



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Une estimation de composition dans les espaces de Lizorkin-Triebel

Présenté par :
Bensalah Siham

Devant le jury composé de :

Mr.Drihem Douadi Université de M'sila **Président.**

Mr.Moussai Madani Université de M'sila **Encadreur.**

Mr.Lakehal Aissa Université de M'sila **Examineur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciement

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à monsieur le professeur M.Moussai pour avoir accepté de diriger le travail de ce mémoire , pour ses conseils et sa disponibilité .

Je remercie les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de presider et examiner ce travail les professeurs D.Drihem et A.Lakehal.

Mes remerciements vont également à ma famille et mes amis.

Table des matières

Notation	3
Introduction	1
1 Décomposition de Littewood-Paley .	2
1.1 Rappels de quelque espaces	3
1.2 Décomposition de Littewood-Paley	4
1.3 Inégalités principales	5
2 Espaces de Besov et Lizorkin-Triebel	8
2.1 Définition des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.	9
2.2 Plongement dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	10
2.3 L'interpolation	12
3 Normes continues de $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	14
3.1 Opérateur de différences	15
3.2 Théorèmes principaux.	15
4 La composition dans le cas limite $s=1+1/p$.	24
4.1 Quelques préparations.	25
4.2 Proposition principale	26
4.3 Théorème de composition	30

Notation

- \mathbb{N} : L'ensemble de tous les nombres naturels.
- \mathbb{N}_o : $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
- \mathbb{Z} : L'ensemble de tous les nombres entiers.
- \mathbb{R}^n : L'espace Euclidien.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_o, i=1, \dots, n.$
- $D^\alpha = d^{|\alpha|} / dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n}.$
- $|\Omega|$: est la mesure de Lebesgue de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Soient A_1, A_2 deux espaces $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{A_2} \leq C \|f\|_{A_1}, \forall f \in A_1$$

- p' est l'exposant conjugué de p où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- E' est l'espace dual de E .
- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\text{supp } f$ est le support de f :

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$

- $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
- $S(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide.
- On définit la transformation de Fourier par :

$$F(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx. \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$(F^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) dx.$$

- $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

- $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$ et la convolution de f et g .

Introduction

Depuis longtemps les espaces de Sobolev H_p^s , W_p^n ... ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Les espaces de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (*RSobolev*).

Des théories ont été étudiées dans les espaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ comme la résolution de certaines équations aux dérivées partielles avec des données dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, la continuité de certains opérateurs pseudo-différentiels sur les $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, etc.

On dispose actuellement d'une riche littérature dans ce domaine, voir par exemple [7, 8, 9, 10].

Notre mémoire est organisé en quatre chapitres :

- Dans le premier, on présente la série de Littewood-Paley et quelques inégalités principales et classiques.

- Dans le deuxième chapitre, on définit les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel avec leurs propriétés essentielles.

- Dans le troisième, nous allons donner les normes continues des espaces de Lizorkin-Triebel.

- Dans le dernier chapitre, on va étudier la composition sur les espaces de Lizorkin-Triebel dans le case $s = 1 + 1/p$, d'après un résultat dû à Moussai en 2018.

Chapitre 1

Décomposition de Littewood-Paley .

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles qu'on va utiliser par la suite savoir particulier Décomposition de Littewood-Paley, quelque Inégalités principales .

1.1 Rappels de quelque espaces

L'espace de Lebesgue

Définition

Soient $0 < p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L^p(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue, de fonction mesurable f telle que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$.

Espace de Schwartz

Définition

$$S = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m f^k(x) = 0 \right\}.$$
$$\|f\|_S = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |f|^k(x), \forall m, k.$$

Distribution tempérées

Définition

on appelle distribution tempérée sur \mathbb{R} une forme linéaire continue sur l'espace vectorielle S .

L'ensemble des distributions tempérées est noté S'

$$S' = \{T : S \rightarrow \mathbb{C}\},$$
$$\langle T, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) f(x) dx, f \in S, T \in S'.$$

Espace de Bessel

Définition

Espace de Bessel est l'espace des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ noté H_p^s où :

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \right) (x) \right\|_p < \infty, \\ (s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty).$$

Espace de Sobolev

Définition

Espace de Sobolev est l'espace de fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ noté W_p^m où :

$$\|f\|_{w_p^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|d^\alpha f\|_p < \infty.$$

$$(1 \leq p \leq \infty, m = 1.2.3.....).$$

1.2 Décomposition de Littewood-Paley

Soit $\varphi \in S$ telle que :

- (i) $\text{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$.
- (ii) $\varphi(\xi) > 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$.
- (iii) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

On pose $\Psi(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi)$

On obtient une fonction $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$\text{supp}\Psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a $\sum \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ est appelé la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions $\Delta_j : S' \longrightarrow C^\infty$ définis par

$$F(\Delta_j f)(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi) \text{ pour } j = 1.2.....$$

et

$$F(\Delta_\circ f)(\xi) = \Psi(\xi) \hat{f}(\xi)$$

Pour tout $f \in S'$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est

$$f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f \dots \dots \dots (1.1).$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées.

Remarque

Soit $f \in S'$, $j \in \mathbb{N}_0$ et $a > 0$, on définit les opérateurs maximaux associés (fonction maximale de Peetre) aux Δ_k par

$$\Delta_j^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_j f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a},$$

et

$$\Delta_{j,J}^{*,a} f(x) = \sup_{y \in B_J} \frac{|\Delta_j f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a}.$$

Note définition dépend de tout façon du choix de couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$ puis de φ l'intérêt d'une telle décomposition réside dans les propriétés de presque-orthogonalité des opérateurs φ_j .

1.3 Inégalités principales

Théorème (Inégalité de Holder)

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r})$.

Alors

$$(fg) \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème (inégalité de Young)

Soient $p, q, r \in]1; +\infty]$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$

avec $r \geq p$ et $r \geq q$ alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Théorème(Inégalité de Benstein)

Sont $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\circ = C(\alpha, p, q, n) \succ 0$ telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \prec R\}$.

ona :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq C_\circ R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+|\alpha|} \|f\|_p.$$

Théorème (Inégalité de Nikol'skii)

Soint $0 \prec a \prec b, s \in \mathbb{R}, (U_j) \in S'$ telle que $\text{supp } \hat{U}_j \subset \{\xi : a2^j \leq |\xi| \leq b2^j\}$.
 $A = (\sum (2^{js} \|U_j\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} \prec \infty$.

Alors la série $\sum_{j \geq 0} U_j$ convergent dans S' .

·si $a = 0$ le resultat est correct si $s \succ 0$.

Preuve

Soit $\varphi \in S$ alors :

$$\varphi = \Delta_\circ \varphi + \sum_{k \geq 1} Q_k \varphi ; \forall \varphi \in S : |\langle \sum U_j, \varphi \rangle| \prec +\infty$$

$$\underbrace{\langle \sum_{j \geq 0} U_j, \Delta_\circ \varphi \rangle}_{D_1} + \underbrace{\langle \sum_{j \geq 0} U_j, \sum_{k \geq 1} Q_k \varphi \rangle}_{D_2}$$

mais $\langle f, Q_k g \rangle = \langle f, 2^{kn} F^{-1} \delta(2^k \cdot) * g \rangle$

$$= \int f(x) \left(\int 2^{kn} F^{-1} \delta(2^k \cdot)(x-z) g(z) dz \right) dx$$

$$= \int \int f(x) 2^{kn} F^{-1} \delta(2^k(x-z)) dx g(z) dz$$

$$= \int f * 2^{kn} F^{-1} \delta(2^k \cdot)(z) \overline{g(z)} dz$$

$$= \langle Q_k f, g \rangle$$

et $\langle f, \Delta_\circ \varphi \rangle = \langle \Delta_\circ f, \varphi \rangle$ car f est paire et réelle.

$$D_2 = \sum_{k \geq 0} \langle \sum Q_k U_j, \varphi \rangle$$

$$= \sum_{k \geq 0} \langle \sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} U_j, Q_k \varphi \rangle$$

$$|D_2| \leq \sum_{k \geq 0} \left| \langle \sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} U_j, Q_k \varphi \rangle \right| \leq \sum_{k \geq 0} \| \sum U_j \|_p \| Q_k \varphi \|_{p'} \dots \dots \dots \text{(Hölder)}$$

$$\leq C \sum_{k \geq 0} \sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} \| U_j \|_p \cdot 2^{-kN} \quad , N \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} \| U_j \|_p = \sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} \left(\| U_j \|_p \cdot 2^{sj} \right) (2^{-sj})$$

$$\leq \left(\sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} \left(2^{sj} \| U_j \|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} 2^{-sjq} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq A \left(\sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\sum_{j=k-m_2}^{k-m_1} 2^{-sjq'} = 2^{-ksq'} \sum_{l=m_1}^{m_2} 2^{lsq'} = C_2 2^{-ksq'}$$

$$|D_2| \leq C_3 \sum_{k \geq 1} A 2^{-ks} 2^{-kN} = C_3 A \sum 2^{-k(s+N)}$$

$$N : s + N > 0 \implies N > -s$$

$$\implies |D_2| \leq C_4 A < \infty$$

$$D_1 = \langle \sum_{j \geq 0} \Delta_\circ U_j, \varphi \rangle = \langle \sum_{j=0}^{m_1} U_j, \Delta_\circ \varphi \rangle$$

Car

$$\sum_j \rho(\xi) \hat{U}_j(\xi)$$

$$\Omega_1 = \sup p \hat{U}_j = a 2^j \leq |\xi| \leq b 2^j$$

$$\Omega_2 = \sup p \rho = |\xi| \leq \frac{3}{2}$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad \text{si} \quad \frac{3}{2} \leq a 2^j = \frac{3}{2a} \leq 2^j$$

$$\implies m_1 = \log \left(\frac{3}{2a} \right) \leq 0$$

Donc

$$D_1 = \langle \sum_{j=0}^{m_1} U_j, \Delta_\circ \varphi \rangle$$

$$|D_1| \leq \sum_{j=0}^{m_1} |\langle U_j, \Delta_\circ \varphi \rangle|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m_1} \|U_j\|_{p'} \|\Delta_\circ \varphi\|_p$$

$$\leq C_1 \sum_{j=0}^{m_1} \|U_j\|_{p'} \|\varphi\|_p$$

$$\sum_{j=0}^{m_1} \|U_j\|_P = \sum_{j=0}^{m_1} \|U_j\|_p 2^{sj} 2^{-sj}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{m_1} (2^{sj} \|U_j\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{m_1} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leq A \sum_{j=0}^{m_1} (2^{-sjq'})^{\frac{1}{q'}}$$

$$\sum_{j=0}^{m_1} 2^{-sjq'} = C_2 \quad (\text{nbr fini de termes})$$

$$|D_1| \leq C_1 C_2 A \|\varphi\|_{p'} = C_3 A < \infty \quad \blacksquare$$

Chapitre 2

Espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Nous allons définir maintenant les espaces de Lizorkin-Triebel qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Pour cela, ce chapitre contient des définitions et quelques propriétés.

2.1 Définition des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

L'espace de Besov

Définition 01

Soit $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$ L'espace de Besov $B_{p,q}^s$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tq

$$\|\Delta_\circ f\|_p + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

avec

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|\Delta_\circ f\|_p + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'espace de Besov homogène

Définition 02

L'espace de Besov homogène $\dot{B}_{p,q}^s$ est l'ensemble $f \in S'_\infty$ tq

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \dots \dots \dots (1.1)$$

L'espace homogène de Lizorkin-Triebel

Définition 03

Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$.

L'espace homogène de Lizorkin-Triebel est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} = \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p} < \infty \dots \dots \dots (1.2)$$

L'espace de Lizorkin-Triebel non homogène

Définition 04

On définit comme dans $B_{p,q}^s$ l'espace de Lizorkin-Triebel non homogène $F_{p,q}^s$ par $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$.

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \|\Delta_\circ f\|_p + \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p} < \infty.$$

Remarque

Les espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$ sont des espaces de quasi-Banach (espaces de Banach si $\min(p, q) \geq 1$). Pour une présentation détaillée de ces espaces, on pourra consulter H.Triebel [12], [13] et [14].

Définition 05

Un espace de Banach de distribution (E, B, D) dans $D'(\mathbb{R}^n)$ est un sous -espace vectoriel E de $D'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complete $\|\cdot\|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

Définition 06

Soit E un E, B, D on dit qu'une distribution g est un multiplicateur de E (on note $g \in M(E)$), s'il existe $c > 0$, telque pour tout $f \in C^\infty \cap E$, on ait $gf \in E$ et $\|gf\|_E \leq C \|f\|_E$ on muni $M(E)$ de la norme

$$\|g\|_{M(E)} := \sup \{ \|gf\|_E : f \in C^\infty \cap E, \|f\|_E = 1 \}.$$

2.2 Plongement dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Les espaces de Lizorkin-Triebel sont des généralisations des espace de L_P et les espaces des potontieils de Bessl H_P^S des $F \in S'(\mathbb{R}^n)$

Maintenat, nous rappellons quelques inclusion et égalités au sens des normes entre les espace de Besov et de Lizorkin-Triebel. la plupart sont démontrées dans [1], [2, 3, 4] et [5, 6, 7, 8].

Définition

On défint $F_{\infty,\infty}^s$ où $\dot{F}_{\infty,\infty}^s$ qui l'espace de Hölder.

$$C^s = B_{\infty,\infty}^s \text{ où } \dot{C}^s = \dot{B}_{\infty,\infty}^s \text{ (i-e : } F_{\infty,\infty}^s = B_{\infty,\infty}^s \text{ et } \dot{B}_{\infty,\infty}^s = \dot{F}_{\infty,\infty}^s).$$

Proposition 01

Les propriété suivantes sont vérifieet.

$$(i) C^s(\mathbb{R}^n) = B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{si } s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}.$$

- (ii) $L_p(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^0(\mathbb{R}^n)$, si $1 < p < \infty$.
- (iii) $W_p^m(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^m(\mathbb{R}^n)$, si $1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}^*$.
- (iv) $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$, si $1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R}$.
- (v) $H_p^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n)$, si $1 < p < \infty$.

Proposition 02

(i) Soit $s \in \mathbb{R}$, alors

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors

$$B_{p,\min(p,q)}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Soient $-\infty < \sigma < s < \infty$ et $1 \leq p, r, t \leq \infty$, alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^\sigma(\mathbb{R}^n).$$

(iv) Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq t \leq \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$ alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^s(\mathbb{R}^n).$$

(v) Soient $1 \leq p_0 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} \geq s_0 - \frac{n}{p_0}$ alors

$$B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

(vi) Soient $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{r}, 1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq p < r < \infty$ alors

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

(vii) Soient $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ où $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ et $q \leq r$ alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

preuve voir[9.coro2.p.36].

Proposition03

(i) Soit $s > 0$ alors

$$B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)).$$

si $s < 0$ alors

$$B_{\infty,q}^{-s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)).$$

(ii) Soit $t > 0$ alors

$$B_{p,\infty}^{t+(\frac{n}{p})}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)).$$

Preuve voir [9, 4.7.1, p.229].

2.3 L'interpolation

L'interpolation dans $L_p(\mathbb{R}^n)$

Théorème (Riesz-Thorin)

Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$ telle que $p_0 \neq p_1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Alors on a

$$[L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n)]_{\theta} = L_p(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. : Voir [15].

L'interpolation dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposition

Soit T Un opérateur linéaire de H dans lui même telle que

$$\|Tf\|_{A_0} \leq c_0 \|f\|_{A_0}, \quad \forall f \in A_0.$$

$$\|Tf\|_{A_1} \leq c_1 \|f\|_{A_1}, \quad \forall f \in A_1.$$

Alors T envoie $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ dans lui même avec

$$\|Tf\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}} \leq c \|f\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}},$$

où

$$c \leq c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ et } 0 < q \leq \infty.$$

L'interpolation réelle

Les théorèmes suivants sont tous démontré dans le livre Triebel [16].

Théorème

soient $q_0, q_1, q \in]0, +\infty], 0 < \theta < 1$ et $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ telle que $s_0 \neq s_1$ et $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$.

(i) Si $0 < p \leq \infty$, alors

$$(B_{p,q_1}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Si $0 < p < \infty$, alors

$$(F_{p,q_1}^{s_0}(\mathbb{R}^n), F_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Théorème

Soient $p_0, p_1 \in]0, +\infty[$, $0 < \theta < 1$ et $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ et $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
alors

$$(B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n), B_{p_1,q_1}^{s_0}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Chapitre 3

Normes continues de $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

Dans ce chapitre, on va étudier les normes continues de espaces de Besov et Lizorkin-Triebel et on énoncera quelques théorèmes principaux.

3.1 Opérateur de différences

Pour toute distribution f sur \mathbb{R}^n et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Delta_h := \tau_{-h} f - f$, on considère aussi les puissances successives de l'opérateur Δ_h , définie inductivement par

$$\Delta_h^1 := \Delta_h \quad \text{et} \quad \Delta_h^{m+1} := \Delta_h \circ \Delta_h^m, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie aisément la formule suivante

$$\Delta_h^m f = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \tau_{-jh} f.$$

Nous utiliserons par la suite la notation suivante : pour $l \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$, $t \succ 0$ et f fonction définie sur \mathbb{R}^n on pose

$$\omega_{p,l}(f; t) := \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^l f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les propositions suivantes présentent des normes équivalentes dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Pour la preuve, voir par exemple [9, prop.2.1.2/2, p.19], [5, th.2.6.1, p.140].

Proposition

Soient l un entier, $0 \prec s \prec l$, $q \in [1, +\infty]$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^l f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} \prec +\infty.$$

pour $1 \leq p \prec \infty$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^l f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \prec +\infty.$$

Preuve. Voir [9, p.41].

3.2 Théorèmes principaux.

Théorème 01

Si $0 \prec s \prec 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,B+a}(f;t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \prec \infty. \quad (1)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Théorème 02

$B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,B+a}(f;t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \prec \infty. \quad (2)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Théorème 03

Si $0 \prec s \prec 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(B+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \prec \infty. \quad (3)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Théorème 04

$F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(B+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \prec \infty. \quad (4)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuves des théorèmes

Sans pert de généralité, on peut supposer que B est la boule unité de \mathbb{R}^n . Dans cette section, on fixe deux fonction φ_0 et φ_1 dans $D(\mathbb{R}^n)$, telles que :

– $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ est non nulle et portée par $B/4$,

– $\varphi_1(x) = 1$ sur $4B$.

Lemme 1

Pour tout $q \in [1, +\infty[$ et tout réel α , il existe $c \succ 0$ tel que

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{2}} t^\alpha u(t) \leq c \left(\int_0^1 (t^\alpha u(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

pour toute fonction croissante u sur l'intervalle $]0, 1]$.

Preuve de théorème 01

On utilisera la formule suivant, valable pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et toutes fonctions f et g sur \mathbb{R}^n

$$\Delta_h (fg) (\tau_{-h}g) + f (\Delta_h g). \quad (5)$$

Désignons par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité(1).

Etape 01

Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$ par la formule(5), on a pour tous $a, h \in \mathbb{R}^n$ et $|h| \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h ((\tau_a \varphi_0) f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h f(x) \varphi_0(x+h-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |\Delta_h (\tau_a \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + t \|\nabla \varphi_0\|_\infty \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq c_1 \left(\omega_{p, B+a}(f, t) + t \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \right). \end{aligned}$$

Par la condition $s < 1$, on voit que

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0) f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq c_1 \left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_{p, B+a}(f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{1-s})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \right). \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus étant majorée par $c_2 A(f)$, pour une certaine constante c_2 , il vient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_3 A(f).$$

Etape 02

Soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$. On voit aussitôt que $\Delta_h((\tau_a \varphi_1) f)(x) = \Delta_h f(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, tout $x \in B+a$, et tout $|h| \leq 1$. On en déduit aisément que

$$A(f) \leq c_4 \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_1) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve de théorème 02

On désignera par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (2) et on posera

$$M_{p,a}(f) := \sup_{0 < t \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{t} \eta_{p,B+a}(f, t).$$

Résultats préliminaires

On dispose des formules suivantes, où $k \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}^n$ et où f et g sont des fonctions quelconque :

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h}g), \quad (6)$$

$$\Delta_h = 2^{-k} \Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2. \quad (7)$$

La première est immédiate, la seconde s'obtient facilement par récurrence sur k .

Lemme 2

Il existe $c > 0$ tel que

$$\omega_{p,B+a}(f, t) \leq ct \left\{ \left(\int_{2B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + M_{p,a}(f) |\ln t| \right\},$$

pour tout $0 < t \leq \frac{1}{2}$, tout $a \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction localement intégrable f .

Preuve

Le lemme est une variante de l'inégalité classique de Marchaud. On définit l'entier $k \geq 1$ par l'encadrement $2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}$. De la formule (7), on déduit pour $|h| \leq t$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq 2^{-k} \left(\int_{B+a} |\Delta_{2^k h} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left(\int_{B+a} |\Delta_{2^l h}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq 2^{-k+1} \left(\int_{2B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} (2^{l-k} M_{p,a}(f)), \\ & \leq 4t \left(\int_{2B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\ln 2} t |\ln t| M_{p,a}(f), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme 2.

Étape1 $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{H} \sqrt{\quad} \rfloor \infty$

Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$. par la formule (6),il vient, pour $|h| \leq t \leq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^2 ((\tau_a \varphi_0) f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^2 f(x) \varphi_0(x+2h-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)|^p |\Delta_h^2 (\tau_a \varphi_0)| \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{B_{+a}} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_1 t \left(\int_{B_{+a}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\ c_2 t \left(\int_{B_{+a}} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \\ &\leq c_3 \left(\eta_{p,B_{+a}}(f,t) + t^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} + t \omega_{p,B_{+a}}(f,t) \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_p((\tau_a \varphi_0) f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \\ c_3 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_{p,B_{+a}}(f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + c_3 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} &\left(\int_0^{\frac{1}{4}} t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} + c_3 \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p,B_{+a}}(f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En conséquence

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_4 \left(A(f) + \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p,B_{+a}}(f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Grâce au lemme, on a pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p,B_{+a}}(f; t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c_5 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} + c_6 M_{p,a}(f) \left(\int_0^{\frac{1}{4}} t^{q-1} |\ln t|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1 a la fonction croissante $t \mapsto \eta_{p,B_{+a}}(f; t)$, on conclut que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_7 A(f).$$

Étape2

Soit $f \in B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$, En procédant comme dans l'étape2 de la preuve du théorème 1, il vient

$$A(f) \leq c_8 \|f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve de théorème 03

On désignera par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (3) .

Étape1

Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$. par la formule (5) , nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \\ \leq & \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| \varphi_0(x+h-a) dh + |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_1 \left(\int_{B_{+a}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 A(f).$$

Étape2

Supposons que $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. En procédant comme dans l'étape 2 de la preuve du théorème1, il vient

$$A(f) \leq c_3 \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve de théorème 04

On désignera par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (4).

Étape1

Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$.Soit

$$G(x) := \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

par la formule (6), il vient, pour tous $a, x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \\
\leq & \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| \varphi_0(x+2h-a) dh + \int_{|h| \leq t} |f(x+h)| |\Delta_h^2(\tau_a \varphi_0)(x)| dh + \\
& \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\Delta_{2h} \tau_a \varphi_0(x)| dh.
\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq & \left(\int_{\frac{B}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq c_1 (U(a) + V(a) + W(a)),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
U(a) &:= \left(\int_{\frac{B}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
V(a) &:= \left(\int_{\frac{B}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n+1} \int_{|h| \leq t} |f(x+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
W(a) &:= \left(\int_{\frac{B}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On voit facilement que

$$U(a) + V(a) \leq c_2 \left(\int_{B+a} G(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_3 \|f\|_{L_p(B+a)}. \quad (8)$$

Estimation de $W(a)$. Posons

$$G_1(x) := \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En décomposant l'intervalle $]0, \frac{1}{16}]$ en intervalles dyadique et en utilisant des majorations évi-dentes, on obtient

$$G_1(x) \leq c_4 G_2(x), \text{ où}$$

$$G_2(x) := \left(\sum_{j \geq 4} \left(2^{jn} \int_{|h| \leq 2^{-j}} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par le changement de variable $h' = 2^{j-3}h$, il vient

$$G_2(x) = \left(\sum_{j \geq 4} \left(\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_{2^{-j+3}h} f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par(7),on a

$$\Delta_{2^{-j+3}h} = 2^{-j+3} \Delta_h - \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} \Delta_{2^{l-j+3}h}^2,$$

d'où $G_2(x) \leq c_5 (G_3(x) + G_4(x))$, avec

$$G_3(x) := \left(\sum_{j \geq 4} \left(2^{-j} \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

et

$$G_4(x) := \left(\sum_{j \geq 4} \left(\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} |\Delta_{2^{l-j+3}h}^2 f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Estimation de G_3 . On a aussitôt

$$G_3(x) = c_6 \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_h f(x)| dh.$$

L'inégalité de Minkowski nous donne, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{B}{2}+a} G_3(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c_6 \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{\frac{B}{2}+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh \\ &\leq c_6 \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{\frac{B}{2}+a} |f(x+h)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh + c_7 \left(\int_{\frac{B}{2}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_6 \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{B+a} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh + c_7 \left(\int_{\frac{B}{2}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_8 \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Estimation de G_4 . Par le lemme 1, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < t \leq \frac{1}{2}$,

$$\int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \leq c_9 t^{n+1} G(x). \quad (9)$$

En raison du plongement $l_1 \hookrightarrow l_q$, on a

$$G_4(x) \leq \sum_{j \geq 4} \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} |\Delta_{2^{l-j+3}h}^2 f(x)| dh.$$

On vérifie facilement que

$$\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_{2^{l-j+3}h}^2 f(x)| dh = 2^{-3n} 2^{(j-l)n} \int_{|h| \leq 2^{l-j}} |\Delta_h^2 f(x)| dh.$$

En combinant cette relation avec l'inégalité (9), on obtient

$$G_4(x) \leq c_{10} G(x) \sum_{j \geq 4} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} 2^{l-j} = c_{11} G(x).$$

Il vient donc, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\frac{B}{2}+a} G_4(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{11} \left(\int_{B+a} G(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En tenant compte des estimations obtenues pour G_3 et G_4 , on peut conclure que l'expression $W(a)$ est estimée par

$$\left(\int_{B+a} G(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En combinant avec (8), on conclut que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_{12} A(f).$$

Étape 2

Supposons que $f \in F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}$. En procédant comme dans l'étape 2 de la preuve du théorème 1, il vient

$$A(f) \leq c_{13} \|f\|_{F_{p,q}^1(\mathbb{R}^n)_{lu}}.$$

Chapitre 4

La composition dans le cas limite

$s=1+1/p$.

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(0) = 0$ et $f' \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap \dot{F}_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})$ on montre que l'opérateur de composition $T_f : g \mapsto f \circ g$ prend $F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit donc la délimitation de T_f sur les espaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1 + 1/p$.

Dans le présent chapitre, nous étudions l'opérateur de composition $T_f : g \mapsto f \circ g$ associé aux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sur les espaces de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans le cas limite $s = 1 + 1/p$.

4.1 Quelques préparations.

Définition

Une distribution tempérée $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ s'annule à l'infini si $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda^{-1}(\cdot)) = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble de toutes ces distributions est noté $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$

Pour illustrer cette définition, nous donnons trois exemples de telles distributions :

- (i) fonctions dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.
- (ii) dérivées des fonctions bornées,
- (iii) dérivées des distributions $f \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

dans ce contexte, le lemme élémentaire suivant sera l'un des outils pour prouver le résultat principal.

Lemme

On a $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^n) \cap P_\infty(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Proposition01

Un membre $f \circ f S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si ses dérivés du premier ordre $d_j f$ dans $\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition02

Soit $0 < s < 1$ et $1 \leq p, q, u \leq \infty$.

(i) il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute distribution tempérée régulière f satisfaisant $M_{p,q}^{s,u}(f) < \infty$, on a $[f]_\infty \in \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c M_{p,q}^{s,u}(f)$.

(ii) supposons en plus $s > n(1/p - 1/u)$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, il existe une distribution tempérée régulière g satisfaisant $[g]_\infty = f$ et

$$M_{p,q}^{s,u}(g) \leq c M_{p,q}^{s,u}(f).$$

la distribution g peut être choisie telle que $g^{(\alpha)} \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| = v$.

Proposition03

Soit $1 \leq p, q \leq \infty$. Les expressions suivantes définissent des normes équivalentes dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$:

$$(i) \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^{(1)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \text{ pour } s > 0;$$

$$(ii) \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^{(2)} := \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{-sq} \left\| \Delta_{te_j}^2 f \right\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \text{ pour } 0 < s < 2 \text{ et ou } \{e_1, \dots, e_n\} \text{ désigne}$$

la base canonique de \mathbb{R}^n ;

$$(iii) \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^{(3)} := \|f\|_p + M_{p,q}^{s,u}(f) \text{ pour } 1 \leq u \leq \infty \text{ et } n \max(1/p - 1/u, 0) < s < 1.$$

Proposition 04

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_1 \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve de proposition 04

En utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\|\gamma(2^{-j}D)(f * g)\|_p = \|f * (\gamma(2^{-j}D)g)\|_p \leq \|f\|_1 \|\gamma(2^{-j}D)g\|_p \quad (\forall j \geq 0).$$

De même on a $\|\rho(D)(f * g)\|_p \leq \|f\|_1 \|\rho(D)g\|_p$, et le résultat souhaité suit.

Proposition 05

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors les opérateurs ∂_j ($j = 1, \dots, n$) prend $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ et $j = 1, \dots, n$.

Proposition 06

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Soit $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite bornée dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = f$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$. puis $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|u_k\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2 Proposition principale

Proposition 07

soit $1 < p < \infty$ il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(7.1) \quad \|f \circ g\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \|g\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})}$$

pour tout les fonctions f et g satisfaisant

- f est de classe C^1 , $f(0) = 0$ et $f' \in F_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$,
- g est analytique et $g \in F_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$.

Pruve de proposition 07

Puisque g est dans $F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})$, il ne peut pas être un polynôme (incluant une constante puisque $p < \infty$) sauf le cas trivial de $g = 0$, donc nous supposons que g est une fonction non nulle dans $F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})$. Maintenant, par les hypothèses $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Soit $u > 1$ un nombre à fixer ultérieurement. Selon les propositions 3(i) et 1

$$\|f \circ g\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R})} \leq c \left(\|f \circ g\|_p + \|(f' \circ g)g'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \right),$$

où c ne dépend que de p . l'hypothèse $f(0) = 0$ implique que $\|f \circ g\|_p$ est borné par $\|f'\|_\infty \|g\|_p$. Aussi, par la proposition 3(iii),

$$\|f \circ g\|_p \|(f' \circ g)g'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \leq c \left(\|(f' \circ g)g'\|_p + M_{p,\infty}^{1/p,u}((f' \circ g)g') \right),$$

où c est indépendant de f et g . Le terme $\|(f' \circ g)g'\|_p$ est borné par $\|f'\|_\infty \|g\|_p$. Il suffit donc de montrer que $M_{p,\infty}^{1/p,u}((f' \circ g)g')$ est borné par le même terme que sur le côté droit de (7.1) puisque $p > 1$. L'égalité élémentaire.

$$\Delta_h((f' \circ g)g')(x) = f'(g(x+h)) \Delta_h g'(x) + g'(x) \Delta_h(f' \circ g)(x).$$

Rendements

$$M_{p,\infty}^{1/p,u}((f' \circ g)g') \leq \|f'\|_\infty M_{p,\infty}^{1/p,u}(g') + \sup_{t>0} t^{-1/p} U(t),$$

où

$$U(t) := \left(\int_{\mathbb{R}} |g'(x)|^p \left(t^{-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(f' \circ g)(x)|^u \partial h \right)^{p/u} dx \right)^{1/p}.$$

Nous posons $J := \sup_{t>0} t^{-1/p} U(t)$ et $K := \|f'\|_\infty M_{p,\infty}^{1/p,u}(g')$. Ainsi, nous en sommes réduits à estimer ces deux termes.

Estimation de K . par les propositions 3(ii) et 5, cette estimation est évidente.

Estimation de J Nous utilisons certaines techniques données à la fois dans [10, p.2907] et [11, pp.257-258]. En insérant l'inégalité élémentaire

$$|g'(x)| \leq |g'(x) - g'(x+h)| + \min(|g'(x)|, |g'(x+h)|).$$

dans J , et en divisant le terme résultant en deux parties, nous obtenons $J \leq J_1 + J_2$, où $J_i := \sup_{t>0} t^{-1/p} U_i(t)$ ($i = 1, 2$) avec

$$U_1(t) := \left(\int_{\mathbb{R}} (t^{-1} \int_{|h|\leq t} |(\Delta_h g'(x) + g'(x) \Delta_h (f' \circ g)(x))|^u dh)^{p/u} dx \right)^{1/p}.$$

$$U_2(t) := \left(\int_{\mathbb{R}} (t^{-1} \int_{|h|\leq t} (\min(|g'(x)|, |g'(x+h)|))^u * \Delta_h (f' \circ g)(x)^u dh)^{p/u} dx \right)^{1/p}.$$

Estimation de J_1 . Depuis $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$ nous avons $J_1 \leq 2k$.

Estimation de J_2 . Nous commençons par rappeler que $g \notin P_\infty(\mathbb{R})$ (voir la discussion au début de cette démonstration). puis par l'analyticité de g , on observe que l'ensemble des zéros de g' est non vide et discret, et son complément dans \mathbb{R} est l'union d'une famille finie ou dénombrable $(I_l)_{l \in \Lambda}$ d'intervalles disjoints ouverts non vides. Ainsi, g est une fonction lisse strictement monotone sur I_l . On note g_l la restriction de g à I_l et g_l^{-1} la fonction inverse de g_l pour tout $t > 0$ on note $I'_{l,t}$, l'ensemble (éventuellement vide) de $x \in I_l$ dont la distance à la frontière de I_l est supérieure à $2t$. nous fixons

$$I''_{l,t} := I_l \setminus I'_{l,t} \quad \text{et} \quad a_l := \sup_{x \in I_l} |g'(x)|.$$

Clairement, $I''_{l,t}$ est un intervalle de longueur $\leq 4t$, où l'union de deux intervalles de longueur $2t$. Dans le cas où l'intervalle ouvert $I'_{l,t}$, n'est pas vide, nous avons

$$|g(g_l^{-1}(y) + h) - y| \leq ta_l, \quad \forall y \in g(I'_{l,t}), \forall h \in [-t, t].$$

On écrit $U_2(t) \leq U_3(t) + U_4(t)$ où

$$U_3(t) := \left(\sum_l \int_{I''_{l,t}} \left(t^{-1} \int_{|h|\leq t} (\min(|g'(x)|, |g'(x+h)|))^u * \Delta_h (f' \circ g)(x)^u dh \right)^{p/u} dx \right)^{1/p}.$$

et $U_4(t)$ est défini de la même manière avec $I''_{l,t}$, au lieu de $I'_{l,t}$. Maintenant, pour simplifier on pose $J_i := \sup_{t>0} t^{-1/p} U_i(t)$ ($i = 3, 4$); alors $J_2 \leq J_3 + J_4$.

Estimation de J_3 . En utilisant l'inégalité

$$\min (|g'(x)|, |g'(x+h)|) \leq |g'(x)|^{1/p} |g'(x+h)|^{1-1/p},$$

et par le changement de variable $y := g(x)$ sur chaque intervalle I_l , on obtient

$$U_3(t) \leq \left(\sum_l \int_{g(I'_{l,t})} \left\{ t^{-1} \int_{|h| \leq t} |f'(g(g_l^{-1}(y)+h)) - f'(y)|^u * |g'(g_l^{-1}(y)+h)|^{(1-1/p)u} dh \right\}^{p/u} dy \right)^{1/p}.$$

Nous continuons avec le changement suivant de la variable $\ominus := \ominus(h) = g(g_l^{-1}(y)+h) - y$, où $y \in g(I'_{l,t})$ et $|h| \leq t$, et choisissez u satisfaisant $(1 - 1/p)u = 1$.

cela conduit à

$$U_3(t) \leq \left(\sum_l a_l^{p-1} \int_{g(I'_{l,t})} \left\{ (ta_l)^{-1} \int_{|\ominus| \leq ta_l} |\Delta_{\ominus} f'(y)|^u \partial \ominus \right\}^{p/u} dy \right)^{1/p}. \quad (7.2)$$

$$\leq t^{1/p} (\sum_l a_l^p)^{1/p} M_{p,\infty}^{1/p,u}(f'),$$

et nous allons estimer le dernier terme de cette inégalité. Notons tout d'abord que depuis $f' \in F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})$, par la proposition 2(ii), il existe un $f_1 \in S'(\mathbb{R})$ régulier tel que $[f_1]_{\infty} = [f']_{\infty}$, $f_1 \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$ (rappel que $v = 1$, voir (7.3.1) et (7.3))

$$v := \begin{cases} \max([s - n/p] + 1, 0) & \text{si } s - n/p \notin \mathbb{N}_o \text{ ou } q > 1, \\ s - n/p & \text{si } s - n/p \in \mathbb{N}_o \text{ ou } q = 1; \end{cases} \quad (7.3.1)$$

ou $[s - n/p]$ désigne le-par entier de $s - n/p$.

$$M_{p,\infty}^{1/p,u}(f_1) \leq c \|f'\|_{\dot{F}_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})}. \quad (7.3)$$

On note aussi que $f'' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$ (voir l'exemple (ii) dans la section 2). Ensuite, puisque $f_1 - f' \in P_{\infty}(\mathbb{R})$ et $f_1 - f'' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$, par le lemme on a $f_1 - f' = c \in \mathbb{R}$, et on obtient

$$M_{p,\infty}^{1/p,u}(f_1) = M_{p,\infty}^{1/p,u}(f' + c) = M_{p,\infty}^{1/p,u}(f'). \quad (7.4)$$

L'hypothèse $g' \in F_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$ implique que g' est borné et continu avec une limite nulle à l'infini (voir par exemple, [9, théorème 2.2.4/1]). Pour tout I_l il existe $\varepsilon_l \in I_l$ tel que $|g'(\varepsilon_l)| = a_l$ points d'extrémité de I_l . Puisque les intervalles ouverts aux extrémités $\{\varepsilon_l, \beta_l\}$, ($l \in \Lambda$) sont disjoints par paires, il s'ensuit que. De plus, laissez β_l être l'un des

$$(\sum_l a_l^p)^{1/p} = (\sum_l |g'(\varepsilon_l) - g'(\beta_l)|^p)^{1/p} \leq \|g'\|_{BV_p(\mathbb{R})} \leq c \|g'\|_{F_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} \quad , \quad (7.5)$$

où la constante c ne dépend que de p .Maintenat ,en remplaçant (7.4),(7.3)et (7.5),respectivement, dans (7.2),nous obtenons l'estimation souhaitée pour J_3 .

Estimation J_4 .puisque $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$ et $|I''_{l,t}| \leq 4t$ et puisque

$$\min(|g'(x)|, |g'(x+h)|) \leq |g'(x)| \leq a_l \quad (\forall x \in I_l),$$

il s'ensuit que

$$U_4(x) \leq c_1 t^{1/p} \|f'\|_\infty (\sum_l a_l^p)^{1/p} \leq c_2 t^{1/p} \|f'\|_\infty \|g'\|_{F_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})}$$

(voir (7.5)).Cela implique immédiatement l'estimation souhaitée pour J_4 , et nous concluons que l'inégalité (7.1) est satisfaite. ■

4.3 Théorème de composition

Théorème 1.1

Soit $1 < p < \infty$.Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable de Borel telle que $f(0) = 0$ et $f' \in F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})$.Alors T_f transpose $F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$ en $F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$.De plus, il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que

$$(1.1) \quad \|f \circ g\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \|g\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)} .$$

pour tous ces f et tous les $g \in F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque

En incorporant $L_\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{F}_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R})$,nous avons $L_\infty(\mathbb{R}) = F_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R})$ (avec des normes équivalentes) .Considérons l'espace $W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de lipschitz bornées sur \mathbb{R}^n l'estimation

$$\|f \circ g\|_{W_\infty^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f'\|_\infty \|g\|_{W_\infty^1(\mathbb{R}^n)} \quad , \quad (\forall g \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)) .$$

est classique pour f vérifiant $f(0) = 0$ est $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$. Ensuite par les plongements bien connus.

$$F_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_\infty^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{\infty,\infty}^1(\mathbb{R}^n),$$

l'estimation (1.1) est vraie dans le cas $p = 0$.

Preuve de théorème

Par la remarque nous supposons que $1 \prec p \prec \infty$. Soit f et g tels que $f(0) = 0$, $f' \in F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})$ et $g \in F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1 : le cas $n = 1$.

En utilisant la suite $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ de couper-off fonctions définies comme :

$\rho \in C^\infty, 0 \leq \rho \leq 1, \rho(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\rho(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 3/2$ et

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^j \xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j} \xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n)$$

$$\hat{\rho}_j := \rho(2^{-j}(\cdot)) \quad (j = 0, 1, \dots),$$

on pose

$g_j := \rho_j * g$ et $f_j := \rho_j * f - (\rho_j * f(0))$. Les fonctions f_j et g_j sont réelles analytiques

. On a $g_j \rightarrow g$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$, et par la proposition 4,

$$\|g_j\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|g\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})}, \quad \|f_j'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \leq c_2 \|f'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} + |\rho_j * f(0)| \rho,$$

où les constantes c_1 et c_2 sont indépendantes la proposition 7.1 aux deux f_j et g_j , il sensuit que

$$(1.1.1) \quad \|f_j \circ g_j\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)} \leq c(\|f'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} + |\rho_j * f(0)|) \|g\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})} \quad (\forall j \geq 0).$$

d'une par, et l'hypothèse $f(0) = 0$ implique $|\rho_j * f(0)| \leq c 2^{-j} \|f'\|_\infty \quad (\forall j \geq 0)$, pour tout $j \geq 0$, donc $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j * f(0) = 0$, l'outre. De plus,

$$\|f_j - f\|_\infty \leq c 2^{-j} \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|g_j - g\|_\infty \leq c 2^{-j} \|g'\|_\infty \quad (\forall j \geq 0).$$

Alors l'inégalité élémentaire

$$\|f \circ g - f_j \circ g_j\|_\infty \leq \|f \circ g - f_j \circ g\|_\infty + \|f_j \circ g - f_j \circ g_j\|_\infty \leq \|f - f_j\|_\infty c \|f\|_\infty \|g_j - g\|_\infty \quad (\forall j \geq 0).$$

Montre que $f_j \circ g_j \rightarrow f \circ g$ dans $S'(\mathbb{R})$. Ansi, à partir de (4.6)(1.1.1) nous appliquons la propriété de Fatou (proposition 6) à la suite $(f_j \circ g_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, et conclure que (1.1) est satisfait.

Étape 2 : Le cas $n \geq 2$. pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit les fonctions $g_{x'_1}, \dots, g_{x'_n}$ par

$$g_{x'_1}(y) := g(y, x_2, \dots, x_n), \quad g_{x'_2}(y) := g(x_1, y, x_3, \dots, x_n), \dots \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

On observe d'abord que l'hypothèse $f(0) = 0$ donne $\|f \circ g_{x'_j}\|_p \leq \|f'\|_\infty \|g_{x'_j}\|_p$.

Deuxièmement, en utilisant à la fois la norme équivalente définie dans la proposition 3(ii)

et l'inégalité de Minkowski dans $L_p(\mathbb{R}^{n-1})$, nous obtenons

$$(1.1.2) \quad \|g\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^1 t^{-1-1/p} \|\Delta_t^2 g_{x'_j}\|_p \frac{dt}{t} \right)^p dx'_j \right)^{1/p} \leq c \|g\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)};$$

ici

$$dx'_j = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq j} dx_k \quad (j = 1, \dots, n).$$

A fortiori $g_{x'_j} \in F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. A l'étape 1,

$$(1.1.3) \quad \|f \circ g_{x'_j}\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{F_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})} \|g_{x'_j}\|_{F_{p,1}^{1+1/p}(\mathbb{R})}$$

où c est une constante indépendante de f , g et x .

Maintenant, nous passons à l'estimation du terme $\|f \circ g\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)}$. On a

$$\begin{aligned} & \|f \circ g\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & c_1 \|f'\|_\infty \|g\|_p + c_1 \sum_{j=1}^n \sup_{0 < t \leq 1} t^{-1-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \Delta_t^2 f \circ g_{x'_j}(y) \right|^p dy dx'_j \right)^{1/p} \\ & \leq c_1 \|f'\|_\infty \|g\|_p + c_2 \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\| f \circ g_{x'_j} \right\|_{F_{p,\infty}^{1+1/p}(\mathbb{R})}^p dx'_j \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ensuite, une combinaison de la dernière inégalité avec à la fois (1.1.2) et (1.1.3) donne
le

Résultat souhaité. ■

.....
.....

Conclusion générale

Il s'agit d'une extension vers les espaces de Lizorkin-Triebel d'un résultat comme dans les espaces de Besov pour $0 < s < 1 + 1/p$ en utilisant les normes continues

Bibliographie

- [1] S.E. Allaoui. Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. *Annales math. Blaise Pascal.* 16, 2 (2009), 399–429.
- [2] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. Towards sharp superposition theorems in Besov and Lizorkin-Triebel spaces. *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 2889-2912.
- [3] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. Composition operators on Lizorkin-Triebel spaces. *Journal of Functional Analysis* 259 (2010), 1098–1128.
- [4] J. Franke. On the spaces $F(s,p,q)$ of Lizorkin-Triebel type : Pointwise multipliers and spaces on domains. *Math. Nachr.* 125 (1986), 29-68.
- [5] M. Moussai. Composition operator on Besov algebras. *Rev. Mat. Iberoamer.* 28(2012), 239-272.
- [6] M.Moussai, Composition operators on Besov spaces in the limiting case $s=1+1/p$, *Studia Math.* 241(2018), 1-15.
- [7] T. Runst, W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin, 1996.
- [8] H. Triebel. *Triebel. Theory of Function Spaces.* Birkhauser, Basel. Boston. Stuttgart, 1983.
- [9] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II.* Birkhauser, Basel, 1992.
- [10] J. Peetre. *New thoughts on Besov spaces.* Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel, nous avons donné quelques définitions et propriétés entre ces espaces, on a plus étudié l'extension vers les espaces de Lizorkin-Triebel d'un résultat comme dans les espaces de Besov pour $0 < s < 1 + 1/p$ en utilisant les normes continues.

Mot-clés

Espace de Lizorkin-Triebel, Décomposition de Littlewood-Paley, La composition, Normes continues.

Abstract

In this thesis we have studied the spaces of Besov and Lizorkin-Triebel, we have given some definitions and properties between these spaces, we further study the extension to the spaces of Lizorkin-Triebel of a result as in the Besov spaces for $0 < s < 1 + 1/P$ will use continuous norms.

Key word

Lizorkin-Triebel spaces, Littlewood-Paley decomposition, Composition, Continuous norms.

المخلص

درسنا في أطروحتنا فضاءات بيزوف و ليزوركين تريبل, وقدّمنا بعض التعريفات والخصائص بين هذه الفضاءات و درسنا كذلك الامتداد لمسافات ليزوركين تريبل في حالة $0 < s < 1 + 1/p$ باستخدام معايير مستمرة.

مساحة Lizorkin-Triebel, تحلل Littlewood-Paley, التكوين, المعايير المستمرة.