N° d'ordre :………………

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et
de la **R**echerche **S**cientifique

Université de **M**'sila

Faculté des **S**ciences

Département de **P**hysique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

BELATRECHE ASMA

THEME

Titre
L'AMPLITUDE DE DIFFUSION ET LA SECTION EFFICACE DANS LE CADRE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE DEFORMEE

Soutenue le : 00/00/2014

Devant le jury composé de :

M.Dabbabi	MAA Univ. de M'sila	Président
N. Guesmia	MAA Univ. de M'sila	Rapporteur
Y. Sebri	MAA Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion 2014

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout premièrement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience , qu'il nous a donné durant toutes ces longues années .

Ainsi, nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Mr GUESMIA NADJIB pour avoir d'abord proposée ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils.
J'exprime aussi toute ma gratitude et mon respect aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter lire et juger ce modeste travail .

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidé à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin accomplir ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants et le chef de département de physique aussi tout la famille du département.

Egalement, un remerciement à tout nos collègues de promotion 2014 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

Dédicace

Je dédice ce mémoir

A ma mère

A mon père

A mes frères

A mes sœurs

A grande mère

A toute ma famille Belatreche

Atous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de prés

comme de loin

ASMA

TABLE DES MATIERES

Introduction :

Depuis quelques années les physiciens Kampf et ses collaborateurs ont introduit le concept de longueur élémentaire en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l’unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l’introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non normalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment l’existence d’une longueur minimale En dessous de laquelle la physique est inaccessible.

La mécanique quantique déformée est une version modifiée de l’algèbre de Heisenberg en ajoutant quelques corrections sur les commutateurs dues à une longueur dit longueur minimale. Ce formalisme a reçu une considérable attentions depuis quelques années par les physiciens , l'existence de cette longueur est une implique par la théorie de gravitation et de la théorie des cordes, ces théories propose quelques corrections sur la relation d’incertitude de Heisenberg qui devient sous la forme **[1]** , **[2]** et **[3]** $\Delta X.\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta\Delta P^2+\cdots)$, ces corrections modifiées la relation de commutation entre l’opérateur de position et l’opérateur d’impulsion qui devient : $[X,P]=i\hbar\left(1+\beta P^2+\cdots\right)$.

D'autre part l'étude des collisions est très importante, car tout d'abord, historiquement, la découverte du monde quantique et des particules s'est faite en étudiant des processus de collision. Beaucoup d'expériences de physique sont des expériences de collisions, ou plus précisément de diffusion, En **2012** les physiciens des particules ont annoncé la découverte tant attendu du **Boson de Higgs** dans les processus de diffusion au L.H.C.

Beaucoup de nos connaissances sur la structure de la matière sont extrairaient des processus de diffusion notamment la structure des atomes, des noyaux, des nucléons …..

L'étude théorique de la diffusion est modéliser d'une façon aussi précise que possible la dynamique du système dans la région de l'interaction permettant de bien aboutir aux observations expérimentales.

L'objet de ce mémoire est l’étude du formalisme de diffusion élastique : l'équation intégrale de la diffusion, la fonction de green, l'amplitude de diffusion, la section efficace et l'approximation de Born dans le cadre de la mécanique quantique déformée (avec une longueur minimale).

Notre travail est réparti sur trois chapitres :
Dans le premier chapitre on fait un rappel sur le formalisme de diffusion en mécanique quantique ordinaire, l'équation intégrale de la diffusion, la fonction de green, l'amplitude de diffusion; la section efficace et l'approximation de Born.

Le deuxième chapitre est consacrer au formalisme de la mécanique quantique déformées due à l’existence d’une longueur minimale et nous avons exposé le principe d'incertitude généralisé, qui se fond sur cette longueur, nous avons aussi exposé les conséquences de cette algèbre déformée en effet produit scalaire, relation de fermeture, et bien sûr la nouvelle équation de Schrödinger et la nouvelle forme de l’équation de continuité avec un courant déformé.
Dans le troisième chapitre nous avons exposé le formalisme de diffusion en mécanique quantique avec la présence de la longueur minimale, nous avons exposé un calcul détaillé concernant la nouvelle amplitude de diffusion, la version modifiée de la fonction de Green l’équation de Schrödinger déformée, la section efficace, l'approximation de Born avec une application sur le potentiel coulombien, et on terminera par une conclusion.

CHAPITRE 1 :

L’AMPLITUDE DE DIFFUSION ET LA SECTION EFFICACE DANS LE CADRE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE ORDINAIRE

1. 2.Théorie de la diffusion :

La plupart de nos connaissances sur la structure de la matière sont obtenues par des expériences de diffusion des particules. un tel phénomène décrit comme suit :

Une particule libre entre en interaction avec un potentiel localisée (ou d'autre particules localisée) .nous supposons connu l'état initial de la particule ,et voulons déterminer l'état de la particule après la « collision ».parmi toutes les réaction possibles .on désigne sous le noms de diffusion celles dans les quelles l'état final est constitué des même particules que l'état initiale pour simplifié, nous nous limiterons à l'étude de la diffusion élastique pour la quelle l'énergie ne change pas lors de la collision .

En physique classique, l'état de la particule incidente (qui est libre) est entièrement déterminé, par son impulsion, et de même pour la particule sortante :

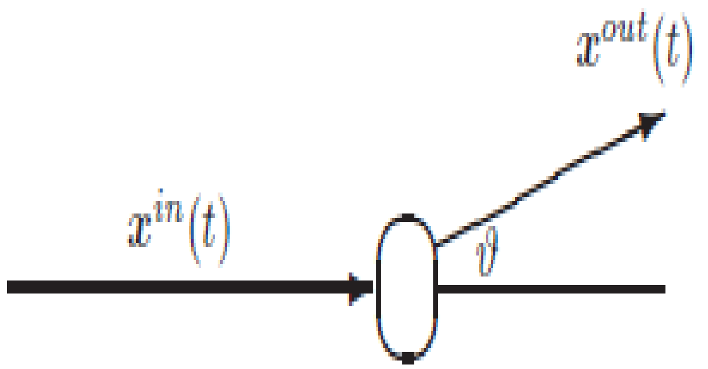


Figure 1 :théorie de diffusion

Il n'est alors pas possible en général de prévoir avec certitude que l'état final va résulter d'une collision donnée : on cherche donc seulement à prédire les probabilités pour un certain « état final ». Pour cela, nous allons étudier l'évolution de la fonction d'onde associée aux particules incidentes sous l'influence de l'interaction avec les particules de la cible.

La diffusion d'un faisceau de particules par une cible est un problème complexe pour simplifier en faisons les 'hypothèse suivantes **[5]**:

*les particules du faisceau incident et de la cible sont supposées sans spin.

*Nous considérons des diffusions élastiques nous négligeons l'éventuelle structure interne des particules impliquées dans la diffusion.

*Nous supposons la « cible » suffisamment mince pour pouvoir négliger la diffusion multiple

*Le processus élémentaire de diffusion nous restreignons à la diffusion d'une particule du faisceau incident par une particule de la « cible » et négligeons toute cohérence entre les ondes diffusées.

Nous allons utiliser l'exemple simple de la diffusion d'une particule par une cible. Notre problème consiste à étudier l'interaction d'une particule de masse m et d'énergie E=$\frac{p^2}{2m}$ =$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\vec{k}$,désigne le vecteur d'onde de la particule et on a $\left|\vec{k}\right|$ =$\frac{2\pi}{\lambda}$, (λ étant sa longueur d'onde) avec un potentiel V($\vec{r}$) représentant la cible. Cette particule incidente peut être un électron ou un positron par exemple la cible est soit un atome, un ion ou une molécule. Dans toute cette étude nous noterons $\vec{k}_i et \vec{k}_s$ les vecteurs d'onde respectifs de la particule incidente puis de la particule diffusée. Les coordonnées sphériques de la particule incidente et diffusée seront notées (r,θ, φ)lors de l'expérience, un faisceau incidente d'électrons (ou de positrons)d'énergie connue est dirigé sur une cible (en générale un gaze à faible pression d'atomes ou d'ions ou de molécules). Il en résulte que les électrons incidents vont être diffusés dans différente directions selon la manière dont ils vont interagir avec la cible et donc selon certains mécanismes de collision. Ces électrons diffusés sont ensuite analysés par des détecteurs mobiles de l'autre coté de la cible.

1 .2. Diffusion stationnaire par un potentiel :

Nous traitons le problème de façon simple et intuitive, pour décrire quantitativement le processus de diffusion par un potentiel, nous allons focaliser notre attention sur les états stationnaires du problème. Nous considérons un état stationnaire comme représentant un fluide de probabilité en régime d'écoulement permanent, et nous étudierons la structure des courants de probabilité correspondants. Bien entendu, ce raisonnement simplifié n'est pas rigoureux, mais il capture l'essentiel du problème.

Nous considérons la diffusion d'une particule de masse m par un potentiel statique V(r), qui décroit rapidement $(r^2V(r) \xrightarrow{r \Rightarrow \infty} 0)$.

L'équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la particule admet des solutions d'énergie E bien définie i. e, des états stationnaires **[5]**

$$\Psi(r) = \Psi_k(r)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \qquad (1.1)$$

Avec $E=p^2/2m$ et $p=\hbar k$

Ou E et p dénotent, respectivement, l'énergie et l'impulsion de la particule incidente avant qu'elle n'ait pénétré la zone d'action du potentiel la fonction spatiale $\Psi_k(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla^2}\Psi(\vec{r}) + \hat{V}(r)\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \qquad (1.2)$$

On pose $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ et $V(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m}U(\vec{r})$

Donc l'équation (1.2) devient :

$$(\Delta + k^2 - U(r))\Psi(\vec{r})=0 \qquad (1.3)$$

Pour chaque valeurs de k (i. e, d'énergie E), cette équation admet une infinité de solution (les valeurs propres de l'hamiltonien sont infiniment dégénérées) **[7].**

Il est connu en mécanique quantique qu'un état stationnaire de diffusion est complètement défini par son énergie E et sa fonction d'onde $\Psi_k(\vec{r})$ solution de l'équation de Schrödinger. Cette dernière, décrivant l'évolution de la particule chargée d'énergie E_i et d'impulsion initiale $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ dans le champ d'action du potentiel de la molécule cible, est telle que :

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r))\Psi_k(\vec{r}) = E\Psi_k(\vec{r}) \qquad (1.4)$$

Ou $\hbar, \vec{k}$ et m sont la constante de Planck le vecteur d'onde et la masse de la particule incidente respectivement le comportement de $\Psi_k(\vec{r})$ à l'infini est une super position de deux ondes définies comme suit**[8]**:

$$\Psi^{diff}{}_{k}(\vec{r})=e^{i\vec{k}\vec{r}}+f(\theta)\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \qquad (1.5)$$

$\Psi^{diff}{}_{k}(\vec{r})$ porte le nom d'onde stationnaire de diffusion, grandeur dépendante de $[\theta,\varphi]$ car la diffusion est non isotrope le terme d'onde plane $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ représente un faisceau monocinétique des particules incidentes de densité de probabilité égale à l'unité, d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et de densité de courant$\hbar\vec{k}/m$.tandis que le terme $f(\theta)\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r}$ représente le faisceau de particules diffusées, de densité de probabilité$|f(\theta)|^2/r^2$et de densité de courant égale à $(\hbar\vec{k}/m)/(|f(\theta)|^2/r^2)$.

En se conformant à cette interprétation, on peut calculer le nombre de particules émises par unité de temps dans l'angle solide dΩ situé dans la direction (θ,φ), ce nombre est égale au flux des particules diffusées vues sous l'angle solide dΩ, soit

$$dn=\frac{\hbar\vec{k}}{m}|f(\theta)|^2 d\Omega$$

1.3. L'amplitude de diffusion et équation intégrale de la diffusion :

En général la diffusion n'étant pas isotrope, l'amplitude de l'onde sortante dépend de la direction (θ,Φ) que l'on considéré , ceci motive l'introduction de l'amplitude de diffusion f(k',k), où k'=k $\hat{r}$ est le vecteur d'onde émergent de la diffusion .La fonction f(k',k)contient évidemment toute l'information relative au potentiel V(r).

Des méthodes approximatives sont alors nécessaires pour calculer l'amplitude de diffusion, pour effectuer ce calcul, nous utiliserons la fonction de green.

Par définition la fonction de green est la solution de l'équation **[4]** :

$$(\Delta + K^2)\, G(\vec{r'}\_\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r'}) \qquad (1.6)$$

La solution général de l'équation de Schrödinger s'écrite comme :

$$\Phi(\vec{r})=\Phi_h(\vec{r}) +\int d\, r\;\; G(\vec{r}-\vec{r'})\, U(r)\, \Phi(\vec{r'}) \qquad (1.7)$$

Ou Φ_h $(\vec{r})$ est la solution de l'équation homogène:

$$(\Delta + K^2)\,\Phi(r) = 0 \qquad (1.8)$$

En effet appliquons l'operateur $\Delta + K^2$ aux deux membre de (1.5)compte tenu de (1.6) nous obtenons

$$(\Delta + K^2)\,\Phi(r) = \int d^3 r' G(r-r')U(r')\Phi(r') \qquad (1.9)$$

Admettons qu'on puisse faire passer l'operateur dans l'intégrale il agira alors seulement sur la variable r et donnera d'après (1.4):

$$(\Delta + K^2)\,\Phi(r) = \int d^3 r' \delta(r-r')U(r')\Phi(r') \qquad (1.10)$$

On utilisant la relation suivante:

$$f(x) = \int \delta(x-x') f(x') dx' \qquad (1.11)$$

Donc:

$$(\Delta + K^2)\,\Phi(r) = \int d^3 r' \delta(r-r')U(r')\Phi(r')$$

$$= U(r)\Phi(r) \qquad (1.12)$$

G ($\vec{r}-\vec{r'}$) et δ ($\vec{r}-\vec{r'}$) sont définies par leurs transformations de Fourier suivantes **[6]**:

$$G(\vec{r}-\vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r'})} G(\vec{q}) d^3q \qquad (1.13)$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r'})} d^3q \qquad (1.14)$$

En remplaçons ces deux expression dans (1.6) on obtient :

$$(-\vec{q}^{\,2} + \vec{K}^2) G(\vec{q}) = 1 \quad \text{donc} \quad G(\vec{q}) = \frac{1}{(\vec{K}^2 - \vec{q}^{\,2})} \qquad (1.15)$$

L'expression G ($\vec{r}-\vec{r'}$) s'obtient par le remplacement de (1.15) dans (1.13) donc:

$$G(\vec{r}-\overrightarrow{r'})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}}{(K^2-q^2)}d^3q \qquad (1.16)$$

En intégrant sur les angles on aura :

$$G(\vec{r}-\overrightarrow{r'})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{q^2dq}{k^2-q^2}\int_0^\pi e^{iq|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|\cos\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \quad (1.17)$$

Pour simplifiée en faisant le changement de variable x=cos θ donc

$$\int_0^\pi e^{iq\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|\cos\theta}\sin\theta\, d\theta=\int_{-1}^1 e^{iq\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|x}dx=\frac{1}{iq\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\left(e^{iq\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}-e^{-iq\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\right) \quad (1.18)$$

La relation (1.17) devient:

$$G(\vec{r}-\overrightarrow{r'})=\frac{1}{4\pi^2 i\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\int_0^\infty\frac{q}{k^2-q^2}\left(e^{iq|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}-e^{-iq|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}\right)dq \quad (1.19)$$

D'ou

$$G(\vec{r}-\overrightarrow{r'})=-\frac{1}{4\pi^2 i\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q e^{iq|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|}}{q^2-k^2}dq \quad (1.20)$$

La fonction G possède deux pôles simple en $+k_0$ et -k_0.En intégrant dans le plan complexe supérieur et en utilisant le théorème des résidus on trouve :

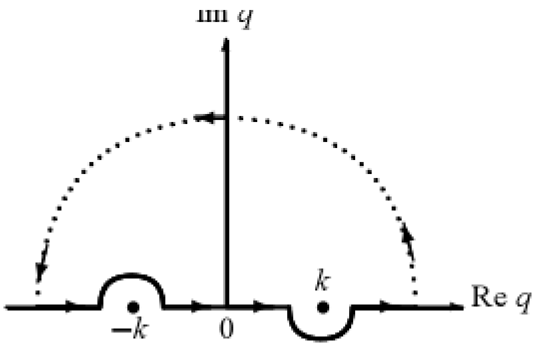


Figure :2 Contour d'intégration

$$G(\vec{r}-\overrightarrow{r'}) = \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|} e^{(i\,k\,|\vec{r}-\overrightarrow{r'}|)} \qquad (1.21)$$

Insérant (1.21) dans (1.7) nous obtient les fonction diffusée

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi_{\text{inc}}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \mathrm{V}(\vec{r'})\Psi(\vec{r'})d^3\mathrm{r}' \qquad (1.22)$$

Nous nous intéressons à la fonction d'onde dans la région asymptotique $\mathrm{r}\to \infty$:

$$\mathrm{k}|\vec{r} - \vec{r'}| = \mathrm{k}\sqrt{\vec{r}^{\,2} - 2(\vec{r})\vec{r} + (\vec{r'})^{2}} \simeq kr - k\frac{\vec{r}}{r}\vec{r'} = \mathrm{kr}-\vec{k}\vec{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{1}{\left|1-\vec{r}\vec{r'}/\vec{r'}^{2}\right|} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^2}\right) \simeq \frac{1}{r}$$

Dans ces approximations on peut réécrire la forme asymptotique suivante:

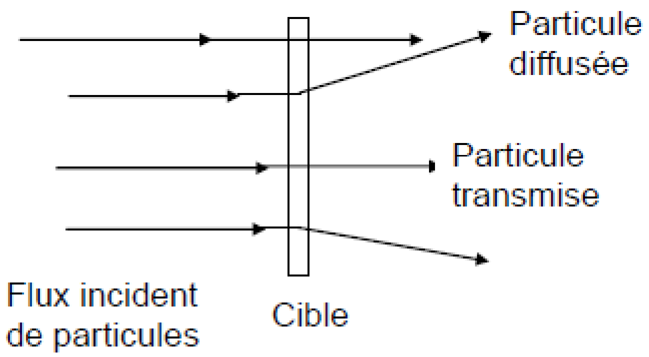
$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k_0}\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r}f(\theta.\Phi)$$

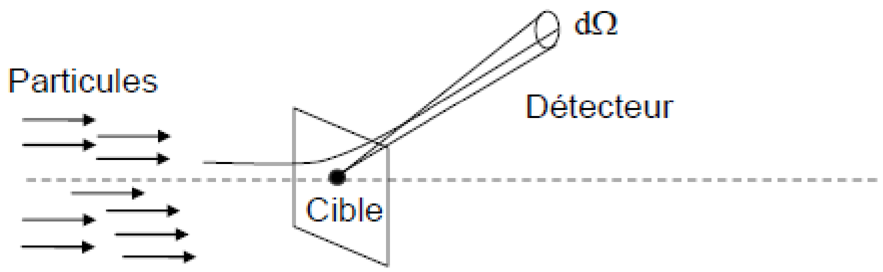
$f(\theta.\Phi)$ est l'amplitude de diffusion donnée par :

$$f(\theta.\Phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-ik\vec{r}}\mathrm{V}(\vec{r'})\,\Psi(\vec{r'})d^3r' = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\Phi|\hat{V}|\Psi\rangle \quad (1.23)$$

1.4.La section efficace :

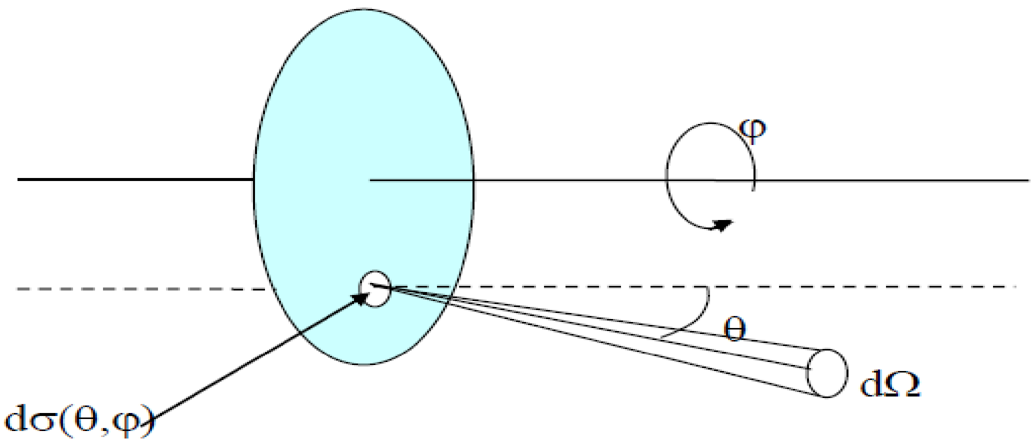
Pour explorer les propriétés du noyau on fait généralement des expériences de diffusion (« collision ») de particules d'un faisceau qu'on envoie sur une cible et on observe la diffusion « derrière » la cible. Ce qui intéresse en général le physicien c'est la probabilité qu'une « réaction se produise ». En fait la mesure consiste à faire un grand nombre de mesures entre un grand nombre de particules incidentes et un grand nombre de noyaux cible et de mesurer les particules diffusées par un détecteur. On s'intéresse à la moyenne des valeurs mesurées. La probabilité qui nous intéresse c'est le rapport entre le taux d'interaction et le flux incident. Nous allons voir que cette probabilité qu'on appelle section efficace est indépendante des variables caractérisant le faisceau et la cible, c'est-à-dire l'intensité du faisceau et la géométrie et densité de la cible.





La Section efficace différentielle:

La distribution angulaire des particules diffusées peut apporter des informations sur l'interaction qui a eu lieu entre le faisceau et le noyau cible (par exemple sur la forme du potentiel d'interaction). De plus, en général, les détecteurs ont une certaine granularité et sont donc capables de mesurer le nombre de particules diffusées dans une direction définie par (θ, φ) dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ (coordonnées sphériques).



Comme précédemment on définit la section efficace différentielle ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) .

Le nombre *dn* de particules diffusées dans la direction (θ,φ) dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ est :

$$\mathrm{dn}=N_i(\sigma\, n_{cible}\ x) = N_i\left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega n_{cible}\, x\right]$$

la déviation de la particule d'un angle compris entre $\theta et\theta + d\theta\ déviation\ de\ particules$ à l'interieur d'un angle solide dΩ de centre O (position du noyau diffuseur) valant

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$$

En intégrant dans tout l'espace on retrouve bien sûr

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma\,(\theta,\varphi)}{d\Omega}\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\sigma\,(\theta,\varphi)}{d\Omega}\mathrm{d}\Omega \sin\theta d\theta d\varphi$$

où σ_T c'est la section efficace définie précédemment.

1.5. La section efficace et l'amplitude de diffusion:

Nous considérons un courant incident J_i de particules mono-énergétiques sur une cible ; Ji représente donc le nombre de particules diffusée par unité de temps et par unité de surface normale à la direction d'incidence .nous supposons que ce courant est suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger l'interaction mutuelle des particules avec un compteur disposé loin de la cible on mesure le nombre dn de particules diffusées par unité de temps dans l'angle solide dΩ suivante la direction (θ ,Φ) le nombre dn est bien sur proportionnel au flux incident J_i et à d**Ω.** Nous supposons aussi que la cible consiste d'un grand nombre N de particules suffisamment distantes l'une de l'autre pour que l'on puisse les considérer comme centres de diffusion indépendants, par ailleurs, la cible doit être assez mince pour que l'on puisse négliger toute diffusion multiple. Dans ce cas, dn est aussi proportionnel à N on alors **[5].**

$$\mathrm{dn}(\Omega)=J_i\, N\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega \qquad (1.24)$$

ou $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\Phi)$est la section efficace différentielle de diffusion dans la direction (θ,Φ).son intégrale sur les directions représente la section efficace totale de diffusion

$$\sigma = \int\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega \qquad (1.25)$$

la section efficace totale à la dimension d'une surface et elle est souvent mesurée en « barn »,

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

Il est possible de calculer la section efficace à partir du courant diffusée pour une fonction d'onde $\Psi(x)$ la densité de courant de probabilité est donnée par :

$$J(x) = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^{*(x)} \nabla \Psi(x) - (\nabla \Psi^{*}(x))\Psi(x)] \qquad (1.26)$$

Avec $\rho(x)=|\Psi(x)|^2$

Le courant incident $J_i(x)$ s'obtient en remplaçant la fonction d'onde $\Psi(x)$ par l'onde plane e^{ikx} , c'est une onde de densité ρ=1 avec les courants:

$$J_i = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \qquad (1.27)$$

$$J_d = \frac{\hbar k'}{m} |f(k, k')|^2 + O(1/r^3) \qquad (1.28)$$

Pour r grande , l'onde diffusée est donc pratiquement radiale, et porte une densité de courant de probabilité $k'=k\,\hat{x}$est le vecteur d'onde émergent de la diffusion comme J_d exprime la densité de particule diffusées suivant la direction (θ, Φ) par unité de surface et $ds = r^2\, d\Omega$, nous avons

$$dn = N|J_d|\, r^2 d\Omega$$

Ceci implique que dn est indépendant de r pour autant que r soit suffisamment grand

En reportant nous obtenons une expression pour la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(|Jd|\, r^2)r\to\infty}{|Ji|} = |f(k, k')|^2 \qquad (1.29)$$

La section efficace différentielle est donc simplement donnée par le carré du module de l'amplitude de diffusion on alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(|Jd|\, r^2)r\to\infty}{|Ji|} = |f(k, k')|^2 \qquad (1.30)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta.\Phi)|^2=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int e^{-ik\vec{r}}\,V(\vec{r'})\,\Psi(\vec{r'})d^3r'\right|^2=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\langle\Phi|\hat{V}|\Psi\rangle\right|^2 \quad (1.31)$$

1.6. L'approximation de Born :

Cette approche développée par Born [Born 1926] est l'une des approximations les plus utilisées pour le calcul des sections efficaces elle joue un rôle dominant dans l'étude des collisions atomiques. Dans cette approximation on suppose que le potentiel diffuseur décrivant l'interaction coulombienne du projectile avec la cible ainsi que celle de l'électron incident et peut par conséquent être considéré comme une perturbation dans cette approximation les particules incidentes et diffusée sont représentées par des ondes planes **[12].**

l'approximation de Born est une **[13]** solution itérative si l'effet du potentiel est petit, le deuxième terme est plus petit que le premier dans l'expression (1.23) on peut approximer $\Psi(r')\sim e^{ikr'}$ **[9]**dans ce terme on aura :

$$\Psi(\vec{r})=\Phi_{inc}(\vec{r})-\frac{m}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{-i\vec{q}\vec{r'}}V(\vec{r'})d^3r \quad (1.32)$$

Donc l'amplitude de diffusion au premier ordre de L'approximation de Born est:

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r'}}\,V(\vec{r'})\,d^3r' \quad (1.33)$$

Où $q=\vec{k}_0-\vec{k}$ et $\hbar\vec{q}$ et $\hbar\vec{k}_0$ et $\hbar\vec{k}$ est les impulsions des particules incidente et diffusée respectivement. Dans le cas de la diffusion élastique, les amplitudes de $\vec{k}_0$ et $\vec{k}$ sont égaux $k_0=k$ d'où

$$q=|\vec{k}_0-\vec{k}|=\sqrt{k^2{}_0+k^2-2kk_0\cos\theta}=k\sqrt{2(1-\cos^2\theta)}=2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.34)$$

Si le potentiel $V(\vec{r'})$ est de symétrie sphérique $V(\vec{r'})=V(r')$, choisissons l'axe z le long de q alors $\vec{q}\vec{r'}$ =qr'cos θ'et par conséquent:

$$\int e^{i\vec{q}\vec{r'}}V(\vec{r'})d^3r' = \int_0^\infty r'^2V(r')dr'\int_0^\pi e^{iqr'\cos\theta'}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'$$

$$=2\pi\int_0^\infty r'^2V(\vec{r'})\,dr'\int_{-1}^{1}e^{iqr'x}dx$$

$$= \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty r^{'} V(r^{'}) \sin(qr')\mathrm{dr'} \quad (1.35)$$

Insérons (1.35) dans (1.33) nous obtenons:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r^{'} V(r^{'}) \sin(qr^{'}) dr^{'} \qquad (1.36)$$

Et bien sûr:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4 k^4}\left|\int_0^\infty r^{'} V(r^{'}) \sin(qr^{'}) dr'\right|^2 \quad (1.37)$$

1.7.Applications :

1.7.1 Le potentiel de coulomb :

Dans le cas du potentiel de coulomb $V(r)=\frac{Ze^2}{r}$,l'équation (1.37) devient **[10]**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Ze^4m^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty \sin(qr) dr\right|^2 \qquad (1.38)$$

Avec

$$\int_0^\infty \sin(qr)dr = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r}\sin(qr)dr$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left[\int_0^\infty e^{-(\lambda-iq)r}dr - \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mathrm{i}q)r}dr\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\lambda-iq} - \frac{1}{\lambda+iq}\right] = \frac{1}{q}$$

Où $q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc on a :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2m}{\hbar^2 q^2}\right)^2 = \left(\frac{Ze^2m}{2\hbar^2 k^2}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{Ze^4}{16E^2}\right)\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.39)$$

Où E=$\hbar^2 k^2/2m$ est l'énergie cinétique de la particule incidente. Cette relation est connue comme le Formule de Rutherford de la section efficace.

1.7 .2. Le potentiel de yaukawa :

Comme deuxième exemple sur l'approximation de Born, nous considérons le potentiel de Yaukawa ou potentiel de coulomb avec « écran » définie par

$$V(r)=\frac{V_0 e^{-\mu r}}{r}.$$

Où $V_0, \mu \in R$ et $\mu > 0$, nous supposons que $|V_0|$ est suffisamment petit pour que l'approximation de Born fasse du sens .dans ce cas, l'amplitude de diffusion peut être déterminée par**[5]** :

$$f_B\,(k',k)= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty d^3r' e^{-i(k'-k)r'}\,U(r')$$

Ou encore

$$f_B\,(k',k)= -\frac{1}{4\pi}\frac{2mV_0}{\hbar^2}\int d^3r'\, e^{-iqr'}\,\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\,(1.40)$$

Où q=k'-k est le vecteur d'onde transféré de module q=$2k/(\sin(\theta/2))\, et$ k étant le module du vecteur d'onde incident et θ l'angle de diffusion cette expression fait intervenir la transformée de Fourier du potentiel de Yukawa comme ce potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale, on peut aisément intégrer sur les angles Ce qui donne :

$$f_B\,(k',k)=-\frac{1}{4\pi}\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty dr' r' \sin(qr')\,\frac{e^{-\mu r'}}{r'} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{1}{q^2+\mu^2} \quad (1.41)$$

La section efficace différentielle est alors

$$\frac{d\theta}{d\Omega} = \frac{4m^2\, V^2{}_0}{\hbar^4}\frac{1}{\left[4k^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+\mu^2\right]^2} \qquad (1.42)$$

Comme on pouvait en attendre de la symétrie de révolution autour du faisceau incident de particules, la section efficace différentielle est indépendante de l'angle azimutal φ. D'autre part, pour une énergie donnée, i.e un k fixé, elle dépend de l'angle de diffusion (eq, la section est plus grande pour($\theta = 0$, que pour $\theta = \pi$).

Finalement, le signe de V_0ne joue aucun rôle, en tout cas dans l'approximation de Born

Pour $\mu \to 0$,le potentiel de yukawa tend vers le potentiel coulombien, En particulier si nous posons V_0=Ze², ou retrouve la section efficace de Rutherford.

1.8 La validité l'approximation de Born :

La première approximation de Born est valide dans le cas ou la fonction de la onde $\Psi(\vec{r})$ est légèrement différent seulement de l'onde de l'onde incidente. C'est toute fois que le deuxième terme dans (1.22) est très petit comparé au premier **[9]** :

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} V(r')e^{i\vec{k}_0\vec{r'}}d^3r'\right| \ll |\Phi_{\text{inc}}(\vec{r})|^2 \qquad (1.43)$$

Et comme $\Phi_{inc} = e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$ on a

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} V(r')e^{i\vec{k}_0\vec{r'}}d^3r'\right| \ll 1 \qquad (1.44)$$

Dans le cas de la diffusion élastique k_0=k. supposons aussi que le potentiel est très intensif autour de r=0 on a

$$\left|\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty r'V(r')e^{i\vec{k}_0\vec{r'}}d^3r'\int_0^\pi e^{ikr'\cos\theta'}\sin\theta' d\theta'\right| \ll 1$$

Où
$$\frac{m}{\hbar^2k^2}\left|\int_0^\infty V(r')(e^{2ikr'}-1)dr'\right| \ll 1 \qquad (1.45)$$

Et puisque l'énergie de la particule incidente est proportionnel à k (c'est purement cinétique, E=$\frac{\hbar^2k^2}{2m}$), nous constatant de (1.45) que l'approximation est valide pour un grand groupe des énergies incidente et valide aussi pour pas mal de potentiels.

CHAPITRE 2 :

LA MECANIQUE QUANTIQUE AVEC UNE LONGUEUR MINIMALE

2.1. Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse a l'algèbre déformée de la mécanique quantique du à l'introduction de la longueur minimale.
Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ($l_p \approx 10^{-35}m$). Le concept de longueur élémentaire est apparu dans le contexte de la théorie des cordes, candidate à l'unification des interactions fondamentales. Dans cette théorie, une échelle minimale est naturelle puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes, ne peuvent pas résoudre des distances plus petites que la dimension de la corde. Si l'énergie de la corde atteint une certaine échelle M_s, des excitations de la corde peuvent survenir et auront comme effet l'élargissement de l'extension spatiale de la corde. En particulier, la théorie de diffusion des cordes à haute énergie montre que l'extension de la corde s'accroît proportionnellement à son énergie à chaque ordre de la théorie des perturbations ,De ce fait, une longueur élémentaire, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace est impossible, est nécessaire dans cette théorie. L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle.

2.2. Longueur minimale :

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'hypothèse de l'existence d'une longueur élémentaire a été faite, depuis longtemps en physique, pour des raisons aussi bien conceptuelles que technique Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{min}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du Caractère de l'espace-temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $l_p = 10^{-35}$m, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ;l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisable des particules à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s'intéresser à cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempff et ses collaborateurs.

2.3. Principe d'incertitude généralisé :

Dans la littérature, il existe plusieurs théories introduisant le concept de longueur minimale, notamment les théories avec un principe d'incertitude généralisé, avec une relativité restreinte déformée ou avec des dispersion modifiées et Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale) l_{m} en mécanique quantique Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $1/l_m$, En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, $(\vec{p}=\hbar\vec{k})$ lorsque p approche l'échelle $(\hbar/l_m)$.

Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde $(2\pi/k)$ arbitrairement petites, et que des échelles des distances arbitrairement petites Dans un but de simplicité, raisonnons à une seule dimension. Pour tenir compte de ce postulat, on suppose une relation $p= f(k)$ entre k et p. Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre $(1/l_m)$ lorsque p tend vers l'infini. On suppose aussi que $f(k)$ est bien définie, Plusieurs formes de la fonction f peuvent être trouvées : par exemple suivante le choix de Hossenfelder

$$p = \frac{\hbar}{l_m}\tan(l_m k) \qquad (2.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan(n) = \left(n + \frac{n^3}{3} + \cdots\right)$$

Au deuxième ordre en l_m, ps’écrit :

$$p = \hbar\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right) \qquad (2.2)$$

Supposant que le commutateur entre $\hat{x}$et $\hat{p}$ garde la forme standard, c’est-à-dire

$[\hat{x}\ ,\ \hat{p}]$=$i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale :

$$\left[\hat{x}, \hat{A}(k)\right] = i\frac{\partial A}{\partial k} \qquad (2.3)$$

On obtient la relation de commutation définissant l’algèbre de Heisenberg modifiée

$$[\hat{x}, \hat{p}(k)] = i\frac{\partial \hat{p}}{\partial k}$$

En utilisant la relation (2 .2)

$$= i\frac{\partial}{\partial k}\ \hbar\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\left(k + \frac{l_m^2}{3}k^3 + \cdots\right)$$

Donc :

$$i\frac{\partial P}{\partial k} = i\hbar(1 + l_m^2 k^2 + \cdots)$$

On a:

$$l_m^2\hat{k}^2 \sim \frac{l_m^2\hat{p}^2}{\partial k} + O(l_m^4)$$

On trouve :

$$[\hat{x}, \hat{p}(k)] = i\hbar\left(1 + (\frac{l_m}{\hbar})^2\hat{p}^2 + \cdots\right)$$

En introduisant un paramètreβ, relié à la longueur minimale par :

$\beta = (\frac{l_m}{\hbar})^2$ Soit $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$

On aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta P^2 + \cdots) \qquad (2.4)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude **[13]** :

$$\Delta A \,.\, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|$$

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{1}{2} \left|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle\right|$$

Au premier ordre du paramètre β, la relation d'incertitude modifiée aura la forme Suivante :

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta\langle P^2\rangle)$$

Et one la relation de quadratique moyen set :

$$(\Delta P)^2 = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2$$

Donc la relation d'incertitude écrit par la forme Suivante :

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma) \qquad (2.5)$$

$$\gamma = \beta < \hat{P}^2 >$$

β C'est un paramètre positif.

La relation d'incertitude (2.5) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs **[14] , [15] et [1].** Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence **[14],** pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

2.4. Représentation théorique

On a la relation d'incertitude modifiée :

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta\langle P\rangle^2) \ (2.6)$$

On pose $\beta\langle P\rangle^2 = \gamma$ (γ dépend de la valeur moyenne de l'impulsion) .

Le paramètre βest relié à la longueur élémentaire à travers la relation$l_m = \hbar\sqrt{\beta}$, Donc la relation d'incertitude modifiée (2-5) s'écrit par forme suivante :

$$\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma\,) \qquad (2.7)$$

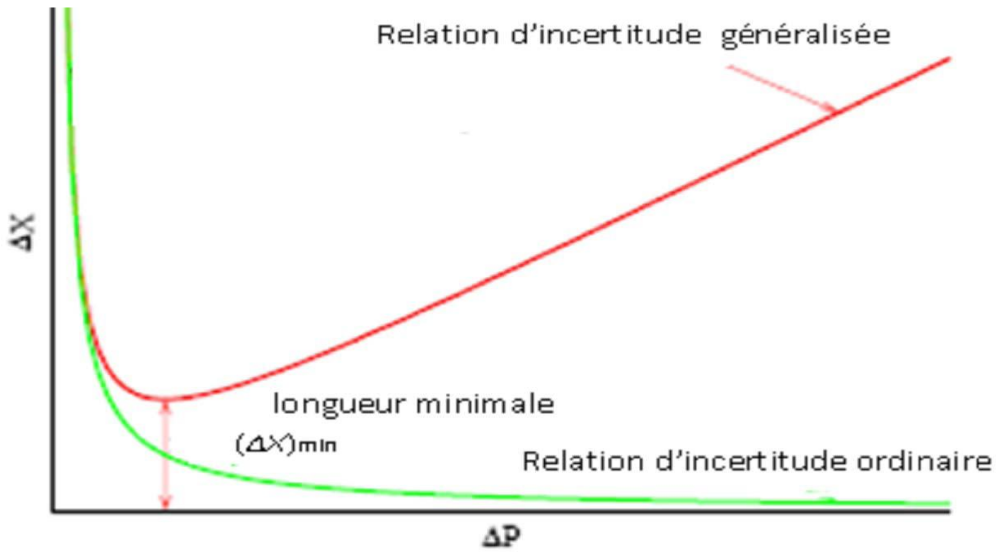


Figure 2.1 : La relation d'incertitude généralisée, impliquant une 'longueur minimale'$(\Delta X)_{\min}$ >0

Dans la mécanique quantique ordinaire $(\beta = \gamma = 0)$, donc la relation d'incertitude set une : $\Delta X \,.\, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$

ΔXPeut-être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des échelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation (2.7) du fait de la présence du terme $\beta(\Delta P)^2$dans le membre droit de l'inégalité ; même pour de grandes valeurs de ΔX ,ΔPest toujours supérieur à une valeur minimale $\Delta X\text{min}$ non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée sur la **figure (2.1).** On observe que pour les petites valeurs deΔP, la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques ; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand ΔP**[16].**

2.4. Représentation dans l’espace des impulsions

Considérons l’algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs Xet P,satisfaisant à la relation de commutation :

$$[X,P]= i\hbar(1+\beta P^2) \qquad \beta>0 \qquad (2.10)$$

La relation d’incertitude correspondante est :

$$\Delta X\,.\,\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta P)^2+\ \beta\langle P\rangle^2\,) \qquad (2.11)$$

Pour un (ΔX) fixe, l’inégalité (2.11) est satisfaite dans l’intervalle **[16]** : $[\Delta P-,\Delta P+]$, tel que :

$$\Delta P_{\pm}=\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2-\frac{\beta\langle P\rangle^2+1}{\beta}}$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c’est à dire

$\Delta P-=\Delta P+$, soit :

$$\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2-\frac{\beta\langle P\rangle^2+1}{\beta}=0$$

$$(\Delta X)_0=\hbar\sqrt{\beta}(\beta\langle P\rangle^2+1)^{1/2}$$

La valeur minimale (ΔX) min, correspond à $(\langle P\rangle=\ 0\,)$

$(\Delta X)_{\min}\ =\hbar\sqrt{\beta}$

Dans l’espace des impulsions, où X et P agissent sur les fonctions $\psi(p)$ $=\langle p|\psi\rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $x\ \ et\, p$, satisfaisant la relation de commutation canonique : $[x\ \ ,p\ ]=i\hbar$ Alors on peut trouver une représentation de X et P qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.10).La réalisation la plus simple s’écrit **[14]**:

$$X = \mathrm{i}\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} \qquad , \quad P = p \quad (2.12)$$

Où l'on a :

$$p\psi(p) = p\psi(p)$$

$$x\psi(p) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p)$$

Alors, X et P s'écrivent explicitement :

$$X = \mathrm{i}\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} \qquad , \quad P = p$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.10).

2.5. Conséquences :

2.5.1.le produit scalaire et la relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2-12), est préservation de la Symétrie des opérateurs X et P pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment Que P n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente ; il n'en est pas le cas pour l'opérateur *X* En effet, la condition de symétrie s'écrit **[14]** :

$$(\langle\psi|X)|\varphi\rangle = \langle\psi|(X|\varphi\rangle) \qquad (2.13)$$

$$(\langle\psi|P)|\varphi\rangle = \langle\psi|(P|\varphi\rangle) \qquad (2.14)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \psi^*(p)\varphi(p).$$

Pour que l'opérateur X soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon Suivante :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p)\varphi(p) \qquad (2.15)$$

Le facteur $\frac{1}{1+\beta p^2}$est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l’opérateur X en effet :

$$\langle\psi|(\mathrm{X}|\varphi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p) \left[i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p)\right]$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp\psi^*(p)\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p)$$

En intégrant par parties et en tenant compte que $\psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles à l’infini, on obtient:

$$\langle\psi|(\mathrm{X}|\varphi\rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p}\psi^*(p)\right)\varphi(p)$$

Et on a :

$$(\langle\psi|\,\mathrm{X}\,)|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \left[i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\psi(p)\right]^* \varphi(p)$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p}\psi^*(p)\right)\varphi(p)$$

Ceci montre bien que$n$ Xest symétrique par rapport au produit scalaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \psi^*(p)\varphi(p)$$

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture ; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p|p\rangle = 1 \qquad (2.16)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l’opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p''|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p''|p\rangle\langle p|p'\rangle$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'ortho normalisation :

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\delta(p-p^{'}) \quad (2.17)$$

2.6. La réduction de Brau :

Dans la référence **[19],** l'auteur considère le cas $\beta^{'} = 2\beta$dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (2.30) s'annulent au premier ordre de β .Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotation nulle, Pour ce cas particulier, les opérateurs $X_i$et $P_i$satisfaisant au premier ordre en βà l'algèbre de Heisenbergdéformée (2.28) sont représentés par :

$$X_i = x_i \quad et \quad P_i = p_i(1+\beta p^2) \qquad (2.37)$$

Avec :

$$x_i = x_i \qquad et \qquad p_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations.

Dans la référence**[3],** En représentation généralisant (2.37) au cas $\beta^{'} \neq 2\beta$a été donnée, elle a la forme suivante :

$$X_i = x_i + \frac{2\beta-\beta^{'}}{4}(p^2x_i + x_ip^2) \quad \text{et} \quad P_i = p_i\left(1+\frac{\beta^{'}}{2}p^2\right) \qquad (2.38)$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de βet$\beta^{'}$.

2.7. L'équation de Schrödinger :

Dans la mécanique quantique ordinaire l'équation de Schrödinger écrit par la forme :

$$H\Psi(\vec{r}.t) = E\,\Psi(\vec{r}.t)$$

Avec : $H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$ et $E = i\hbar\frac{d}{dt}$

Utilisons la réduction de brau où l'on a :

$$P = p(1+\beta p^2)\text{et}X = x$$

Avec $$p = -i\hbar\frac{d}{dt}$$

On aura

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) = \frac{\left(p\,(1+\beta p^2)\right)^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) + \frac{\beta}{m}p^4 + O(\beta^2)$$

Donc $$H = H_0 + H_1 + O(\beta^2) \qquad (2.39)$$

Ou $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad et \quad H_1 = \frac{\beta}{m}p^4 \qquad (2.40)$$

Donc, nous voyons que tout système avec un Hamilton quantique (ou même classique) défini bienH_0, estperturbé parH_1, Il reste à calculer les corrections dû au Hamilton H_1.Avant que nous fassions, nous écrivons aussi l'équation Schrödinger dépendante du temps :

$$H\psi(\vec{r}.t) = i\hbar\frac{d\psi}{dt} \qquad (2.41)$$

Donc :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(x)\right)\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{d\psi}{dt} \qquad (2.42)$$

Comme est vu clairement, l'effet de la longueur minimale est décrit par la présence d'un terme de la perturbation ($\frac{\beta}{m}p^4$) dans l'équation Schrödinger ordinaire.

2.8. La densité de courant et l'équation de continuité :

Dans l'équation Schrödinger (2-42),$V(x)$ Doit être réel pour que H soit hermétique. L'équation complexe conjuguée est :

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(x)\right)\psi^* = -\mathrm{i}\hbar\frac{d\psi^*}{dt} \qquad (2.43)$$

Multiplions les deux équations de (2-42) parψ^*, ceux de (2-43) par ψ en trouver :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^* \vartriangle \psi + \frac{\beta}{m}\hbar^4\psi^* \vartriangle^2 \psi + \psi^* V(x)\psi = \mathrm{i}\hbar\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi \vartriangle \psi^* + \frac{\beta}{m}\hbar^4 \psi \vartriangle^{2\psi^*} + \psi V(x)\psi^* = -\mathrm{i}\hbar\psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}} \end{cases} \quad (2.44)$$

On faisant la différence entre deux équations il vient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) + \frac{\beta}{m}\hbar^4(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \mathrm{i}\hbar\left(\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} + \psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}}\right)(2.45)$$

$$-\frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) + \frac{\beta}{mi}\hbar^3(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \left(\psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} + \psi \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{dt}}\right)(2.46)$$

Et on l'équation de continuité est : ($\overrightarrow{\nabla \mathcal{J}}(\overrightarrow{r}.t) + \frac{d\rho(\overrightarrow{r}.t)}{dt} = 0$) , comparons cette équation avec (2-46), en trouve :

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{J}}(\overrightarrow{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vartriangle \psi - \psi \vartriangle \psi^*) - \frac{\beta}{mi}\hbar^3(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) \ (2.47)$$

Avec :

$$\Psi^* \vartriangle \Psi - \Psi \vartriangle \Psi^* = \vec{\nabla}(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*)(2.48)$$

$$(\psi^* \vartriangle^2 \psi - \psi \vartriangle^2 \psi^*) = \vec{\nabla}\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \vartriangle \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right](2.49)$$

En remplace (2-48) et (2-49) dans (2-47) en trouve:

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{J}}(\overrightarrow{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\vec{\nabla}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\right) - \frac{\beta}{mi}\hbar^3\vec{\nabla}\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \vartriangle \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]$$

Donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{J}}(\overrightarrow{r}.t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\right) - \frac{\beta}{mi}\hbar^3\left[\left(\psi^*\vec{\nabla} \vartriangle \psi - \psi\vec{\nabla} \vartriangle \psi^*\right) + \left(\vartriangle \psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]$$

$$= \overrightarrow{\mathcal{J}} + \overrightarrow{\mathcal{J}}_1(2.50)$$

Où $\overrightarrow{\mathcal{J}}$ est l'expression courante dans la mécanique quantique ordinaire et $\overrightarrow{\mathcal{J}}_1$ est le terme supplémentaire due à la déformation.

CHAPITRE 3

L'AMPLITUDE DE DIFFUSION ET LA SECTION EFFICACE EN MECANIQUE QUANTIQUE DEFORMEE.

Introduction :

Dans les dernières années beaucoup de travaux ont été consacrés à traité des problèmes de mécaniques quantiques dans l'espace déformé avec longueur minimale. Un tel intérêt a été motivé par plusieurs travaux indépendants dans la théorie des cordes et la gravité quantique. Kempf et ses collaborateurs **[14]** , **[1]** et **[2]** ont montré que l'existence de la longueur minimale donne une déformation dans les relations de commutations canoniques.

$$[X_i , p_j]= i\hbar(\delta_{ij}(1+\beta p^2) + \beta' p_i p_j) \qquad (3.1)$$

Avec $[p_i,p_j]=0$

$$[X_i,X_j]=i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+(2\beta+\beta')\beta p^2}{1+\beta p^2}(p_i X_j - p_j X_i) \qquad (3.2)$$

Où β, β' sont les paramètres des déformations. Nous supposons que ces quantités sont non négative $\beta, \beta' \geq 0$ C'est facile à montrez que la longueur minimale égale $\hbar\sqrt{\beta + \beta'}$.cette algèbre déformée pose des complications supplémentaires dans la résolution des problèmes de la mécaniques quantiques. Plusieurs travaux ont été faits dans cette algèbre notamment le spectre de l'atome de l'hydrogène. Dans ce chapitre on va exposer le formalisme de la diffusion élastique dans le cadre de cette algèbre.

3.1. Formalisme de diffusion en mécanique quantique déformée :

Pour traiter le problème de la diffusion, introduisons les opérateurs qui satisfont l'algèbre (3.1) et (3.2) .

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \frac{2\beta-\beta'}{4}(x_i p^2 + p^2 x_i) \\ Pi &= p_i + \frac{\beta'}{2} p_i p^2 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Où $p^2=\sum_{j=1}^{3} pj^2$ et $x_i= x_i$ et $p_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$ sont les opérateurs de position et d'impulsion, satisfaisant la relation de commutation canonique $[x \ , p\ ]=i\hbar$, Considérons le cas $2\beta = \beta'$ ou on a $[X_i, X_j] = 0$.l'équation Schrödinger avec V(r) potentiel arbitraire prendre la forme suivante**[3]**:

$$(H_{0d}+V(r))\Psi = E\Psi \qquad (3.4)$$

Où
$$H_{0d} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta' p4}{2m} \qquad (3.5)$$

Nous supposons que V (r) →0 quand r→ ∞ c'est-à-dire que l'état du particule diffusée par la cible au grandes distances est un état libre. L'énergie cinétique d'une particule libre est :

$$E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} = \frac{p\left(1+\beta' P^2\right)}{2} = \frac{\hbar^2 k^2(1+\beta' \hbar^4 k^4)}{2m} \qquad (3.6)$$

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}(1+\beta'\hbar^2 K^2) \qquad (3.7)$$

Où k est le vecteur d'onde de la particule incidente P =ħ k (1 +$\beta'\hbar^2 K^2$ / 2) est son moment .Nous considérons la diffusion élastique c'est-à-dire que qu'après la diffusion k = k', où k' est le vecteur d'onde de la particule diffusée. Posons $V(r)= \frac{\hbar^2}{2m}U(r)$,l'équation (3.4) prend la forme suivante **[3]** :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{\hbar^4}{2m}\Delta^2 + V(r)\right)\Psi(\vec{r})=\frac{\hbar^2 K^2}{2m}(1+\beta'\hbar^2 K^2)\,\Psi(\vec{r}) \quad (3.8)$$

Multipliant par $-\frac{2m}{\hbar^2}$ on aura

$$(\Delta-\hbar^2\Delta^2 + (k^2(1+\beta'\hbar^2 K^2))\Psi(\vec{r}) = U(r))\,\Psi(\vec{r}) \quad (3.9)$$

Q'on peut l'écrire comme suit

$$(\Delta + \alpha)\,\Psi(\vec{r}) = U(r)\,\Psi(\vec{r}) \qquad (3.10)$$

Où α est l'opérateur définit par

$$\alpha = (-\hbar^2\Delta^2 + k^2(1+\beta'\hbar^2 K^2)) \qquad (3.11)$$

Dans le cas libre on

$$(\Delta + \alpha)\, \Psi(\vec{r}) = 0 \qquad (3.12)$$

3.2 L'amplitude de diffusion et la section efficace :

Par définition la nouvelle fonction de green est la solution de l'équation**[3]** :

$$(\Delta + \alpha)\, G(\vec{r'}\_\vec{r}) = \delta(\vec{r}\,\grave{}\,\vec{r'}) \qquad (3.13)$$

Nous pouvons écrire la solution d'équation (3.10) sous la forme:

$$\Psi(r)=\Psi_H(r)+\int G(r,r')\frac{2m}{\hbar^2}U(r,r')\Psi(r')dr' \qquad (3.14)$$

Où $\Psi_H(r)$ est la solution de l'équation homogène:

$$(\Delta + \alpha)\,\Psi_H(r) = 0 \qquad (3.15)$$

En effet appliquons l'operateur$\Delta + \alpha$ aux deux membre de (3.14)compte tenu de (3.15) nous obtenons

$$(\Delta + \alpha)\,\Phi(r) = (\Delta + \alpha)\int d^3r'\, G(r-r')\frac{2m}{\hbar^2}U(r')\Phi(r') \qquad (3.16)$$

Admettons qu'on puisse faire passer l'operateur dans l'intégrale il agira alors seulement sur la variable r et donnera

$$(\Delta + \alpha)\,\Phi(r)=\int d^3r'\,\delta(r-r')U(r')\Phi(r')$$

On utilisant la relation usuelle suivante:

$$F(x) = \int \delta(x-x')F(x')dx'$$

On aura

$$(\Delta + \alpha)\,\Phi(r)=\int d^3r'\,\delta(r-r')\frac{2m}{\hbar^2}U(r')\Phi(r')$$

$$= U(r)\Phi(r) \qquad (3.17)$$

$G(\vec{r}-\vec{r'})$ et $\delta(\vec{r}\,\grave{}\,\vec{r'})$ sont définies par leurs transformations de Fourier suivantes:

$$G(\vec{r}-\vec{r'})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')}G(\vec{q})d^3q \qquad (3.18)$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} d^3q \qquad (3.19)$$

En remplaçons ces deux expression dans (3.13) donne :

$$(-q^2+ \hbar^2 q^4+K^2(1+ \beta'\hbar^2K^2))G(\vec{q})=1 \qquad (3.20)$$

donc :

$$G(\vec{q}) = \frac{1}{(\hbar^2q^4-q^2+k^2(1+\beta'\hbar^2K^2))} \qquad (3.21)$$

L'expression G ($\vec{r}-\vec{r'}$) s'obtient par le remplacement de (3.21) dans (3.18) il vient :

$$G(\vec{r}-\vec{r'})= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{iq(\vec{r}-\vec{r'})}}{(k^2(1+\beta'\hbar^2K^2)-\hbar^2q^4-q^2)} d^3q \qquad (3.22)$$

En intégrant les angles on obtient

$$G(\vec{r}-\vec{r'})= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{q^2dq}{(k^2(1+\beta'\hbar^{2K^2}-\hbar^2q^4-q^2)} \int_0^\pi e^{iq|\vec{r}-\vec{r'}|\cos\theta}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \qquad (3.23)$$

Pour simplifiée en faisant le changement de variable x=cos θ

$$\int_0^\pi e^{iq\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|\cos\theta}\sin\theta\, d\theta=\int_{-1}^1 e^{iq\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|x} dx=\frac{1}{iq\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\left(e^{iq\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}-e^{-iq\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\right) \qquad (3.24)$$

La relation (3.23) devient:

$$G(\vec{r}-\vec{r'})=\frac{1}{4\pi^2 i\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\int_0^\infty \frac{q}{(k^2(1+\beta'\hbar^{2K^2}-\hbar^2q^4-q^2)}\left(e^{iq|\vec{r}-\vec{r'}|}-e^{-iq|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)dq \qquad (3.25)$$

Ou **[3]**

$$G(\vec{r}-\vec{r'})=-\frac{1}{4\pi^2 i\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\int_{-\infty}^\infty \frac{q\,e^{iq|\vec{r}-\vec{r'}|}}{(\hbar^2q^4-q^2+k^2(1+\beta'\hbar^2K^2))}dq \qquad (3.26)$$

On appliquant le théorème de résidus on obtient la forme asymptotique de la fonction de Green suivante:

$$G(|r-r'|)=-\frac{1}{4\pi|r-r'|(1+2\beta'\hbar^2K^2)}e^{ik|r-r'|} \qquad (3.27)$$

Utilisons cette expression de la fonction de Green nous récrivons l'équation (3.14) sous la forme suivante:

$$\Psi(r)=\Psi_k(r) - \int \frac{1 e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|(1+2\beta'\hbar^2K^2)}\frac{2m}{\hbar^2} U(r,p')\Psi(r')dr' \qquad (3.28)$$

Nous nous intéressons à la fonction d'onde dans la région asymptotique $r\rightarrow\infty$:

$$k\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|=k\sqrt{r^{\to 2}-2(r\,)^{\to}r+(r')^{\to 2}} \simeq kr - k\frac{\vec{r}}{r}\vec{r'}=kr-\vec{k}\vec{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{1}{\left|1-\vec{r}\vec{r'}/\vec{r'}^2\right|} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^2}\right) \simeq \frac{1}{r}$$

Donc $$\Psi(r)=\Psi_k(r) - \frac{m}{2\hbar^2\pi(1+2\beta\hbar^2k^2)}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik'r'} U(r,p')\Psi(r')dr' \qquad (3.29)$$

L'équation (3.29) peut se présenter sous la forme:

$$\Psi(\vec{r})=e^{i\vec{k_0}\vec{r}}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta.\Phi) \qquad (3.30)$$

Où $f(\theta.\Phi)$ st l'amplitude de la diffusion définie par:

$$f(\theta.\Phi) =- \frac{m}{2\hbar^2\pi(1+2\beta\hbar^2k^2)}\int e^{-ikr'} U(r',p')\Psi(r')dr' \qquad (3.31)$$

Comme nous voyons le premier terme dans l'équation (3.29) correspond à la fonction d'onde de la particule incidente et le second terme correspond à la fonction d'onde de la particule diffusée. Comme il est bien connu le problème principal de la diffusion est le calcul de la section efficace différentielle qui à dans l'espace des configurations la même forme comme dans la mécanique quantique ordinaire **[3]**.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|-\frac{m}{2\hbar^2\pi(1+2\beta'\hbar^2k^2)}\int e^{-ik'r'}U(r',p')\Psi(r')d^3r'\right|^2 \qquad (3.32)$$

Cette dernière formule permet le calcul section efficace différentielle pour un potentiel arbitraire. Mais comme nous voyons dans l'expression (3.31) l'amplitude de diffusion ne peut être calculée exactement, il est nécessaire d'utiliser des approximations. Dans l'approximation de Born où on considère le potentiel comme une perturbation et on résoudre l'équation (3.29) une méthode d'approximation consécutive. Au premier ordre approximation nous substituons l'onde plane Ψ_k (r) = exp (ikr) dans la relation (3.29).

3.3. Application au potentiel coulombien :

Pour le potentiel de Coulomb U(r)= Ze² / r où r = $\sqrt{\sum xi^2}$ dans l'espace déformé, la section efficace prend la forme suivante:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta)|^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4 k^4}\left|\int_0^\infty rV(r)\sin(qr)dr\right|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2}{\hbar^4 k^4}\left|\int_0^\infty r\frac{Ze^2}{r}\sin(qr)dr\right|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Ze^4 m^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty \sin(qr)dr\right|^2$$

On a $\int_0^\infty \sin(qr)dr = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r}\sin(qr)dr$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left[\int_0^\infty e^{-(\lambda-iq)r}dr - \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mathrm{iq})r}dr\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\lambda-iq}-\frac{1}{\lambda+iq}\right] = \frac{1}{q}$$

Avec $q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2m}{\hbar^2q^2}\right)^2 = \left(\frac{Ze^2m}{2\hbar^2k^2}\right)^2\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{Ze^4}{16E^2}\right)\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Remplaçons E par $\frac{\hbar^2k^2}{2m}(1+\beta'\hbar^2k^2))^2$ on aura:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{Ze^4}{16(\frac{\hbar^2k^2}{2m}(1+\beta'\hbar^2k^2))^2}\right)\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (3.33)$$

Sachant que β' est un paramètre très petit utilisons l'approximation

$$(1+x)^{-2} \simeq 1-2x$$

on aura

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 e^4 Z}{4\hbar^4 k^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times [1 - 2\beta'\hbar^2 k^2] \quad (3.34)$$

Le premier terme dans (3.34) et la section efficace différentiel ordinaire et l'autre est dû au déformation. Comme nous voyons, les corrections sur la section efficace différentielle tend vers zéro quand le paramètre de déformation β' tend vers zéro et nous retrouvons la section efficace différentiel ordinaire.

Conclusion :

La partie principale de notre travail est de présenter le formalisme du processus de diffusion en mécanique quantique déformée. Cette déformation dû au présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme:

$\left[\mathrm{X}_i \,, \mathrm{P}_j\right] = \mathrm{i}\hbar\ \left[\delta_{ij}\left(1 + \beta \mathrm{P}^2\right) + \beta' \mathrm{P}_i \mathrm{P}_j\right]$,ce qui conduit à une algèbre non Commutative des opérateurs de position ($\left[\mathrm{X}_i \,, \mathrm{X}_j\right] \neq 0$).

Nous avons exposés les modifications et les conséquences de cette déformation notamment la nouvelle forme de l'équation de Schrödinger, le produit scalaire, la relation de fermeture….

L'étude de la diffusion élastique dans ce contexte, nous apparaît que la section efficace différentielle égale au module carré de l'amplitude de diffusion ce qui le cas en mécanique quantique ordinaire, nous remarquons que la déformation apparait dans la nouvelle fonction de Green et son calcul est se complique mais ca formule coïncide avec celle de la mécanique quantique ordinaire quand on annule la déformation, nous remarquons aussi que les corrections apportées à la section efficace coulombienne ne dépend pas analytiquement au paramètres de déformation, mais elles ont la tendance vers zéro quand les ces paramètres tend vers zéro, et le résultat obtenue coïncide avec la formule de la mécanique quantique ordinaire. En fin on note que la validité de l'approximation de Born reste dépend du potentiel considéré et elle n'a pas touchée par la déformation.

REFERENCES :

[1]Achim. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).

[2]Achim. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997).

[3] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A 74, 012101 (2006)

[4] Claude.cohen-tannoudji ,Bernard .Diu et Franck .Laloe mécanique quantique–tomes 1 et 2 –Edition Heramann(1973).

[5]Mécanique quantique, Ruth Durrer de université de Genéve quai E. Ansermet 24,1211Genéve 4.Suisse Manuscrit rédigé par Cyril cartier 2004-2005.

[6]Thèse de Doctorat ETUDE DE L’APPROXIMATION DE Born du deuxième ordre pour les collisions d’atomes et Molécules par Impact Electronique, HADDADOU ATIKA.

[7] Mémoire de Magister, Diffusion élastique d’électrons par une molécule quasi- sphérique : cas de H_2s M^{elle} MEDEGG FATMA, Université MOULOUDE MAMMRI, TIZIOUZOU .

[8] C. Ramsauer, Ann. Phys.64 ,513(1921)

[9]Quantum Mechanics concepts and application , NOUREDINE-ZETTILI. Jacksonville state university, Jacksonville, USA .

[10]Scattering theory, Born approximation ss2011: , Introduction to nuclear and particle physics, part 2.

[11] Thèse de Doctorat, ionisation de petite Molecules par impact D’électrons : Etudes Dynamique et de structure. ZAHIRA REZKALLAH.

[12] PHY3813H : Mécanique quantique Avancée, DAVID LONDON, Université de Montréal hiver 2006, PDF :$\hbar$ttp ://WWW. Lps. Umonteral. ca| ~ London.

[13] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Vol. 1 : Fundamentals, (Academic Press Inc, New York, 1966), p. 213.

[14]AchimKempf, GianpieroMangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).

[15] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121-2137.

[16]Thèse Djamil Bouaziz en vue de l'obtentiondu grade de docteur en sciences -Spécialité : Physique théorique -Promoteur : Michel Bawin-Juin 2009

[17] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A 72, 012104 (2005).

[18] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002).

[19] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. 32, 7691 (1999).

L’amplitude de diffusion et la section efficace dans le cadre de la mécanique quantique déformée.

ملخص:

في هذا العملقمنا بعرض الدراسة الرياضية للانتشار المرن للجسيمات في اطار ميكانيكالكمفي وجود للطول الاولي .

ذكرنا من جهة بدراسة الانتشار في ميكانيك الكم العادي ثم قدمنا الدراسة الرياضية في وجود للطول الاولي ونتائجه على جبرية ميكانيك الكم وفي النهاية نطبق هذه الجبرية المشوهة من اجل دراسة ظواهر الانتشاروحساب سعة الانتشارو دالة قرينثم المقطع الفعال بتقريب بورن لكمون كولمب كتطبيق.

Résumé :

Dans ce travail,Nous avons exposé le formalisme de la diffusion élastique des particules dans le cadre de la mécanique quantique avec une longueur minimale nous avons rappelé d’abords l’étude de la diffusion en mécanique quantique ordinaire, ensuite nous avons présenté le formalisme de la longueur minimale .Ces conséquences sur l’algèbre de la mécanique quantique

En fin nous avons appliqué cette algèbre déformée pour étudier le phénomène de diffusion,

Amplitude de diffusion, fonction de Green, section efficace, et approximation de Born

Nous avons traités le potentiel Coulombienne comme application

Abstract :

In this work, We arestudied the elastic scattering of the particle in deformed quantum mechanics with minimal length. first, we are studied the scattering of the particle in ordinaryquantum mechanics, then we preserve the minimal length and its consequences, finally we are practice this Algebra forma to study the scattering phenomena, the scattering amplitude, Green function, cross theory and Born approximation , and we are practice to the coulomb potential.