Erreur
1	0.0	1.000000	$0.000000e + 00$	$0.000000e + 00$	$4.440892e - 14$	$8.980594e - 14$
2	0.1	0.904837	$7.545893e - 05$	$7.920452e - 08$	$2.727152e - 12$	$6.914469e - 13$
3	0.2	0.818731	$3.170834e - 04$	$4.522096e - 08$	$1.143285e - 11$	$4.722889e - 13$
4	0.3	0.740818	$2.039411e - 03$	$3.909845e - 06$	$5.575451e - 11$	$3.826939e - 13$
5	0.4	0.670320	$5.871300e - 03$	$2.582516e - 05$	$9.516145e - 10$	$6.981082e - 13$
6	0.5	0.606531	$1.251832e - 02$	$9.867981e - 05$	$1.021415e - 08$	$8.228307e - 12$
7	0.6	0.548812	$2.261889e - 02$	$2.810022e - 04$	$6.446280e - 08$	$9.320522e - 11$
8	0.7	0.496585	$3.675069e - 02$	$6.633501e - 04$	$2.870200e - 07$	$6.722864e - 10$
9	0.8	0.449329	$5.543642e - 02$	$1.374092e - 03$	$1.006131e - 06$	$3.488628e - 09$
10	0.9	0.406570	$7.914903e - 02$	$2.584639e - 03$	$2.965314e - 06$	$1.428656e - 08$
11	1.0	0.367879	$1.083165e - 01$	$4.514177e - 03$	$7.662869e - 06$	$4.899717e - 08$

**Tab(16):** comparaison entre la solution exacte et la solution approchée .



Fig(16):comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour  $n = 10$

# Conclusion

La résolution numérique des équations intégrales et integro-différentielles de type "Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce" sont souvent nécessaires, faute de de la difficulté de la recherche de la solution analytiques. Nous avons utilisé deux méthodes de projections pour trouver la solution approché en utilisant les polynômes de Jacobi. Des exemples illustratifs sont donnés à la fin de ce mémoire pour les deux types (équations intégrales et integro-différentielles), les résultats étaient satisfaisantes, faute que l'erreur absolue calculé entre la déférence de la solution exacte et la solution approchée était très petite, ce qui confirme l'efficacité de des deux méthodes utilisées.

# Bibliographie

- [1] **Abdul J. Jerri**, Introduction to integral equation with applications (John Wiley & Sons Inc, 1999).NIELS NIELSEN
- [2] **Brian George Spencer Doman**, The Classical Orthogonal Polynomials, University of Liverpool, UK, 2016.
- [3] **DILMI.Mustafa**, Sur la convergence des méthode spectrales pour les équations intégrales, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT EN SCIENCES, Université de M'sila, 2017/2018.
- [4] **Elisabrth.Burroni**, La topologie des espaces métriques, ellipses, 1997.
- [5] **Fletcher C. W. A**, Computational Galerkin Methods, Springer, New york, 1984.
- [6] **Jean.Yves CHEMIN**, BASES D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Université Pierre et Marie CURIE, 4 Place Jussieu,17 décembre 2017.
- [7] **Jerri A. J. 1985** Introduction to Integral Equation With applications, Marcel Dekker, Inc, New York.
- [8] **Kress R**, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [9] **RICHARD.BEALS,RODERICK WONG**, Special Functions and orthogonal Polynomials, Yale University, City University of Hong Kong,2016.
- [10] **SERAIDI .ABDERRACHID**, SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES VIA LE POLYNOME D'HERMITE, Mémoire de Master, Université de M'sila, 2017.

- [11] **Valet.Ludovic**, Généralités sur les polynômes orthogonaux,14 mai 2017.
- [12] **Yves.Sonntag**, TOPOLOGIE et ANALYSE FONCTIONNELLE, ellipses 1997.

## ملخص

في هذا العمل, نقوم بحل معادلات تكاملية وتفاضلية لفريدهولم من الصنف الثاني. نستخدم طريقة كولوكاسيو و طريقة كالاركين , وذلك بتطبيق كثير الحدود من نوع جاكوبي .

### الكلمات المفتاحية

معادلات تكاملية وتفاضلية لفريدهولم من الصنف الثاني, طريقة كولوكاسيو, طريقة كالاركين, كثير الحدود من نوع جاكوبي.

## Abstract

In this work, to solve Fredholm integral and integro-differential equations of the second Kind we use the Collocation and Galerkin method, via Jacobi polynomials.

The obtained error shows the effectiveness of the used methods.

### Key word

The linear Fredholm integral and integro-differential equation ,collocation method ,Galerkin method ,Jacobi Polynomial .

## Résumé

Dans ce travail, on propose deux méthodes numériques de résolution des équations intégrales et intégro-différentielles de Fredholm de deuxième espèce, à savoir la méthode de collocation et la méthode de Galerkin, via les polynômes de Jacobi .L'erreur obtenue montre l'efficacité des deux méthodes.

### Mot-clé

Equation intégrale linéaire et intégro-différentielle de Fredholm ,méthode de collocation méthode de Galerkin , polynôme de Jacobi .