



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

*Problème d'évolution pour une équation de diffusion-onde fractionnaire définie
dans un domaine borné*

Présentée par :
Bounif May Manal

Soutenu publiquement le : 00/06/2018.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r ARIOUA</i> Yacine	M.C.A,	Université de M'sila
Encadreur :	<i>M^r NOUIRI</i> Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	<i>M^r ABDELKBIR</i> Saad	M.A.B,	Université de M'sila
Examineur :	<i>M^{me} DJERIOUI</i> Khayra	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2017/2018

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail .

Je tiens à remercier mon promoteur le professeur
Mr NOURJ Brahim

pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience .

Les discussions scientifique qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmette ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude .

Je remercie aussi Co-encadreur Monsieur
Mr ABDELKEBIR Saad
qui m'a bien aider .

Je désirai aussi remercier le professeur
Dr. ABIOUB Yacine

pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.
je tiendrai également à remercier Madame
Djérioui Khayara

pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Enfin, je adresse mes sincères remerciements à tous enseignants de faculté
mathématique et informatique .

Merci à tout ceux qui on contribué, de pré ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Merci pour tout

Dédicaces

Tout d'abord, remerciez Dieu tout-puissant qui m'a donné une bonne raison et confiance en lui.

À ceux qui m'éclairent le chemin de la science et de la connaissance, et qui me concernent depuis l'enfance, ma mère et mon père

À mes cher grands parent Bourzidi et Daouia .

À mes cher frères Oymen, El mahdi et Abd nour .

À ma seule sœur Djoumana.

Toute ma famille .

À mes copines, Amina, Fatima et Amina, je vous souhaite tout le succès possible dans votre carrière et dans l'avenir .

À toute ce que j'aime .

Table des matières

1	Préliminaires sur le calcul fractionnaire.	7
1.1	Fonctions utiles	8
1.1.1	Fonction Gamma	8
1.1.2	Fonction Bêta	8
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	8
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	9
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	10
1.5	Transformation de Laplace	11
1.6	Transformation de Fourier	12
1.6.1	Transformation de Fourier exponentielle	12
1.6.2	Transformation de sinus-Fourier fini	12
1.6.3	Transformation de cosinus-Fourier fini	13
1.7	Fonction Mittag-Leffler	13
2	Résolution analytique	15
2.1	Problème de diffusion-onde fractionnaire avec conditions aux limites de Dirichlet	16
2.1.1	Position du problème	16
2.1.2	Résolution du problème	16
2.2	Problème de diffusion-onde fractionnaire avec condition aux limites de Neumann	19
2.2.1	Position du problème	19
2.2.2	Résolution du problème	20
2.3	Problème de diffusion-onde fractionnaire avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann	23
2.3.1	Position du problème	23
2.3.2	Résolution du problème	23
3	Résolution numérique	30
3.1	Approximation numérique	31
3.1.1	Schéma des différences finies	33
3.1.2	Système Matricielle	35
3.1.3	Stabilité du schéma implicite	37
3.1.4	Convergence du schéma des différences finies	38
3.2	Méthode de Cholesky	42
3.3	Application numérique	43

Table des figures

3.1	Solution analytique et solution numérique pour 1 ^{er} cas	44
3.2	Solution analytique et solution numérique pour 2 ^{me} cas	45

Introduction générale

Les équations aux dérivées fractionnaires ont été largement utilisées ces dernières années dans diverses applications scientifiques et techniques, voir [12, 13, 3, 6, 7]. L'équation de diffusion fractionnaire et l'équation d'onde fractionnaire sont deux exemples de base de ces équations. L'équation de diffusion fractionnaire a été introduite en physique par Nigmatullin (voir [9, 10]) pour décrire la diffusion dans les milieux à géométrie fractale, qui est un type particulier de milieux poreux. Il a souligné que de nombreuses réponses électromagnétiques, acoustiques et mécaniques universelles peuvent être modélisées plus précisément par l'équation de diffusion-onde fractionnaire, voir [14, 1].

Pour l'étude numérique, Sun et Wu [16] ont donné un schéma de différences finies pour l'équation de diffusion-onde fractionnaire et ont prouvé que cet schéma est inconditionnellement stable et convergent dans la norme L_∞ .

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'équation de diffusion-onde fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

où $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo par rapport à t , a est une constante positive, x et t sont les variables d'espace et de temps, $f(x, t)$ est une fonction suffisamment régulière. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α est définie par, [12]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial s^2} \frac{ds}{(t - s)^{\alpha-1}}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (2)$$

Nous avons présenté une solution analytique pour l'équation (1) avec des conditions aux limites suivantes :

- ✓ Dirichlet,
- ✓ Neumann,
- ✓ Mixte.

La solution analytique est exprimée par des fonctions de type Mittag-Leffler, en utilisant les transformées de Laplace et de Fourier et la méthode de séparation des variables. Pour la solution numérique, nous avons utilisé un schéma de différences finies implicite.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous avons présenté certaines théories de base de calcul fractionnaire. Nous avons donné les définitions des fonctions Gamma et Bêta, les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que les transformations de Laplace et de Fourier et la Fonction de Mittag-Leffler.

Dans le deuxième chapitre, nous avons calculé la solution analytique de l'équation (1) avec des conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et mixte par l'utilisation des transformées de Laplace et de Fourier et la méthode de séparation des variables.

Dans le dernier chapitre, nous avons introduit une approximation de différence finie implicite pour l'équation de diffusion-onde avec des conditions aux limites Mixte. La stabilité et la convergence sont démontrées par récurrence. Nous avons utilisé la méthode de Cholesky et un exemple numérique a été présenté pour montrer l'efficacité de cette approximation.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

PRÉLIMINAIRES SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE.

Dans ce chapitre, nous avons présenté certaines théories de base de calcul fractionnaire. Nous avons donné les définitions des fonctions Gamma et Bêta, les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que les transformations de Laplace et de Fourier et la Fonction de Mittag-Leffler.

1.1 Fonctions utiles

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. (voir [11, page 1]). L'une des fonctions de Base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \pm\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. (voir [11, page 6]). La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Proposition 1.1. La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Propriétés 1.2. 1. $B(z, w) = B(w, z)$, (symétrique).

2. $B(z, 1) = \frac{1}{z}$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Nous avons :

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$I_{a+}^2 f(x) = I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) = \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt = \int_a^x \int_a^t f(s) ds dt.$$

On pose $g(t) = \int_a^t f(s) ds$, d'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(s) ds - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{ime} itération, on obtient :

$$I_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Cette formule est appelée **formule de Cauchy**, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons :

$$I_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Définition 1.3. (voir [4, 15]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad Re(\alpha) > 0. \quad (1.1)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad Re(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

Sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) respectivement.

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. (voir [4, page 70]). Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville** $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f$ et $\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) &:= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) &:= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f(x)), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 1.1. 1. Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors $n = m + 1$. Donc, en utilisant (1.3) et (1.4), on obtient les propriétés suivantes :

$$(a) \mathcal{D}_{a^+}^0 f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^0 f(x) = f(x).$$

$$(b) \mathcal{D}_{a^+}^m f(x) = f^{(m)}(x).$$

$$(c) \mathcal{D}_{b^-}^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x).$$

Où $f^{(m)}(x)$ est la dérivée usuelle de f d'ordre m .

2. Si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x > a.$$

$$\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x < b.$$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors $n = [\alpha] + 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1; \quad x > a. \quad (1.5)$$

$$\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1; \quad x < b. \quad (1.6)$$

4. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.5) et (1.6) devient :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x > a.$$

$$\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x < b.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5. (voir [4]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par :

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) := I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (1.7)$$

Et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) := (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \quad (1.8)$$

Propriétés 1.3. 1. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) + \mu ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha g)(x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda ({}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f)(x) + \mu ({}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha g)(x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.7),(1.8) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3), (1.4) sont données par :

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right]. \quad (1.9)$$

Et

$${}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right]. \quad (1.10)$$

1.5 Transformation de Laplace

Définition 1.6. (voir [17, page 5]). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . la transformée de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f^*(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (1.11)$$

où s est la variable de transformation .

-La transformée Laplace **inverse** est réalisée selon la formule **Fourier Mellin**

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)e^{st} dt, \quad t > 0, \quad (1.12)$$

où c est un nombre fixe.

Propriétés 1.4. (voir [17, page 7]). Nous avons les propriétés suivantes :

1. La transformée de Laplace pour l'intégrale fractionnelle de Riemann-Liouville (1.1) :

$$\mathcal{L}\{f^\alpha(t)\} = \frac{1}{s^\alpha} f^*(s).$$

2. La transformée de Laplace pour la dérivée de Riemann-Liouville (1.3) :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}_{R.L}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{D}^k I^{m-\alpha} f(0^+) s^{m-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m.$$

3. La transformée de Laplace pour la dérivée de Caputo (1.7) :

$$\mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^* - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m. \quad (1.13)$$

- Le théorème de convolution, Souvent utilisé pour l'inversion de la transformée Laplace est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)g^*(s)\} &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.6 Transformation de Fourier

1.6.1 Transformation de Fourier exponentielle

Définition 1.7. (voir [17, page 8]). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} . La transformée de Fourier exponentielle est définie par :

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix\xi} dx, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

la transformée **inverse** de Fourier est définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi)e^{-ix\xi} d\xi.$$

Propriétés 1.5. 1. la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre m d'une fonction a la forme :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right\} = (-i\xi)^m \tilde{f}(\xi).$$

2. en particulier :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right\} = -\xi^2 \tilde{f}(\xi).$$

1.6.2 Transformation de sinus-Fourier fini

Définition 1.8. (voir [17, page 13]). La transformée de sinus-Fourier fini est la reformulation pratique de série sinus-Fourier dans le domaine $0 \leq x \leq L$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi_k) = \int_0^L f(x) \sin(x\xi_k) dx, \quad (1.15)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi_k)\} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k) \sin(x\xi_k), \quad (1.16)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L} \quad ; k = 1, 2, 3, \dots$$

– La transformée sinus-Fourier fini pour la dérivée seconde d'une fonction est :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f}{dx^2}\right\} = -\xi_k^2 \tilde{f}(\xi_k) + \xi_k [f(0) - (-1)^k f(L)]. \quad (1.17)$$

1.6.3 Transformation de cosinus-Fourier fini

Définition 1.9. (voir [17, page 14]). . La transformée finie de cosinus-Fourier est la reformulation pratique de série cosinus-Fourier dans le domaine $0 \leq x \leq L$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi_k) = \int_0^L f(x) \cos(x\xi_k) dx, \quad (1.18)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k) \cos(x\xi_k), \quad (1.19)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L} \quad ; k = 1, 2, 3, \dots$$

– La transformée cosinus-Fourier fini pour la dérivée seconde d'une fonction est :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2f}{dx^2}\right\} = -\xi_k^2 \tilde{f}(\xi_k) - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0} + (-1)^k \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=L}. \quad (1.20)$$

1.7 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.10. (voir [17, page 24]). La fonction Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad z > 0.$$

La fonction généralisée Mittag-Leffler avec deux paramètres α et β est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

– La relation entre fonction Mittag-Leffler et la fonction Gamma

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

– Le rôle essentiel de la fonction **Mittag-Leffler** est trouvé dans le calcul de la **transformation inverse de Laplace** suivant

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + b}\right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-bt^{\alpha}). \quad (1.21)$$

Propriétés 1.6. (voir [17, page 27]). Nous distinguons les trois cas suivants :

1. Pour $\beta = 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + b}\right\} = E_{\alpha}(-bt^{\alpha}) \quad (1.22)$$

2. Pour $\beta = 2$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + b} \right\} = t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha) \quad (1.23)$$

3. Pour $\beta = \alpha$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + b} \right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-bt^\alpha). \quad (1.24)$$

RÉSOLUTION ANALYTIQUE

Dans ce chapitre, nous avons calculé la solution analytique du problème d'évolution pour une équation de diffusion-onde fractionnaire en temps avec conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et Dirichlet-Neumann par l'utilisation des transformées de Laplace et de Fourier et la méthode de séparation des variables.

2.1 Problème de diffusion-onde fractionnaire avec conditions aux limites de Dirichlet

2.1.1 Position du problème

Soient $\alpha \in]1, 2]$, $L > 0$ et $T > 0$. On considère le problème d'évolution suivant :
 Trouver $u :]0, L] \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in]0, L] \times]0, T], \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in]0, L], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in]0, L], \quad (2.3)$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad t \in]0, T], \quad (2.4)$$

$$u(L, t) = \varphi_2(t), \quad t \in]0, T], \quad (2.5)$$

où $a > 0$, f, g, h, φ_1 et φ_2 sont des fonction données et ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α .

L'équation (2.1) représente l'équation de diffusion-onde fractionnaire en temps définie dans un intervalle borné $]0, L]$, (2.2), (2.3) représentent les conditions initiales et (2.4), (2.5) sont des conditions aux limites de Dirichlet.

2.1.2 Résolution du problème

Proposition 2.1. *La solution analytique u du problème (2.1)-(2.5) est donnée par :*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[E_{\alpha, \alpha}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L g(x) \sin(x\xi_k) dx + t E_{\alpha, \alpha}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L h(x) \sin(x\xi_k) dx \right. \\ & + \xi_k a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t - \tau) d\tau - a(-1)^k \xi_k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t - \tau) d\tau \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(t - \tau) d\tau \right] \sin(x\xi_k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L}.$$

Démonstration. Nous appliquons la transformée de sinus-Fourier fini (1.15) à l'équation (2.1), on obtient :

$$\mathcal{F}_x \{ {}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) \} = \mathcal{F}_x \left\{ a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \mathcal{F}_x \{ f(x, t) \},$$

il devient,

$${}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = a \int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx + \tilde{f}(\xi_k, t). \quad (2.7)$$

Pour calculer $\int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx$, en utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{k\pi}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx \\ &= \frac{k\pi}{L} \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) u(x, t) \Big|_0^L - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \int_0^L u(x, t) \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx \quad (2.8) \\ &= - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \tilde{u} \left(\frac{k\pi}{L} \right) + \frac{k\pi}{L} [u(0) - (-1)^k u(L)]. \end{aligned}$$

Nous remplaçons le résultat précédent (2.8) dans l'équation (2.7) et en utilisant (2.4) et (2.5), on obtient

$${}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = -a (\xi_k)^2 \tilde{u}(\xi_k, t) + a \xi_k [\varphi_1(t) - (-1)^k \varphi_2(t)] + \tilde{f}(\xi_k, t). \quad (2.9)$$

Nous appliquons la transformation de Laplace à l'équation (2.9), en utilisant l'équation (1.11)

$$\mathcal{L}_t \{ {}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) \} = -a \xi_k^2 \mathcal{L}_t \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} + a \xi_k \mathcal{L}_t \{ [\varphi_1(t) - (-1)^k \varphi_2(t)] \} + \mathcal{L}_t \{ \tilde{f}(\xi_k, t) \}.$$

D'après l'égalité (1.13), on obtient :

$$s^\alpha \tilde{u}^* - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} = -a \xi_k^2 \tilde{u}^*(\xi_k, s) + a \xi_k [\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s), \quad m-1 < \alpha < m,$$

ce que implique que

$$(s^\alpha + a \xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} + a \xi_k [\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s). \quad (2.10)$$

On a

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 2, \\ \text{et} \\ m-1 < \alpha < m, \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} &= \sum_{k=0}^1 \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \\ &= \tilde{u}(0^+) s^{\alpha-1} + \tilde{u}^{(1)}(0^+) s^{\alpha-2} \\ &= \tilde{g}(x) s^{\alpha-1} + \tilde{h}(x) s^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous remplaçons le résultat de (2.11) dans l'équation (2.10), on obtient :

$$(s^\alpha + a\xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \tilde{g}(\xi_k) s^{\alpha-1} + \tilde{h}(\xi_k) s^{\alpha-2} + a\xi_k [\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s),$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(\xi_k, s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \int_0^l g(x) \sin(\xi_k x) dx + \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \int_0^l h(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &+ \frac{a}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \xi_k \varphi_1^*(s) - \frac{a}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \xi_k (-1)^k \varphi_2^*(s) + \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Maintenant, en appliquant la transformation inverse de Laplace (1.12) sur l'équation (2.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{u}^*(\xi_k, s) \} &= \tilde{u}(\xi_k, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \right\} \int_0^l g(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &+ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \right\} \int_0^l h(x) \sin(\xi_k x) dx + a\xi_k \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_1^*(s) \right\} \\ &- a\xi_k (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_2^*(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

1. D'après l'équation (1.22), on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a\xi_k^2} \right\} = E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.14)$$

2. D'après l'équation (1.23), on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + a\xi_k^2} \right\} = t E_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.15)$$

3. on pose $z^*(s) = \frac{1}{s^\alpha + a\xi_k^2}$, et d'après (1.24), nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1} \{ z^* \} = z(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 t^\alpha),$$

et d'après le théorème de convolution (1.14), on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_1^*(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t - \tau) d\tau, \quad (2.16)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_2^*(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t - \tau) d\tau, \quad (2.17)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t - \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Nous remplaçons les résultats précédents (2.14)-(2.18) dans (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_k, t) &= E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^t g(x) \sin(\xi_k x) dx + t E_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^t h(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &+ a\xi_k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t-\tau) d\tau - a\xi_k (-1)^k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t-\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalemnt, on applique la transformée inverse de sinus-Fourier fini(1.16) sur l'équation (2.19), on obtient :

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} = u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_k, t) \sin(\xi_k x).$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L g(x) \sin(x\xi_k) dx + t E_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L h(x) \sin(x\xi_k) dx \right. \\ &+ \xi_k a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t-\tau) d\tau - a(-1)^k \xi_k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t-\tau) d\tau \\ &\left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(t-\tau) d\tau \right] \sin(x\xi_k), \end{aligned}$$

Où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L}.$$

□

2.2 Problème de diffusion-onde fractionnaire avec condition aux limites de Neumann

2.2.1 Position du problème

Soient $\alpha \in]1, 2]$, $L > 0$ et $T > 0$. On considère le problème d'évolution suivant :
Trouver $u :]0, L] \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$${}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad (2.20)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in]0, L], \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in]0, L], \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), \quad t \in]0, T], \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \varphi_2(t), \quad t \in]0, T], \quad (2.24)$$

où $a > 0$, f, g, h, φ_1 et φ_2 sont des fonctions données et ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α . L'équation (2.20) représente équation de diffusion-onde fractionnaire en temps définie dans un intervalle borné $[0, L]$, (2.21) et (2.22) représentent les conditions initiales, (2.23) et (2.24) sont des conditions aux limites de Neumann.

2.2.2 Résolution du problème

Proposition 2.2. *La solution analytique du problème (2.20)-(2.24) est donnée par la forme :*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L g(x) \cos(x\xi_k) dx + t E_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L h(x) \cos(x\xi_k) dx \right. \\ & - a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t-\tau) d\tau + a(-1)^k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t-\tau) d\tau \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(t-\tau) d\tau \right] \cos(x\xi_k), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L}.$$

Démonstration. Nous appliquons la transformée cosinus-Fourier fini à l'équation (2.20) et avec l'équation (1.18), on obtient :

$$\mathcal{F}_x \{ {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) \} = \mathcal{F}_x \left\{ a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \mathcal{F}_x \{ f(x, t) \},$$

il devient,

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = a \int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \tilde{f}(\xi_k, x). \quad (2.26)$$

Pour calculer $\int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$, en utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx &= \left[-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{k\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\ &= \left[-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right]_0^L - \frac{k\pi}{L} \left[-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right]_0^L - \left(\frac{k\pi}{L}\right) \int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\ &= -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + (-1)^k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} - \left(\frac{k\pi}{L}\right) \int_0^L u(x, t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\ &= \varphi_1(t) + (-1)^k \varphi_2(t) - \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \tilde{u}\left(\frac{k\pi}{L}, t\right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous remplaçons le résultat précédent (2.27) dans l'équation (2.26), et en utilisant (2.23) et (2.24), on obtient :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = -a(\xi_k)^2 \tilde{u}(\xi_k, t) - a[\varphi_1(t) - (-1)^k \varphi_2(t)] + \tilde{f}(\xi_k, t) \quad (2.28)$$

Nous appliquons la transformée de Laplace à l'équation (2.28), et avec l'équation (1.11), on trouve :

$$\mathcal{L}_{t_x} \{ {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) \} = -a\xi_k^2 \mathcal{L}_t \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} - a\mathcal{L}_t \{ [\varphi_1(t) - (-1)^k \varphi_2(t)] \} + \mathcal{L}_t \{ \tilde{f}(\xi_k, t) \}.$$

D'après l'égalité (1.13), nous obtenons :

$$s^\alpha \tilde{u}^* - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} = -a\xi_k^2 \tilde{u}^*(\xi_k, s) - a[\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s), \quad m-1 < \alpha < m,$$

ce que implique que

$$(s^\alpha + a\xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} - a[\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s). \quad (2.29)$$

On a

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 2, \\ \text{et} \\ m-1 < \alpha < m, \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} &= \sum_{k=0}^1 \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \\ &= \tilde{u}(0^+) s^{\alpha-1} + \tilde{u}^{(1)}(0^+) s^{\alpha-2} \\ &= \tilde{g}(x) s^{\alpha-1} + \tilde{h}(x) s^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nous remplaçons le résultat de (2.30) dans l'équation (2.29), on obtient :

$$(s^\alpha + a\xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \tilde{g}(\xi_k) s^{\alpha-1} + \tilde{h}(\xi_k) s^{\alpha-2} - a[\varphi_1^*(s) - (-1)^k \varphi_2^*(s)] + \tilde{f}^*(\xi_k, s), \quad (2.31)$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(\xi_k, s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \int_0^l g(x) \sin(\xi_k x) dx + \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \int_0^l h(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &\quad - \frac{a}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_1^*(s) + \frac{a}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} (-1)^k \varphi_2^*(s) + \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Maintenant, on applique la transformée inverse de Laplace (1.12) sur l'équation (2.32), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{u}^*(\xi_k, s) \} &= \tilde{u}(\xi_k, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \right\} \int_0^l g(x) \cos(\xi_k x) dx \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \right\} \int_0^l h(x) \cos(\xi_k x) dx - a\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_1^*(s) \right\} \\ &\quad + a(-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \varphi_2^*(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a\xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

1. D'après l'équation (1.22), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a\xi_k^2} \right\} = E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.34)$$

2. D'après l'équation (1.23), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + a\xi_k^2} \right\} = tE_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.35)$$

3. On pose $z^*(s) = \frac{1}{s^\alpha + a\xi_k^2}$, et d'après (1.24), nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1} \{z^*\} = z(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 t^\alpha).$$

D'après le théorème de convolution (1.14), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - a\xi_k^2)} \varphi_1^*(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t - \tau) d\tau, \quad (2.36)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - a\xi_k^2)} \varphi_2^*(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t - \tau) d\tau, \quad (2.37)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - a\xi_k^2)} \tilde{f}(\xi_k, s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t - \tau) d\tau. \quad (2.38)$$

Nous remplaçons les résultats précédents (2.34)-(2.38) dans (2.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_k, t) = & E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^l g(x) \cos(\xi_k x) dx + tE_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^l h(x) \cos(\xi_k x) dx \\ & - a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t - \tau) d\tau + a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t - \tau) d\tau \\ & + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Finalement, on applique la transformée inverse de cosinus-Fourier fini (1.16) sur l'équation (2.41), on obtient :

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} = u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_k, t) \cos(\xi_k x).$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[E_\alpha(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L g(x) \cos(x\xi_k) dx + tE_{\alpha,2}(-a\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^L h(x) \cos(x\xi_k) dx \right. \\ & - a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_1(t - \tau) d\tau + a(-1)^k \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \varphi_2(t - \tau) d\tau \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-a\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(t - \tau) d\tau \right] \cos(x\xi_k), \end{aligned}$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L}.$$

□

2.3 Problème de diffusion-onde fractionnaire avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

2.3.1 Position du problème

Soient $\alpha \in [1, 2]$, $L > 0$ et $T > 0$. On considère le problème d'évolution suivant :
 Trouver $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad (2.40)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \varphi_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.44)$$

où $a > 0$, f, g, h, φ_1 et φ_2 sont des fonctions données et ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α . L'équation (2.40) représente l'équation de diffusion-onde fractionnaire en temps définie dans un intervalle borné $[0, L]$, (2.41), (2.42) représentent les conditions initiales et (2.43), (2.44) sont des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

2.3.2 Résolution du problème

Proposition 2.3. *La solution analytique u du problème (2.40)-(2.44) est donnée par la forme :*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_\alpha \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 t^\alpha \right) B_k(0) + t E_{\alpha,2} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 t^\alpha \right) B'_k(0) \right. \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 \tau^\alpha \right) \tilde{f}_k(t-\tau) d\tau \right] \sin \left(\frac{2k+1}{2L} \pi x \right) \\ & + \varphi_1(t) + \varphi_1(t)x + \left[\frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2L} \right] x^2. \end{aligned}$$

Démonstration. On pose que la solution u sous la forme :

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (2.45)$$

où v est une fonction définie par :

$$v(x, t) = \varphi_1(t) + \varphi_1(t)x + \left[\frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2L} \right] x^2, \quad (2.46)$$

satisfait les conditions aux limites

$$v(0, t) = \varphi_1(t) \quad , \quad v_x(L, t) = \varphi_2(t).$$

La fonction w est une solution de problème suivant :

Nous remplaçons (2.45) dans (2.40)-(2.44), on obtient :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha w(x, t) = a \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \tilde{f}(x, t), \\ w(x, 0) = g_1(x), \\ w_x(x, 0) = h_1(x), \\ w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= a \left[\frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{L} \right] - {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v(x, t) + f(x, t), \\ g_1(x) &= g(x) - \left(\varphi_1(0) + \varphi_1(0)x + \left[\frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{2L} \right] x^2 \right), \\ h_1(x) &= h(x) - \left(\varphi_1(0) + \left[\frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{L} \right] x \right). \end{aligned}$$

Nous résolvons l'équation homogène correspondante dans le problème (2.47), telle que $\tilde{f}(x, t)$ est remplacée par 0 avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha w(x, t) = a \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ w(x, 0) = g_1(x) \\ w_x(x, 0) = h_1(x) \\ w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

En utilisant la méthode de **séparation des variables**, la méthode peut être présentée en deux étapes :

1. **la première étape** : séparation des variables, on cherche la solution du problème de la forme

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.49)$$

2. **La deuxième étape** : Superposition, où on essaie de trouver une somme de solutions de la forme (2.49) que vérifie la condition aux limites de problème (2.48).

1. Séparation des variables, on cherchons la solution du problème qui est donné par la formule (2.49).

On remplaçons (2.49) dans l'équation de problème (2.48), on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha w(x, t) &= {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha (X(x)T(t)) = X(x)T^{(\alpha)}(t), \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x)T(t)) = T(t)X^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Donc, l'équation de problème (2.48) devient :

$$X(x)T^{(\alpha)}(t) - aT(t)X^{(2)}(x) = 0, \quad \text{pour tout } 0 < x < L, 0 < t < T,$$

ce qui implique que :

$$\frac{T^{(\alpha)}(t)}{T(t)} = a \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}.$$

Nous avons une fonction de la variable x qui est égale à une fonction avec une variable t .
Donc, cette fonction est égale à une constante c

$$\frac{T^{(\alpha)}(t)}{T(t)} = a \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = c.$$

Les conditions aux limite de la problème (2.48) devient

$$\begin{cases} w(0, t) = X(0)T(t) = 0 & \Rightarrow X(0) = 0, \\ w(L, t) = X'(L)T(t) = 0 & \Rightarrow X'(L) = 0, \end{cases} \text{ pour tout } 0 < t < T.$$

Nous obtenons une équation différentielle linéaire ordinaire par $X(x)$. Une relation différentielle linéaire fractionnaire ordinaire avec la dérivée de Caputo pour $T(t)$.

Cherchons les valeurs propres et les fonctions propres du problème Sturm-Liouville (de équation différentielle linéaire ordinaire par $X(x)$) ce qui est donné par

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \text{ avec } \lambda < 0, \tag{2.50}$$

on pose $\lambda = -\theta^2$

$$X''(x) + \theta^2 X(x) = 0,$$

en utilisant l'équation caractéristique, il devient

$$r = \pm i\theta.$$

Donc, la solution de 2.50 est donnée par :

$$X(x) = A \cos(\theta x) + B \sin(\theta x).$$

On a, Le problème 2.50 est constitué de l'équation différentielle et des conditions aux limites

$$\begin{cases} X(0) = A = 0, \\ X'(L) = -B\theta \cos(\theta L) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2k+1}{2L}\pi, \end{cases}$$

ces conditions aux limites sont dites séparées, car elles portent chacune sur une extrémité de l'intervalle $[0, L]$.

On trouve que le spectre (les valeurs propres) est

$$\sigma = \{\theta_k : k \in \mathbb{N}^*\}, \quad \text{où } \theta_k = \frac{2k+1}{2L}\pi,$$

et des fonctions propres associées à θ_k sont données par

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{2k+1}{2L}x\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

alors, la solution du problème (2.47) est donnée par

$$u(x, t) = B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}x\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

D'où, la somme des solutions est encore une solution de (2.47)

2. Superposition, maintenant on cherchons la solution du problème non homogène (2.47) de la forme :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right). \quad (2.51)$$

Nous développons $\tilde{f}(x, t)$ comme un **série de Fourier** par les **fonctions propres** $\left\{ \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) \right\}$

$$\tilde{f}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right), \quad (2.52)$$

Où

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x, t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) dx.$$

On remplaçant(2.51) et (2.52) en (2.47), on trouve :

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right),$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) &= - \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(t) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right). \end{aligned}$$

On obtient

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha B_k(t) = - \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a B_k(t) + \tilde{f}_k(t).$$

Puisque $w(x, t)$ satisfait les conditions initiales en (2.47), nous devons avoir :

$$\begin{cases} w(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) = g_1(x), & 0 < x < L, \\ w_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B'_k(0) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) = h_1(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

on a g_1 et h_1 sont écrire comme une série de Fourier, avec les coefficients de Fourier $B_k(0)$ et $B'_k(0)$ qui sont données par :

$$\begin{cases} B_k(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g_1(x) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) dx, \\ B'_k(0) = \frac{2}{L} \int_0^L h_1(x) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) dx. \end{cases}$$

Donc, $B_k(t)$ est une solution de problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha B_k(t) + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a B_k(t) = \tilde{f}_k(t), \\ B_k(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g_1(x) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right) dx, \\ B'_k(0) = \frac{2}{L} \int_0^L h_1(x) \sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) dx. \end{cases} \quad (2.53)$$

On applique **la transformée de Laplace** sur l'équation de problème (2.53) :

$$\mathcal{L}\{{}^c\mathcal{D}_t^\alpha B_k(t)\} + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a \mathcal{L}\{B_k(t)\} = \mathcal{L}\{\tilde{f}_k(t)\}.$$

D'après l'équation (1.13), on a

$$s^\alpha B_k^*(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\alpha-1-i} B_k^{(i)}(0) + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a B_k^*(s) = \tilde{f}_k^*(s), \quad m-1 < \alpha < m. \quad (2.54)$$

on a

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 2, \\ \text{et} \\ m-1 < \alpha < m, \end{cases} \quad \Rightarrow m = 2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} s^{\alpha-1-i} B_k^{(i)}(0) &= \sum_{i=0}^1 s^{\alpha-1-i} B_k^{(i)}(0) \\ &= s^{\alpha-1} B_k(0) + s^{\alpha-2} B'_k(0) \end{aligned}$$

Donc, L'équation (2.54) est équivalente à

$$\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right) B_k^*(s) = s^{\alpha-1} B_k(0) + s^{\alpha-2} B'_k(0) + \tilde{f}_k^*(s),$$

ce la veut dire

$$B_k^*(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} B_k(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} B'_k(0) + \frac{1}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} \tilde{f}_k^*(s). \quad (2.55)$$

On applique la transformée inverse de Laplace sur l'équation (2.55), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{B_k^*(s)\} = B_k(t) = & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)^2 a\right)} B_k(0) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} B_k'(0) \right\} \\ & + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} \tilde{f}_k^*(s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

(a) D'après l'équation (1.22), on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)^2 a\right)} \right\} = E_\alpha \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right). \quad (2.57)$$

(b) D'après l'équation (1.23), on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)^2 a\right)} \right\} = t E_{\alpha,2} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right). \quad (2.58)$$

(c) D'après le théorème de convolution (1.14), on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s^\alpha + \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 a\right)} \tilde{f}_k^*(s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 \tau^\alpha \right) \tilde{f}_k(t-\tau) d\tau. \quad (2.59)$$

On remplaçons les résultats précédents (2.57)-(2.59) dans (2.56), on obtient la forme de la fonction B_k :

$$\begin{aligned} B_k(t) = & E_\alpha \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right) B_k(0) + t E_{\alpha,2} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right) B_k'(0) \\ & + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 \tau^\alpha \right) \tilde{f}_k(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part, la solution de problème (2.47) est donnée par :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin \left(\frac{2k+1}{2L} \pi x \right),$$

Alors

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_\alpha \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right) B_k(0) + t E_{\alpha,2} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 t^\alpha \right) B_k'(0) \right. \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2 \tau^\alpha \right) \tilde{f}_k(t-\tau) d\tau \right] \sin \left(\frac{2k+1}{2L} \pi x \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

avec les fonctions $B_k(0)$ et $\tilde{f}_k(t)$ sont définies précédemment. Afin de trouver la solution $u(x, t)$, d'après équation (2.45) (par la addition de (2.46) et (2.60)), on trouve :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_{\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 t^{\alpha} \right) B_k(0) + t E_{\alpha,2} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 t^{\alpha} \right) B'_k(0) \right. \\
 & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 \tau^{\alpha} \right) \tilde{f}_k(t-\tau) d\tau \right] \sin \left(\frac{2k+1}{2L} \pi x \right) \\
 & + \varphi_1(t) + \varphi_1(t)x + \left[\frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2L} \right] x^2.
 \end{aligned}$$

□

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous avons introduit une approximation de différence finie implicite pour l'équation de diffusion-onde avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. La stabilité et la convergence sont démontrées par récurrence, et avec la méthode de Cholesky un exemple numérique a été présenté pour montrer l'efficacité de cette approximation.

3.1 Approximation numérique

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On définit $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, n$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, où $\tau = T/n$ et $h = L/m$ sont le pas d'espace et le pas de temps respectivement. Soit u_i^k l'approximation numérique de $u(x_i, t_k)$.

1. La discrétisation de **la dérivée première** dans la direction t est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{\tau} + c\tau, \quad (3.1)$$

où c est une constante.

2. La discrétisation de **la dérivée seconde ordre** dans la direction x est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} + c_2 h^2, \quad (3.2)$$

où c_2 est une constante.

3. La discrétisation de les conditions initiales et aux limites sont données par :
 - Pour la condition initiale :

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) = g(x_i) &\Rightarrow u_i^0 = g_i, \\ u_t(x_i, 0) = h(x_i) &\Rightarrow u_i^{-1} = u_i^0 - \tau h(x_i). \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Pour les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(x_0, t_{k+1}) = \varphi_1(t_{k+1}) &\Rightarrow u_0^{k+1} = \varphi_1(t_{k+1}), \\ u_x(x_m, t_{k+1}) = \varphi_2(t_{k+1}) &\Rightarrow u_m^{k+1} = h\varphi_2(t_{k+1}) + u_{m-1}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. La discrétisation de **la dérive de Caputo** pour $1 < \alpha < 2$ est définie par le lemme suivant

Lemme 3.1. Une approximation discrète de la dérivée fractionnaire (1.7) peut être obtenue par une formule simple :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t_i^\alpha}(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} + u_i^{k-j-1} \right), \quad (3.5)$$

où

$$b_j = [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}].$$

Démonstration. D'après l'équation de la dérivée fractionnaire de Caputo (1.7), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t_i^\alpha}(x_i, t_{k+1}) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x_i, s) \frac{ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} \frac{ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} [1/2 - \alpha (t_{k+1} - t_j)^{2-\alpha} \\
&\quad - (t_{k+1} - t_{j+1})^{2-\alpha}] \\
&= \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} [(\tau(k+1-j))^{2-\alpha} \\
&\quad - (\tau(k-j))^{2-\alpha}],
\end{aligned}$$

d'après la propriété 1.1 de la fonction Gamma, on a

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t_i^\alpha}(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k (u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}) [(k+1-j)^{2-\alpha} - (k-j)^{2-\alpha}].$$

On pose $J = k - j$,

$$\begin{cases} j = 0 \Leftrightarrow J = k \\ j = k \Leftrightarrow J = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t_i^\alpha}(x_i, t_{k+1}) &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{J=0}^k (u_i^{k-J+1} - 2u_i^{k-J} + u_i^{k-J-1}) [(J+1)^{2-\alpha} - (J)^{2-\alpha}] \\
&= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{J=0}^k b_J (u_i^{k-J+1} - 2u_i^{k-J} + u_i^{k-J-1}).
\end{aligned}$$

□

Ensuite, nous avons :

$$L_{h,\tau}^\alpha u(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u(x_i, t_{k-j+1}) - 2u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k-j-1})] [(j+1)^{2-\alpha} - (j)^{2-\alpha}].$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial t_{k+1}^\alpha}(x_i, t_{k+1}) - L_{h,\tau}^\alpha u(x_i, t_{k+1}) \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t-j}^{t_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x_i, s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\tau^2} \right| \times \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^{\alpha-1}} \\
&\leq \frac{c_1 \tau^2}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t-j}^{t_{j+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^{\alpha-1}} \\
&\leq \frac{c_1 \tau^2}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} \frac{ds}{(t_{k+1} - s)^{\alpha-1}} \\
&\leq \frac{c_1 \tau^2}{\Gamma(3-\alpha)} ((k+1)\tau)^{2-\alpha} \\
&\leq c\tau^2,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où c_1 et c sont des constantes.

3.1.1 Schéma des différences finies

Un schéma implicite peut être donné par suite :

En utilisant (3.2) et (3.5), l'équation de problème (2.40) devient

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} + u_i^{k-j-1} \right) = a \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{k+1},$$

ce que implique que

$$\sum_{j=0}^k b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} + u_i^{k-j-1} \right) = \frac{a\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)}{h^2} \left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} \right) + \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1}.$$

Pour $i = 1, 2, \dots, M-1; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Soit $p = \frac{a\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)}{h^2}$, l'équation ci dessus peut être réécrite comme suivant

$$-p \left(u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} \right) = - \sum_{j=1}^{k+1} b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} + u_i^{k-j-1} \right) + \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1},$$

$$-pu_{i+1}^{k+1} + (1+2p)u_i^{k+1} - pu_{i-1}^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} - \sum_{j=1}^k b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} + u_i^{k-j-1} \right) + \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1}.$$

Par conséquent

1. Pour $k = 0$

$$-pu_{i+1}^1 + (1+2p)u_i^1 - pu_{i-1}^1 = 2u_i^0 - u_i^{-1} + \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1},$$

De (3.3), on obtient

$$-pu_{i+1}^1 + (1 + 2p)u_i^1 - pu_{i-1}^1 = 2u_i^0 - (u_i^0 - \tau h_i) + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1}$$

Donc, le schéma des différences finies implicite pour $k = 0$ est donnée par

$$-pu_{i+1}^1 + (1 + 2p)u_i^1 - pu_{i-1}^1 = u_i^0 + \tau h_i + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1}. \quad (3.7)$$

2. **Pour** $k > 0$

$$\begin{aligned} & -pu_{i+1}^{k+1} + (1 + 2p)u_i^{k+1} - pu_{i-1}^{k+1} \\ &= 2u_i^k - u_i^{k-1} - \sum_{j=1}^k b_j \left(u_i^{k-j+1} - 2u_i^{k-j} u_i^{k-j-1} \right) + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1} \\ &= 2u_i^k - u_i^{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{j+1} u_i^{k-j} + 2 \sum_{j=1}^k b_j u_i^{k-j} - \sum_{j=2}^{k+1} b_{j-1} u_i^{k-j} + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} [-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}] u_i^{k-j} + 2u_i^k - u_i^{k-1} - b_1 u_i^k - b_2 u_i^{k-1} + 2b_1 u_i^{k-1} + 2b_k u_i^0 - b_{k-1} u_i^0 - b_k u_i^{-1} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} [-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}] u_i^{k-j} + 2u_i^k - u_i^{k-1} - b_1 u_i^k - b_2 u_i^{k-1} + 2b_1 u_i^{k-1} + 2b_k u_i^0 - b_{k-1} u_i^0 \\ &\quad - b_k (u_i^0 - \tau h_i) + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} [-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}] u_i^{k-j} + \underbrace{[-u_i^{k-1} + 2b_1 u_i^{k-1} - b_2 u_i^{k-1}]}_{j=1} + (2 - b_1) u_i^k + (b_k - b_{k-1}) u_i^0 + b_k \tau h_i \\ &\quad + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} [-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}] u_i^{k-j} + (2 - b_1) u_i^k + (b_k - b_{k-1}) u_i^0 + b_k \tau h_i + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc, le schéma des différences finies implicite pour $k > 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} -pu_{i+1}^{k+1} + (1 + 2p)u_i^{k+1} - pu_{i-1}^{k+1} &= \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} u_i^{k-j} + (2 - b_1) u_i^k + (b_k - b_{k-1}) u_i^0 + b_k \tau h_i \\ &\quad + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Où

$$c_{j+1} = -b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}.$$

3.1.2 Système Matricielle

On observe qu'on obtient $(m - 1)$ équations servant à déterminer les $(m - 1)$ inconnues $(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$. On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le schéma implicite. On note que la connaissance des conditions au bord u_0 et u_{m-1} est nécessaires à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans (3.7), (3.8) lorsque $i = 1, 2, \dots, m - 1$

1. **Pour** $k = 0$

De (3.7), on a

– Pour $i = 1$

$$-pu_2^1 + (1 + 2p)u_1^1 - pu_0^1 = u_i^0 + \tau h_1 + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_1^{k+1}.$$

– Pour $i = 2$

$$-pu_3^1 + (1 + 2p)u_2^1 - pu_1^1 = u_i^0 + \tau h_2 + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_2^{k+1}.$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

– Pour $i = m - 1$

$$-pu_m^1 + (1 + 2p)2u_{m-1}^1 - pu_{m-2}^1 = u_i^0 + \tau h_{m-1} + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_{m-1}^{k+1}.$$

En utilisant 3.3 et 3.4, nous obtenons

– Pour $i = 1$

$$-pu_2^1 + (1 + 2p)u_1^1 = u_i^0 + \tau h_1 + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_1^{k+1} + p\varphi_1^{k+1}.$$

– Pour $i = 2$

$$-pu_3^1 + (1 + 2p)u_2^1 - pu_1^1 = u_i^0 + \tau h_2 + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_2^{k+1}.$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

– Pour $i = m - 1$

$$-pu_{m-2}^1 + (1 + p)u_{m-1}^1 = u_i^0 + \tau h_{m-1} + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_{m-1}^{k+1} + p\varphi_2^{k+1}.$$

2. **Pour** $k > 0$ De même manière de cas ($k = 0$).

Donc, pour $i = 1, 2, 3, \dots, m$, l'équations (3.7) et (3.8) peuvent être écrits comme suite :

$$\begin{cases} Au^1 = u^0 + \tau h + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f^1 + v^{k+1}, \\ Au^{k+1} = (2 - b_1)u^k + (b_k - b_{k-1})u^0 + c_2 u^{k-1} + \dots + c_k u^1 + b_k \tau h + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f^{k+1} + v^{k+1}, \\ u^0 = g, \end{cases}$$

(3.9)

3.1.3 Stabilité du schéma implicite

Nous supposons que \tilde{u}_i^k , ($i = 0, 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots, n$) est la solution approximative de (3.7) et (3.8) :

$$\begin{cases} -p\tilde{u}_{i+1}^1 + (1+2p)\tilde{u}_i^1 - p\tilde{u}_{i-1}^1 &= \tilde{u}_i^0 + \tau h_i + \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^1 \\ -p\tilde{u}_{i+1}^{k+1} + (1+2p)\tilde{u}_i^{k+1} - p\tilde{u}_{i-1}^{k+1} &= (2-b_1)\tilde{u}_i^k + (b_k - b_{k-1})\tilde{u}_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} \tilde{u}_i^{k-j} + b_k \tau h_i \\ &+ \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1}, \end{cases}$$

et le erreur $\varepsilon_i^k = \tilde{u}_i^k - u_i^k$, ($i = 0, 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, 2, \dots, n$), satisfait :

$$\begin{cases} -p\varepsilon_{i+1}^1 + (1+2p)\varepsilon_i^1 - p\varepsilon_{i-1}^1 &= \varepsilon_i^0, \\ -p\varepsilon_{i+1}^{k+1} + (1+2p)\varepsilon_i^{k+1} - p\varepsilon_{i-1}^{k+1} &= (2-b_1)\varepsilon_i^k + (b_k - b_{k-1})\varepsilon_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} \varepsilon_i^{k-j}, \end{cases}$$

qui peut être écrit comme :

$$\begin{cases} AE^1 = E^0, \\ AE^{k+1} = (2-b_1)E^k + (b_k - b_{k-1})E^0 + c_2 E^{k-1} + \dots + c_k E^1, \\ E^0, \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$E^k = [\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \varepsilon_3^k, \dots, \varepsilon_{m-1}^k]^T$, par conséquent, le résultat suivant peut être prouvé en utilisant la démonstration par récurrence,

Lemme 3.2. *Sous l'hypothèse (3.10), on a :*

$$\|E^k\|_\infty \leq C \|E^0\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Démonstration. **Pour** $k = 1$

Soit $|\varepsilon_\ell^1| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |\varepsilon_i^1|$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_\ell^1| &= -p|\varepsilon_\ell^1| + (1+2p)|\varepsilon_\ell^1| - p|\varepsilon_\ell^1| \\ &\leq -p|\varepsilon_{\ell+1}^1| + (1+2p)|\varepsilon_\ell^1| - p|\varepsilon_{\ell-1}^1| \\ &\leq |-p\varepsilon_{\ell+1}^1 + (1+2p)\varepsilon_\ell^1 - p\varepsilon_{\ell-1}^1| \\ &\leq \varepsilon_\ell^0 \\ &\leq \|E^0\|_\infty, \end{aligned}$$

donc

$$\|E^1\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty.$$

Supposons que $\|E^j\|_\infty \leq c \|E^0\|_\infty$, $i = 1, 2, \dots, k$, et soit $|\varepsilon_\ell^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |\varepsilon_i^{k+1}|$.

Alors, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_\ell^{k+1}| &= -p|\varepsilon_\ell^{k+1}| + (1+2p)|\varepsilon_\ell^{k+1}| - p|\varepsilon_\ell^{k+1}| \\ &\leq -p|\varepsilon_{\ell+1}^{k+1}| + (1+2p)|\varepsilon_\ell^{k+1}| - p|\varepsilon_{\ell-1}^{k+1}| \\ &\leq |-p\varepsilon_{\ell+1}^{k+1} + (1+2p)\varepsilon_\ell^{k+1} - p\varepsilon_{\ell-1}^{k+1}| \\ &\leq \left| (2-b_1)\varepsilon_\ell^k + (b_k - b_{k-1})\varepsilon_\ell^0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} \varepsilon_\ell^{k-j} \right| \\ &\leq |(2-b_1)|c \|E^0\|_\infty + |(b_k - b_{k-1})|c \|E^0\|_\infty + \left| \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} \right| c \|E^0\|_\infty, \end{aligned}$$

on a b_j est décroissante, alors

$$\begin{aligned} |\varepsilon_\ell^{k+1}| &\leq \left\{ 2 - b_1 - (b_k - b_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) - \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j-1}) \right\} c \|E^0\|_\infty \\ &\leq \{2 - b_1 - (b_k - b_{k-1}) + (b_1 - b_k) + (b_0 - b_{k-1})\} \|E^0\|_\infty \\ &\leq \{(3 - 2b_k)\} c \|E^0\|_\infty \\ &\leq 3c \|E^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\|E^{k+1}\|_\infty \leq C \|E^0\|_\infty.$$

□

Par conséquence, le théorème suivant est obtenu :

Théorème 3.1. *Les approximations des différences finies implicites fractionnaires définies par (3.7) , (3.8) sont **inconditionnellement stables**.*

3.1.4 Convergence du schéma des différences finies

Soit $u(x_i, t - k)$, ($i = 1, 2, \dots, m - 1, k = 1, 2, 3, \dots, n$) est la solution exacte du problème au point de maillage (x_i, t_k) . Définir $e_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k$, ($i = 1, 2, \dots, m - 1, k = 1, 2, 3, \dots, n$) et $e^k = (e_1^k, e_2^k, \dots, e_{m-1}^k)^T$

En utilisant $e^0 = 0$. La remplacement de $u_i^k = u(x_i, t_k) - e_i^k$ en (3.7), (3.8) conduit à :

1. **Pour** $k = 0$, l'équation (3.7) devient :

$$\begin{aligned} &-p [u(x_{i+1}, t_1) - e_{i+1}^1] + (1 + 2p) [u(x_i, t_1) - e_i^1] - p [u(x_{i-1}, t_1) - e_{i-1}^1] \\ &= u(x_i, t_0) - e_i^0 + \tau h_i + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} -pe_{i+1}^1 + (1 + 2p)e_i^1 - pe_{i-1}^1 &= -p [u(x_i, t_1) - 2u(x_i, t_1) + u(x_i, t_1)] + u(x_i, t_1) \\ &\quad - \tau h_i - u_i^0 - \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^1 \\ &= R_i^1, \end{aligned}$$

2. **Pour** $k > 1$, l'équation (3.8) devient :

$$\begin{aligned} &-p [u(x_{i+1}, t_{k+1}) - e_{i+1}^{k+1}] + (1 + 2p) [u(x_i, t_{k+1}) - e_i^1] - p [u(x_{i-1}, t_{k+1}) - e_{i-1}^{k+1}] \\ &= (2 - b_1) [u(x_i, t_k) - e_i^k] + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} [u(x_i, t_{k-j}) - e_i^{k-j}] + (b_k - b_{k-1}) [u(x_i, t_0) - e_i^0] \\ &\quad + b_k \tau h_i + \tau^\alpha \Gamma(3 - \alpha) f_i^{k+1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
-pe_{i+1}^{k+1} + (1 + 2p)e_i^{k+1} - pe_{i-1}^{k+1} &= (2 - b_1)e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1}e_i^{k-j} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1}u(x_i, t_{k-j}) \\
&\quad - p[u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] + u(x_i, t_{k+1}) \\
&\quad - (2 - b_1)u(x_i, t_k) - (b_k - b_{k-1})u(x_i, t_0) - b_k\tau h_i - \tau^\alpha\Gamma(3 - \alpha)f_i^{k+1} \\
&= (2 - b_1)e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1}e_i^{k-j} + R_i^{k+1},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R_i^{k+1} &= - \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1}u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k+1}) - p[u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\
&\quad - (2 - b_1)u(x_i, t_k) - (b_k - b_{k-1})u(x_i, t_0) - b_k\tau h_i - \tau^\alpha\Gamma(3 - \alpha)f_i^{k+1} \\
&= - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} [-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}]u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k+1}) - (2 - b_1)u(x_i, t_k)}_{I_1} \\
&\quad - \underbrace{(b_k - b_{k-1})u(x_i, t_0) - b_k\tau h_i}_{I_2} - p[u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\
&\quad - \tau^\alpha\Gamma(3 - \alpha)f_i^{k+1}.
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \sum_{j=2}^k b_j u(x_i, t_{k-j+1}) - 2 \sum_{j=1}^{k-1} b_j u(x_i, t_{k-j}) + \sum_{j=0}^{k-2} b_j u(x_i, t_{k-j-1}) + u(x_i, t_{k+1}) - (2 - b_1)u(x_i, t_k) \\
&\quad - (b_k - b_{k-1})u(x_i, t_0) - b_k\tau h_i \\
&= \sum_{j=2}^{k-2} b_j [u(x_i, t_{k-j+1}) - 2u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k-j-1})] + \underbrace{b_k [u(x_i, t_{-1}) - 2u(x_i, t_0) + u(x_i, t_1)]}_{j=k} \\
&\quad + \underbrace{b_{k-1} [u(x_i, t_0) - 2u(x_i, t_1) + u(x_i, t_2)]}_{j=k-1} + \underbrace{b_1 [u(x_i, t_{k-2}) - 2u(x_i, t_{k-1}) + u(x_i, t_k)]}_{j=1} \\
&\quad + \underbrace{b_0 [u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1})]}_{j=0} \\
&= \sum_{j=0}^k b_j [u(x_i, t_{k-j+1}) - 2u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k-j-1})].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_i^{k+1} &= \sum_{j=0}^k b_j [u(x_i, t_{k-j+1}) - 2u(x_i, t_{k-j}) + u(x_i, t_{k-j-1})] \\ &\quad - \frac{a\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)}{h^2} [u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\ &\quad - \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) f_i^{k+1}. \end{aligned}$$

De (3.2), (3.6), nous avons

$$\frac{u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_i, t_{k+1}) + c_2 h^2,$$

et

$$\frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k b_j [u(x_i, t_{k-j+1}) - u(x_i, t_{k-j})] = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t_{k+1}^\alpha}(x_i, t_{k+1}) + c_1 \tau^2.$$

Par conséquent

$$R_i^{k+1} = \tau^\alpha \Gamma(3-\alpha) \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{k+1}) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_i, t_{k+1}) - f_i^{k+1} + c_1 \tau^2 + c_2 h^2 \right].$$

De l'équation de diffusion-onde fractionnaire (2.40), On obtient

$$R_i^{k+1} = c_2 h^2 \tau^\alpha + c_1 \tau^{\alpha+2},$$

alors, il existe $c > 0$, tel que

$$|R_i^{k+1}| \leq c (h^2 \tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}) \quad i = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, n.$$

Lemme 3.3. Pour $k = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$\|e^K\|_\infty \leq c b_{k-1}^{-1} (h^2 \tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}).$$

Démonstration. Soient $\|e^1\|_\infty = |e_\ell^1| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |e_i^1|$, $|e_\ell^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |e_i^{k+1}|$. Notez que $b_j^{-1} \leq b_k^{-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$

Pour $k = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} |e_\ell^1| &= -p |e_\ell^1| + (1+2p) |e_\ell^1| - p |e_\ell^1| \\ &\leq -p |e_{\ell+1}^1| + (1+2p) |e_\ell^1| - p |e_{\ell-1}^1| \\ &\leq |-p e_{\ell+1}^1 + (1+2p) e_\ell^1 - p e_{\ell-1}^1| \\ &\leq |R_i^1| \\ &\leq c b_0^{-1} (h^2 \tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}). \end{aligned}$$

Alors

$$\|e^1\|_\infty \leq c b_0^{-1} (h^2 \tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}).$$

Supposer que $\|e^j\|_\infty \leq cb_{j-1}^{-1}(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Soit $|e_\ell^{k+1}| = \max_{1 \leq i \leq m-1} |e_i^{k+1}|$. Notez que $b_j^{-1} \leq b_k^{-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} |e_\ell^{k+1}| &= -p |e_\ell^{k+1}| + (1+2p) |e_\ell^{k+1}| - p |e_\ell^{k+1}| \\ &\leq -p |e_{\ell+1}^{k+1}| + (1+2p) |e_\ell^{k+1}| - p |e_{\ell-1}^{k+1}| \\ &\leq |-pe_{\ell+1}^{k+1} + (1+2p)e_\ell^{k+1} - pe_{\ell-1}^{k+1}| \\ &\leq \left| (2-b_1)e_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1}e_i^{k-j} + R_i^{k+1} \right| \end{aligned}$$

on a b_j est une fonction décroissante, alors

$$\begin{aligned} |e_\ell^{k+1}| &\leq (2-b_1)cb_{k-1}^{-1}(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}) + \left(\sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j+1}) - \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - b_{j-1}) \right) cb_{k-j-1}^{-1}(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}) \\ &\quad + c(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}) \\ &\leq \{(2-b_1) + (b_1 - b_k) - (b_0 - b_{k-1}) + b_k\} cb_k^{-1}(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}), \quad (\text{car } b_j^{-1} \leq b_k^{-1}) \\ &\leq (3-b_{k-1})cb_k^{-1}(h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}). \end{aligned}$$

□

on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k^{-1}}{k^\alpha} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{-\alpha}}{(k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2-\alpha} - 1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{-2}}{1 + (2-\alpha)k^{-1} - 1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha)k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, il y'a une constante ϵ , telle que

$$\frac{b_k^{-1}}{k^\alpha} < \epsilon.$$

Donc

$$\|e^{K+1}\|_\infty \leq c\epsilon k^\alpha (h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}).$$

Et comme $k\tau \leq T$ est fini, alors nous obtenons le résultat suivant

Théorème 3.2. Soit u_i^k la valeur approchée de $u(x_i, t_k)$ calculée à l'aide du schéma des différences finies (3.7) et (3.8), ensuite il y'a une constante positive C , telle que

$$|u_i^k - u(x_i, t_k)| \leq C(h^2 + \tau^2), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, k = 1, 2, \dots, n.$$

Démonstration. on a

$$\begin{aligned}\|e^K\|_\infty &\leq c\epsilon k^\alpha (h^2\tau^\alpha + \tau^{\alpha+2}) \\ &\leq c\epsilon k^\alpha \tau^\alpha (h^2 + \tau^2) \\ &\leq c\epsilon T^\alpha (h^2 + \tau^2) \\ &\leq C (h^2 + \tau^2).\end{aligned}$$

□

3.2 Méthode de Cholesky

L'algorithme de Cholesky peut être utilisé pour obtenir la solution d'un système linéaire à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale comme suit :

Initiation : Soient $g, h, \varphi_1, \varphi_2$ et f des fonctions données, $(n, m) \in \mathbb{N}^*, \alpha \in]1, 2], h = \frac{1}{m}, \tau = \frac{1}{n}, x_i = ih, p = \frac{a\tau^\alpha \Gamma(3-\alpha)}{h^2}, b_j = [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}]$ et $c_{j+1} = -b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}$

1. Éléments de deuxième membre

– pour $k = 0$

Pour $i = 1, 2, \dots, n+1$, on a :

$$r_i = g(x_i) + \Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha f(x_i, t_1),$$

– Pour $k = 1, 2, \dots, m$:

Et pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$\begin{aligned}r_1^{k+1} &= (b_k - b_{k-1})g(x_1) + (2 - b_1)u(x_1, t_k) + c_2u(x_1, t_{k-1}) + \dots + c_ku(x_1, t_1) + b_k\tau_i + p\varphi_1 \\ &\quad + \Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha f(x_i, t_{k+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_i^{k+1} &= (b_k - b_{k-1})g(x_i) + (2 - b_1)u(x_i, t_k) + c_2u(x_i, t_{k-1}) + \dots + c_ku(x_i, t_1) + b_k\tau w_i \\ &\quad + \Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha f(x_i, t_{k+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{n+1}^{k+1} &= (b_k - b_{k-1})gn + 1 + (2 - b_1)u(x_{n+1}, t_k) + c_2u(x_{n+1}, t_{k-1}) + \dots + c_ku(x_i, t_1) \\ &\quad + b_k\tau w_i\varphi_2 + \Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha f(x_i, t_{k+1}),\end{aligned}$$

2. Éléments de matrice

pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a :

$$D_i = (1 + 2p)$$

$$D_{n+1} = (1 + p)$$

$$B_i = -p.$$

Factorisation :

$$d_1 = \sqrt{D_1}$$

Pour $i = 2, \dots, n$, on a :

$$\begin{cases} l_i = \frac{B_{i-1}}{d_{i-1}} \\ d_i = \sqrt{D_i - l_i^2}. \end{cases}$$

Résolution :

$$Ly = r \iff \begin{cases} y_1 = \frac{r_1}{d_1} \\ y_i = \frac{(r_i - l_i y_{i-1})}{d_i} \end{cases} \quad \text{pour tout } i = 2, 3, \dots, n+1.$$

$$L^T u = y \iff \begin{cases} u_n = \frac{y_{n+1}}{d_{n+1}} \\ u_i = \frac{(y_i - l_{i+1} u_{i+1})}{d_i} \end{cases} \quad \text{pour tout } i = n, n-1, \dots, 1.$$

3.3 Application numérique

Dans cette section, nous avons implémenté notre schéma de différence sur un exemple qui supporte l'analyse théorique

Exemple 3.1. Soit $u :]0, 1[\times]0, 1[$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2x(1-x)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + 2(t^2 + 1), & \alpha = 3/2 \\ u(x, 0) = x(1-x) \quad , \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(1, t) = -(t^2 + 1). \end{cases}$$

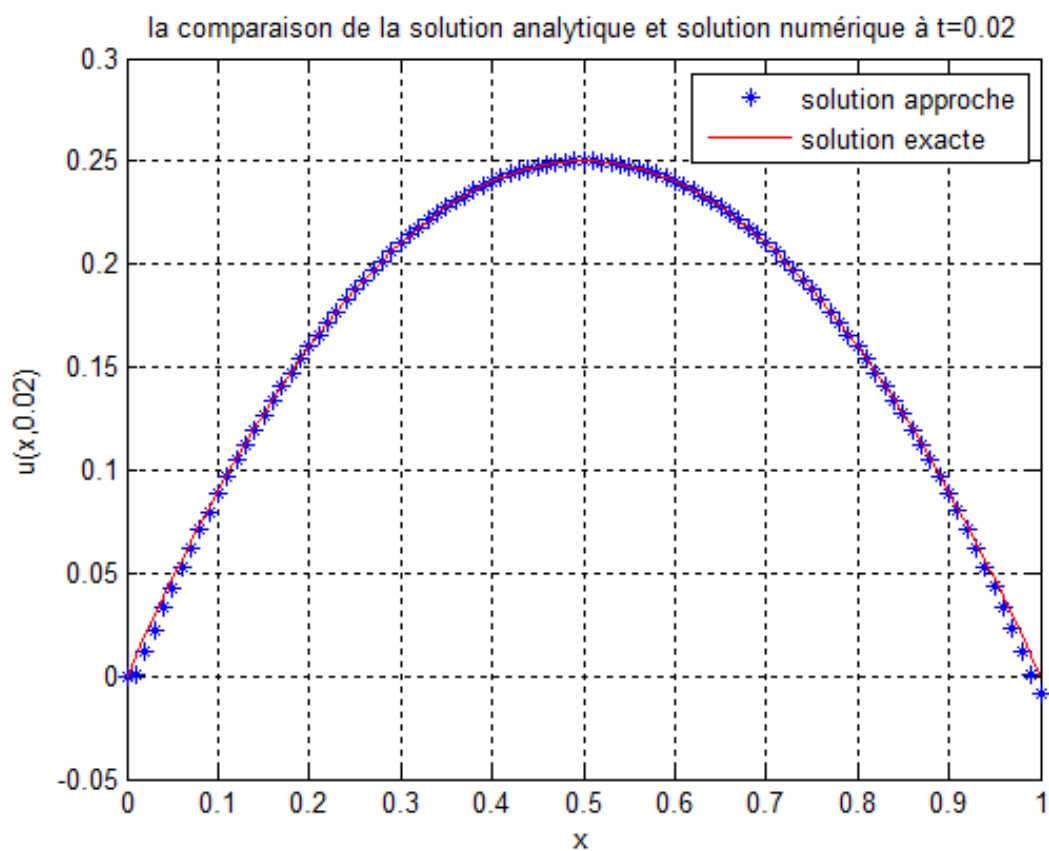
La solution exacte de ce problème est ,

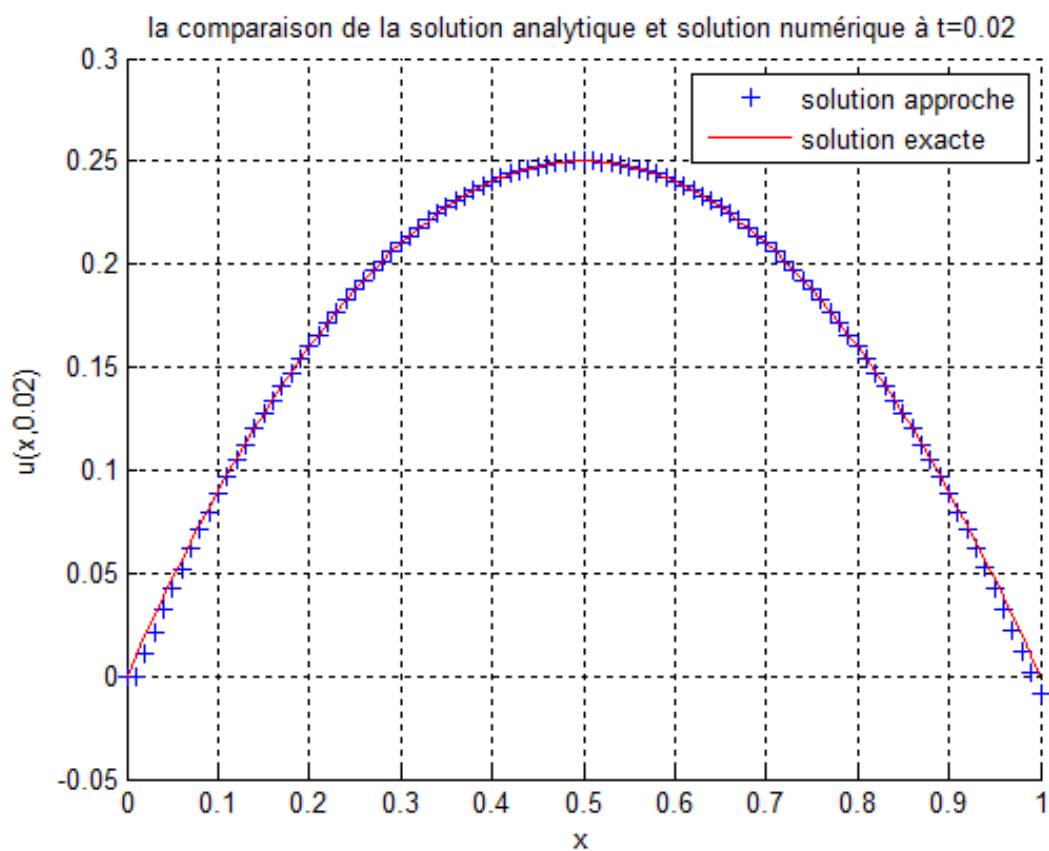
$$u(x, t) = x(1-x)(t^2 + 1)$$

La solution analytique et la solution numérique sont données par les figures :

- FIGURE 3.1 : représente la solution exacte et la solution approche de le premier cas ($\tau = 0.02, h = 0.01, n = 1$ et $t = 0.02$)
- FIGURE 3.2 : représente la solution exacte et la solution approche de le deuxième cas ($\tau = 0.01, h = 0.01, n = 2$ et $t = 0.02$)

Grâce Figures 3.1, Figure 3.2 et Figure ?? on remarque que la solution numérique et la solution exacte sont coïncides.

FIGURE 3.1 – Solution analytique et solution numérique pour 1^{er} cas

FIGURE 3.2 – Solution analytique et solution numérique pour 2^{me} cas

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'évolution pour une équation de diffusion-onde fractionnaire de Caputo en temps avec les trois conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et Mixte.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Étude analytique** : nous avons calculé la solution analytique de l'équation (1) avec des conditions initiales et aux limites de Dirichlet, Neumann et mixte, en utilisant les transformées de Laplace et de Fourier et la méthode de séparation des variables. Cette solution analytique est exprimée par des fonctions de type Mittag-Leffler.
- ✓ **Étude numérique** : nous avons introduit une approximation de différence finie implicite pour l'équation de diffusion-onde (1) avec des conditions aux limites Mixte. La stabilité et la convergence sont démontrées par récurrence, et un exemple numérique a été présenté pour montrer l'efficacité de cette approximation.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème de diffusion-onde fractionnaire de Caputo en dimension deux :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, y, t) = a(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad 1 < \alpha < 2, \\ + \text{Condition initiale,} \\ + \text{Conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

Où $a > 0$ est une constante et f est une fonction donnée.

- ☞ Méthode de transformée différentielle réduite pour la résolution d'équations aux dérivées partielles fractionnaires.

Bibliographie

- [1] O.P. Agrawal. Response of a diffusion-wave system subjected to deterministic and stochastic fields. *J. Angew. Math.Mech.*, 83 :265–274, 2003.
- [2] E. Khadidja et A. Hadjer. Problème de cauchy pour d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf, M'sila, 2017.
- [3] B.I. Henry and S.L. Wearne. Fractional reaction-diffusion. *Phys. A*, 276 :448–455, 2000.
- [4] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [5] A. N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
- [6] T. Kosztolowicz. Subdiffusion in a system with a thick membrane. *J. Membr. Sci.*, 320 :492–499, 2008.
- [7] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339 :1–77, 2008.
- [8] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : A fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339 :1–77, 2008.
- [9] R.R. Nigmatullin. To the theoretical explanation of the universal response. *Physica Status (B) : Basic Res*, 123 :739–745, 1984.
- [10] R.R. Nigmatullin. Realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. *Physica Status (B) : Basic Res.*, 133 :425–430, 1986.
- [11] I. PODLUBNY. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [12] F. Mainardi R. Gorenflo, R. and D. Moretti. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chem. Phys.*, 284 :521–541, 2002.
- [13] F. Mainardi R. Gorenflo, R. and D. Moretti. Time fractional diffusion : A discrete random walk approach. *Nonlinear Dynamics*, 29 :129–143, 2002.
- [14] Y. Luchko R. Gorenflo and F. Mainardi. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation. *J. of Comp. and Appl. Math.*, 118 :175–191, 2000.
- [15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [16] Z.Z. Sun and X.N.Wu. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*, 56 :193–209, 2006.
- [17] Y.POVSTENKO. *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*. ELSEVIER, 2010.

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مسألة تطور لمعادلة انتشار موجة كسرية زمنية مع شروط حدية لدريشلي، نيومان ومختلطة. لقد استنبطنا الحل التحليلي باستخدام محولات فورييه ولاپلاس وكذلك طريقة فصل المتغيرات. بالنسبة للحل العددي، تم إنشاء نظام تقريبي ضمني ثم أثبتنا استقرار وتقارب هذا النظام بواسطة البرهان بالتراجع. وأخيرا، تم تقديم مثال عددي لإظهار فعالية هذا النظام التقريبي.

كلمات مفتاحية: حساب كسري، معادلة انتشار موجة كسرية، طريقة فصل المتغيرات، طريقة الفروق المنتهية، طريقة شولاسكي، محولات فورييه، محولات لاپلاس.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'évolution pour une équation de diffusion-onde fractionnaire en temps avec les trois conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et Mixte. Nous avons calculé la solution analytique en utilisant les transformées de Laplace et de Fourier et la méthode de séparation des variables. Pour la solution numérique, une approximation de différence finie implicite est construite. La stabilité et la convergence sont démontrées par récurrence. Enfin, un exemple numérique a été présenté pour montrer l'efficacité de cette approximation.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire, Équation de diffusion-onde fractionnaire, Méthode de séparation des variables, , Méthode de différences finies, Méthode de Cholesky, Transformée de Fourier, Transformée de Laplace.

In this memoir, we studied a problem of evolution for a time-fractional diffusion-wave equation with three kinds of nonhomogeneous boundary conditions, namely, Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions. We derived the analytic solution using the Laplace and Fourier transforms and method of separating variables. For the numerical solution, an implicit finite difference approximation is constructed. Stability and convergence are demonstrated by recurrence. Finally, one numerical example is presented to show the effectiveness of this approximation.

Keywords : Cholesky method, Finite difference method, Fourier transform, Fractional calculs, Fractional diffusion-wave equation, Laplace transform, Separation of variables method.