



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par

ABID WARDA

Sujet

Problèmes aux limites linéaires pour l'équation de Laplace dans un domaine régulier

Soutenu publiquement le

devant le jury :

Dr. A. Merzougui	Univ de M'sila	Président
Dr. DILMI Mourad	Univ de M'sila	Rapporteur
Dr. A. Memou	Univ de M'sila	Examineur

Promotion: 2013/2014

Table des matières

0.1	Introduction Générale	3
1	Introduction au espace de Sobolev classique	4
1.1	Notion sur les distributions	4
1.1.1	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$	4
1.1.2	L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$	5
1.1.3	Dérivation des distributions	7
1.1.4	L'espace L^p	10
1.1.5	L'espace L^∞	11
1.1.6	L'espace L^2	11
1.2	Les espaces de Sobolev	12
1.2.1	L'espace $H^1(\Omega)$	12
1.2.2	L'espace $H^2(\Omega)$	13
1.2.3	L'espace $H^m(\Omega)$	13
1.2.4	L'espace $H_0^1(\Omega)$	14
1.3	Notion de trace	16
2	Quelques outils d'analyse des E.D.P.	19
2.1	Nombre d'inconnues, nombre d'équations	19
2.2	Méthodes de résolution	20
2.3	Résolution en déplacements	21
2.3.1	Équations de Lamé-Clapeyron	21

Résumé

2.4	Cas particuliers	21
2.4.1	Déformation pure	21
2.4.2	Matériau incompressible	22
2.5	Théorème de Lax-Milgram	22
2.6	Formules de Green	24
3	Problèmes avec des conditions aux limites couplés pour le Laplacien	26
3.1	Notations	26
3.2	Position des problèmes (E_k)	27
3.3	Formulation variationnelle des problèmes (E_k)	28
3.4	Équivalence entre le problème (E_i) et (P_i)	35
3.5	Existence et unicité	38

Keywords: The Sobolev spaces, variational formulation, distribution.

Résumé

Ce mémoire constitue une introduction aux espace de Sobolev et la formulation variationnelle pour les problèmes aux limites en utilisant le théorème de Lax Milgrame pour établit l'existence et l'unicité de solution du Laplacien.

Mot clés: Les espaces de Sobolev, Formulation variationnelle, La distribution.

Abstract

This brief provides an introduction to Sobolev space and variational formulation for boundary value problems using the theorem of Lax Milgrame to establish the existence and uniqueness of solution of the Laplacian.

Keyword: The Sobolev spaces, variationnelle formulation, distribution.

0.1 Introduction Générale

Nous présentons dans ce travail quelques idées pour résoudre les problèmes, en général d'origine physique, dans lesquels on cherche une ou plusieurs fonctions vérifiant des équations aux dérivées partielles et des conditions supplémentaires. Le sujet est évidemment très vaste, puisque les équations aux dérivées partielles modélisent l'ensemble des phénomènes physiques, certains domaines sont encore mal connus et beaucoup de problèmes sont l'objet de conjectures. Nous n'avons donc pas l'ambition dans ce mémoire de faire une synthèse des connaissances actuelles mais nous essayons d'introduire quelques idées simples pour comprendre les problèmes élémentaires. Prenons l'exemple des problèmes linéaires ;

En dimension supérieure à 1, il n'est pas facile de démontrer que ces problèmes admettent une solution dans le cas d'un ouvert quelconque. On ne sait « calculer » explicitement cette solution que dans quelques cas particulier (géométries simples, séparation des variables).

Nous allons voir qu'une formulation différente, appelée « formulation variationnelle » où « formulation faible », couplée à des résultats abstraits d'analyse fonctionnelle permet d'énoncer un théorème général d'existence et d'unicité. Nous devons pour cela changer de point de vue et affaiblir la notion de solution.

Ce mémoire se divise en trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donnera les définitions et quelques outils sur les distributions et les espaces de Sobolev classiques.

Le deuxième chapitre consacré à étudier Quelques outils d'analyse des équations aux dérivées partielles, ainsi que la formule de Green. Les conditions du théorème de Lax-Milgram sont données.

Le troisième chapitre consacré l'étude de trois problèmes au limite $(E_k, k = 1, 2, 3)$, en verra la position du problème, la formulation variationnelle de ces problèmes et puis en utilisant le théorème de Lax-Milgram, ainsi que la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on établit l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (E_k) .

Bibliographie

- [1] Auphan. T. *Equations aux dérivées partielles*, 2011.
- [2] Monwel. L. *Introduction aux équations aux dérivées partielles*, cours de maîtrise.
- [3] Boyer. F. *Analyse numérique des EDP elliptiques*, Aix-Marseille universités, Mathématique et applications, 2011.
- [4] Brézis. H. *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Masson, 1983.
- [5] Ciarlet. P G. *The Finite Élément Method for Eliptic Problems*, North-Holland, 1980.
- [6] Cohen. A. *Approximation variationnelles des EDP*, notes du cours de M2.
- [7] Dilmi. M. *Alternative de fredholm relative du problème de Dirichlet-Contact sans frottement dans un polygone ou polyèdre*, Thèse de majister, sétif, Avr 2001.
- [8] Durant. G, J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris (1972).
- [9] Leborgne. G. *Approximation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis*, 2003.
- [10] Magrus. Alphonse. *Equations aux dérivées partielles 2*. Université Catholique de Louvain, Mat 2410,2009-201.
- [11] Munnier. A. *Espaces de Soboloev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, 2007-2008.
- [12] Nicaise. Serge. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, 2 cycle-écoles d'ingerieurs.

- [13] Raviart. P et Marie.T. J. *Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.
- [14] <http://Perso.uclouvain.be/Alphonse.magnus>.