République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Math discrète

Par

ZERROUG Wafa ATTABI Sara

Sujet

NOMBRES DE FIBONACCI

Devant le jury :

Mr. ZEDAM Lemnaouar	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. BOUDAOUD Abdelmadjid	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. MIHOBI Doadi	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé et la patience durant tout le temps que nous avons consacré à la réalisation de ce travail

Nous voudrons tout d'abord adresser toutes nos gratitudes au Docteur Boudaoud Abdelmadjid du Pôle universitaire MOHAMMED BOUDIAF de M'SILA pour nous avoir guider et conseiller tout au long de ce travail et pour son soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il nous a accordée pour mener ce travail. Nous désirons aussi remercier Monsieur Zedam Lemnaouar pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury. Nous tiendrons également à remercier Monsieurs Mihoubi Douadi pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos vifs remerciements à toute nos familles, qui nous a accompagné tout au long de nos études par leurs amours inconditionnels et leur soutien constant.

Merci

Table des matières

Introduction

Fibonacci est une suite de nombres entiers où chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (resp. 1 et 1) et ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ (resp. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$). Leonardo Fibonacci est le premier qui a découvert cette suite qui décrit la croissance d'une population de lapins.

Cette suite nous la rencontre fréquemment dans la nature, par exemple dans l'organisation des écailles d'un ananas, ou encore dans la disposition des graines dans une fleur de tournesol. aussi nous remarquons son existence chez l'être humain et exactement sur le visage; également chez les animaux comme par exemple les fourmis, abeilles, Nautile, ...

Pour les différentes raisons évoquées plus haut nous avons choisi de préparer ce modeste mémoire de Master II sur cette fameuse suite où son contenu est comme suit

Dans le premier chapitre nous avons parlé de l'existence de la suite de Fibonacci partout et qu'elle nous entoure dans notre vie.

Dans le deuxième chapitre on étudie les nombres des Fibonacci en donnant quelques définitions, à savoir : nombre de Fibonacci, nombre d'or, triangle de Pascal, suite de Lucas, ...

Le dernier chapitre est consacré à quelques propriétés du suite de Fibonacci, résolution des équations de récurrence linéaire d'ordre deux et une application algébrique.

Historique : **Fibonacci(1175 − 1240)**

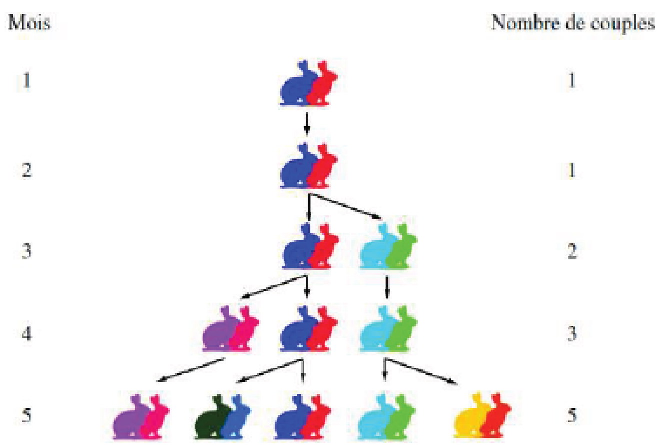
De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant "fils de Bonaccio"), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourut l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes

Dans son **Liber Abaci** (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien Al Khwarizmi.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits "arabes" (système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, Practica geometriae (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (Liber Quadratorum, 1225).

En 1202, Fibonacci se pose la question suivante : Combien y aura-t-il de couples de lapins après une année ? Fibonacci s'intéresse au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéals. Le problème est le suivant :

- On commence avec un couple de jeunes lapins.
- Un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire.
- Un couple de lapins donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois.



Evolution de la population de lapin

Chapitre 1

Nombres de Fibonacci dans la nature

Les nombres Fibonacci sont le système de numérotation de Nature. Ils apparaissent partout dans la nature, de l'arrangement des feuilles dans les plantes, au motif des fleurs d'une bractées d'une pinecone ou des écailles d'un ananas. les nombres de Fibonacci appliquent à la croissance de la plupart des organismes vivants, y compris une seule cellule, un grain de blé, une colmena d'abeilles...

Beaucoup de plantes montrent les nombres de Fibonacci dans l'arrangement des feuilles autour de la tige. Cerfs de pin et cônes de sapin montrent aussi les nombres de Fibonacci, tout comme les marguerites et les tournesols. Les tournesols peuvent contenir le nombre 89, voire 144. De nombreuses autres plantes, comme les succulentes, montrent également les nombres de Fibonacci. Certains arbres de conifères montrent ces nombres dans les bosses sur leurs troncs et les palmiers montrent les nombres dans les bagues sur leurs troncs.

Dans l'apparente aléaude du monde naturel, nous pouvons trouver de nombreux exemples d'ordre mathématique impliquant les nombres de Fibonacci eux-mêmes et les éléments «*Golden*» étroitement liés.

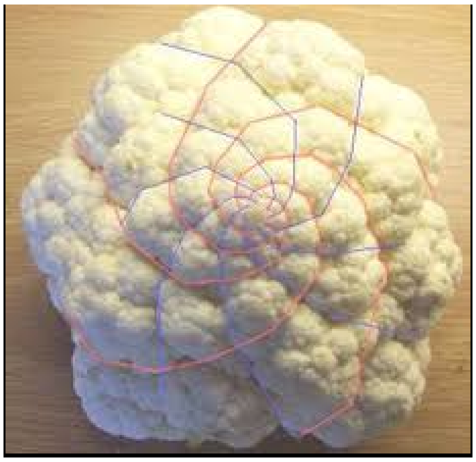
1.1 Fibonacci et plantes

1.1.1 Légumes et fruits

Le chou-fleur

Nous pouvons observer que le chou-fleur est formé de spirales.

Ces spirales sont-elles mêmes formées en rejoignant les petits espaces entre les petits morceaux composants le chou-fleur.



Le chou-fleur

Sur cette photo on voit que les spirales rouges qui vont dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sont au nombre de 5. Et les bleus qui vont dans le sens contraire sont au nombre de 8.

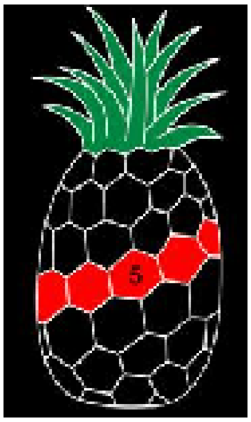
Nous retrouvons donc avec les termes de 5 et 8, deux termes successifs de la suite de Fibonacci.

$\frac{8}{5} = 1.6$ (un peu près égale à $1.618 \Rightarrow \phi$)

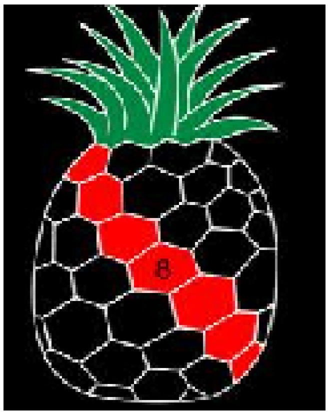
On trouve donc la présence du nombre d'or dans le chou-fleur.

L'ananas

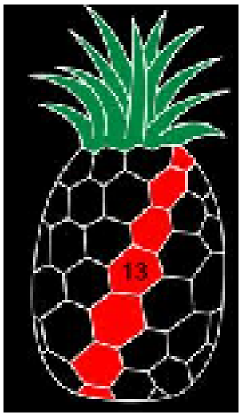
On le retrouve ainsi dans l'ananas. Les écailles que l'on voit sur ce fruit forment des spirales qui comportent un nombre précis de ces mêmes écailles



5 écailles



8 écailles

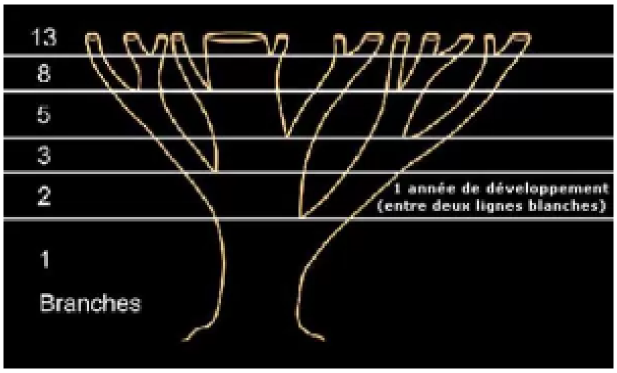


13 écailles

$5, 8, 13..$ encore des termes successifs de la suite de Fibonacci.

1.1.2 Les végétaux

Dans les arbres



Ce schéma représente le développement d'un arbre selon le nombre d'or. L'espace entre les lignes correspond à une année.

On remarque qu'on passe d'un tronc à deux branches, puis à trois, puis cinq puis huit et ainsi de suite.

De plus on remarque qu'à chaque nouvelle année, le nombre de branche qui suit représente l'addition des nombres de branches ayant poussés les deux années précédentes :

$3 = 1$(tronc) $+ 2$ (deux branches).

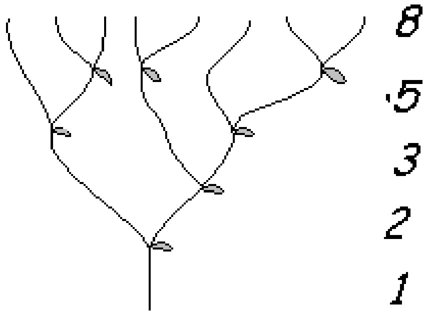
$5 = 2 + 3$.

$8 = 5 + 3$.

Tous ces termes que nous retrouvons font eux aussi, encore une fois, partie de la suite de Fibonacci : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$

Evidemment un arbre ne pousse pas indéfiniment et donc il atteint grand maximum 21 branches.

Plusieurs arbres ont la suite de Fibonacci dans leurs branches comme le chêne, le pommier ou le poirier.



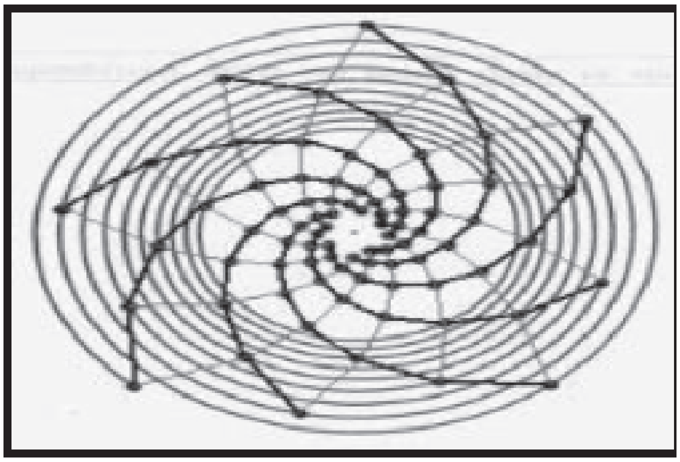
On observe le même phénomène dans les rameaux et les petites plantes. Avec le même développement avec en plus, une feuille ou plus sur chaque nœud.

La Pomme de pin

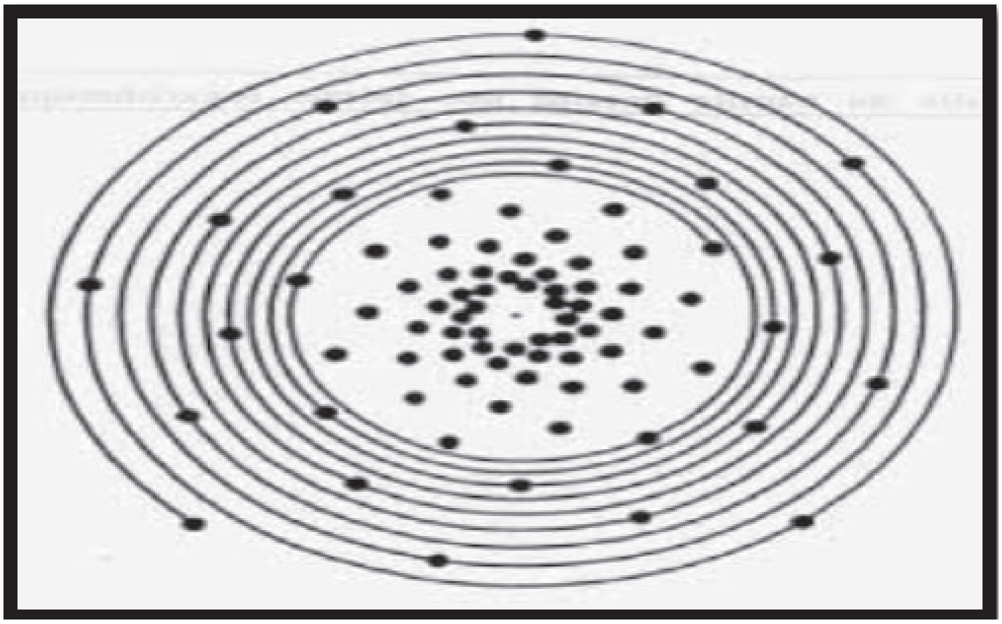
La pomme de pin montre clairement les spirales de Fibonacci : 8 vertes dans un sens, 13 rouges dans l'autre sens.

8 et 13 sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci : $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13$.

Ses écailles sont alignées selon la spirale de Fibonacci : on représente les 4 coins des écailles de la pomme de pin par des points. Lorsqu'on relie ces points, on obtient des spirales qui tournent vers la droite, et d'autres vers la gauche.



- Le nombre de spirales vers la gauche et vers la droite sont deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.
- Chaque point appartient à deux spirales. Les nombres de points sur chacune de ces spirales sont aussi deux nombres de la suite de Fibonacci.
- Lorsque l'on rejoint tous les points par une seule spirale, l'angle entre deux points consécutifs est l'angle d'or.



Cet emplacement en spirale se retrouve fréquemment dans la nature, notamment avec les plantes spiralées

1.1.3 Les fleurs

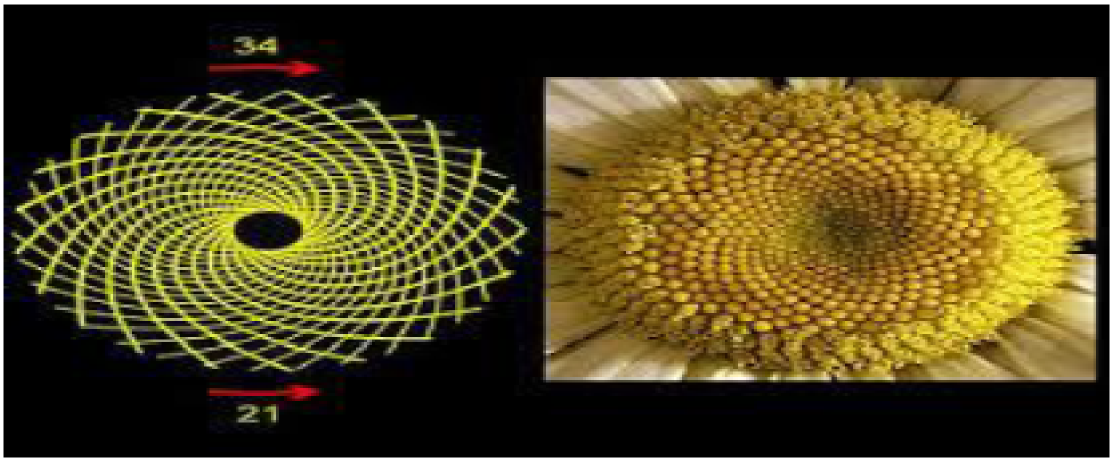
Le tournesol Le tournesol a lui aussi des spirales dans son cœur. Celles-ci se nomment des « parastiches » et s'enroulent dans les deux sens.

On retrouve ce même motif dans le cœur des pâquerettes et dans de beaucoup autres nombreuses fleurs. Dans le tournesol ce sont des spirales superposés.

On en compte 34 dans le sens des aiguilles d'une montre et 21 dans l'autre.

Suite de Fibonacci : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

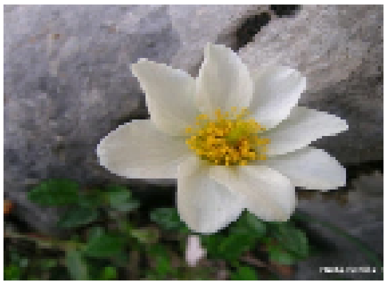
On retrouve encore une fois le nombre d'or : $\frac{34}{21} = 1.61905$. et ici on se rapproche fortement de 1.618.



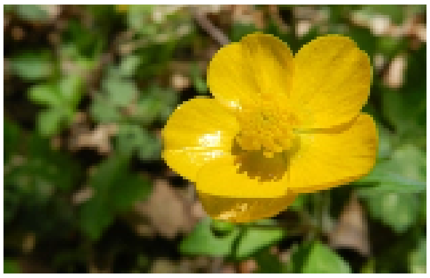
Autres fleurs Il y a bien évidemment beaucoup d'autre fleur avec dans leur cœur des spirales et donc le nombre d'or.

Mais il y a aussi des fleurs qui possède ϕ mais sous une forme différente: elles l'ont dans leurs pétales

En voici quelque exemple



Fleur à 8 pétales : la dryade



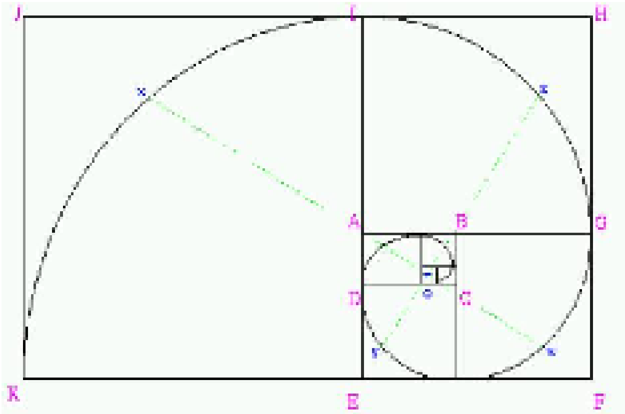
Fleurs à 5 pétales : bouton d'or

Fleur à 13 pétales : fleurs de talus.

1.2 Fibonacci et les animaux

1.2.1 Le coquillage Nautile

Le coquillage nautile a une forme de spirale logarithmique. On peut la dessiner à partir d'une série de rectangles d'or:

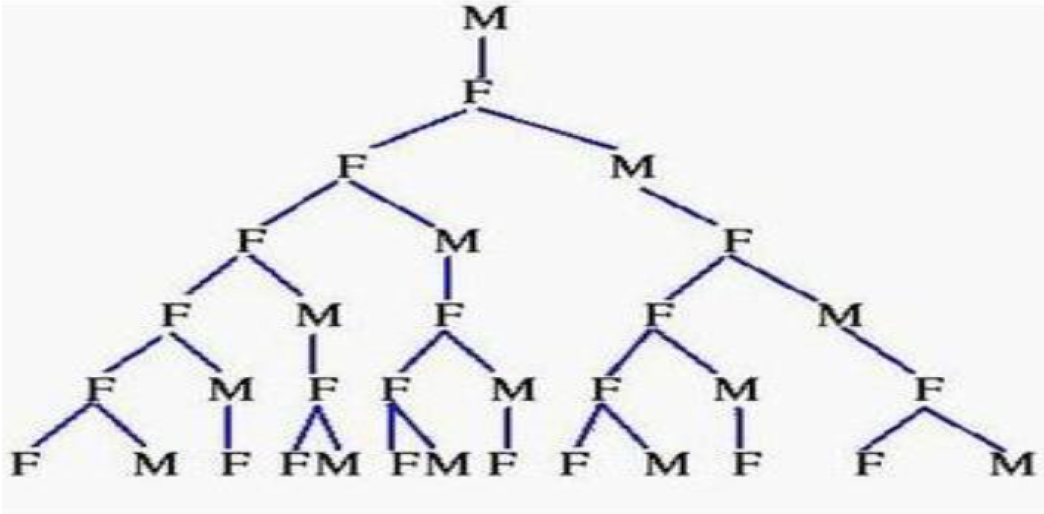


ABCD, AEFG, EFHI et JKFH sont des rectangles d'or. La spirale obtenue est une spirale d'or.

1.2.2 Les Abeilles

Les abeilles font partie de la famille des Hyménoptères (ordre d'invertébrés) qui comprend aussi les guêpes et environ 100000 espèces de fourmis. Quasiment toutes les espèces de cette famille ont une particularité chimique assez curieuse: les œufs fécondés donnent naissance à des femelles tandis que ceux qui ne l'ont pas été donnent naissance à des mâles. Chez les abeilles, c'est donc la reine qui contrôle le sexe d'un œuf en décidant ou non de le féconder à partir du sperme emmagasiné des mois, voire des années auparavant lors du vol nuptial. Ainsi, génétiquement parlant, l'abeille femelle a un père et une mère (la reine), alors que l'abeille mâle a une mère uniquement.

On schématise les ancêtres (M=mâle ; F=femelle) d'une abeille mâle.



En remontant les générations, on trouve donc des nombres d'ancêtres égaux aux nombres de la suite de Fibonacci .

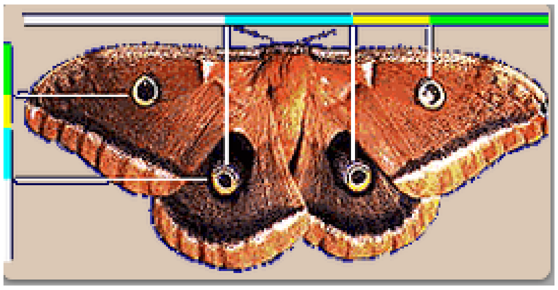
On remarque également qu'à chaque génération, les nombres de femelles et de mâles sont deux nombres consécutifs de cette suite.

1.2.3 L'étoile de mer

On peut également trouver un rapport entre les étoiles de mer et le nombre d'or du fait que l'étoile de mer est en effet un pentagone régulier étoilé qui lui-même est en relation direct avec le nombre d'or.

1.2.4 Les papillons

Protocole : On calcule le rapport $\frac{d_1}{d_2}$ (voir schéma).



d_1 est représenté la distance de la bande jaune .

d_2 représente la distance de la bande jaune verte.

Résultats attendus : $\frac{d_1}{d_2} = 1,618\ldots$

Expérience : Nous avons emprunté divers papillons provenant du laboratoire du lycée pour en mesurer d_1 et d_2 , armé de règle et d'un compas (pour plus de précisions). Voici les données recueillis :

Noms papillons	Vanessa	Erebia Neoridas	Ocolus pavonis	Pièridès
$d1$	$0,8$ cm	$0,4$	$0,5$	$0,4$
$d2$	$0,5$ cm	$0,25$	$0,3$	$0,25$
$d1/d2$	1.6	1.6	1.66...	1.6

D'après nos résultats, le rapport de $d_1$sur d_2 est bien environ égal à $1,618\ldots$, notre hypothèse est donc validé.

1.3 Fibonacci et l'être humain

1.3.1 Le corps humain et le rectangle d'or

Comme les anciens Grecs le savaient, le corps humain illustre la proportion d'or. La figure correspond bien à un rectangle doré, comme l'illustre la figure1. En outre, le visage fournit des exemples visuels du rapport d'or:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BD} = \phi$$

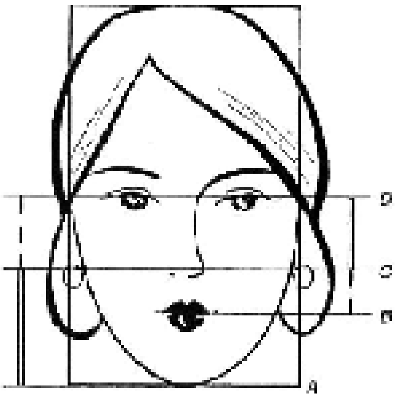


figure1

Donc, faites les doigts, car les figures 2 et 3 illustrent

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} = \frac{d}{c} = \phi$$

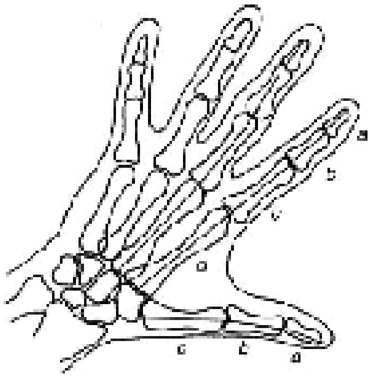
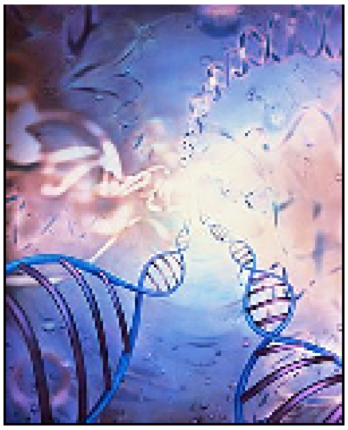


figure2

1.3.2 Le nombre d'or dans la molécule d'ADN

Les dimensions de la molécule d'ADN sont également en rapport avec la suite de Fibonacci.

Le rapport entre sa longueur (34 angströms) et sa largeur (21 angströms) d'un cycle complet de la double hélice, est égal au nombre d'or.



L'ADN dans la cellule se présente comme une double hélice entrelacée. Cette forme a deux sillons dans ses spirales dans un rapport du nombre d'or entre grand et petit sillons respectivement environ 21 et 13 angströms. Et on retrouve, comme par hasard, 3chiffres clés : $13, 21, 34$.

Chapitre 2

Les nombres de Fibonacci

2.1 Généralité :

2.1.1 Définition et génération d'une suite

Notion de suite numérique

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres.

- $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...$ suite des puissances de 2 ou suite géométrique de raison 2.
- $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...$ suite des carrés.
- $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...$ suite arithmétique de raison 4.
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$ suite de Fibonacci.

En mathématiques, une suite u est une liste ordonnée de nombres réels: les éléments de cette liste sont appelés termes de la suite u, et sont tous repérés par leur rang dans la liste ainsi le premier terme est souvent noté u_0, le second u_1 et ainsi de suite.

$u = (u_0; u_1; u_2; ...; u_{n-1}; u_n; u_{n+1}; ...)$.

Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

A chaque entier naturel n on associe un nombre réel u_n de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui à chaque entier naturel non nul associe son inverse :

$u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, ..., $u_n = \frac{1}{n}$, ...(on remarque qu'ici la suite commence à l'indice 1).

2.1.2 Modes de génération d'une suite

Une suite peut être engendrée de deux manières :

Définition 2.1.1 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière explicite lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n, indépendant des autres termes :*

$$u_n = f(n)$$

Où f désigne une fonction.

Cette relation permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 2.1.1 *Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $u_n = -5 + 7n$:*

$u_0 = -5 + 7 \times 0 = -5.$

$u_1 = -5 + 7 \times 1 = 2.$

$\vdots$

Définition 2.1.2 *Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est définie par récurrence lorsque l'on connait son premier terme et une relation de la forme:*

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Où f désigne une fonction.

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent.

Exemple 2.1.2 *Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$

$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 3 + 1 = -5,$

$u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-5) + 1 = 11,$

$u3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 11 + 1 = -21.$

L'inconvénient dans cet exemple est que des termes "éloignés" du début de la suite sont difficiles d'accès:

Pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents, jusqu'à u_{99}!

2.1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.1.3 *Soit (a,b)un couple de $\mathbb{R}*\mathbb{R}$.*
Une suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 si elle satisfait a' la relation de récurrence suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (E)$$

Le problème devient plus subtil: l'exemple type d'une récurrence linéaire à deux termes (ordre 2) est la célèbre suite de Fibonacci définie pour $a = b = 1$ par :

$$\begin{cases} u_o = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = au_n + bu_{n+1} \end{cases}$$

Quelques propriétés

Etant donné un couple (a,b) de $\mathbb{R}*\mathbb{R}$, notons U l'ensemble des suites u vérifiant la relation (E)

1.U n'est pas vide.

Preuve. la suite nulle appartient á U qui n'est donc pas vide. ■

2.La donnée des deux premiers termes u_o et u_1 définit une unique suite de U .

3.U est stable par combinaisons linéaire:

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ (u,v) \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$$

4.Une suite géométrique de raison q non nulle appartient a' U si est seulement si q est solution de l'équation $x^2 = \alpha x + b$.

Preuve. D'aprés la propriété précédente, nous pouvons poser $u_o = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q^{n+2} = \alpha q^{n+1} + bq^n \Leftrightarrow q^n\left(q^2 - \alpha q - b\right) = 0 \underset{q^n \neq 0}{\Leftrightarrow} q^2 - \alpha q - b = 0 \ \text{ avec } q^n \neq 0$$

■

Définition 2.1.4 *l'équation $x^2 = \alpha x + b$ s'appelle équation l'équation caractéristique.*

Expression en fonction de n

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 = \alpha x + b$. Trois cas sont á distingué:

1.**Cas** $\Delta > 0$

L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes $r_1$et r_2 et dans ce cas u appartient à U si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in N \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Exemple 2.1.3 $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$. *Elle admet pour solutions les réels* 1 *et* -2.
Par conséquent :

$$\forall n \in N,\ u_n = \alpha + \beta(-2)^n$$

En remplaçant n *par* 0 *puis par* 1, *nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 3 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 1$ *et* $\beta = -1$.
Conclusion :

$$\forall n \in N,\ u_n = 1 - (-2)^n$$

2.**Cas** $\Delta = 0$

L'équation caractéristique possède une solution double notée r. Dans ce cas u appartient à U si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in N,\ u_n = (\alpha n + \beta) r^n$$

Exemple 2.1.4 $u_{n+2} - 6u_{n+1} - 9u_n = 0$, $(a = -9, b = 6)$ *avec* $u_o = 5$, $u_1 = 6$.
L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 9 = 0$. *Elle admet pour solution double le réel* 3
Par conséquent :

$$\forall n \in N,\ u_n = (\alpha + \beta n)3^n$$

En remplaçant n *par* 0 *puis par* 1, *nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ 3(\alpha + \beta) = 6 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 5$ *et* $\beta = -3$.
Conclusion :

$$\forall n \in N, u_n = 3^n(-3n + 5).$$

3. **Cas $\Delta < 0$**

L'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées w et $\bar{w}$ .Posons $r = |w|$ et $\theta = arg\ w$. Dans ce cas u appartient à U si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in N,\ u_n = \alpha r^n cos\,(n\theta) + \beta r^n sin\,(n\theta)$$

Exemple 2.1.5 $u_{n+2} = 9u_n,\ u_0 = 5,\ u_1 = 1.$
L'équation caractéristique est $x^2 - 9 = 0$. Elle admet pour solutions $3i$ et $-3i$.
Par conséquent:

$$\forall n \in N,\ u_n = \alpha 3^n cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta 3^n sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ 3\beta = 1 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 5$ et $\beta = \frac{1}{3}$
Conclusion :

$$\forall n \in N, u_n = 53^n cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}3^n sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

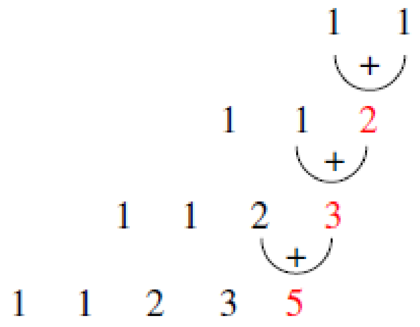
Remarque 2.1.1 *Dans les trois cas ci-dessus, le couple (α, β) est déterminé à partir des valeurs des premiers termes de la suite u.*

2.2 Suite des nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci débute de la manière suivante:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

Cette suite de nombres est appelée suite de Fibonacci et peut être formée de la maniére suivante:



La construction de la suite de Fibonacci

Elle est caractérisée par le fait que chaque nombre à partir du troisième est la somme des deux précédents, la suite est sensée décrire l'évolution des lapins.

Définition 2.2.1 *La suite de Fibonacci* (F_n) $n > 1$ *est une suite d'entier pour laquelle chaque terme est la somme des deux termes précédents, elle est définit par deux valeurs initiales:*

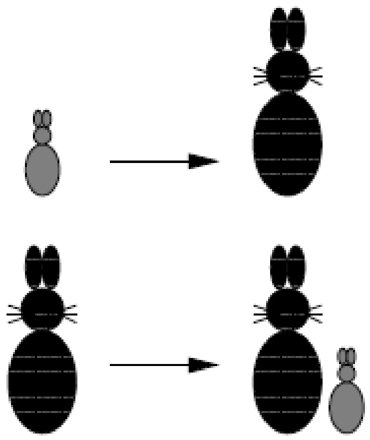
$$F_1 = 1, F_2 = 1.$$

Et par la relation de récurrence:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

illistration:

- Un couple de jeune lapins devient adulte.
- Un couple d'adultes donne naissance à un couple de jeunes (et ne meurt jamais).



Règles de substitution d'une génération de lapins

Soit A_n le nombre d'adulte, J_n le nombre de jeune couple à $n_{ième}$ génération partant de: $J_1 = 1$ et $A_1 = 0$ la règle de substitution donne:

$$A_{n+1} = A_n + J_n$$
$$J_{n+1} = A_n$$

Soit $F_n = A_n + J_n$ le nombre total de lapins à la n-ième génération, on voit que

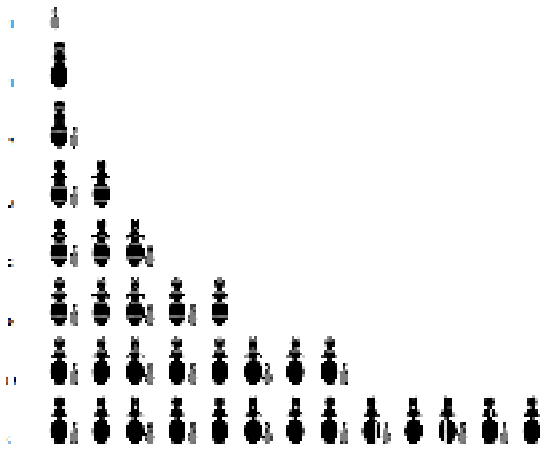
$$F_n = A_{n+1}, \forall n \geq 2$$
$$F_{n+1} = A_{n+1} + J_{n+1}.$$

Alors

$$F_{n+1} = A_{n+1} + A_n.$$

Et enfin

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$



Evolution de la population de lapins

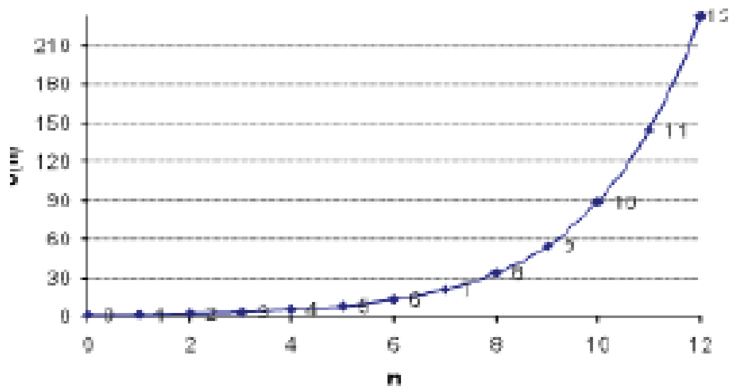
n	jan (1)	fev (2)	mar (3)	avr (4)	may (5)	jun (6)	jui (7)	aou (8)
A_n	0	1	1	2	3	5	8	13
J_n	1	0	1	1	2	3	5	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21

2.2.1 Nombre de Fibonacci

Les termes de cette suite sont appelles nombres de Fibonacci et voici le tableau qui donne quelques premières valeurs:

n	0	1	2	3	4	5	6
F_n	0	1	1	2	3	5	7

On donne tout d'abord le graphique qui montre l'évolution des nombres de la suite en fonction de l'indice n:



La suite pour les nombres négatifs

En générale, on n'étudie pas les nombres de Fibonacci pour des valeurs négatives de n, bien que la formule de récurrence les définisse aussi de proche en proche:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Donc autour de 0, la séquence est:

$..., 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \cdots$ On remarque sur ces premières valeurs que

- Si n est pair alors $F_{-n} = -F_n$.
- Si n est impair alors $F_{-n} = F_n$.

Ou plus synthétiquement:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

2.2.2 Résolution de la suite de Fibonacci:

Remarque 2.2.1 *La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire a coefficients constantes homogéne d'ordre 2.*
Soit la suite de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ avec } F_1 = 1 \text{ et } F_2 = 1. \qquad (2.1)$$

L'équation caractéristique de (2.1) *est*

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.2) *s'écrit*

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

d'ou

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.2}$$

Définition 2.2.2 *La formule* (2.2) *est dite La formule de Binet.*
Autrement dit :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \; n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

2.3 Nombre d'or

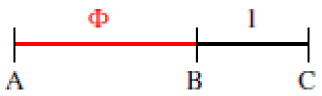
2.3.1 Définition de nombre d'or

En observant la suite de Fibonacci, on peut remarquer que si l'on divise chaque nombre de la suite par son prédécesseur, on obtient une suite de nombre qui se rapproche petit ā petit d'un nombre ϕ appelé nombre d'or, dont la valeur est:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343 65...$$

et est le seul nombre positif possédant la propriété géométrique suivante :

$$\frac{1+\phi}{\phi} = \frac{\phi}{1} \quad \text{c'est-á-dire} \quad \frac{\text{longueur de}AC}{\text{longueur de}AB} = \frac{\text{longueur de}AB}{\text{longueur de}BC}$$



Proportion d'or

2.3.2 Calcul du nombre d'or

On a donc $\dfrac{1+\phi}{\phi} = \dfrac{\phi}{1}$

Et par conséquent $\quad \phi^2 = \phi + 1.$

L'égalité $\quad \phi^2 - \phi - 1 = 0$

Il ya deux possibilités

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \quad \text{ou} \\ \phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Mais comme ϕ est positif, on obtient $\quad \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

2.3.3 Représentations géométriques de nombre d'or

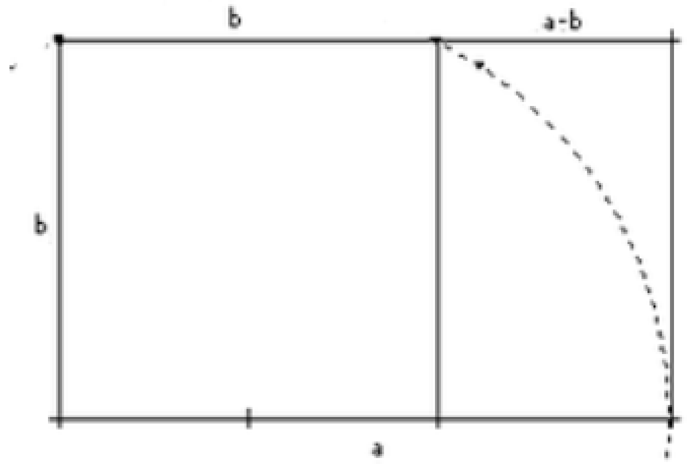
Le rectangle d'or

Le tracé d'un rectangle d'or se fait très simplement à l'aide d'un compas, il suffit de pointer le milieu d'un côté d'un carré, pointer l'un des deux angles opposés, puis de rabattre l'arc de cercle sur la droite passant par le côté du carré pointé.

Considérons un rectangle dont les côtés de longueurs a et b sont dans un rapport du nombre d'or: si de ce rectangle, nous supprimons le carré de côté de longueur b, alors le rectangle restant est à nouveau un rectangle d'or, puisque ses côtés sont dans un rapport ϕ. En effet, d'après les premières définitions du nombre d'or vues précédemment

$$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a+b}{b} - 1 = \frac{b}{a} = \frac{1}{\phi} \text{ donc } \frac{b}{a-b} = \phi$$

En itérant cette construction, nous obtenons une suite de rectangles d'or de plus en plus petits.

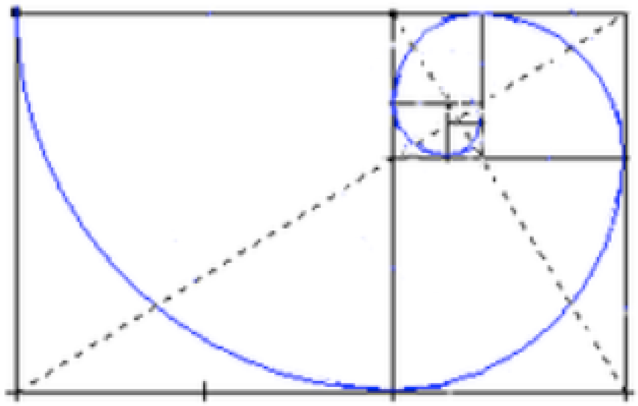


Le rectangle d'or

La spirale d'or

On peut construire, à partir d'un rectangle d'or, une spirale d'or en traçant des quarts de cercle dans chaque carré. Cette spirale se rapproche d'une spirale logarithmique de centrel'intersection des deux diagonales des deux rectangles et d'équation polaire:

$$r(\theta) = r.\phi^{-\frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}}$$



La spirale d'or

2.4 Suite de Lucas

2.4.1 Suite des nombres de Lucas

La suite des nombres de Lucas est définit :

$$L = \{1, 3, 4, 7, 11, ...\}$$

suite récurrente obéissant à la même règle de récurrence que la suite de Fibonacci

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

mais avec:

$$L_1 = 1 \text{ et } \; L_2 = 3$$

2.4.2 Relations entre un nombre de Lucas et le nombre d'or

le terme général L_n de la suite des nombres de Lucas s'exprime en fonction du nombre d'or ϕ par la formule suivante, analogue à la formlule de binet pour les nombres de fibonacci:

$$L_n = \phi^n + \phi'^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2.4.3 Relations entre un nombre de Lucas et le nombre Fibonacci

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Preuve. Par récurrence d'ordre 2 sur n

initialisations

$(n = 1)$:

$$L_1 = 1 \text{ et } \; F_0 + F_2 = 1$$

$(n = 2)$:

$$L_2 = 3 \text{ et } \; F_1 + F_3 = 3.$$

Hypothèses de récurrence: au rang n :

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

au rang $n+1$:

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

Hérédité (rang $n+2$) :

$$\begin{aligned}
F_{n+1} + F_{n+3} &= F_n + F_{n-1} + F_{n+2} + F_{n+1} && \text{(Définition de la suite de Fibonacci)}\\
F_{n+1} + F_{n+3} &= (F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_n + F_{n+2}) && \text{(Associativité, commutativité)}\\
F_{n+1} + F_{n+3} &= L_n + L_{n+1} && \text{(Hypothèses de récurrence)}\\
F_{n+1} + F_{n+3} &= L_{n+2} && \text{(Définition des nombres de Lucas)}
\end{aligned}$$

■

2.5 Triangle de Pascal

Nous verrons comment les nombres de Fibonacci peuvent être calculés de façon systématique à partir du Le triangle bien connu de Pascal. En outre, nous pourrons dériver une foule de nouvelles identités de Fibonacci et Lucas. Nous commençons par une discussion sur les coefficients binomiaux, qui sont des coefficients se produisant Dans l'expansion binomiale d'une expression de la forme $(x+y)$

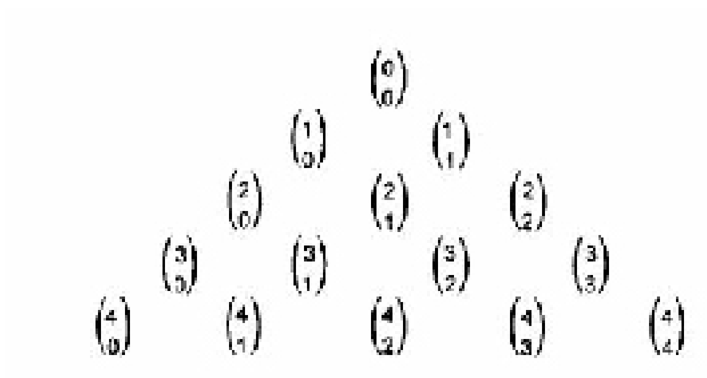
Soit n et k des entiers non négatifs. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini par:

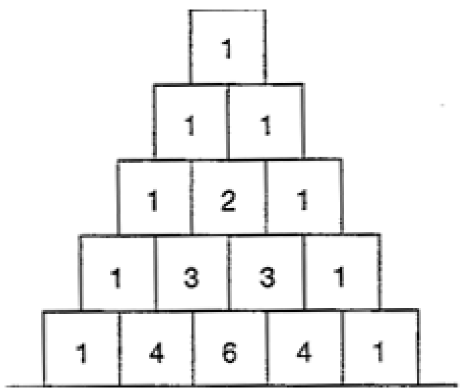
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Si $k \leq n$, et c'est 0 sinon. Il est également noté $C(n,r)$ et nCr.

2.5.1 Le triangle de Pascal

Les différents coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, où $0 \leq k \leq n$, peuvent être organisés sous la forme d'un triangle, appelé triangle de Pascal , comme le montrent le figure 1





$figure1$

2.5.2 La relation entre triangle Pascal et nombre de Fibonacci

Mais comment les nombres de Fibonacci sont-ils liés au triangle de Pascal? Pour voir cela, nous revenons à L'arrangement triangulaire (voir la figure 2, par exemple). Ajoutez maintenant les chiffres le long de Les diagonales du nord-est. Les sommes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8$ et elles semblent être les numéros Fibonacci. En effet, ils sont, comme le prochain théorème, découvert par E.

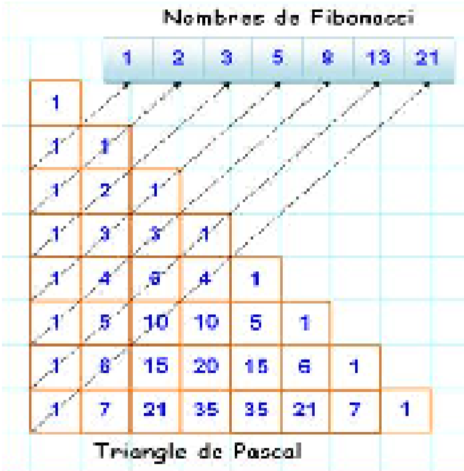


figure 2

Chapitre 3

Propriétés des nombres de Fibonacci

3.1 Quelques propriétés des suites Fibonacci

La suite de Fibonacci représente de remarquables propriétés . En voici quelquesunes démontrées à parier de la formule de Binet ou par récurrence. Nous donnons également quelques propriétés liant la suite de Fibonacci.

Proposition 3.1.1 *Soit $(F_n)_{n>1}$ la suite de Fibonacci.*
Donc on a les identités suivantes :
i) L'identité de Cassini : *Pour $n > 0$, on a*

$$F(n-1)F(n+1) - F^2(n) = (-1)^n.$$

ii) L'identité d'Ocagne *: Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a*

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

iii) L'identité de Catalan : *Pour $n, r \in \mathbb{N}$*

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

iv) L'identité de Johnson : *Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$,*

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}).$$

Preuve.

i) L'identité de Cassini :

Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

Tout d'abord

$$u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1$$

Pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de premier terme $u_1 = -1$ et de raison -1.

Il en découle $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$, c'est-á-dire

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

ii) L'identité d'ocagne :

Pour tout $n \geq 0$ posons

$$u_n = F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n.$$

Tout d'abord

$$u_0 = F_rF_1 - F_{r+1}F_0 = F_r$$

pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+r+1}F_{n+2} - F_{n+r+2}F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+r+1} + F_{n+r})F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}F_{n+1} + F_{n+r+1}F_n - F_{n+r+1}F_{n+1} - F_{n+r}F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}F_n - F_{n+r}F_{n+1} \\ &= -u_n. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de premier terme $u_0 = F_r$ et de raison -1.

Il en d´ecoule $u_n = (-1)^nF_r$ pour tout $n \geq 0$, c'est-á-dire

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^nF_r.$$

iii) L'identité de Catalan :

De la forme de Binet (2.3), Pour $n, r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n+r}\beta^{n-r}-\beta^{n+r}\alpha^{n-r}+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{2n}-\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n-\alpha^{2n}+\alpha^{n+r}\beta^{n-r}+\beta^{n+r}\alpha^{n-r}+\beta^{2n}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2(\alpha\beta)^n+\alpha^{n+r}\beta^{n-r}+\beta^{n+r}\alpha^{n-r}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2+\alpha^r\beta^{-r}+\beta^r\alpha^{-r}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2+\frac{\alpha^r}{\beta^r}+\frac{\beta^r}{\alpha^r}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(\alpha^r-\beta^r)^2}{(\alpha\beta)^r}\right)\\
&= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2\\
&= (-1)^{n-r}F_r^2
\end{aligned}$$

car $\alpha\beta = -1$

Donc

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

iv) L'identité de Johnson :

Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$,

$$\begin{aligned}
F_kF_l - F_mF_n &= \left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^l-\beta^l}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{k+l}-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^{k+l}-\alpha^{m+n}+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n-\beta^{m+n}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n\right)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}) &= (-1)^r\left(\tfrac{\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\tfrac{\alpha^{l-r}-\beta^{l-r}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\tfrac{\alpha^{m-r}-\beta^{m-r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\tfrac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{(\alpha\beta)^r}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^{l-r}\alpha^{k-r}-\beta^{k-r}\alpha^{l-r}+\beta^{n-r}\alpha^{m-r}+\beta^{m-r}\alpha^{n-r}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(-\beta^l\alpha^k-\beta^k\alpha^l+\beta^n\alpha^m+\beta^m\alpha^n\right)\\
&= F_kF_l - F_mF_n
\end{aligned}$$

Donc

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}).$$

■

Corollaire 3.1.1 *soient (F_n) la suite de Fibonacci et $n, r \in \mathbb{N}$.*
Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r.$$

Preuve. Soient $n, r \in \mathbb{N}$
D'aprés la formule de Binet (2.3) on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+r}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\alpha^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{r}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}.
\end{aligned}$$

on a $|\beta| < \alpha$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0,$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r.$$

■

Proposition 3.1.2 *La somme de tous les F_i est égale à $F_{n+2} - 1$*

$$\sum_1^n F_i = F_{n+2} - 1$$

C'est-à-dire que

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n + 1 = F_{n+2}.$$

par exemple

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 1 = 34.$$

Preuve. Nous allons démontrer cette propriété par récurrence

$$\begin{aligned}
&F_1 = F_3 - F_2\\
&F_2 = F_4 - F_3\\
&F_3 = F_5 - F_4\\
&\vdots\\
&F_{n-1} = F_{n+1} - F_n\\
&F_n = F_{n+2} - F_{n+1},
\end{aligned}$$

alors

$$\sum_1^n F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1,$$

donc

$$\sum_1^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

■

Proposition 3.1.3

$$F_m | F_{mn}.$$

Preuve. L'énoncé donné est clairement vrai lorsque $n = 1$. Maintenant supposons qu'il soit vrai pour tous les entiers de 1 à k, où $k \geq 1$: $F_m | F_{mi}$ pour tout i, où $1 \leq i \leq k$.

Pour montrer que $F_m | F_{m(k+1)}$, nous invoquons identité :

$$\begin{aligned}
&F_{r+s} = F_{r-1}F_s + F_rF_{s+1},\\
&F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1},
\end{aligned}$$

Depuis $F_m | F_{mk}$, par l'hypothèse d'induction, il s'ensuit que $F_m | F_{m(k+1)}$.

Ainsi, par le principe du **PMI**, le résultat est vrai pour tous les entiers $n \geq 1$. ■

Exemple 3.1.1 *$F_6 = 8$ et $F_{24} = 46,368$.*

Depuis $6|24$, il s'ensuit par le théorème que $8|46368$, que l'on vérifie facilement.

Proposition 3.1.4 *Enumération les nombre rationnels*

Pour tous $a, c, b, d \in \mathbb{R}$ et $b, d > 0$

$$\frac{a+c}{b+d} \textit{ est compris entre } \frac{a}{b} \textit{et} \frac{c}{d}$$

Preuve. Supposons $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ c'est- a-dire $ad < bc$. Alors

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+cb-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$$

alors que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad+cd-cb-cd}{d(b+d)} = \frac{ad-bc}{d(b+d)} < 0$$

ce qui prouve le resultat. Les cas $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ sont trait es de manière similaire. Ce résultat permet d' enumérer les nombres rationnels contenus dans un intervalle

■

Exemple 3.1.2 *par exemple* $[0;1]$*, a l'aide de l'arbre deFarey:*

$$\frac{0}{1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{6}\ \frac{2}{9} \quad \frac{3}{11}\ \frac{3}{10} \quad \frac{4}{11}\ \frac{5}{13} \quad \frac{5}{12}\ \frac{4}{9} \quad \frac{5}{9}\ \frac{7}{12} \quad \frac{8}{13}\ \frac{7}{11} \quad \frac{7}{10}\ \frac{8}{11} \quad \frac{7}{9}\ \frac{5}{6}$$

Proposition 3.1.5 *Identité de Fibonacci et Lucas*

La suite de Fibonacci est assez riche en ce qui concerne les identités: dans le tableau suivante nous à titre d'illustration quelqueunes.

$F_{n+1}+F_{n-1}=L_n$	$L_{n+1}+L_{n-1}=5F_n$
$F_{n+2}+F_{n-2}=3F_n$	$F_{2n}=F_nL_n$
$F_{n+2}-F_{n-2}=L_n$	$L_{n+2}-L_{n-2}=5F_n$
$F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$	$L_{n+1}^2+L_n^2=5F_{2n+1}$
$F_{n+1}^2-F_n^2=F_{n-1}F_{n+L2}$	$L_{n+1}^2-L_n^2=L_{n-1}L_{n+2}$
$F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$	$L_{n+1}^2-L_{n-1}^2=5F_{2n}$
$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$	$L_{n+1}L_{n-1}-L_n^2=5(-1)^n$
$\sum\limits_{i=1}^n F_i=F_{n+2}-1$	$\sum\limits_{i=1}^n L_i=L_{n+2}-3$
$\sum\limits_{i=1}^n F_{2i-1}=F_{2n}$	$\sum\limits_{i=1}^n L_{2i-1}=L_{2n}-2$
$\sum\limits_{i=1}^n F_{2i}=F_{2n+1}-1$	$\sum\limits_{i=1}^n L_{2i}=L_{2n+1}-1$
$\sum\limits_{i=1}^n F_i^2=F_nF_{n+1}$	$\sum\limits_{i=1}^n L_i^2=L_nL_{n+1}-2$
$\sum\limits_{i=1}^n \binom{n}{i}F_{i+j}=F_{2n+j}$	$\sum\limits_{i=1}^n \binom{n}{i}L_{i+j}=L_{2n+j}$

La preuve de ces identités se fait généralement par le principe de récurrence et de confiner autre ces identités.

3.2 Application algébrique sur la suite Fibonacci

Revenons à nos lapins, la matrice A associée à la suite Fibonacci $F_n = F_{n-1} - F_{n-2}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une question naturelle serait: peut-on trouver une expression qui donne F_n pour n'importe quel n ?

La réponse est oui si on a une idée commet diagonaliser une matrice. Rappelons alors quelques faits de base sur la diagonalisation des matrices.

Soit A une matrice carrée de format $m \times m$. On dit qu'un nombre λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non-nul X de $\mathbb{R}_n$ tel que $AX = \lambda X$. Dans ce cas, on dit que X est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Étant donnée une matrice carrée A de format $m \times m$, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $|A - \lambda I| = 0$, où $|A - \lambda I|$ représente le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ et I est la matrice identité de même format que A.

Pour la matrice A de l'exemple précédent,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

En résolvant cette équation, on trouve les deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On définit l'espace propre E_λ correspondant à la valeur propre λ de A comme étant l'ensemble de tous les vecteurs propres correspondant à λ avec le vecteur nul. En d'autres termes, $E_\lambda$représente l'ensemble de solutions du système $(A - \lambda I)X = 0$.

Pour voir comment ceci fonctionne, considérons encore la matrice A de l'exemple précédent. Pour trouver les vecteurs propres de A correspondants à la valeur propre $\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2$, on résout le système

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\sqrt{5})}{2} & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

La solution générale est:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t \quad , \quad t \in R$$

Ceci montre en particulier que le vecteur

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base de E_{λ_1}. D'une façon similaire, on peut montrer que le vecteur

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base de l'espace propre E_{λ_2}. En particulier

$$dim(E\lambda_1) + dim(E\lambda_2) = 2$$

.

Définition 3.2.1 *Une matrice carrée A est dite diagonale si toutes ses entrées sont nulles sauf, peut-être, celles qui sont sur la diagonale principale. Une matrice carrée est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P de même format que A qui satisfait la condition :*

$$P^{-1}AP = D$$

pour une certaine matrice D (on dit que A est semblable à une matrice diagonale).

Rappelons ici que la propriété principale des matrices diagonales et la facilité du calcule de leurs puissances, En effet:

soit A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P et une matrice diagonale D.

D'où

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^{-1} \\ A^2 & = & \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD\left(I\right)DP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 & = & \left(PD^2P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^2\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^2\left(I\right)DP^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

En général, on peut voir que $A^k = PD^kP$ pour n'importe quelle puissance k.

Rappelez-vous que D a la forme:

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

D^k aura la forme:

$$D^k = \begin{pmatrix} \mu_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \mu_n^k \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le calcul des puissances d'une matrice diagonalisable devient une tâche facile une fois qu'on connaît les matrices P et D dans la formule:

$$P^{-1}AP = D$$

Théorème 3.2.1 *Soit A une matrice de format $m \times m$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres (réelles) distinctes de A. Alors:*

1. *A est diagonalisable si et seulement si $dim(E_{\lambda 1}) + \ldots + dim(E_{\lambda k}) = n$.*
2. *Si A est diagonalisable avec $P^{-1}AP = D$, alors les colonnes de P sont tous les vecteurs de base pour les espaces propres de A et les éléments sur la diagonale principale de D sont les valeurs propres correspondantes.*

Le théorème suivant donne algorithme pour diagonaliser une matrice.

Considérons de nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et appliquons l'algorithme du théorème précédent. Comme on a déjà montré que $dim(E_{\lambda 1}) + dim(E_{\lambda 2}) = 2$, on sait maintenant A est diagonalisable. Soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres trouvés ci-dessus. Alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Par le théorème précédent, on a la décomposition suivante de A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Maintenant voyons comment tout ceci peut être appliqué pour répondre à notre problème au sujet des lapins de Fibonacci. Le modèle général pour la suite de Fibonacci était:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Une expression générale pour F_n n'est pas évidente, mais une torsion intelligente transforme le problème en un autre plus simple en employant les matrices. L'idée est de calculer le vecteur

$$V_n = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$ au lieu de calculer F_n. La relation $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ donne

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+3} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = AV_n$$

est la même matrice qu'on a utilisé ci-dessus. En utilisant la relation

$$V_n = AV_{n-1}, \qquad (n \geq 1)$$

on obtient

$$V_n = AV_{n-1} = A^2V_{n-2} = A^3V_{n-3} = \cdots = A^nV_0$$

Mais $A^n = PD^nP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont comme avant. Alors

$$V_n = PD^nP^{-1}V_0$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 1$. Dans cette formule, le dernier vecteur est

$$V_0 = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Duquel nous tirons aprés un simple calcul que

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right)$$

Finalement, $(F_n)_{n\geq 0}$ est donnée par la formule suivante, dite de Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right)$$

Maintenant c'est facile de calculer le $100^{ième}$ terme de la suite de Fibonacci:

$$F_{100} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{100} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{100} \right)$$

Une calculatrice assez puissante donne la valeur 573147844013817084101 pour F_{100}.

Conclusion

La suite de Fibonacci est récurrente linéaire d'ordre deux très riche en propriétés. Par conséquent, on attend de l'étude de cette suite de nombreux résultats. En effet, dans le domaine des mathématiques on trouve beaucoup de chercheurs intéresses par cette suite ou ils travaillent sur d'autres problèmes de suites récurrentes linéaires mais ils se réfèrent toujours à la suite de Fibonacci. La documentation concernant cette question est très abondante. Vu tout ceci nous encourageons les jeunes chercheurs de se pencher plus sur ce problème.

Bibliographie

[1] A. F. Horadam, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, The Fibonacci Quarterly, (33) (1965), 161-176.

[2] D. T. Tollu, Y. Yalzik and N. Taskara, On the solutions of two special type of Riccati difference equation via fibonacci numbers, Advances in Difference Equations 2013, 2013 :174.

[3] Nils Berglund, La suite de Fibonacci, Université du sud Toulon-var, Novembre 2005.

[4] Tomas Koshy, Pell and pell-Lucas numbers with applications et Fibonacci and Lucas numbers with applications, Framingham State University,2014.

[5] Y. Halim, M. Bayram, On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences,Math. Methods Appl. Sci., (2015), DOI :10.1002/mma.3745.

[6] http://nathalie.daval.free.fr

[7] http :/www.math.smith.edu/phullo,2010.

Résumé

Notre mémoire de fin d’étude pour Master 2 se trouve en trois chapitres. Le premier chapitre traite la parution de cette suite dans la nature ou’ on l’observe dans les plante, les fleurs, les animaux, l’etre humain,…. .

L’illustration par de nombreuses belles photos est présente durent ce chapitre.

Les notions ayant relation avec la suite en question telles que :

Nombre d’or, Suite de Lucas, Triangle de Pascal, … font l’objet du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré aux célèbres identités de la suite de Fibonacci est aux formules la reliant a` celle de Lucas. En plus on trouve une preuve algébrique pour la célèbre formule de Binet.