N° d’ordre :………………

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l’**E**nseignement **S**upérieur et
de la **R**echerche **S**cientifique

Université de **M**’sila

Faculté des **S**ciences

Département de **P**hysique

MEMOIRE

Présenté pour l’obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Boudraa Houssem

THEME

Quantification de la théorie des champs non-commutative avec le $\tilde{\star}$-produit

Soutenue le : 25/06/2013

Devant le jury composé de :

M. Boussehle	**M.C.A. Université de M’sila**	**Président**
DEBABI Mourad	**M.A.A. Université de M’sila**	**Rapporteur**
O. Mebarki	**M.A.A. Université de M’sila**	**Examinateur**

Promotion Juin 2013

Je dédie ce mémoir

A ma mère

A mes frères

A mes sœurs

A toute ma famille boudraa

A tous mes amis

A tous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de prés comme de loin.

houssem

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier notre dieu tout puissant qui m'a éclairé le bon chemin.

Je veux remercier, mon encadreur monsieur **Debabi mourad**, qui m'a proposé ce sujet, m'a dirigée pour sa bonne réalisation, je veux aussi lui exprimer ma sincère gratitude pour ses conseils, pour ses orientations et pour son aide dans la rédaction du mémoire.

J'exprime aussi toute ma gratitude et mon respect aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter lire ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2013.

Table des matières

Chapitre *I*

Introduction Générale

1 INTRODUCTION GENERALE

La physique moderne et la physique fondamentale sont deux grands domaines ont révolutionné le monde. Qui ont changé les concepts et la vision de la physique classique.

En physique classique, le mouvement des corps matériels est étudié par deux théories: la mécanique classique de newton et la mécanique relativiste. La première théorie est fondée sur quatre grands principes: les trois lois de newton et le principe de conservation de l'énergie. Par contre, la relativité restreinte (1905) et la relativité générale (1916) qui est une théorie relativiste d'interaction gravitationnelle basé sur le principe de l'équivalence masse gravitationnelle-masse inertielle qui permet de formuler toutes les autres lois de la physique en présence d'un champ gravitationnelle ainsi qu'il décrit le grand infiniment (les planètes, les galaxies,..).Ses fondements ont été établis par Albert Einstein en1916.Il a utilisé principalement la géométrie Riemannienne [1]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu} \qquad (1.1)$$

avec $R_{\mu\vartheta}$ le tenseur de Ricci. R le scalaire de courbure et $T_{\mu\vartheta}$ le tenseur d'énergie-impulsion

Au début du 20éme siècle, il devient possible de faire des expériences à l'échelle microscopique, on découvre certaines situations où la physique classique ne s'applique pas. Donc, la mécanique quantique est la théorie qui décrit les systèmes microscopique (les atomes, les électrons,…)

Parmi les principes les plus importants en mécanique quantique, le principe d'incertitude d'Heisenberg qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurées en même temps, avec une très grande précision, car l'incertitude Δx sur la mesure de sa position et l'incertitude Δp sur son impulsion doivent satisfaire à la relation $\Delta x. \Delta p \approx \hbar$. En fait, ce principe est une conséquence spontanée des relations de commutation canoniques entre les variable x_i et p_i avec i=1,3 qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert ($x_i \rightarrow \hat{x}_i$ et $p_i \rightarrow \hat{p}_i$) .ces deux opérateurs sont définis par leur action sur un être mathématique $\Psi(x)$ [2]:

$$\hat{X}\Psi(x) = x\Psi(x) \quad \text{et} \quad \hat{P}\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\Psi(x) \tag{1.2}$$

et leur commutateur

$$[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar \tag{1.3}$$

et on sait que cette identité a pour conséquence la relation d'incertitude de Heisenberg.

Il est bien connu qu'un espace géométrique est complètement décrit par l'algèbre de ses fonctions.

C'est le cas de l'espace des phases en physique classique (dans sa formalisation Hamiltonienne), dont l'algèbre des fonctions est commutative. En mécanique quantique $\hat{x}$ et $\hat{p}$ engendrent l'algèbre des observables quantique, qui est non commutative et que enfin on peut dire que l'algèbre des fonctions de l'espace des phases en physique quantique introduit une géométrie d'un type nouveau.

Avant la formulation da la physique quantique, les particules et les champs étaient considérés comme des entités distinctes mais liées; les particules possèdent certaines caractéristiques intrinsèque (comme la masse et la charge électrique) et produisent les champs (gravitationnels et électromagnétiques). Chaque champs de force émene des particules et remplit l'espace autour d'elles.

La notion de champs a commencé d'être modifiée fondamentalement avec l'introduction par Albert Einstein du concept de photon. Selon cette nouvelle conception, le champ électromagnétique n'a pas son énergie distribuée d'une façon continue dans l'espace. Il transporte l'énergie et la quantité de mouvement du champ.

Le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des symétries. La forme de la fonctionnelle d'action en d'ecole1. L'action elle-même n'a pas de signification physique propre. L'information physique se trouve dans la classification des champs et le contenu en symétries, qu'elles soient exactes ou spontanément brisées.

Dans le contexte de la théorie relativiste des champs, le champ est une fonction de l'espace-temps. La théorie quantique des champs considère des champs à valeurs opérationnelles. Le passage du champ classique à "l'opérateur de champ" est souvent qualifie de deuxième quantification

Les théories quantiques des champs [3.4.5] utilisées pour d'écrire les interactions des particules élémentaires peuvent être formulées à partir d'un principe d'action qui est une simple généralisation de la situation rencontrée en mécanique classique. On pourrait également se donner les équations dynamiques qui découlent de l'action(les équations d'Euler-Lagrange) comme point de départ du formalisme .Mais il s'avère que l'utilisation de l'action simplifie la quantification de la théorie.

En mécanique classique, les équations du mouvement d'un système de particules ponctuelles sont obtenues à partir d'une action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q(t),\dot{q}(t),t) \tag{1.4}$$

où L est la fonction de Lagrange.

Les équations d'Euler-Lagrange, qui sont les équations du mouvement du système: elles déterminent son évolution temporelle.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \tag{1.5}$$

L'action est

$$S[\phi] = \int_D \, d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{1.6}$$

et dans la théorie des champs scalaires l'action en théorie ϕ^4 s'écrit sous la forme:

$$S[\phi] = \int_D \, d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}(\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}(\phi)^4\right] \tag{1.7}$$

Les fonctions de Green sont intéressantes en théorie des champs.

$$G_n(x_1, \dots x_n) = < 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0 > \tag{1.8}$$

Ces fonctions de Green admettent une représentation fonctionnelle

$$G_n(x_1, \dots x_n) = \frac{1}{i^n Z_0[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{1.9}$$

Où Z[J] est la fonctionnelle génératrice

$$\mathrm{Z}[J] = \int (D\phi)\, e^{\frac{i}{2}[S(\phi) + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \tag{1.10}$$

Pour le champ scalaire réel, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green libres se calcule exactement, elle vaut:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= Z[0] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\ &= Z[0] e^{W_0[J]} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Δ_F est le propagateur du champ scalaire de masse m.

avec :

$$w_0[J] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4\, x d^4\, y J(x)\Delta_F(x-y)J(y) \tag{1.12}$$

et toutes les fonctions de Green libres (non nulles pour n pair) sont des sommes de produits de propagateurs

$$G_2^0(x-y) = i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{1.13}$$

En définit ensuite une nouvelle fonctionnelle $\Gamma[\phi]$, appelée action effective:

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4\, x J(x)\phi(x) \tag{1.14}$$

qui est telle que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x) \tag{1.15}$$

Son développement en puissances de ϕ se présente comme suit

$$\Gamma[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n\, \phi(x_1) \dots \phi(x_n)\, \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) \tag{1.16}$$

Nous allons considérer la théorie du champ scalaire réel définie par l'action (1.7), pour laquelle

$$S_{int}(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi^4 \tag{1.17}$$

Les règles de Feynman de la théorie du champ scalaire libre avec l'interaction précédent [4] et [5]

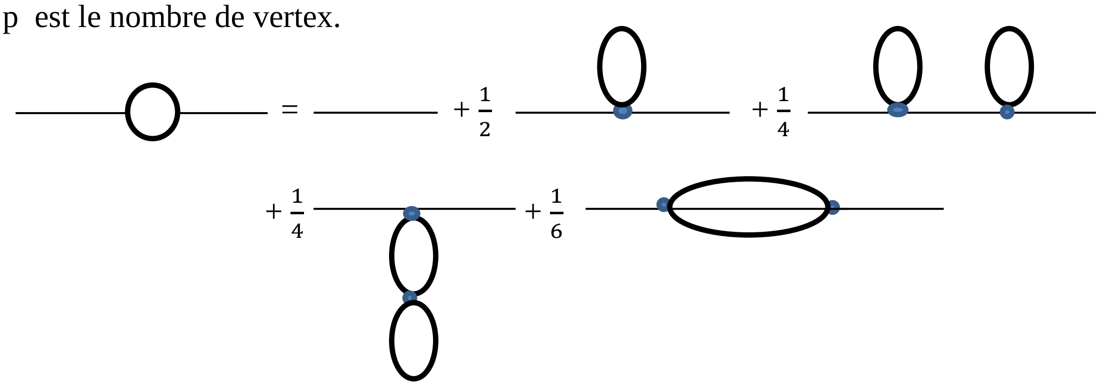
- à chaque vertex on associe une constante de couplage $-i\lambda$.
- pour chaque ligne du diagramme joignant deux points x et y un propagateur

$-iG_F(x-y)$

- une intégrale sur les coordonnées de chaque vertex.
- Chaque diagramme est finalement divisé par son facteur de symétrie:

$$s = \frac{(4!)^p P!}{multiplicité}$$

où p est le nombre de vertex.



Propagateur jusqu'à l'ordre λ^2

Dans la géométrie commutative, nous avons trouvés que l'intégrale qui caractérisé les diagrammes de Feynman [5.6]

$$I=\lambda\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+m^2} \tag{1.18}$$

ne satisfait pas la condition de convergence des intégrales. Les fonctions à intégrer ne décroissent pas pour $k \to \infty$: de telles divergences sont de ce fait appelées divergences ultra-violets.

Il y a plusieurs méthodes pour éliminer cette divergence:

La plus simple méthode est la régularisation de Pauli-Villars. Elle introduit un paramètre de coupure (cut-off) dans les intégrales sur le moment interne de la boucle. Par cette technique, on sépare les termes divergents des termes finis. Une telle séparation reste cependant arbitraire ($\infty + fini = \infty$). . Cependant, cette procédure brise les symétries de jauge ainsi que la symétrie de Lorentz et n'est donc utilisé en pratique.

on peut aussi travaille dans la géométrie non commutative qui est une reformulation et une généralisation de la géométrie ordinaire en des termes algébriques et d'analyse fonctionnelle. Elle utilise les mêmes outils que la mécanique quantique (les opérateurs sur un espace de Hilbert) et contient toute la géométrie classique.

Le titre de mon travail de mémoire de master en physique théorique option physique à haute énergie est la quantification de la théorie des champs non commutative avec le $\tilde{\star}$-produit. J'ai devisé mon travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les éléments essentiels de la physique moderne, et le problème de la divergence ultra-violet (UV) de la théorie quantique des champs.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la théorie des champs définie sur espace non commutative, dans cette théorie le produit entre les champs est généralisé via le produit ‹‹étoile›› ($\star$-produit), qui nous allons connaitre ses propriétés et après nous allons étudier la densité lagrangienne de la théorie des champs sur un espace non commutatif, durant cette étude, nous allons concentrer sur théorie des champs scalaire en utilisant ϕ^4comme une modèle. Et nous avons étudié la mélange (UV/IR), et on propose l'aidé de renormalisation.

Dans le troisième chapitre, nous allons connaitre les propriétés du $\tilde{\star}$-produit, et nous allons étendre le formalisme Lagrangien de la théorie des champs sur un espace-temps classique à la théorie des champs sur un espace non commutative avec $\tilde{\star}$-produit.

Dans le quatrième chapitre, on va développer la quantification canonique des champs scalaires sur un espace non commutative avec $\tilde{\star}$-produit, et nous allons illustrer, par un calcul explicite, la finitude de la théorie proposée. En considérant les vertex propre à deux points et quatre points à l'ordre d'une boucle

On termine cette mémoire par une conclusion.

Chapitre *II*

Théorie des champs non commutative
Modèle :ϕ^4

Théorie des champs non commutative

2-1 Généralités

Dans ce chapitre on a traité les déférentes formules mathématiques, qui donne l'algèbre de l'espace non commutatif (le produit star, propriétés du produit star, théorie des champs scalaires non commutative…etc.)

La géométrie non commutative est devenue en quelques années un sujet de recherche très actif, aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques. Cette dénomination couvre en réalité un vaste domaine de recherches motivées par la constatation mathématique et physique.

L'idée de considérer des théories de champs sur des espaces non commutatifs n'est pas nouvelle. Elle remonte à Schrödinger, Heisenberg et Peierls mais le premier article concernant une algèbre non commutative représentant l'espace-temps est dû à Snyder [7] ,la motivation principale concernait les divergences ultraviolettes de la théorie des champs.

L'espoir était qu'une théorie écrite sur un espace flou (sans points) ne présenterait plus ces divergences. À l'époque, l'idée n'a rien donné et la réussite de la renormalisation a fait oublier cette approche. Depuis les travaux d' Alain Connes [8 .9.10] sur la géométrie non commutative et l'apparition des théories de champs non commutatives en théorie des cordes, l'intérêt de la communauté des physiciens théoriciens pour les théories de champs non commutatives est ravivé. Encore une fois, l'espoir est né d'écrire une théorie sans divergence ultraviolette.

L'espace non commutatif le plus simple et le plus étudié (du point de vue de la théorie des champs) est le plan de Moyal, cet espace peut être défini en n'importe quelle dimension. Il s'agit d'une déformation de l'espace plat R^d où les coordonnées satisfont les relations de commutations [11.12]

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

avec une matrice anti-symétrique $d \times d$, où d est la dimension.

quand $d = 4$
$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Puisque les opérateurs ne commutent pas, ils ne peuvent pas être diagonalisés simultanément et par conséquent introduisent la relation d'incertitude suivante:

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2} \left|\theta_{\mu\nu}\right| \tag{2.3}$$

2-2 L'opérateur de Weyl:

L'opérateur de Weyl est une technique utilisée pour d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables canoniques de l'espace de phase.

Soit $f(x)$ est une fonction définie sur un espace euclidien à n dimension, la fonction $f(x)$ peut être définie par la transformation de Fourier comme suit [13]:

$$\tilde{f}(k) = \int d^n x \, e^{-ix_\mu k^\nu} f(x) \tag{2.4}$$

où: $\tilde{f}(k)$ est la transformation de Fourier de $f(x)$

On définit l'opérateur de Weyl par $W[f]$, qui peut être construit par la forme de transformation de Fourier qui englobe l'opérateur $\hat{x}_\mu$ et la transformation de Fourier ordinaire$f(x)$.

$$W[f] = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{2.5}$$

2-3 Le produit de Moyel (produit star):

2-3-1 Définition

On noté produit star (★), pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski, où le produit de deux opérateurs de Weyl et de deux fonctions $f(x)\ et\ g(x)$ associé au produit star de deux fonction [13]:

$$W(f)W(g) = W(f \star g) = \hat{f}.\hat{g} \tag{2.6}$$

où:

$$W(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint d^n p d^n k e^{ip_\nu x^\nu} e^{ik_\mu x^\mu}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \tag{2.7}$$

Utilisons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{2}[[A,B],B]} \tag{2.8}$$

on trouve:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint d^n p d^n k e^{i(k_\mu + p_\mu)x^\mu - \frac{i}{2}k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \tag{2.9}$$

C'est-à-dire qu'on vient d'établir la correspondance suivante

$$W(f \star g) \leftrightarrow (f \star g)(x) \tag{2.10}$$

Et nous obtenons pour le produit star (⋆) la définition de Moyal-Weyl [14.15]

$$(f \star g)(x) \equiv\ f(x) \exp(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu) g(x) \tag{2.11}$$

$$= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\ \theta^{\mu_1 \nu_1} \cdots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} g(x) \tag{2.12}$$

Et on peut écrire:

$$(f \star g)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{\mathcal{Y}}\partial_\nu^{\mathcal{Z}}} f(\mathcal{Y})g(\mathcal{Z})|_{\mathcal{Y}=\mathcal{Z}=x} \tag{2.13}$$

On remarque que pour $\theta^{\mu\nu}$ = 0 le produit ⋆ devient le produit ordinaire. On peut démontrer que le commutateur d'une fonction $f(x)$ avec les coordonnées x donne

$$x_\mu \star f(x) - f(x) \star x_\mu = i\theta_{\mu\nu}\partial_\nu f(x) \tag{2.14}$$

2-3-2 Propriétés du produit star (⋆)

2-3-2-1 Le produit star entre deux exponentiels

$$e^{ikx} \star e^{iqx} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{y}\partial_\nu^{z}} e^{iky} e^{iqz}\Big|_{y=z=x}$$

$$=(1 + \left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{y}\partial_\nu^{z}\right) + \left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{y}\partial_\nu^{z}\right)^2 + \cdots) e^{iky} e^{iqz}\Big|_{y=z=x}$$

$$= \left(1 + \left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) + \cdots\right) e^{ikx} e^{iqx}$$

$$= e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)} \tag{2.15}$$

avec la notation $k\theta q \equiv k^\mu \theta_{\mu\nu} q^\nu$

2-3-2-2 La représentation dans l'espace des moments

En utilisant (2,15) nous obtenons

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q) \exp\left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) \exp[i(k+q)x] \tag{2.16}$$

2-3-2-3 Associativité

$$[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x) \tag{2.17}$$

En effet, dans l'espace des moments

$$\big((f \star g) \star h\big)(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q) e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)} e^{i(k+q)x} \star h(x)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\boldsymbol{d^4p}}{\boldsymbol{(2\pi)^4}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q)\tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)} e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} e^{i(k+q+p)x} \tag{2.18}$$

$$(f \star (g \star h))(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(x) \star (\tilde{g}(q)\tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}(q\theta p)} e^{i(q+p)x})$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\boldsymbol{d^4p}}{\boldsymbol{(2\pi)^4}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q)\tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)} e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} e^{i(k+q+p)x} \tag{2.19}$$

2-3-2-4 Le produit star sous le signe intégral

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int (g \star f)(x) d^4x \tag{2.20}$$

qui se démontre de la manière suivante

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q) \exp\left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) \exp[i(k+q)x] \tag{2.21a}$$

$$\int (g \star f)\,(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\tilde{g}(q)\tilde{f}(k)\exp\left(-\frac{i}{2}q\theta k\right)\exp[i(q+k)x] \qquad (2.21b)$$

On peut démontrer que: $\int d^4x (f \star g)\,(x) = \int d^4x (f.g)\,(x)$

$$\int d^4x (f \star g)\,(x) = \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)}e^{i(k+q)x}$$

En utilisant la formule de Dirac

$$\int d^Dx \exp(i(k_1 + \cdots + k_n)x) = (2\pi)^D\delta^D(k_1 + \cdots + k_n) \qquad (2.22)$$

donc:

$$\int d^4x (f \star g)\,(x) = (2\pi)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{-\frac{i}{2}(k\theta q)}\delta(k+q) \qquad (2.23)$$

Et en utilisant:

$$f(x_0) = \int dx\, f(x)\delta(x - x_0) \qquad (2.24)$$

donc :

$$\int d^4x (f \star g)\,(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(-k) = \int d^4x (f.g)\,(x) \qquad (2.25)$$

de l'équation (2.20) nous pouvons déduire la propriété cyclique

$$\int (f_1 \star f_2 \star \ldots \star f_n)\,(x) d^4x = \int (f_n \star f_1 \star f_2 \star \ldots \star f_{n-1})\,(x) d^4x \qquad (2.26)$$

2-3-2-5 La conjugaison complexe

$$(f \star g)^* = g^* \star f^* \qquad (2.27)$$

2-3-2-6 La règle Leibniz

Il est facile de vérifier que la dérivée de produit star satisfait à la règle de Leibniz

$$\partial_\mu (f \star g)(x) = \left(\partial_\mu f\right) \star g + f \star (\partial_\mu g) \qquad (2.28)$$

2-4 Densité Lagrangienne et Action

Le lagrangien d'une théorie des champs sur espace de Moyal consisterait donc en le lagrangien ordinaire où le produit point est remplacé par le ⋆-produit de Moyal.

Donc la densité Lagrangienne réelle pour la théorie des champs scalaire non commutative est donnée par:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2 \phi \star \phi(x) - V_\star(\phi) \tag{2.29}$$

où:
$$V_\star(\phi) = \sum_n \frac{1}{n!} \underbrace{\phi \star \phi \dots \phi \star \phi}_{n\ term} \qquad , n > 2 \tag{2.30}$$

Nous définissons l'action S sur une région arbitraire R du tempe-espace par :

$$S[\phi] = \int_R \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \tag{2.31}$$

$$= \int_R d^4x \, [\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2 \phi \star \phi(x) - V_\star(\phi)] \tag{2.32}$$

2-5 Théorie des champs scalaire non commutative

Etudier une théorie des champs non commutative équivaut à étudier une théorie des champs ordinaire (commutative) et remplacer le produit habituel par le produit star. Commençons nôtre étude par l'examen de l'action de la théorie scalaire $\lambda\phi^4$ [13]

$$S[\phi] \int d^dx \, [\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}(\phi)^2 - \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi}_{S_{int}}] \tag{2.33}$$

où ϕ est un champ scalaire réel et d la dimension de l'espace-temps. Le terme cinétique et le terme de masse ne contiennent pas le produit star vu la propriété (2.25) du produit de Moyal. Comme conséquence, les théories commutative et non commutative coïncident dans le cas du champ libre. Cette coïncidence conduit au même propagateur de Feynman et aux mêmes divergences. La seule différence entre les deux théories résidera alors dans le terme d'interaction. La non commutativité des coordonnées de l'espace-temps nous oblige à travailler dans l'espace des moments qui est resté commutatif. Ce qui en langage mathématique signifie l'existence d'un ensemble complet de fonctions de base.

2-5-1 Equation de mouvement:

Les équations classiques de mouvement, similaire au cas commutatif, sont obtenues en minimisant l'action, c'est-à-dire:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \tag{2.34}$$

alor on peut écrire l'équation de mouvement de la théorie du champ scalaire avec l'interaction ϕ^4:

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}(\phi \star \phi \star \phi)(x) \tag{2.35}$$

Pour trouver le moment conjugué, on distingue deux cas différents:

- $\theta_{0i} = 0$
- $\theta_{0i} \neq 0$

<u>$\theta_{0i} = 0$</u>

Dans ce cas, on rencontre les dérivées par rapport au temps seulement dans le terme cinétique donc le moment conjugué est le même dans le cas commutatif.

<u>$\theta_{0i} \neq 0$</u>

Dans ce cas on a un grand nombre de dérivés par rapport au temps dans le terme d'interaction il est clair de début qu'il y a quelque chose non triviale. Le moment conjugué dépende de termes d'interaction.

2-5-2 Théorème de Noether

Maintenant que nous avons développé la différentiation fonctionnelle pour notre théorie nous pouvons prolonger le théorème de Noether aux théories non commutatives des champs. Supposons que notre action a une symétrie continue globale.

Pour une transformation infinitésimale nous pouvons écrire:

$$S[\phi] = S[\phi + \varepsilon\, \mathcal{F}(\phi)]\ , \text{ avec } \varepsilon = \text{cte} << \tag{2.36}$$

Prenons un ε qui dépend de x. on peut associer un courant conservé J par la relation

$$S[\phi + \varepsilon\, \mathcal{F}(\phi)] - S[\phi] \equiv \int \frac{\delta S}{\delta \phi} \star \delta\phi \; d^4x \tag{2.37}$$

$$= -\int J^{\mu}\big(\phi(x)\big)\, \partial_{\mu}\varepsilon(x)\; d^4x \tag{2.38}$$

Par définition, l'action est stationnaire pour n'importe quelle variation du champ autour du chemin classique, c.-à-d. $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$. En particulier pour $\delta\phi = \varepsilon\, \mathcal{F}(\phi)$. L'équation (2.38) devient:

$$\int J^{\mu}\big(\phi(x)\big)\, \partial_{\mu}\varepsilon(x)\, \Big|_{\substack{chemin \\ classique}} = 0 \tag{2.39}$$

en intégrant par partie l'eq. (2.39), on trouve:

$$\int \partial_{\mu} J^{\mu}\big(\phi(x)\big)\varepsilon(x)\, d^4x = 0 \tag{2.40}$$

Pour n'importe quel $\varepsilon(x)$ .Ainsi le courant J est conservé. Ce résultat est plus général et elle peut être appliquée pour n'importe quel type de théorie non commutative. La notion de la conservation du courant est une petite différente de la forme commutative à cause de la propriété suivante:

$$\int (f \star g)\,(x) d^4x = \int (g \star f)\,(x) d^4x$$

alors:

$$\int [f, g]_{MB}\; d^4x = 0 \tag{2.41}$$

De (2.40) et (2.41), on trouve:

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = [f, g]_{MB} \tag{2.42}$$

et ceci quelles que soient les fonctions f, g . Ce résultat est raisonnable puisque à la limite $\theta \to 0$ le commutateur de Moyel tend vers zéro est par conséquent on retrouve le résultat classique $\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$

Considérons maintenant le cas particulier suivant [15]

$$\phi \to \phi + \delta\phi$$
$$\delta\phi = \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi$$
$$x_{\mu} \to x_{\mu} + \varepsilon_{\mu} \tag{2.43}$$

Pour l'action de cette forme:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{2.44}$$

où

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi \star \partial^{\mu}\phi - m^2\phi \star \phi) + V_{\star}(\phi) \tag{2.45}$$

On trouve:

$$\delta S|_{\delta\phi=\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi} = \int d^4x \, [\frac{1}{2}\partial_{\mu}(\partial^{\mu}\phi \star \partial_{\nu}\phi\varepsilon^{\nu} + \varepsilon^{\nu}\partial_{\nu}\phi \star \partial^{\mu}\phi) - \partial_{\mu}(\varepsilon^{\mu}\mathcal{L})] \qquad (2.46)$$

Si nous prenons ϕ en chemin classique, c.-à-d. $\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$. On peut écrire :

$$\int \partial_{\mu}(T_{\mu\nu})\varepsilon^{\nu} d^4x = 0 \qquad (2.47)$$

où

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\phi \star \partial_{\nu}\phi + \partial_{\nu}\phi \star \partial_{\mu}\phi\right) - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \qquad (2.48)$$

Cependant, il faut rappeler que la divergence de $T_{\mu\nu}$ n'est pas zéro, par exemple pour le cas particulier de $V_{\star}(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^{\star 4}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = {} & \frac{1}{2}[\Box\phi \star \partial^{\nu}\phi + \partial^{\mu}\phi \star \partial_{\mu}\partial^{\nu}\phi + \partial_{\mu}\partial^{\nu}\phi \star \partial^{\mu}\phi + \partial^{\nu}\phi \star \Box\phi] \\ & -\frac{1}{2}\left[\partial^{\nu}\partial_{\mu}\phi \star \partial^{\mu}\phi + \partial_{\mu}\phi \star \partial^{\mu}\partial^{\nu}\phi\right] + \frac{m^2}{2}[\partial^{\nu}\phi \star \phi - \phi \star \partial^{\nu}\phi] \\ & + \frac{\lambda}{4!}[\partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 3} + \phi \star \partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 2} + \phi^{\star 2} \star \partial^{\nu}\phi \star \phi + \phi^{\star 3} \star \partial^{\nu}\phi]\end{aligned}$$

en utilisant les équation de mouvement pour le cas ϕ^4 eq. (2.35):

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^{\star 3} = 0$$

Donc en peut écrire :

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = {} & -\frac{\lambda}{2\cdot 3!}[\phi^{\star 3} \star \partial^{\nu}\phi + \partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 3}] \\ & + \frac{\lambda}{4!}[\partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 3} + \phi \star \partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 2} + \phi^{\star 2} \star \partial^{\nu}\phi \star \phi + \phi^{\star 3} \star \partial^{\nu}\phi] \\ = {} & \frac{\lambda}{4!}[-\partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 3} + \phi \star \partial^{\nu}\phi \star \phi^{\star 2} + \phi^{\star 2} \star \partial^{\nu}\phi \star \phi - \phi^{\star 3} \star \partial^{\nu}\phi] \\ = {} & \frac{\lambda}{4!}\,[[\phi, \partial^{\nu}\phi]_{MB} \star \phi^{\star 2} - \phi^{\star 2} \star [\phi, \partial^{\nu}\phi]_{MB}] \\ = {} & \frac{\lambda}{4!}\,[[\phi, \partial^{\nu}\phi]_{MB}, \phi^{\star 2}]\end{aligned} \qquad (2.49)$$

Qui ne va pas détruire la conservation d'énergie impulsion pour le cas$\theta_{0i} = 0$.

Si la densité lagrangienne est invariante sous certaines symétries locales, on peut calculer explicitement le courant de Noether.

2-6 Quantification canonique de théorie des champs non commutative

2-6-1 Théorie scalaire

Ici nous considérons des théories scalaires avec interaction arbitraire$V_\star(\phi)$. L'étoile veut dire que le l'interaction contient des termes avec les produits de l'étoile, Cependant cette forme précise n'est pas important pour la discussion générale. prenant S comme l'action de notre théorie:

$$S = \int d^4 x[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V_\star(\phi)] \tag{2.50}$$

Depuis la partie libre de l'action est identique à celui dans le cas commutatif, c'est commode choisir l'espace de Fock et en particulier l'état à vide être exactement le même comme dans le correspondre ainsi théorie commutative, les champs peuvent être étendus quant au même (comparé au cas commutatif) création et opérateurs de l'annihilation

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-\frac{i}{2}k\theta k}(a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{ikx}) \tag{2.51}$$

Où $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$

Pour appliquer la méthode de la quantification canonique nous devrions calculer en premier le moment conjugué $\Pi(x)$ puis impose les conditions de la quantification

$$[\phi(x,t), \Pi(y,t)] = i\delta^{(3)}(x-y) \tag{2.52}$$

Nous savons que le moment conjugué de ϕ est donné par

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \dot{\phi}(x) \tag{2.53}$$

Dans la théorie non commutative, il y a une ambiguïté, qu'on applique des conditions de quantification dans la position de l'espace. Généralement nus savons que pour traiter l'espace non commutatif il nous faut travailler dans un espace ordinaire et remplacer les produits entre les fonctions par le produit étoile. Mais, les conditions de la quantification

(2.52) sont définies pour ϕ et Π qui on a compté dans des points différentes, tandis que le produit étoile a un sens seulement entre les fonctions comptées dans le même point.

$$\left[\tilde{\phi}(k), \tilde{\Pi}(q)\right] = i\delta^{(4)}(k-q) \tag{2.54}$$

Cela est possible parce que dans l'espace de moment la différence entre le commutateur ordinaire et de Moyal est seulement un facteur de phase $e^{ik\theta q}$

2-6-2 Interaction

Le prochain pas est introduire une interaction et dériver les règles Feynman. Pour simplicité nous nous restreindra à la théorie scalaire avec l'interactionϕ^4, mais les discussions peuvent être appliquées de la même façon pour d'autres théories.

Alors, soit $\phi(k)$ la transformée de Fourier de $\phi(x)$

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}\phi\,(k) \tag{2.55}$$

donc

$$S_{int} = \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi \star \phi \star \phi \star \phi \tag{2.56}$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, (\phi \star \phi).(\phi \star \phi)$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} e^{-\frac{i}{2}(k_1\theta k_2)} e^{-\frac{i}{2}(k_3\theta k_4)} e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)x}$$

$$\times\ \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} e^{-\frac{i}{2}(k_1\theta k_2)} e^{-\frac{i}{2}(k_3\theta k_4)}\ \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$= \frac{\lambda}{3.4!}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}\ \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$\times \left[\cos\frac{k_1\theta k_2}{2}\cos\frac{k_3\theta k_4}{2} + \cos\frac{k_1\theta k_3}{2}\cos\frac{k_2\theta k_4}{2} + \cos\frac{k_1\theta k_4}{2}\cos\frac{k_2\theta k_3}{2}\right] \tag{2.57}$$

Où les termes qui contiennent les sinus, dû à l'antisymétrie de $\theta^{\mu\nu}$, s'annulent,

$$\sin(k_i\theta k_j) + \sin(k_j\theta k_i) = \sin(k_i\theta k_j) + \sin(-k_i\theta k_j)$$

$$= \sin(k_i\theta k_j) - \sin(k_i\theta k_j)$$

$$= 0 \tag{2.58}$$

Par conséquent la seule différence qui paraît dans la théorie non commutative, comparée au commutatif, est que pour chaque vertex dans la théorie ϕ^4 non commutatif nous devrions multiplier par un facteur supplémentaire.

$$V(k_1,k_2,k_3,k_4) = \frac{1}{3}\left[\cos\frac{k_1\theta k_2}{2}\cos\frac{k_3\theta k_4}{2} + \cos\frac{k_1\theta k_3}{2}\cos\frac{k_2\theta k_4}{2} + \cos\frac{k_1\theta k_4}{2}\cos\frac{k_2\theta k_3}{2}\right] \tag{2.59}$$

On peut aussi écrire le facteur précédemment comme

$$V(k_1,k_2,k_3,k_4) = \exp(-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i\theta k_j) \tag{2.60}$$

Ce vertex contient un facteur de phase dépendant des moments. Il est donc non local.

2-7 Le mélange UV/IR

Nous discutons cette différence importante de théories de champ non commutative comparée à théories commutatives à l'exemple d'une boucle renormalisation de masse des 4d - $\lambda\phi^4$ théorie, donné par équation (2.33), À cette fin nous considérons celui particule irréductible fonction de deux points [13]

$$\Gamma(p) =< \phi(p), \phi(-p) >= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \, \Gamma^{(n)}(p) \tag{2.61}$$

Au plus bas la fonction à deux points est donnée par $\Gamma^{(0)}(p) = p^2 + m^2$.La contribution d'une boucle se divise en deux parties, diagramme planaire et non planaire

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = \frac{\lambda}{3(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+m^2} \tag{2.62}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nonplanar}(p) = \frac{\lambda}{6(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+m^2} e^{ik\theta p} \tag{2.63}$$

où p est un moment externe.

La contribution (2.62) des diagrammes planaires de la théorie ϕ^4 non commutative est proportionnelle à celle de la théorie commutative, qui est quadratiquement divergente dans le secteur ultraviolet. Cette divergence pourrait être éliminé par l'introduction d'un cut-off.

Mais dans le cas des diagrammes non planaires (2.63) la situation est différente à cause du facteur de phase qui oscille rapidement ce qui assure la convergence. On utilise le paramètre de Schwinger

$$\frac{1}{k^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha \, e^{-\alpha(k^2+m^2)} \tag{2.64}$$

.alors on obtient

$$\Gamma^{(1)}_{planar} = \frac{\lambda}{3(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^\infty d\alpha \, e^{-\alpha(k^2+m^2)}$$

$$= \frac{\lambda}{48\pi^2}\int \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nonplanar} = \frac{\lambda}{6(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^\infty d\alpha \, e^{-\alpha(k^2+m^2)+ik\theta p}$$

$$= \frac{\lambda}{96\pi^2}\int \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2-\frac{pop}{\alpha}}$$

Après l'introduction d'un cut-off Λ donne

$$\Gamma^{(1)}_{planar} = \frac{\lambda}{48\pi^2}\int \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2-\frac{1}{\Lambda^2\alpha}}$$

$$= \frac{\lambda}{48\pi^2}(\Lambda^2 - m^2 \text{In}\,(\frac{\Lambda^2}{m^2}) + \cdots) \tag{2.65}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nonplanar} = \frac{\lambda}{96\pi^2}\int \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha m^2-\frac{pop+\frac{1}{\Lambda^2}}{\alpha}}$$

$$= \frac{\lambda}{96\pi^2}(\Lambda^2_{eff} - m^2 \text{In}\,(\frac{\Lambda^2_{eff}}{m^2}) + \cdots) \tag{2.66}$$

avec

$$\Lambda^2_{eff} = \frac{1}{1/\Lambda^2+pop}\,,\ pop = -p_\mu \theta^{\mu\lambda}\theta^{\nu}_{\lambda} p_\nu \tag{2.67}$$

On peut remarquer que $\Gamma^{(1)}_{nonplanar}$ est infini pour $1/\Lambda^2 + pop = 0$ c.-à-d.

$1/\Lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$($\Lambda \longrightarrow \infty$ divergence UV)

Et $p \longrightarrow 0$ ou $\theta \longrightarrow 0$ (divergence IR)

Ceci démontre le mélange intéressant d'UV/IR de la théorie. Ce mélange est l'un des aspects les plus fascinants de la théorie des champs non commutative.

La non localité du produit star démontre que le modèle (1.7) présente un nouveau type des divergences qui le rendent non renormalisable. Dans l’article [16], Filk a calculé les règles relatives au modèle (1.7). Il a montré que les amplitudes planaires donnent lieu à des oscillations qui couplent les pattes internes et externes.

2-8 Quelques problèmes de la théorie des champs non commutative

La renormalisation demeure, pour les théories quantiques qui souffrent de divergences, un premier test de consistance. Cependant, dans le cas de la théorie scalaire non commutative et bien qu'elle soit renormalisable [17,18], d'autre problèmes surviennent.

La non localité de la théorie peut affecter le théorème CPT, l'unitarité et la causalité. Ceux-ci nous impose des contraintes sur le tenseur libre θ. Dans les travaux de [19,20] il a été montré que la non commutativité d'espace-temps $\theta_{0i} \neq 0$ conduit à une théorie non unitaire.

Apparition du mixage des divergences UV et IR.

Enfin ces résultats représentent un problème sérieux pour la théorie non commutative. Ils peuvent affecter la renormalisation de la théorie.

2-9 Renormalisation

Pour résoudre les problèmes précédents, W. Moffatt proposa une méthode [21,22] et [23,24.25].

Les développements ci-dessous sont essentiellement basés sur les articles de Moffat.

Soient ρ^{μ} les coordonnées du super espace données par

$$\rho^{\mu} = x^{\mu} + \beta^{\mu}\ , \quad \mu = 0\ldots 3 \tag{2.68}$$

où x^{μ} sont les coordonnées dans l'espace-temps vérifiant

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = x^{\mu}x^{\nu} - x^{\nu}x^{\mu} = i\theta^{\mu\nu} \tag{2.69}$$

et les β^{μ} sont des coordonnées dans l'algèbre associative de Grassman vérifiant

$$\{\beta^{\mu}, \beta^{\nu}\} = \beta^{\mu}\beta^{\nu} + \beta^{\nu}\beta^{\mu} = 0 \tag{2.70}$$

Le produit de deux champs $\phi_1$et ϕ_2 opérant dans le super espace non commutative est donné par le o-produit

$$(\phi_1 o \phi_2)(\rho) = [\exp(\tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\rho^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\eta^{\nu}})\phi_1(\rho)\phi_2(\eta)]_{\rho=\eta} \tag{2.71}$$

où $\omega^{\mu\nu}$ est un tenseur non symétrique

$$\omega^{\mu\nu} = -\tau^{\mu\nu} + i\theta^{\mu\nu} \tag{2.72}$$

avec

$$\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu}\ ,\ \theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu},\ \text{et} \quad (\omega^{\mu\nu})^{+} = \omega^{\mu\nu} \tag{2.73}$$

où + dénote la conjugaison hermitienne. Définissons maintenant les notations suivantes

$$\begin{cases} [\phi_1(\rho), \phi_2(\rho)]_o \equiv \phi_1(\rho) o \phi_2(\rho) - \phi_2(\rho) o \phi_1(\rho) \\ \{\phi_1(\rho), \phi_2(\rho)\}_o \equiv \phi_1(\rho) o \phi_2(\rho) + \phi_2(\rho) \phi_1(\rho) \end{cases} \tag{2.74}$$

Considérons l'opérateur $\hat{\rho}$ dans le super espace et utilisons les relations (3.1), (3.2) et (3.3). On trouve

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}^\mu, \hat{\rho}^\nu]_o &= (x^\mu + \beta^\mu) o (x^\nu + \beta^\nu) - (x^\nu + \beta^\nu) o (x^\mu + \beta^\mu) \\ &= i\theta^{\nu\mu} + 2\beta^\mu \beta^\nu + O(\theta^2) \end{aligned} \tag{2.75}$$

de même

$$\begin{aligned} \{\hat{\rho}^\mu, \hat{\rho}^\nu\}_o &= (x^\mu + \beta^\mu) o (x^\nu + \beta^\nu) + (x^\nu + \beta^\nu) o (x^\mu + \beta^\mu) \\ &= \{x^\mu, x^\nu\} + 2(x^\mu \beta^\nu + x^\nu \beta^\mu) - \tau^{\mu\nu} + O(\tau^2) \end{aligned} \tag{2.76}$$

Si nous choisissons maintenant la limite $\beta^\mu \longrightarrow 0$ et $\tau^{\mu\nu} \longrightarrow 0$, alors nous obtenons à partir de (2.75) et (2.76)

$$[\rho^\mu, \rho^\nu]_o \quad \longrightarrow \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{2.77}$$

$$\{\rho^\mu, \rho^\nu\}_o \quad \longrightarrow \quad \{\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu\} = 2x^\mu x^\nu - i\,\theta^{\mu\nu} \tag{2.78}$$

Remarquons que les expressions (2.77) et (2.78) donnent les mêmes résultats du cas non commutatif. À la limite $x^\mu \longrightarrow 0$, ce qui implique $\theta^{\nu\mu} \longrightarrow 0$. Nous obtenons de (2.75) et de (2.76) le commutateur et l'anticommutateur suivants

$$[\rho^\mu, \rho^\nu]_o \quad \longrightarrow \quad [\beta^\mu, \beta^\nu] = 2\beta^\mu \beta^\nu \tag{2.79}$$

$$\{\rho^\mu, \rho^\nu\}_o \quad \longrightarrow \quad \{\hat{\beta}^\mu, \hat{\beta}^\nu\} = -\tau^{\mu\nu} \tag{2.80}$$

Il est important de noter à ce niveau que nous allons traiter une théorie scalaire, ne contenant pas de champs fermioniques sur un super espace.

Considérons alors une géométrie simple définie par $\beta^\mu = 0$, $\theta^{\mu\nu} = 0$ donc on va travailler avec les coordonnées x de l'espace-temps .

Simplement, W, Moffat remplace la matrice antisymétrique θ par une matrice symétrique τ, et le produit star par le produit "diamant" ou comme nous prenons $\tilde{\star}$-produit comme suit

$$(f \star g)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{\mathcal{Y}}\partial_\nu^{\mathcal{Z}}} f(\mathcal{Y}) g(\mathcal{Z})|_{\mathcal{Y}=\mathcal{Z}=x} \tag{2.81}$$

Remplacé par

$$(f \,\tilde{\star}\, g)(x) = e^{-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}^\nu}} f(x) g(\mathcal{Y})|_{x=\mathcal{Y}} \tag{2.82}$$

Chapitre *III*

Formulation Lagrangienne

Avant d'aborder le formalisme Lagrangienne, nous avons traité les propriétés du $\tilde{\star}$-produit

3-1 Propriétés du $\tilde{\star}$-produit

3-1-1 Le $\tilde{\star}$-produit entre deux exponentiels

$$e^{ikx} \tilde{\star} e^{iqx} = e^{-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}} e^{ikx} e^{iqy}\Big|_{x=y}$$

$$=(1 + \left(-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) + \left(-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)^2 + \cdots) e^{ikx} e^{iqy}\Big|_{x=y}$$

$$= \left(1 + \left(\frac{1}{2}k\tau q\right) + \cdots\right) e^{ikx} e^{iqy}$$

$$= e^{i(k+q)x} e^{\left(\frac{1}{2}k\tau q\right)} \tag{3.1}$$

avec la notation $\frac{1}{2}k\tau q \equiv \frac{1}{2}k_\mu \tau^{\mu\nu} q_\nu$

De cette équation on peut déduire une relation importante concernant la distribution de Dirac. Intégrons sur x

$$\int d^D x \exp(ikx) \tilde{\star} \exp(iqx) = \exp(\frac{1}{2}k\tau q) \int d^D x \exp[i(k+q)x]$$

$$= \exp(\frac{1}{2}k\tau q)(2\pi)^D \delta^{(D)}(k+q) \tag{3.2}$$

On déduit de cette expression une expression pour la distribution de Dirac sur un espace non commutatif avec le $\tilde{\star}$-produit

$$\tilde{\delta}^D(k) = e^{\frac{1}{2}k\tau k}\delta^D(k) \tag{3.3}$$

Ce résultat va nous conduire par la suite à généraliser, comme nous verons dans le chapitre sur la quantification canonique, certaines relations de la théorie des champs ordinaires, comme la relation de commutation entre les opérateurs de création et d'annihilation.

3-1-2 La représentation dans l'espace des moments

En utilisant (3,1) nous obtenons

$$f(x) \tilde{\star} g(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k)\tilde{g}(q) \exp\left(\frac{1}{2}k\tau q\right) \exp[i(k+q)x] \tag{3.4}$$

3-1-3 Associativité

$$[(f \tilde{\star} g) \tilde{\star} h](x) = [f \tilde{\star} (g \tilde{\star} h)](x) \tag{3.5}$$

En effet, dans l'espace des moments

$$\big((f \tilde{\star} g) \tilde{\star} h\big)(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{\frac{1}{2}k\tau q}e^{i(k+q)x} \tilde{\star}\, h(x)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\boldsymbol{d^4p}}{\boldsymbol{(2\pi)^4}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)\tilde{h}(p)e^{\frac{1}{2}k\tau q}e^{\frac{1}{2}(k+q)\tau p}e^{i(k+q+p)x} \tag{3.6}$$

$$(f \tilde{\star} (g \tilde{\star} h))(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(x) \tilde{\star} (\tilde{g}(q)\tilde{h}(p)e^{\frac{1}{2}q\tau p}e^{i(q+p)x})$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\boldsymbol{d^4p}}{\boldsymbol{(2\pi)^4}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)\tilde{h}(p)e^{\frac{1}{2}q\tau p}e^{\frac{1}{2}(q+p)\tau k}e^{i(k+q+p)x} \tag{3.7}$$

3-1-4 $\tilde{\star}$- produit sous le signe intégral

$$\int (f \tilde{\star} g)(x) d^4x = \int (g \tilde{\star} f)(x) d^4x \tag{3.8}$$

qui se démontre de la manière suivante

$$\int (f \tilde{\star} g)(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)\exp\left(\frac{1}{2}k\tau q\right)\exp[i(k+q)x] \tag{3.9a}$$

$$\int (g \tilde{\star} f)(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{g}(q)\tilde{f}(k)\exp\left(\frac{1}{2}q\tau k\right)\exp[i(q+k)x] \tag{3.9b}$$

On peut démontrer que: $\int d^4x (f \tilde{\star} g)(x) = \int d^4x (f.g)(x)$

$$\int d^4x (f \tilde{\star} g)(x) = \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{\frac{1}{2}k\tau q}e^{i(k+q)x}$$

En utilisant la formule de Dirac

$$\int d^Dx \exp(i(k_1 + \cdots + k_n)x) = (2\pi)^D\delta^D(k_1 + \cdots + k_n) \tag{3.10}$$

Donc:

$$\int d^4x (f \tilde{\star} g)(x) = (2\pi)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q)e^{\frac{1}{2}k\tau q}\delta(k+q) \tag{3.11}$$

Et en utilisant:

$$f(x_0) = \int dx\, f(x)\delta(x - x_0) \tag{3.12}$$

Donc :

$$\int d^4x(f \tilde{\star} g)(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k) = \int d^4x(f.g)(x) \qquad (3.13)$$

de l'équation (3.8) nous pouvons déduire la propriété cyclique

$$\int (f_1 \tilde{\star} f_2 \tilde{\star} \ldots \tilde{\star} f_n)(x) d^4x = \int (f_n \tilde{\star} f_1 \tilde{\star} f_2 \tilde{\star} \ldots \tilde{\star} f_{n-1})(x) d^4x \qquad (3.14)$$

3-1-5 La conjugaison complexe

$$(f \tilde{\star} g)^* = g^* \tilde{\star} f^* \qquad (3.15)$$

3-1-6 La règle Leibniz

Il est facile de vérifier que la dérivée $\tilde{\star}$- produit satisfait à la règle de Leibniz

$$\partial_\mu (f \tilde{\star} g)(x) = (\partial_\mu f) \tilde{\star} g + f \tilde{\star} (\partial_\mu g) \qquad (3.16)$$

3-2 Formulation Lagrangienne

3-2-1 Densité Lagrangienne et action

Nous allons étendre le formalisme Lagrangien de la théorie des champs sur un espace-temps classique à la théorie des champs sur un espace non commutative avec $\tilde{\star}$-produit. On utilise les développements du chapitre précédent, en remplaçant dans la densité lagrangienne que nous supposerons un scalaire de Lorentz, le produit habituel entre les champs $\phi(x)$ par le $\tilde{\star}$-produit.

La densité Lagrangienne réelle pour la théorie des champs scalaire non commutative avec $\tilde{\star}$-produit est donnée alors par

$$\mathcal{L}^{\tilde{\star}}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \tilde{\star} \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi \tilde{\star} \phi(x) - V_{\tilde{\star}}(\phi) \qquad (3.17)$$

avec

$$V_{\tilde{\star}}(\phi) = \sum_n \frac{1}{n!} \underbrace{\phi \tilde{\star} \phi \ldots \phi \tilde{\star} \phi}_{n\ term} \qquad , n > 2 \qquad (3.18)$$

Nous définissons l'action S par :

$$S[\phi] = \int_R \mathcal{L}^{\tilde{\star}}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \qquad (3.19)$$

$$= \int_R d^4x \, [\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \tilde{\star} \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi \tilde{\star} \phi(x) - V_{\tilde{\star}}(\phi)] \qquad (3.20)$$

3-2-2 Equations de mouvement et champ conjugué

3-2-2-1 Equations de mouvement

Pour déduire l'équation de mouvement, comme dans le cas commutatif, on va utiliser le principe de moindre action S [ϕ], c.-à-d. on pose

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \tag{3.21}$$

Nous allons adopter premièrement la définition suivante pour la dérivée fonctionnelle, c.-à-d.

$$\Delta S = S(\phi + \delta\phi) - S(\phi) = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \bar{\star}\, \delta\phi(x) \tag{3.22}$$

Champ libres

Pour l'action libre on peut écrire

$$\Delta S_0 = S_0(\phi + \delta\phi) - S_0(\phi) = \int d^4x \frac{\delta S_0}{\delta\phi(x)} \bar{\star}\, \delta\phi(x) \tag{3.23}$$

D'autre part, la densité Lagrangienne libre est

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\nu\phi(x) \bar{\star}\, \partial^\nu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x) \bar{\star}\, \phi(x) \tag{3.24}$$

On calculons ΔS_0

$$\Delta S_0 = S_0(\phi + \delta\phi) - S_0(\phi)$$

$$= \frac{1}{2}\int_R [\partial_\mu(\phi + \delta\phi) \bar{\star}\, \partial^\mu(\phi + \delta\phi) - m^2(\phi + \delta\phi) \bar{\star}\, (\phi + \delta\phi) -$$

$$-\partial_\mu\phi(x) \bar{\star}\, \partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x) \bar{\star}\, \phi(x)]d^4x$$

$$= \frac{1}{2}\int_R [\partial_\mu\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\delta\phi + \partial_\mu\delta\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\phi + \partial_\mu\delta\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\delta\phi - m^2\phi \bar{\star}\, \phi -$$

$$-m^2\phi \bar{\star}\, \delta\phi - m^2\delta\phi \bar{\star}\, \phi - m^2\delta\phi \bar{\star}\, \delta\phi - \partial_\mu\phi(x) \bar{\star}\, \partial^\mu\phi(x) - m^2\phi(x) \bar{\star}\, \phi(x)$$

En supposons que la variation du champ est petite l'expression précédente se réduit à

$$\Delta S_0 = \frac{1}{2}\int_R [\partial_\mu\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\delta\phi + \partial_\mu\delta\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\phi - m^2\phi \bar{\star}\, \delta\phi - m^2\delta\phi \bar{\star}\, \phi]d^4x \tag{3.25}$$

Remarque que

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\delta\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\phi) - \delta\phi \bar{\star}\, \partial_\mu\partial^\mu\phi \\ \text{et} \quad &\partial_\mu\phi \bar{\star}\, \partial^\mu\delta\phi = \partial^\mu\big(\partial_\mu\phi \bar{\star}\, \delta\phi\big) - \partial^\mu\partial_\mu\phi \bar{\star}\, \delta\phi \end{aligned} \tag{3.26}$$

il vient alors

$$\Delta S_0 = \frac{1}{2}\int_R \left[\partial_\mu(\delta\phi \,\tilde{\star}\, \partial^\mu\phi) - \delta\phi \,\tilde{\star}\, \Box\phi + \partial^\mu\left(\partial_\mu\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi\right) - \Box\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi - m^2\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi - \right.$$
$$\left. -m^2\delta\phi \,\tilde{\star}\, \phi\right] d^4x \quad (3.27)$$

En utilisant le théorème da Gauss

$$\int_R \, div\, A = \int_{\partial R} A\,.\,dS \quad (3.28)$$

on obtient

$$\Delta S_0 = -\frac{1}{2}\int_R \left(\delta\phi \,\tilde{\star}\, \Box\phi + \Box\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi + m^2\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi + m^2\delta\phi \,\tilde{\star}\, \phi\right) d^4x$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\partial R}(\delta\phi \,\tilde{\star}\, \partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi)\, d^D\sigma \quad (3.29)$$

Comme la variation de sur les bords de R s'annule, c.-à-d.

$$\delta\phi = 0, \ \text{sur } \partial R \quad (3.30)$$

on obtient alors

$$\Delta S_0 = -\int_R \left(\Box_x + m^2\right) \phi \,\tilde{\star}\, \delta\phi \quad (3.31)$$

Nous allons éliminer le $\tilde{\star}$-produit en utilisant sa définition. Après élimination des termes de surface et par analogie avec le cas commutatif nous écrivons

$$\Delta S_0 = -\int_R \left(\Box_x + m^2\right) \psi.\, \delta\psi \quad (3.32)$$

avec le champ scalaire ψ défini par

$$\psi = e^{\frac{1}{4}\partial_x \tau \partial_x}\phi \quad (3.33)$$

En minimisant l'action (3.30), on trouve l'équation de mouvement

$$(\Box_x + m^2)\psi = 0 \quad (3.34)$$

Et on définit la transformation de fourrier modifiée

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{ikx} f(k) \quad (3.35)$$

Champ en interaction

Pour ce cas, il faut ajouter à la densité lagrangienne un terme d'interaction.

Etudions la densité lagrangienne d'interactions en théorie ϕ^4 c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_{int}^{\tilde{\star}} = -\frac{g}{4!}\phi \,\tilde{\star}\, \phi \,\tilde{\star}\, \phi \,\tilde{\star}\, \phi \quad (3.36)$$

Il s'ensuit que

$$S_{int}[\phi] = -\frac{g}{4!}\int d^4x\, \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tag{3.37}$$

Calculons d'abord la variation de S_{int} comme

$$\begin{aligned} S_{int}[\phi+\delta\phi] - S_{int}[\phi] \\ &= -\frac{g}{4!}\int d^4x\, [(\phi+\delta\phi) \tilde{\star} (\phi+\delta\phi) \tilde{\star} (\phi+\delta\phi) \tilde{\star} (\phi+\delta\phi) - (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)] \\ &= -\frac{g}{4!}\{\int d^4x[((\phi+\delta\phi) \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) - (\phi \tilde{\star} (\phi+\delta\phi) \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) \\ &\quad +(\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} (\phi+\delta\phi) \tilde{\star} \phi) + (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} (\phi+\delta\phi))(x)] \\ &\quad -\int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x)\} \\ &= -\frac{g}{4!}\{\int d^4x\ (\delta\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) + \int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \delta\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) \\ &\quad +\int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \delta\phi \tilde{\star} \phi)(x) + \int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \delta\phi)(x)(x) \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$S_{int}[\phi+\delta\phi] - S_{int}[\phi] = -\frac{g}{3!}\int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x)\delta\phi(x) \tag{3.38}$$

ou

$$\int d^4x \frac{\delta S_{int}[\phi]}{\delta\phi(x)} \tilde{\star}\, \delta\phi(x) = -\frac{g}{3!}\int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x)\delta\phi(x) \tag{3.39}$$

Donc on déduit que

$$\frac{\delta S_{int}[\phi]}{\delta\phi(x)} = -\frac{g}{3!}\int d^4x\, (\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) \tag{3.40}$$

Finalement l'équation de mouvement s'obtient en minimisant l'action

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta S_0[\phi]}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S_{int}[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0 \tag{3.41}$$

On obtient finalement l'équation de mouvement pour des champs en interaction

$$(\Box_x + m^2 - V'_{\tilde{\star}}(\phi))\phi = 0 \tag{3.42}$$

où

$$V'_{\tilde{\star}}(\phi) = \frac{g}{3!}(\phi \tilde{\star} \phi \tilde{\star} \phi)(x) \tag{3.43}$$

3-2-2-2 Le champs conjugué

Par analogie avec la théorie des champs commutative, nous définissons le champ canoniquement conjugué $\Pi(x)$ dans la théorie des champs non commutative avec $\tilde{\star}$-produit par

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}^{\tilde{\star}}}{\partial \dot{\phi}(x)} \tag{3.44}$$

La densité lagrangienne libre est

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_a\phi(x) \tilde{\star}\, \partial^a\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x) \tilde{\star}\, \phi(x)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}}\partial_a\phi(x)\partial^a\phi(y)\Big|_{x=y} - \frac{m^2}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}}\phi(x)\phi(y)\Big|_{x=y}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - \frac{1}{4}\tau^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_a\phi\partial_\nu\partial^a\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi + \frac{1}{4}m^2\tau^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + O(\tau^2) \tag{3.45}$$

où $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, ce qui implique

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[\partial_0\phi\partial^0\phi + \partial_i\phi\partial^i\phi - \frac{1}{2}\tau^{00}\partial_0\partial_0\phi\partial_0\partial^O\phi - \frac{1}{2}\tau^{00}\partial_0\partial_i\phi\partial_0\partial^i\phi - \frac{1}{2}\tau^{0i}\partial_0\partial_0\phi\partial_i\partial^0\phi$$

$$-\frac{1}{2}\tau^{0i}\partial_0\partial_j\phi\partial_i\partial^j\phi - \frac{1}{2}\tau^{i0}\partial_i\partial_0\phi\partial_0\partial^0\phi - \frac{1}{2}\tau^{i0}\partial_i\partial_j\phi\partial_0\partial^j\phi - \frac{1}{2}\tau^{ij}\partial_i\partial_0\phi\partial_j\partial^0\phi -$$

$$-\frac{1}{2}\tau^{ij}\partial_i\partial_k\phi\partial_j\partial^k\phi - m^2\phi\phi + \frac{1}{2}m^2\tau^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}m^2\tau^{0i}\partial_0\phi\partial_i\phi$$

$$+\frac{1}{2}m^2\tau^{i0}\partial_i\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}m^2\tau^{00}\partial_i\phi\partial_j\phi] \tag{3.46}$$

Le moment conjugué est

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}^{\tilde{\star}}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tau^{00}\dot{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tau^{i0}\partial_i\phi \tag{3.47}$$

Comparé à la théorie des champs commutative, la théorie des champs non commutative avec $\tilde{\star}$-produit est une théorie de champ non locale et est par certains aspects très différente. Comme c'est le cas avec la théorie non commutative, la non localité peut avoir des conséquences sur le théorème CPT aussi bien que sur l'unitarité et la causalité. Il a été prouvé par Moffat [22] que les amplitudes ont un comportement régulier à l'infini quand $\tau^{ij} \neq 0$ et $\tau^{00} = \tau^{0i} = 0$ et c'est dans ce cas seulement que nous pouvons définir l'opérateur du moment conjugué pour éviter les problèmes d'unitarité et de causalité.

Donc le champ Π(x) canoniquement conjugué de ϕ est le même que dans le cas commutatif, c'est-à-dire

$$\Pi(x) = \dot{\phi}(x) \tag{3.48}$$

Chapitre *IV*

Quantification Canonique

Maintenant, on va développer la quantification canonique des champs scalaires sur un espace non commutatif avec $\tilde{\star}$-produit [24]. La nouvelle définition de la distribution de Dirac (3.3) et la nouvelle définition de transformée de Fourier (3.35) nous conduirons à définir un commutateur déformé entre les opérateurs de création et annihilation.

4-1 Relation de commutation et propagateur de Feynman

L'absence de fermions dans notre théorie scalaire nous conduit à ignorer la manipulation des variables fermioniques, puisqu'elles ne génèrent que des facteurs globaux sans conséquences sur les résultats finaux.

La quantification du champ scalaire sur un espace-temps classique est effectuée en imposant les relations de commutation à temps égaux suivantes

$$[\phi(x,t),\Pi(y,t)] = i\delta^{(3)}(x-y) \tag{4.1}$$

$$[\phi(x,t),\phi(y,t)] = [\Pi(x,t),\Pi(y,t)] = 0 \tag{4.2}$$

Nous savons déjà que le champ conjugué de ϕ est donné par

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \dot{\phi}(x) \tag{4.3}$$

Pour aller plus loin dans la quantification canonique, nous résolvons d'abord l'équation de mouvement pour le champ libre. En effet on a

$$(\Box_x + m^2)\phi(x) = 0 \tag{4.4}$$

où ϕ est le champ de Klein-Gordon sur un espace-temps classique.

Comme dans la théorie des champs commutative, la solution de (4.4) est donnée par la transformée de Fourier

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2w_k} e^{\frac{1}{4}k\tau k}\left(a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{ikx}\right) \tag{4.5}$$

où $w_k = \sqrt{k^2+m^2}$

Maintenant on postule que les relations de commutations entre les opérateurs de création et d'annihilation s'écrivent comme

$$[a(k), a^+(k')] = (2\pi)^3(2w_k)e^{\frac{1}{2}k\tau k}\delta^3(k-k'),$$
$$[a(k), a(k')] = [a^+(k), a^+(k')] = 0. \tag{4.6}$$

Définissons maintenant les fonctions $f_k(x)$

$$f_k(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}k\tau k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}}e^{-ikx} \tag{4.7}$$

qui sont l'équivalent des ondes planes de quantité de mouvement k et d'énergie positive w_k de la théorie conventionnelle. Sur notre espace quantifié ces fonctions vérifient

$$\int d^3x\, [f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)]_{\tilde{\star}} = \delta^3(k-k') \tag{4.8}$$

où $[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)]_{\tilde{\star}}$ est donné par

$$\left[A(x)\overleftrightarrow{\partial_0}B(x)\right]_{\tilde{\star}} \equiv A(x)\,\tilde{\star}\,\partial_0 B(x) - \partial_0 A(x)\,\tilde{\star}\,B(x) \tag{4.9}$$

En effet

$$\int d^3x\, [f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)]_{\tilde{\star}} = i\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}\sqrt{(2\pi)^3 2w_{k'}}}\left(f_k^*\,\tilde{\star}\,\frac{\partial f_{k'}}{\partial t} - \frac{\partial f_k^*}{\partial t}\,\tilde{\star}\,f_{k'}\right)$$

$$= \int \frac{d^3x e^{\frac{1}{4}k\tau k}e^{\frac{1}{4}k'\tau k'}}{2(2\pi)^3\sqrt{w_k w_{k'}}}\left((-iw_k)e^{+ikx}\,\tilde{\star}\,e^{-ik'x} - iw_{k'}e^{+ikx}\,\tilde{\star}\,e^{-ik'x}\right)$$

$$= \int \frac{d^3x e^{\frac{1}{4}k\tau k}e^{\frac{1}{4}k'\tau k'}e^{-\frac{1}{2}k\tau k'}}{2(2\pi)^3\sqrt{w_k w_{k'}}}e^{i(k-k')x}(w_k + w_{k'})$$

$$= \delta^3(k-k') \tag{4.10}$$

On montre de même que

$$\int d^3x\, [f_k(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)]_{\tilde{\star}} = \int d^3x\, [f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}^*(x)]_{\tilde{\star}} = 0 \tag{4.11}$$

La propriété (4.8) montre que les $f_k(x)$ forment un ensemble orthogonal comme dans le cas commutatif. on déduit alors qu'on a simplement une redéfinition du champ sur l'espace non commutatif et que par conséquent on s'attend à obtenir les mêmes résultats que la théorie commutative. Les relations (4.10) et (4.11) permettent d'inverser l'expansion de $\phi(x)$ et d'obtenir une expression pour $a(k)$ et son conjugué.

En effet, des relations (4.5) et (4.7) on a

$$[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)]_{\tilde{\star}} = \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_{k'}}}[f_k^*(x) \tilde{\star}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}(f_{k'}(x)a(k') + f_{k'}^*(x)a^+(k'))] \tag{4.12}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\int d^3x\,[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)]_{\tilde{\star}} = \int \frac{d^3k'd^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}}(\left[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)\right]_{\tilde{\star}}\, a(k') +$$

$$+\left[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}^*(x)\right]_{\tilde{\star}}\, a^+(k'))$$

$$=\int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_{k'}}}\delta^3(k-k')a(k')$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}}a(k) \tag{4.13}$$

ce qui donne

$$a(k) = \int d^3x\,\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}[f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)]_{\tilde{\star}} \tag{4.14}$$

De même on montre que

$$a^+(k) = \int d^3x\,\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}[\phi(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_k(x)]_{\tilde{\star}} \tag{4.15}$$

On passe maintenant au calcul du commutateur $[\phi(x),\Pi(y)]_\Delta$ à temps égaux

Le champ conjugué est donné par la relation (4.3),

$$\Pi(x) = \dot{\phi}(x)$$

$$= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2w_k}e^{\frac{1}{4}k\tau k}w_k(a(k)e^{-ikx} - a^+(k)e^{ikx}) \tag{4.16}$$

En définit maintenant le Δ-produit comme

$$\phi_1(x)\Delta\phi_2(y) = [\exp(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\tau^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\nu})\phi_1(x)\phi_2(y)]$$

alors

$$[\phi(x),\Pi(y)]_\Delta = i\int\int \frac{d^3kd^3qe^{\frac{1}{4}k\tau k}e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{4(2\pi)^6 w_k w_q}w_q[a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{+ikx}, a(k)e^{-iky}$$

$$- a^+(k)e^{+iky}]$$

$$= i \int\int \frac{d^3k d^3q e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{(2\pi)^6 2w_k} [-e^{-ikx} \Delta e^{+iky} (2\pi)^3 w_k e^{\frac{1}{2}k\tau q} \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) -$$

$$-e^{+ikx} \Delta e^{-iky} (2\pi)^3 w_k e^{\frac{1}{2}k\tau q} \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})]$$

$$= i \int\int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} e^{-\frac{1}{2}k\tau k} [e^{-ik(x-y)} + e^{+ik(x-y)}]$$

$$= i \frac{1}{(2\pi)^3} [\frac{\pi}{\det \tau}]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} \tag{4.17}$$

De même pour le commutateur $[\phi(x), \phi(y)]_\Delta$ à temps égaux, nous avons

$$[\phi(x), \phi(y)]_\Delta = \int\int \frac{d^3k d^3q e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{(2\pi)^6 2w_k 2w_q} \big[a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{+ikx}, a(q)e^{-iqy}$$

$$+ a^+(q)e^{+iqy}\big]_\Delta$$

$$= \int\int \frac{d^3k d^3q e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{4(2\pi)^6 w_k w_q} \big(e^{-ikx} \Delta e^{+iqy} - e^{+ikx} \Delta e^{-iqy}\big) [a(k), a^+(q)]$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2w_k} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\tau\boldsymbol{K}} e^{i\boldsymbol{K}(x-y)} \sin k_0(x_0 - y_0)$$

$$= 0. \tag{4.18}$$

Finalement on peut résumer la quantification canonique du champ scalaire réel sur un espace non commutatif avec le $\tilde{\star}$-produit par les relations de commutations à temps égaux suivantes

$$[\phi(x), \phi(y)]_\Delta = 0 \tag{4.19}$$

$$[\phi(x), \Pi(y)]_\Delta = i \frac{1}{(2\pi)^3} [\frac{\pi}{\det \tau}]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} \tag{4.20}$$

Jusqu'à maintenant la quantification canonique de notre théorie des champs scalaires a été basée sur les relations de commutation entre les champs dans le espace non commutatif avec le $\tilde{\star}$-produit en deux points différents, mais à temps égaux. Il reste à calculer les relations de commutations pour des temps arbitraires.

$$[\phi(x),\phi(y)]_\Delta = \int\int \frac{d^3k d^3q e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{(2\pi)^6 2w_k 2w_q} \left[a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{+ikx}, a(q)e^{-iqy}\right.$$

$$\left. + a^+(q)e^{+iqy}\right]_\Delta$$

$$= \int\int \frac{d^3k d^3q e^{\frac{1}{4}k\tau k} e^{\frac{1}{4}q\tau q}}{4(2\pi)^6 w_k w_q} \left(e^{-ikx}\Delta e^{+iqy} - e^{+ikx}\Delta e^{-iqy}\right)[a(k),a^+(q)]$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2w_k} e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\tau k}[e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)}]$$

$$= \Delta^{nc}(x-y). \tag{4.21}$$

4-2 Hamiltonien

On peut facilement exprimer, en fonction des opérateurs $a(k)$ et $a^+(k)$, l'opérateur hamiltonien en utilisant l'expression (4.5) et les règles de commutations (4.6).

Par analogie avec la théorie des champs ordinaire, l'hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}_0 = \int d^3x\, T^{00} \tag{4.22}$$

Définissons le tenseur moment énergie $T_{\mu\nu}$ par

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \tilde{\star}\, \partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.23}$$

Tenant compte de l'expression du tenseur moment-énergie (4.23), on obtient

$$\mathcal{H}_0 = \int d^3x\,[\partial_0\phi \,\tilde{\star}\, \partial_0\phi - \tfrac{1}{2}\partial^\nu\phi \,\tilde{\star}\, \partial_\mu\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi \,\tilde{\star}\, \phi]$$

$$= \int d^3x\,[\partial_0\phi \,\tilde{\star}\, \partial_0\phi - \tfrac{1}{2}\partial_0\phi \,\tilde{\star}\, \partial_0\phi + \nabla\phi \,\tilde{\star}\, \nabla\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi \,\tilde{\star}\, \phi]$$

ce qui implique

$$\mathcal{H}_0 = \tfrac{1}{2}\int d^3x\,[\partial_0\phi \,\tilde{\star}\, \partial_0\phi + \nabla\phi \,\tilde{\star}\, \nabla\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi \,\tilde{\star}\, \phi] \tag{4.24}$$

en effectuant tous les calculs on aboutit à l'expression suivante

$$\mathcal{H}_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\frac{k_0}{2}\left(a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)\right) \tag{4.25}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 e^{\frac{1}{2}k\tau k}\left(A^+(k)A(k) + \tfrac{1}{2}\right) \tag{4.26}$$

avec les opérateurs

$$A(k) = e^{-\frac{1}{4}k\tau k}a(k)\,, \quad A^{+}(k) = e^{-\frac{1}{4}k\tau k}a^{+}(k) \tag{4.27}$$

qui vérifient la relation de commutation habituelle

$$[A(k), A^{+}(k)] = (2\pi)^3\omega_k\delta^3(k-k') \tag{4.28}$$

4-3 Vertex propre

Nous allons maintenant illustrer, par un calcul explicite, la finitude de la théorie proposée. En considérant les vertex propre à deux points et quatre points à l'ordre d'une boucle. Nous allons effectuer les calculs en ignorant les contraintes sur le tenseur $\tau^{\mu\nu}$. Dans ce cas on peut montrer explicitement que la théorie est unitaire [23, 24,25].

4-3-1 calcul de Γ_2

Le vertex propre à deux points à l'ordre d'une boucle est donné par

$$\Gamma_2(p) = \frac{p^2 - m^2}{e^{\frac{1}{2}p\tau p}} + \frac{g}{2!}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{\frac{1}{2}p\tau p}}{p^2 - m^2} \tag{4.29}$$

avec (en passant à l'espace Euclidien)

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{\frac{1}{2}k\tau k}}{k^2-m^2} &= \int_0^{\infty} d\alpha \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{\frac{1}{2}\tau k_E k_E} e^{-\alpha(k_E^2+m^2)} \\
&= e^{\frac{\tau}{2}m^2}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} d\alpha \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{-\alpha(k_E^2+m^2)} \\
&= \frac{e^{\frac{\tau}{2}m^2}}{16\pi^2\tau}\left[2e^{-\frac{\tau}{2}m^2} - Ei\left(1,\frac{\tau}{2}\,m^2\right)\tau\, m^2\right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2\tau}\left[2 - \tau\, m^2 e^{\frac{\tau}{2}m^2} Ei\left(1,\frac{\tau}{2}\,m^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ce qui est un résultat, tant que τ demeure différent de zéro. Ainsi, on a obtenu du résultat fini.

4-3-2 calcul de Γ_4

Le vertex propre à quatre points à l'ordre d'une boucle est donné par

$$\Gamma_4(\mathrm{p}) = -\mathrm{g} - \frac{g^2}{2i}\underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{\frac{1}{2}p\tau p}}{p^2 - m^2}\frac{e^{\frac{1}{2}(p-k)\tau(p-k)}}{(p-k)^2 - m^2}}_{l_\tau(k)} + permutations \tag{4.31}$$

En utilisant la méthode de Schwinger [15], on obtient

$$l_\tau(k) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\frac{1}{2}pE\tau pE} e^{-\frac{1}{2}(p-k)E\tau(p-k)E} \, e^{-\alpha(p_E^2+m^2)} e^{-\beta((p-k)_E^2+m^2)}$$

$$= e^{\tau\, m^2} \int_{\frac{\tau}{2}}^\infty d\alpha \int_{\frac{\tau}{2}}^\infty d\,\beta e^{-a\, m^2} e^{-\,\beta m^2} \int \frac{d^4pE}{(2\pi)^4} e^{-ap_E^2} e^{-\beta(p-k)_E^2}$$

$$= \frac{e^{\tau\, m^2}}{16\pi^2} \int_{\frac{\tau}{2}}^\infty d\alpha \int_{\frac{\tau}{2}}^\infty d\,\beta e^{-(a-\beta)\, m^2} \frac{\exp[-k_E^2 \frac{a\beta}{a+\beta}]}{(a+\beta)^2} \quad (4.32)$$

Soit maintenant le changement de variables suivant

$$a = (1-x)\lambda\,, \;\; \beta = x\lambda \quad (4.33)$$

alors

$$l_\tau(k) = \frac{e^{\tau\, m^2}}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau(\,m^2+x(1-x)k_E^2)}^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda}$$

$$= -\frac{e^{\tau\, m^2}}{16\pi^2} \int_0^1 dx\, E_i(-\tau(\,m^2 + x(1-x)k_E^2)) \quad (4.34)$$

Si on considère le développement de la fonction exponentielle au premier ordre en τ

$$E_i\big(-\tau(\,m^2 + x(1-x)k_E^2)\big) = \gamma + \ln\tau - \tau(\,m^2 + x(1-x)k_E^2) \quad (4.35)$$

on obtient

$$l_\tau(k) = -\frac{e^{\tau\, m^2}}{16\pi^2} (\gamma + \ln\tau - \tau(\,m^2 + x(1-x)k_E^2)) \quad (4.36)$$

On remarque encore que cette expression est finie.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est l'étude détaillée de la théorie des champs non commutative et le traitement de la quantification canonique, on utilisant la théorie ϕ^4 comme un exemple.

Dans le premier chapitre, nous avons trouvé que la théorie des champs définie sur un espace ordinaire, souffre d'un problème de la divergence qu'on trouve dans les diagrammes Feynman. Pour éviter ce problème, nous avons passant à la deuxième chapitre et nous avons proposé une nouvelle espace, c'est l'espace non commutatif dans lequel, nous avons remplacé le produit ordinaire par le produit étoile. Cependant, nous avons trouvé que le problème de la divergence UV dans la théorie définie sur l'espace commutatif, ne trouve pas une solution mais il s'est aggravé et il a devenu un mélange entre la divergence ultraviolet et infrarouge (UV/IR). Et comme une solution pour résoudre ce problème, on utilise l'aidé de W. Moffat, on remplace la matrice antisymétrique θ par la matrice symétrique τ et le $\star$-produit de deux champs par le produit $\diamond$ ou comme nous prenons $\tilde{\star}$-produit.

Dans le troisième chapitre nous allons étendre le formalisme Lagrangien de la théorie des champs sur un espace-temps classique à la théorie des champs sur un espace non commutative avec le $\star$-produit, et nous avons traité de quelques aspects classique de la théorie des champs scalaires non commutative avec $\tilde{\star}$-produit. La première conclusion qu'on peut observé de nos résultats est que les équations d'Euler-Lagrange et les équations mouvements sont similaires à la théorie commutative à la différence que la transformée de Fourier du champs Φ (x) est modifiée par un facteur de phase. On a limité nôtre étude au cas $\tau^{mn} \neq 0$ et $\tau^{00} = \tau^{0n} = 0$ dans le but d'éviter les problèmes d'unitarité et de causalité, ce qui conduit à définir un champ conjugué $\Pi(x)$ identique à celui de la théorie des champs ordinaire.

Dans le quatrième chapitre, on a développé la quantification canonique des champs scalaires sur un espace non commutatif avec $\tilde{\star}$-produit, nous avons traité en détail la quantification canonique de la théorie des champs non commutative avec le $\tilde{\star}$-produit. Il a fallu procéder par analogie avec la théorie ordinaire. La solution générale des équations de mouvement, donnée en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, est modifiée par un facteur de phase. Cette solution nous a permis ensuite de calculer le commutateur entre le champ Φ (x) et son conjugué Π (y) en utilisant le Δ-produit. Notons qu'à la limite $|\tau| \longrightarrow 0$ la relation de commutation canonique habituelle dans la théorie des champs commutatifs est retrouvée. Comme la solution de théorie libre est différente comparée aux théories commutative et non commutative, il est évident qu'il résulte une modification du propagateur de Feynman. En effet dans la théorie non commutative avec le $\tilde{\star}$-produit ce dernier est régularisé. En introduisant ces données, nous avons démontré la finitude des diagrammes par un calcul des vertex propres à deux et quatre points.

Alors, la théorie devient renormalisable.

Bibliographie

[1] Carroll, lecture notes on general relativity, **gr-qc/9712019.**

[2] The principles of Quantum Mechanic, Oxford university press, (1958)).

[3] Jean-Pierre Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechnique et universities romandes (2001).

[4] Brown L. S. Quantum Field Theory Cambridge University Cambridge (1992).

[5] Kaku M. Quantum Field Theory, a Modern Introduction (Oxford University Press, Oxford) (1993).

[6] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., second edition, (1996).

[7]H. S. Snyder, Quantized Space-time. Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[8] A. Connes, non Differential Geometry, Publ. Math. I.H.E.S. 62 257-360 (1985).

[9] A. Connes, non commutative Geometry Year 2000, **math.QA/0011193**.

[10] A. Connes, M. R. Douglas, and A. Schwarz, non commutative Geometry and Matrix Theory : Compactification on Tori, JHEP 02, 003 (1998), hepth/9711162.

[11] M.R.Douglas, N.A.Nekrasov, Non commutative field theory, **hep-th/010604**.

[12] X.Calmet, B.Jurco,P.Schupp, J.Wess and M. Wohlgenannt, the standard model on non-commutative space-time, Eur. Phys.J.C21,23363(2002), **arXiv:hepp h/0111115**.

[13] Frank Hofheinz, Field theory on a non commutative plane: a Non Perturbative Study**, arXiv: hep-th/0403117.**

[14] Richard J. Szabo, Quantum field theory on non commutative space, Phys. Rept. 378 (2003) 207299, **hep-th/0109162**.

[15] Andrei Micu, M. M.Sheikh-Jabbari, non commutative $\phi_4$theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, **hep-th/0008057**.

[16] T. Filk, Divergencies in a field theory on quantum space. Phys. Lett. B376, 53 (1996).

[17] S.Sarkar, on the UV renormalizability of non commutative field theories,JHEP 0206(2002) 003, **hep-th/0202171**.

[18] I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A.S. Koshelev, Two-Loop Diagrams in Non commutative ϕ^4 theory, phys.Lett. B476 (2000) 431-436, **hep-th/9912075**.

[19] N, Seiberg, L, Susskind, N. Toumbas, Space/time non-commutativity and causality, High Energy. Phys. 06 (2000) 044, **hep-th/0005015**.

[20] J. Gomis, T. Mehen, Space-time non commutative field theories and unitarity, Nucl. Phys. B 591. (2000), 265 **hep-th/0005129**.

[21] J. W. Moffat, Noncommutative and Non-Anticommutative Quantum Field Theory, Phys. Lett. B506, (2001) 193-199, **hep-th/0011035**.

[22] J. W. Moffat, Unitarity and Asymptotic Behavior of Amplitudes in NonAnticommutative Quantum Field Theory, **hep-th/0011229**.

[23] Nouicer, Kh; Debbabi, M, Canonical quantization of non-ant commutative scalar field theory, Physics Lettres A, 361 (2007) 305.

[24] Debbabi Mourad, Théorie des champs scalaires non-anticommutative, mémoire de magister, université de jijel (2004).

[25] Ferahtia Souad, Théorie non commutative des champs et renormalisation, mémoire de master, université de m'sila (2012).

الملخص :

في هذه المذكرة تطرقنا إلى التكميم القانوني و صياغة لاغرانج لنظرية الحقول السلمية في الفضاء غير تبديلي باستخدام الجداء $\tilde{\star}$ حيث وجدنا بأن الفرق بينها و بين نظرية الحقول في الفضاء التبديلي هو ظهور معامل الطور $e^{\frac{1}{2}k\tau k}$ ، كذلك مشكل التباعد الفوق بنفسجي و المزيج بين التباعدين الفوق بنفسجي و تحت الأحمر الذي كان مطروحا سابقا لم يعد موجودا.

الكلمات المفتاحية :

نظرية الحقول، الجداء $\star$ ، نظرية الحقول الغير تبديلية، المزيج UV/IR

Abstract :

In this memory we talked about the canonical quantization and Lagrangienne formalism for the scalar fields theory in a non commutative space with the $\tilde{\star}$-product, We found that the difference between her and the fields theory in a commutative space is the apparition of phase factor $e^{\frac{1}{2}k\tau k}$, also the problem of the ultraviolet divergence UV and the mixing UV/IR between the tow divergences ultraviolet and infrared whose be existing before does not exist anymore.

Key Word :

Field theory, non commutative, non commutative field theory, Star product.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons procédé à la quantification canonique et le formalisme Lagrangienne de la théorie des champs sur l'espace non commutatif aves $\tilde{\star}$-produit, Nous avons trouvé que la différence entre notre cas et le cas de la théorie des champs sur l'espace commutatif c'est l'apparition du facteur de phase $e^{\frac{1}{2}k\tau k}$, ainsi le problème de la divergence ultraviolet UV et le mélange UV/IR entre les divergences ultraviolet et infrarouge n'existe pas.

Mots-clés :

Non commutative, produit-étoile, mélange UV/IR, divergence UV.