Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de M'sila Mohamed Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Mémoire présenté en mathématiques

Troisième année

par

Hadji Imen

Brahimi karima

ETUDIANT

THÈME

Methodes numériques pour calculer les integrales

Soutenu publiquement, le 25/05/2015 devant le jury composé de :

M^r Deloum wahiba

Remerciements

*Avant tout nous tenons à remercier dieu pour nous avoir donne la force pour réaliser ce modeste travail.*Nous remercions la notre encadreure M.Deloum, et nous a approté des consiels précieux durant toutes les étapes de ce travaille Nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés de prés ou de loisn par leurs relectures leur corections et leurs remarque pertinentes.

Table des matières

0.1 Introduction

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souven des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer.Voici quelques exemples:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \int\limits_0^1 \cos x^2 dx$$

Dans ce travaill, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée. Le chapitre 1 parle sur l'integrale géneral (Primitive d' une fonction,Intégration par parties,Intégrale de Riemann)et le chapitre 2 on utiliser les méthodes numériques(point milieu ,simpson et trapèze) pour calculer les integrales et chapitre 3 on appliquer les méthodes dans matlab et on comparer pour savoir la meilleur methode.

Chapitre 1

Généralités sur les integrales

soit f une fonction définie sur un intervale de la forme $[a, b[$ avec $b \leq \infty$, on dit que f est localement intégrable sur $I \in [a, b[$ fermé borné. on dit que l'itegrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

tend vers une limite l finie lorsque x tend vers b.

1.1 Primitive d' une fonction

soit f une fonction continue sur $I \subset R$ et F une primitive de f. Alors toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ ou C est une constante (on note parfois $C \in \mathbb{R}$).

Démonstration. : ■

Montrons d'abord que si F est une primitive de $f \implies F + C$ est une primitive. en effet

$$(F(x) + C)\prime = F\prime(x) + C\prime = f(x).$$

Montrons maintenant que si G est primitive $\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ t.q $G = F + C$

$$(G - F)\prime(x) = G\prime(x) - F\prime(x) = f(x) - f(x) = 0 .$$

si la dérivée de $(G - F)$ est nulle ,on a $(G - F) = C$, $C \in \mathbb{R}$. donc $G = F + C$.

1.1.1 Recherche de primitives

Maintenant que nous avons une idée un peu plus précise de ce qu'est une integrale,ainsi que de certaines de ses propriété, nous allons nous attacher au calcul de celle-ci.Plusieurs méthodes sont présentées dans ce qui suit.

1.1.2 Intégration par identification :

On regarde si l'on reconnait l'integrale comme la dérivée d'une fonction(ou fonction composée) connue.*

-si $f(x) = F'(x)$, alors on a directement $\int f(x)dx = F(x) + c$.

-si $f(x) = H\prime(u(x))u\prime(x)$, alors on a $\int f(x)dx = H(u(x)) + c$.

En effet, $\int f(x)dx = \int H\prime(u(x))u\prime(x)dx = \int(H(u(x))\prime dx = H(u(x)) + c$.

1.1.3 Intégration par parties:

Rappel:

dérivée d'un produit de fonction $U(x)V(x)$: $(UV)\prime = U\prime V + UV\prime$ en intégrant,

$$\int(U(x)V(x))\prime dx = \int U(x)V(x)dx + \int U(x)V(x)dx.$$
$$U(x)V(x) = \int U\prime(x)V(x)dx + \int U(x)V(x)dx.$$
$$\int U\prime(x)V(x)dx = \int U(x)V(x) - \int U(x)V\prime(x)dx.$$

Ou,par abus de notation: $\int U\prime V dx = UV - \int UV\prime dx$.L'idée est de choisir les fonction $U\prime$ et V formant l'integrant telles que $U\prime$ et $UV\prime$ soient plus faciles à intégrer. le plus simple pour comprendre reste l'exemple.

1.1.4 Integration par changement de variable

On peut considérer x comme une fonction de la variable t : $x = \varphi(t)$. le changement de variable peut rendre l'intégrant plus facilement intégrable. La difficulté réside dans le choix de la fonction $\varphi(t)$. le changement de variable doit impérativement étre inversible, φ doit étre bijective, $t = \varphi(x)$ posons $x = \varphi^{-1}(t)$ pour calculer $\int f(x)dx$, ou φ est bijective.on obtient clairement que

$f(x) = f(\varphi(t))$.sans en donner la démonstration, on a:

$$dx = \varphi\prime(t)\, dt.$$

donc l'intégrale devient:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi\prime(t)\, dt.$$

1.1.5 Intégration des fonctions rationnelles

Les fonctions du type $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peuvent étre integrées de manière efficace ,mais parfois fastitieuse, gràce à une décomposition dite en éléments simple .une fois la fonction est décomposée il suffit d'intégrer,les éléments simples. cette méthode n'est pas trés difficile à comprendre ,mais malheureusement trés lourde

Aire analytique

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, a et b deux points de l'intervalle I, tels que $a < b$.on cherche à définir le symbole $\int f(t)\, dt$ pour que ce nombre représente l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe Ox, et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

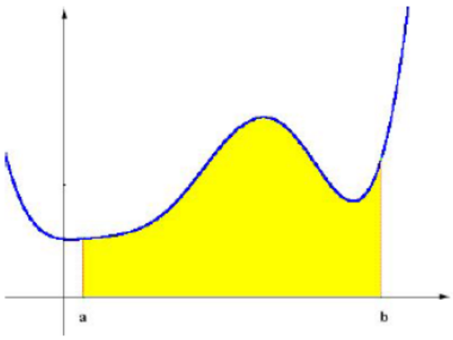


Figure 1—L'aire en jaune représente le nombre $\int_a^b f(t)dt$

l'aire analytique est positive (respectivement négative) sur les parties du domaine ou $f(t)$ est positive (resp.négative). $\displaystyle\int f(t)dt$ doit représenter l'aire analytique de $f(t)$ entre les deux points a et b. Pour calculer l'air on doit:

-Diviser l'intervalle $[a, b]$ en sous intervales

-Encadrer la fonction par des droites sur chaque sous intervalle .(f doit donc être bornée).

-Additionner les aires correspondantes

Somme de Riemann

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles $[x_k, x_{k+1}], k = 0, ..., N$ avec $x_0 = a$ et $x_{N+1} = b$.Choisissons de plus $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ dans chaque sous intervalle. La constante qui nous permettra d'$\ll$ *encadrer* $\gg$ la fonction sera donnée par $f(c_k)$. L'aire analytique A_k d'un rectangle est donc : $A_k = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$

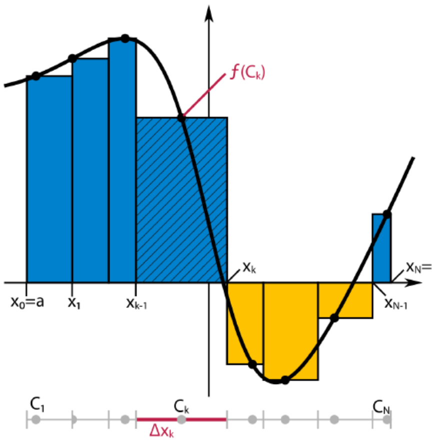
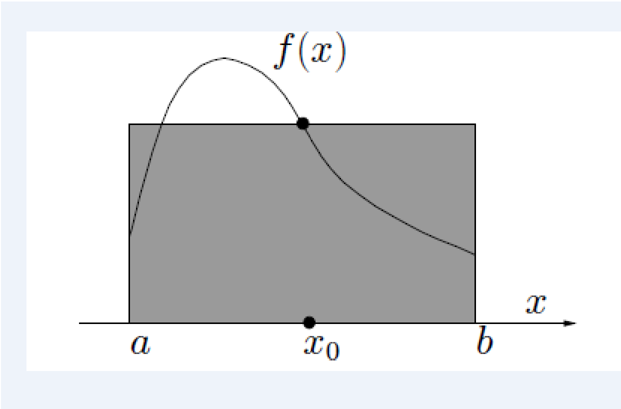


Figure3_Somme de Riemann de f entre a et b.Hachuré: aire analytique d'un rectangle

posons $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$ et:

$$S_n = \sum f(c_k) \triangle x_k \tag{1.1.1}$$

S_n est appelée la somme de Rimann de f sur $[a, b]$.C'est une approximation de l'aire analytique cherchée,la somme des aires positives (bleu) et négative (jaune) de la figure 3. S_n dépend du découpage en N intervalle et du choix des C_k.Plus les $\triangle x_k$ sont petits ,plus l'approximation est bonne.



1.1.6 Intégrale de Riemann

Définition 1.1.1 : (*d'une fonction intégrable au sens de Riemann*).

Si pour $N \to \infty$ chaque $\triangle x_k \to 0$ et si $lim_{N \to \infty} Sn$ existe ($\neq \pm\infty$) et est indépendante du découpage et du choix C_k alors on dit que f est integrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.La limite $lim_{N \to \infty} Sn$ est appelé integrale définie de f sur $[a, b]$.On la note $\int f(t)dt$:

$$Lim\ Sn = Lim \sum f(c_k) \triangle x_k = \int f(t)dt$$

Ainsi $\int f(t)dt$ est l'aire analytique du domaine délimité par la courbe f,l'axe O_x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Condition pour qu'une fonction soit intégrable

Toute fonction continue et définie sur l'intervalle $[a, b]$ est integrable. IL n'est pas possible de fournir une démonstration ici.Elle repose entre autre sur le fait que, quel que soit le découpage et,quel que soit le C_k choisi, $f(c_k)$ existe car $c_k \in [a, b]$ et f est définie sur $[a, b]$.

Théorème 1.1.1 : (*fondamental du calcul intégral*)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $a < b$ et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a, b]$.Alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On sait que $G(\mathbf{x}) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.Mais comme F est également une primitive de f,on sait que $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + C, \ \forall x \in [a, b]$.

Mais

$$G(a) = \int f(t)dt = 0.$$

On a

$$F(a) = G(a) + C.$$

Et donc

$$F(x) = G(x) + F(a).$$

Ainsi ,on obtient que

$$\int f(t)dt = G(b) = G(b) - G(a) = (G(b) + F(a)) - (G(a) + F(a)) = F(b) - F(a)$$

Nous utiliserons très souvent la notation suivante:

$$f(b) - f(a) = f(x) \mid_a^b$$

Remarque 1.1.1 :

soit F une primitive de f sur $[a, b]$. On aurait donc pu écrire:

$$\int f(x)dx = F(x) \mid_a^b$$

Cette notation est trés utilisée pour améliorer la lisibilité des calculs.

Chapitre 2

Intégration numérique

Nous présentons dans ce chapitre les méthodes les plus couramment utilisées pour l'intégration numérique. Bien que nous limitions essentiellement aux intégrales sur des intervalles bornés, nous abordons aux Sections 2.2.3 et 2.2.4 des extensions aux intervalles non bornés (ou à des fonctions ayant dessingularités) et au cas multidimensionnel.

2.1 Formules de quadrature

Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Le calcul explicite de l'intégrale définie $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$ peut etre difficile, voire impossible. On appelle formule de quadrature ou formule d'integration numérique toute formule permettant de calculer une approximation de $I(f)$.Une possibilité consiste a remplacer f par une approximation f_n, ou n est un entier positif, et calculer $I(f_n)$ au lieu de $I(f)$. En posant $I(f) = I(f_n)$,

$$I(f) = \int_a^b f_n(x)dx, \qquad n \geqslant 0.$$

La dépendance par rapport aux extrémités a, b sera toujours sous-entendue.On écrira donc I_n (f)au lieu de $In(f; a, b)$.

Si $f \in C^0([a, b])$, l'erreur de quadrature $E_n(f) = I(f) - In(f)$ satisfai

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq (b - a) \parallel f - fn \parallel \infty.$$

Donc, si pour un certain n, $\parallel f - f_n \parallel \infty < \varepsilon$, alors $|E_n(f)| \leq \varepsilon(b-a)$. L'approximation f_n doit etre facilement intégrable, ce qui est le cas si, par exemple, $f_n \in P_n$. Une approche naturelle consiste à prendre $f_n = \Pi n f$, le polynome d'interpolation de Lagrange de f sur un ensemble de $n+1$ noeuds distincts$\{x_i, i = 0, ..., n\}$. Ainsi, on déduit de (1.1) que

$$I_n(f) = \sum f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx$$

Ou il est le polynome caractéristique de Lagrange de associé au noeud x_i . On notera que (2.0.1) est un cas particulier de la formule de quadrature suivante:

$$I_n(f) = \sum a_i f(x_i),$$

Ou les coefficients α_i de la combinaison linéaire sont donnés par $\int_a^b L_i(x)dx$. La formule (2.0.2) est une somme pondérée des valeurs de f aux points x_i,pour $i = 0, ..., n$. On dit que ces points sont les noeuds de la formule de quadrature, et que les nombres $\alpha_i \in R$ sont ses coefficients ou encore ses poids. Les poids et les noeuds dépendent en général de n; à nouveau, pour simplifier l'écriture, cette dépendance sera sous-entendue.

La formule (2.0.2), appelée formule de quadrature de Lagrange, peut etre généralisée au cas ou on connait les valeurs de la dérivée de f. Ceci conduit à la formule de quadrature d'Hermite .

Les formules de Lagrange et celles d'Hermite sont toutes les deux des formules de quadrature interpolatoires, car la fonction f est remplaçée par son polynome d'interpolation (de Lagrange et d'Hermite respectivement). On définit le degré d'exactitude d'une formule de quadrature comme le plus grand entier $r \geq 0$ pour lequel

$$I_n(f) = I(f) \forall f \in Pr.$$

Toute formule de quadrature interpolatoire utilisant $n+1$ noeuds distincts a un degré d'exactitude au moins égal à n. En effet, si $f \in P_n$, alors $\Pi_n f = f$

et donc $I_n(\Pi nf) = I(\Pi nf)$. La réciproque est aussi vraie : une formule de quadrature utilisant $n+1$ noeuds distincts et ayant un degré d'exactitude au moins égal à n est nécessairement de type interpolatoire.

Comme nous le verrons le degré d'exactitude peut meme atteindre $2n+1$ dans le cas des formules de quadrature de Gauss.

2.2 Quadratures interpolatoires

Nous présentons dans cette section trois cas particuliers de la formule (2.0.2) correspondant à $n = 0$, 1 et 2.

2.2.1 Formule du rectangle ou du point milieu

Cette formule est obtenue en remplaçant f par une constante égale à la valeur de f au milieu de $[a, b]$ (voir Figure .1, à gauche), ce qui donne

$$I_0(f) = (b-a)f(\tfrac{a+b}{2})$$

Le poids est donc $\alpha_0 = b-a$ et le noeud $x_0 = (a+b)/2$. Si $f \in C^2([a, b])$,l'erreur de quadrature est:

$$E_0(f) = \tfrac{h^3}{3} f''(\xi), \qquad h = \tfrac{b-a}{2}$$

où ξ est dans l'intervalle$]a, b[$.

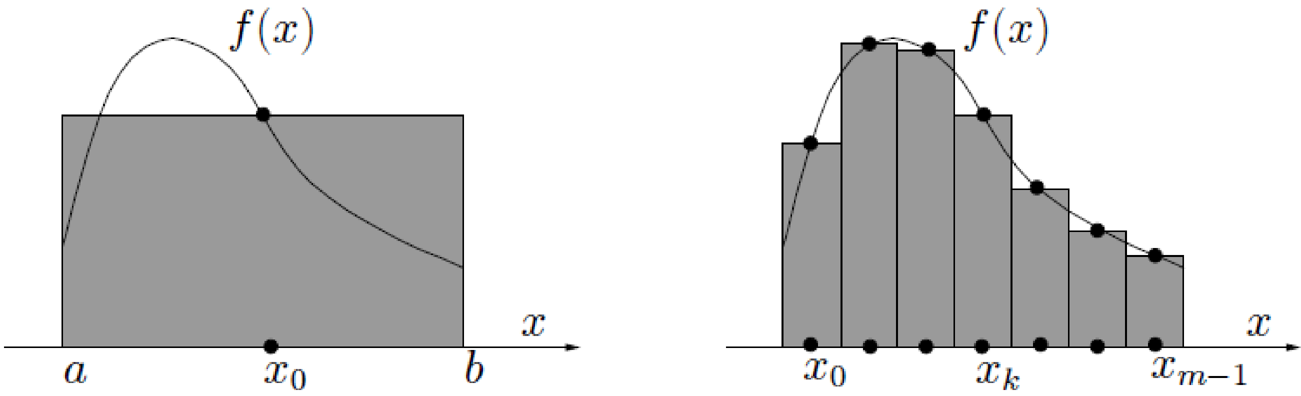


Fig. 1.1. La formule du point milieu (à gauche) ; la formule composite du point milieu (à droite)

En effet, le développement de Taylor au second ordre de f en $c = (a + b)/2$ s'écrit:

$$f(x) = f(c) + f\prime(c)(x - c) + f(\eta(x))(x - c)2/2,$$

D'ou l'on déduit (2.0.4) en intégrant sur$[a, b]$ et en utilisant le théorème de la moyenne. On en d´eduit que(1.5) est exacte pour les constantes et les fonctions affines (car dans les deux cas $f(\zeta) = 0$ pourtout $\zeta \in]a, b[$). Le degré d'exactitude de la formule du point milieu est donc égal à 1.Il faut noter que si la longueur de l'intervalle $[a, b]$ n'est pas suffisamment petite, l'erreur de quadrature(2.0.4) peut etre assez importante. On retrouvecet inconvénient dans toutes les formules d'intégration numérique présentées dans les trois prochaines sections. Ceci motive l'introduction des formules composites que nous verrons à la Section 1.4

Supposons maintenant qu'on approche l'intégrale $I(f)$ en remplaçant f par son interpolation polynomiale composite de degré 0 sur $[a, b]$, construite sur m sous-intervalles de largeur $h = (b - a)/n$, avec $n \geq 1$(voir Figure 1.1) $x_k = a + (2k + 1)h/2$ pour$k = 0, ..., n - 1$, on obtient la formule composite du point à droite). En introduisant les noeuds de quadrature milieu

$$I_{0,n}(f) = h \sum f(x_k), n \geq 1.$$

Si $f \in C^2([a, b])$, l'erreur de quadrature $E_{0,n}(f) = I(f) - I_{0,n}(f)$ est donnée par

$$E_{0,n}(f) = \tfrac{b-a}{24} h^{2f''(\zeta)},$$

Ou $\zeta \in]a, b[$. On déduit de (2.0.7) que (2.0.6) a un degré d'exactitude égal à 1; on peut montrer (2.0.7) en utilisant (2.0.5) et la linéarité de l'intégration. En effet, pour $k = 0, ..., n - 1$ et $\zeta_k \in]a + kh, a + (k + 1)h[$,

$$E_{0,n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f''(\zeta_k)(h/2)^3/3 = \sum_{k=0}^{m-1} f''(\zeta_k)\tfrac{h^2}{24}\tfrac{b-a}{n} = \tfrac{b-a}{24}h^2 f''(\zeta).$$

La derniére égalité est une conséquence du théorème suivant, qu'on applique en posant $u = f$ et $\sigma j = 1$ pour $j = 0, ..., m - 1$.

Théorème 2.2.1 (*de la moyenne discrète*) :

$s + 1$ points de $[a, b]$ et σj $s + 1$ constantes, toutes de meme signe. Alors,il existe $\eta \in [a, b]$tel que:

$$\sum_{j=0}^{s} \sigma j u(xj) = u(\eta) \sum_{j=0}^{s} \sigma j.$$

Soit $u_n = min_{x\in[a,b]}\ u(x) = u(\bar{x})$ et $u_n = max_{x\in[a,b]} u(x) = u(\bar{x})$, ou $\bar{x}$ et $\bar{x}$ sont deux points de $[a, b]$. Alors

$$u_n \sum_{j=0}^{s} \sigma_j \leq \sum_{j=0}^{s} \sigma_j$$

On pose $\sigma_s = \sum_{j=o}^{s} \sigma_j u(x_j)$et on considère la fonction continue $U(x) = u(x) \sum_{j=0}^{s} \sigma_j$.

D'après (2.0.9), $U(\bar{x}) \leq \sigma_s \leq U(\bar{x})$. Le théorème de la moyenne donne l'existence d'un point η entre a et b tel que $U(\eta) = \sigma_s$, d'ou (2.0.8). Une preuve similaire peut etre faite si les coefficients σ_j sont négatifs.

La formule composite du point milieu est implémentée dans le Programme 1 ;Dans tout ce chapitre, nous noterons a et b les extrémités de l'intervalle d'intégration et n le nombre de sous-intervalles de quadrature. La variable fun contient l'expression de la fonction f, et la variable int contient en sortie la valeur approchée de l'intégrale.

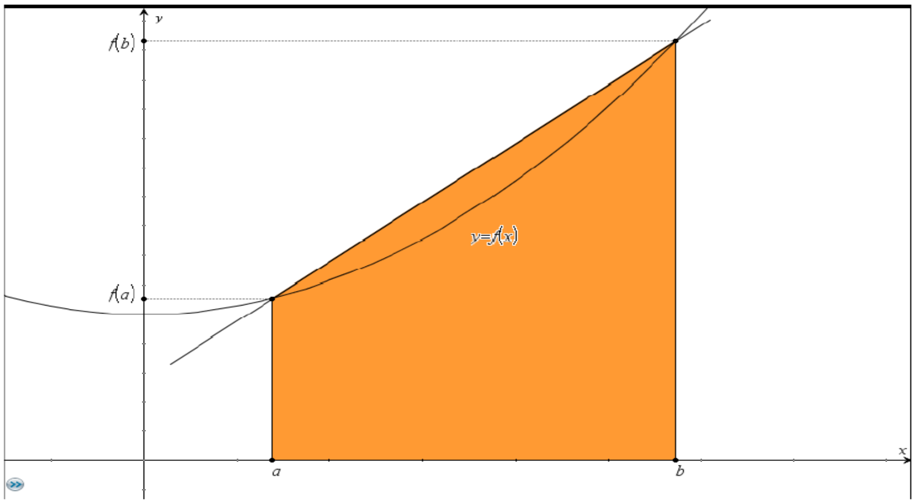
2.2.2 Méthode des trapèzes

Principe de la méthode

On se base sur une interpolation par un polynôme de degré 1. On remplace la fonction f par la fonction affine g qui coïncide avec f en a et en b, autrement dit par :

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

On approxime alors le nombre I par $\int_a^b g(x)dx(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = T$, c'est-à-dire, dans le cas où la fonction f est positive, par l'aire du trapèze rectangle dont les sommets ont pour coordonnées $(a,0),(a,f(a)),(b,0)$et$(b,f(b))$



Majoration de l'erreur due à la méthode

Si la fonction f est de classe C^2 sur l'intervalle$[a;b]$ et si M_2 désigne le maximum de f"sur $[a;b]$, alors $\mid I - T \mid \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2$.

Démonstration. :

Commençons par voir à quoi peut bien ressembler $I - T$ ■

$$\begin{aligned} E = I - T &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b (\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a))dx \\ &= \int_a^b \left(f(x) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) dx \end{aligned}$$

C'est ce que l'on cherche à intégrer qui doit guider… Or:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = (x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \text{ pour } x \neq a,$$

avec un deuxième facteur qui est bien de la forme $\phi(x) - \phi(b)$[15] en posant:

$$\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Le problème, c'est qu'on doit avoir une fonction définie et continue sur $[a;b]$... et notre fonction ϕ n'est pas définie en a. Qu'à cela ne tienne posons $\phi(a) = f'(a)$ et par définition de la dérivée,on peut bien affirmer que la fonction ϕ est continue sur$[a;b]$.

D'autre part, elle est clairement dérivable sur $]a;b]$. Peu importe ce qui se passe en a, cela suffit pour appliquer le théorème des accroissements finis. Pour tout x de $[a;b]$, il existe donc un réel c de $]x;b[$ tel que:

$$\phi(x) - \phi(b) = (x-b)\phi'(c)$$

ou encore pour $x \neq a$:

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} + (x-b)\phi'(c)$$

soit en multipliant par $x-a$ non nul des deux côtés:

$$f(x) - f(a) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + (x-a)(x-b)\phi'(c).$$

Il est par ailleurs immédiat de vérifier que cette dernière égalité est encore vraie pour $x = a$: on trouve de chaque côté du symbole «=» le réel 0.

Il n'en faut pas plus pour majorer l'erreur E. Déroulons maintenant les calculs :

$$E = \int_a^b \left(f(x) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) dx = \int_a^b (x-a)(b-x)\phi'(c)dx;$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mid E \mid \leq \mid \int_a^b (x-a)(b-x)\phi'(c)dx \mid \leq \mid \phi'(c) \mid \int_a^b (x-a)(b-x)dx \\ \leq \sup_{x\in]a,b]} \mid \phi'(x) \mid * \int_a^b (x-a)(b-x)dx \end{aligned}$$

Occupons-nous de chacun des facteurs.

Calculons la dérivée de ϕ pour x différent de a. Avec les règles habituelles de calcul, il vient :

$$\phi'(x) = \tfrac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2} = \tfrac{f(a)-f(x)-(x-a)f'(x)}{(x-a)^2}$$

qui peut s'écrire, au moyen de la formule de Taylor-Lagrange:

$$\phi'(x) = \frac{\frac{(x-a)^2}{2} f''(d)}{(x-a)^2} = \frac{f''(d)}{2} \ , \quad d\epsilon]a; x[.$$

Il en ressort que $\mid \phi'(x) \mid \leq \frac{M_2}{2}$ pour tout x de l'intervalle $]a; b]$. Il en est de même de $sup_{x\in]a;b]} \mid \phi'(x) \mid$ .Le calcul au demeurant n'est guère délicat, même à la main. Procédons par changement de variable en posant $X = x - c$ où $c = \frac{a+b}{2}$,donc $dX = dx$.

L'intégrale devient :

$\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \int_{a-c}^{b-c} (X+c-a)(b-X-c)dX = \int_{-h}^{h} (X+h)(X-h)dX$

en posant $h = \frac{b-a}{2}$. Poursuivons le calcul:

$\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \int_{-h}^{h} (h^2 - X^2)dX = 2h^3 - \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-h}^{h} = 2h^3 - \frac{2h^3}{3} = \frac{4h^3}{3}$

$$= \frac{4(b-a)^3}{24} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

En conclusion, on peut écrire que:

$$\mid E \mid \leq \sup_{x\in]a,b]} \mid \phi'(x) \mid \int_a^b (x-a)(b-x)dt \leq \frac{M_2}{2}\frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

ce que nous avons annoncé... Le calcul n'est pas fondamentalement délicat une fois que l'idée de début a été bien comprise ! Il faut juste être patient

Méthode composite des trapèzes

Si la fonction f est de classeC^2 sur l'intervalle $[a; b]$ et si M_2 désigne le maximum de f''sur $[a; b]$, Alors on peut approximer I par:

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \ :$$

L'erreur commise est majorée par: $\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$.

Appliquons le résultat précédent pour chacun des intervalles$[x_k, x_{k+1}]$,pour k variant entre 0 et $n-1$. On obtient :

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^3} M_2 \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} M_2.$$

En ajoutant membre à membre toutes ces inégalités – il y en a n –, on arrive à :

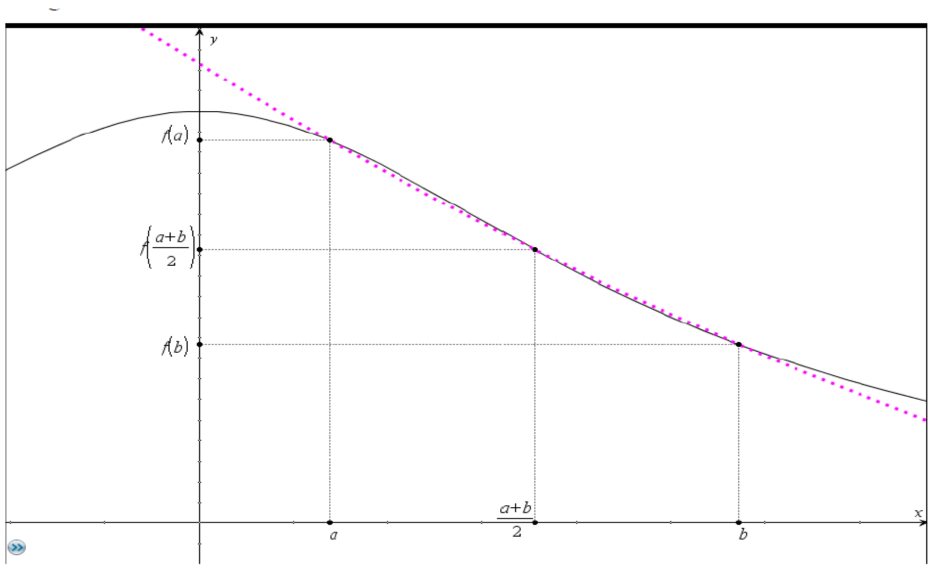
$$-\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

... c'est bien le résultat auquel on doit parvenir !

2.2.3 Méthode de Simpson

Principe de la méthode

Interpolons maintenant la fonction f par la fonction polynôme g de degré 2 qui coïncide avec f aux points a, b et $\frac{a+b}{2}$.En pointillé sur le dessin qui suit, est tracée la courbe représentative de g,fonction polynôme du second degré, qui passe par les points de coordonnées$(a, f(a)), (b, f(b))$ et $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$Nous avons juste besoin de préciser ce que vaut l'intégrale d'une telle fonction du second degré.



Détermination de la fonction g

Sa détermination effective n'est pas utile pour le calcul approchée de l'intégrale mais nous nous servirons de ce résultat pour l'illustration graphique.

Nous chercherons la fonction g sous la forme $g(x) = A(x-c)^2 + B(x-c) + c$ en posant $c = \frac{a+b}{2}$ Traduisons les conditions pour déterminer les constantes A, B et C :

$$f(a) = g(a) = A(a-c)^2 + B(a-c) + c = A\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a-b}{2}\right) + c$$
$$f(b) = g(b) = A(b-c)^2 + B(b-c) + c = A\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b-a}{2}\right) + c$$
$$f(c) = g(c) = c = f(\frac{a+b}{2})$$

La dernière égalité donne immédiatement : $c = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(c)$

Pour obtenir A et B, il reste à résoudre le système:

$$A\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(c) = f(a)$$
$$A\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - B\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(c) = f(b)$$

On en déduit,successivement par addition, puis soustraction membre à membre:

$$A = \frac{2(f(a)+f(b)-2f(c))}{(a-b)^2}$$
$$B = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Si bien que la fonction g est définie par:

$$g(x) = \frac{2(f(a)+f(b)-2f(c))}{(a-b)^2}(x-c)^2 + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-c) + f(c)$$

en rappelant que : $c = \frac{a+b}{2}$

Valeur de l'intégrale $S = \int_a^b g(x)dx$

Nous en aurons par contre besoin pour la mise en oeuvre effective de la méthode de Simpson. Il se trouve que l'intégrale ne dépend que de $g(a)$, $g(b)$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$, autrement dit de la valeur de la fonction en seulement trois réels. C'est ce que l'on appelle parfois la formule des trois niveaux. On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 (*formule des trois niveaux*)

Soit g une fonction polynôme de degré au plus 2.

$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right]$.

Démonstration. : ■

Plutôt que de faire un calcul général d'emblée, nous allons nous appuyer sur des propriétés de linéarité.Tout d'abord, la formule est vraie si la fonction g est affine.

En effet, d'une part, il est clair que $\int\limits_a^b g(x)\,dx = (b-a)\,\frac{g(a)+g(b)}{2}$

D'autre part, puisque g est une fonction affine, on sait que

$g\left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{1}{2}g(a) + \frac{1}{2}g(b)$ et l'on peut écrire:

$$\frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right]=\frac{b-a}{6}\left[g(a)+2g(a)+2g(b)+g(b)\right]$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[g(a)+g(b)\right]$$

ce qui prouve l'égalité.

Montrons maintenant que la formule est vraie pour la fonction carré.On a en effet :

$$\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3}$$

tandis que :

$$\frac{b-a}{6}\left[g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right]=\frac{b-a}{6}(a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{b-a}{6}\left(a^2+a^2+2ab+b^2+b^2\right)\\&=\frac{b-a}{6}\left(2a^2+ab+2b^2\right)\\&=\frac{b-a}{6}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{b^3-a^3}{3}\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire, l'égalité annoncée est bien vraie pour tout polynôme de degré au plus 2.

Méthode de Simpson

Nous sommes en mesure de donner tous les éléments de la méthode de Simpson. Avec les notations habituelles,on est donc amener à approximer le nombre $I=\int_a^b f(x)\,dx$ par:

$\int_a^b g(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left(g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

puisque g est le polynôme d'interpolation de f de degré 2 aux points a,b et $\frac{a+b}{2}$

Majoration de l'erreur due à la méthode

Si la fonction f est de classe C^4 sur l'intervalle $[a;b]$ et si M_4 désigne le maximum de$\left|f^{(4)}\right|$ sur $[a;b]$, alors $|I-S|\leq\frac{(b-a)^5}{2880}M_4$.Comme précédemment, on peut remarquer que cette majoration, qui fait intervenir la dérivée quatrième, montre que la méthode de Simpson est d'ordre 3 : autrement dit,elle est exacte pour tous les polynômes de degré 3, dont la dérivée quatrième est nulle!

commençons par déterminer ce que vaut $I-S$.Si on appelle F une primitive de f sur $[a,b]$,on peut écrire:

$$I-S=\int_b^a f(t)\,dt=\tfrac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$
$$F(b)-F(a)-\tfrac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Il est intéressant dans cette formule de faire apparaître la symétrie autour de $c=\frac{a+b}{2}$.

En posant $h=\frac{b-a}{2}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$I-S=F(c+h)-F(c-h)-\tfrac{h}{3}\left(f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right)$$

Soit alors M le nombre réel tel que:

$$F(c+h)-F(c-h)-\tfrac{h}{3}\left(f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right)=Mh^5$$

Observons que M est bien toujours défini. Il vaut :

$$\frac{F(c+h)-F(c-h)-\frac{h}{3}(f(c-h)+4f(c)+f(c+h))}{h^5}=M.$$

Passons maintenant à une fonction. Pour t appartenant à $[0;h]$, on définit la fonction G par :

$$G(t)\,cF(c+t)-F(c-t)-\tfrac{t}{3}\left(f(c-t)+4f(c)+f(c+t)\right)-Mt^5$$

Il est clair que G est continue et dérivable sur $[0;h]$.Par ailleurs, d'après la définition de M et celle de G, on peut écrire :

d'une part,

$$G(h)=F(c+h)-F(c-h)-\tfrac{h}{3}\left(f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right)-Mt^5=0.$$

d'autre part,

$$G(0)=F(c+0)-F(c-0)-\tfrac{0}{3}\left(f(c-0)+4f(c)+f(c+0)\right)-M0^5=0.$$

D'après le théorème de *Rolle* sur $[0;h]$, il existe un réel c_1 de l'intervalle $]0;h[$ tel que $G\prime\,(c_1) = 0$.

Calculons donc $G\prime(t)$ sur $[0;h]$.

$G\prime(t) = f\,(c+t) + f\,(c-t) - \frac{1}{3}\,(f\,(c-t) + 4f\,(c) + f\,(c+t)) - \frac{t}{3}\,(f\prime\,(c-t) - f\prime\,(c+t)) - 5Mt^4$

$$= \tfrac{2}{3}f\,(c+t) + \tfrac{2}{3}f\,(c-t) - \tfrac{4}{3}f\,(c) - \tfrac{t}{3}\,(f\prime\,(c-t) - f\prime\,(c+t)) - 5Mt^4$$

On peut encore poursuivre l'application du théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;c_1]$ car $G\prime(0) = 0 = G\prime(c_1)$. Les hypothèses sont bien remplies et l'on peut déduire l'existence d'un réel c_2 de l'intervalle $]0;c_1[$ tel que $G"(c_2) = 0$.

Calculons donc $G"(t)$ sur $[0;h]$. Tous calculs faits, on arrive à :

$G"(t) = \frac{2}{3}f\prime\,(c+t) - \frac{2}{3}f\prime\,(c-t) - \frac{1}{3}\,(f\prime\,(c-t) - f\prime\,(c+t)) - \frac{t}{3}\,(f"\,(c-t) - f"\,(c+t))\,c - 20Mt^3$

$$= -\tfrac{1}{3}f\prime\,(c+t) - \tfrac{1}{3}f\prime\,(c-t) - \tfrac{t}{3}\,(f"\,(c-t) - f"\,(c+t)) - 20Mt^3$$

Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Comme $G"(0) = 0 = G"(c_2)$,d'après le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;c_2]$, il existe donc un réel c_3 de l'intervalle $]0;c_2[$ tel que $G^3\,(c_3) = 0$.Or :

$$G^3(t) = -\tfrac{1}{3}f"(c+t) - \tfrac{1}{3}f"(c-t)$$
$$-\tfrac{t}{3}\,(f"\,(c-t) - f"\,(c+t)) - \tfrac{t}{3}\left(f^{(3)}\,(c-t) - f^{(3)}\,(c+t)\right) - 60Mt^2$$

$$= -\tfrac{t}{3}\left(f^{(3)}\,(c-t) - f^{(3)}\,(c+t)\right) - 60Mt^2$$

Inutile d'aller plus loin. L'expression obtenue est suffisamment simple. On peut alors écrire :

$$G^3(c_3) = -\tfrac{c_3}{3}\left(f^{(3)}\,(c_3-t) - f^{(3)}\,(c_3+t)\right) - 60Mc_3^2 = 0.$$

d'où l'on peut déduire :

$$M = -\tfrac{1}{180}\tfrac{\left(f^{(3)}(c-c_3) - f^{(3)}(c+c_3)\right)}{c_3} = -\tfrac{1}{180}\tfrac{2c_3f^{(4)}(c_4)}{c_3} = -\tfrac{f^{(4)}(c_4)}{90}$$

Où $c_4 \in]c - c_3; c - c_3[$ d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f^{\ (3)}$sur l'intervalle $[c - c_3; c - c_3]$.Il en résulte immédiatement que:

$$|M| \leq \tfrac{1}{90} M_4$$

et donc :

$$\begin{aligned} |I - S| &= \left| F(c+h) - F(c-h) - \tfrac{h}{3} \left(f(c-h) - 4f(c) + f(c+h) \right) \right| \\ &= |Mh^5| \leq \tfrac{M_4}{90} \tfrac{(b-a)^5}{32} = \tfrac{M_4 (b-a)^5}{2880} \end{aligned}$$

C'est bien ce que l'on cherchait à prouver

Méthode composite de Simpson

Si la fonction f est de classe C_4 sur l'intervalle $[a; b]$ et si M_4 désigne le maximum de $\left| f^{(4)} \right|$ sur $[a; b]$, alors on peut approximer I par:

$$S_n = \tfrac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) + 4f\left(\tfrac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) + f(x_{k+1}) \right)$$

L'erreur commise est majorée par$\frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4$.

Appliquons le résultat précédent pour chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, pour k variant entre 0 et $n - 1$.On obtient :

$$-\tfrac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4 \leq \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx - \tfrac{b-a}{6n} \tfrac{f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) + f(x_k)}{2} \leq \tfrac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4.$$

En ajoutant membre à membre toutes ces inégalités $-$ il y en a $n-$, on arrive à :

$$-\tfrac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4 \leq \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx - \tfrac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) + f(x_k)}{2} \leq \tfrac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4$$

c'est bien le résultat auquel on doit parvenir !

Chapitre 3

Les algorithmes

3.0.4 programme de trapèze

function trapez1

% methode composite du trapeze

%

% donnee: $I =$ trapezoid$(fun, a, b, npanel)$

%

% Entre: $f =$ la fonction $f(x)$

% $a, b =$ borne de l'intervalle

% $n =$ nombre de points dans l'intervalle $[a, b]$

%

% Sortie: $I =$ valeur approximative de l'integralle de f dans $[a, b]$

$np =$input($\prime$entrer $np\prime$)$, np$; %nombre d'intervalle

$a =$input($\prime$entrer $a\prime$)$, a$;

$b =$input($\prime$entrer $b\prime$)$, b$;

$n = np + 1$;%

$h = (b - a)/(n - 1)$; % pas

$x = a : h : b$; % division de l'intervalle

$f = 1./(1 + x.\hat{}2)$; % evaluation de l'integrande

$vexact = 1.1071$;

$I = h * (0.5 * f(1) + sum(f(2 : n - 1)) + 0.5 * f(n))$%valeure approchee

$err = abs(I - vexact)$% erreur

>>

$np =$

4

entrer$a0$

$a =$

0

entrer $b2$

$b =$

2

$I =$

1.1038

$err =$

0.0032

>>

$np =$

10

entrer $a0$

$a =$

0

entrer$b2$

$b =$

2

$I =$

1.1066

$err =$

$4.8410e - 004$

>>

3.0.5 Programme de simpson

F =inline('1./1 + xˆ2')

$n = 6;$

$a = 0;$

$b = 2;$

$h = (b - a)/n;$

$m = n/2;$

$s1 = 0;$

$s2 = 0;$

for $i = 2 : 2 : m - 1$

$x = a + i * h;$

$s1 = s1 + feval(F, x);$

end

for$i = 1 : 2 : m - 1$

$x = a + i * h;$

$s2 = s2 + feval(F, x);$

end

$vexact = 1.1071;$

$s = (h/3) * (feval(F, a) + feval(F, b) + 2 * s1 + 4 * s2);$

$err = abs(s - vexact)$

$>>$

$n =$

4

entrer$a0$

$a =$

0

entrer $b2$

$b =$

2

$I =$

1.1051

err =

0.002

>>

$n =$

10

entrer$a$0

$a =$

0

entrer $b2$

$b =$

2

$I =$

1.1069

$err =$

$3.7410e - 004$

>>

Exemple 3.0.1 *soit f une fonction contuné sur* $[0, 2]$,

$F = \int\limits_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

1)*en utilise la méthode simpson et trapéze pour calculer les erreures*

Solution 3.0.1 *la méthode simpson pour $n = 2$*

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{2} = 1$

$\int\limits_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(f(0) + f(2) + 4f(1)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{5} + 2\right) = \frac{16}{15}$.

la méthode trapéze pour $n = 1$

$\int\limits_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = h * (f(a) + f(b)) = 1 * (f(0) + f(2)) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

la méthode trapéze pour $n = 3$

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{h}{2}\left[\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(xi)\right)\right] \quad , h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{3}.$$

$= \frac{1}{3}\left[\left(f\left(0\right)+f\left(2\right)+2f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)\right)\right] \qquad x_i = a+ih \quad x_1 = \frac{2}{3}$
$x_2 = \frac{4}{3} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{13}, \;\; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{25}$

$$= \frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{5}+2\left(\frac{9}{13}+\frac{9}{25}\right)\right] = 1,1015$$

$$\mid I-1,1015 \mid \leq M_2\left(\frac{(b-a)}{12n^2}\right)^3 = 0,148 \;;\; Max_{X\in[a,b]} \mid f^2(x) \mid = 2$$

la méthode simpson pour $n = 4$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{h}{2}\left[\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{2i}\right)+4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{2i-1}\right)\right)\right]$$

$n = 2m \Rightarrow m = \frac{n}{2} = 2$

ereur|valeur exact − valeur approche|

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} = \frac{1}{2}.$

Donc $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \simeq 1,1051$

$\mid I-1,1015 \mid \leq M_4\frac{(b-a)^5}{180n4}$

$\mid \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx - 1,1015 \mid \leq M_4\frac{(b-a)^5}{180n4} = \frac{28-32}{180(4)4} = 0,019$

$M_4 = Max_{x\in[0,2]}\left|^{f4}(x)\right|$

3.0.6 conclusion

D'aprés ce que précede on a constaté que la méthode de simpson est meilleur que celle du trapèze

Bibliographie

[1] Alfio Quarteroni,Fausto Saleri, Riccardo Sacco, Méthodes numériques algorithmes,analyse et application

[2] Daniel Farquet ,Le calcul Intégral (2008).

[3] Calcul approché d'une intégrale,© T$^3France2010/Photocopieautorise$,