

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF
M'SILA

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques



Master de Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

*La continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle
sur certains espaces de type Herz avec poids*

Présenté par :

BOUDIAF Malika

Soutenu le 18/06/2023 devant le jury composé de :

TALLAB Abdelhamid,	M.C.A.	Mohamed Boudiaf M'sila,	Président
DJERIOU Aissa,	M.C.A.	Mohamed Boudiaf M'sila,	Encadreur.
SEGHIRI Fakhreddine,	M.C.B.	Mohamed Boudiaf M'sila,	Examineur

Promotion 2022/2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A titre exceptionnel à Allah qui m'a donné la force et la volonté pour
pouvoir
accomplir mon travail.*

*A celui qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation et
qui m'a
encouragé tout au long de mon cursus d'étude avec ses prières et sa
présence
depuis mon enfance à nos jours, à toi mon aimable mère.*

*A celui qui m'indique la bonne voie en me rappelant que la volonté fait
toujours les grandes et grâce à lui, à vous, mon chère père, pour leur
soutien et
leur encouragement .*

A tous mes sœurs et frères, pour leur soutien et assistance.

*A tous mes amis pour leur encouragement, leur aide, et surtout pour
les bons
moments passés ensemble.*

A ceux que j'aime et ceux qui m'aiment .

A nos frères de Palestine.

*Dieu Merci.
Malika.*

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier ALLAH pour m'a donné la santé, la volonté, la patience et la force durant toute mes années d'étude.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à mon encadreur de mémoire

Djeriou Aissa

pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé.

Merci pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Je tenais à remercier tous les membres du jury Tallab Abdelhamid, Seghiri Fakhreddine pour acceptant de présider et examiner ce travail.

À remercier mes camarades et mes amis

Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Notation	3
Introduction	5
1 Préliminaires	7
1.1 Notation sur certains espaces fonctionels	7
1.1.1 Définition et propriétés élémentaires	7
1.1.2 L'espace de Lebesgue localement intégrable	8
1.1.3 L'espace de Lebesgue avec poids	8
1.1.4 L'espace de Lebesgue localement intégrable avec poids	8
1.1.5 Certain inégalités élémentaires	8
1.2 La fonction maximale de Hardy-Littelwood	9
2 Les espaces de type Herz avec poids	10
2.1 Définition et quelque propriétés des espace de Herz	10
2.1.1 Définition les espaces de Herz	10
2.1.2 Quelques propriétés de base	11
2.1.3 Définition les espaces de Herz avec poids	11
2.2 Définition et quelque propriétés des espace de Herz faibles avec poids	13
2.2.1 Définition les espaces de Lebesgue faibles avec poids	13
2.2.2 Définition les espaces de Herz faibles avec poids	16
2.3 Les classes de Muckenhoupt	17
2.3.1 La classe A_p	17
2.3.2 La classe $A_{(p,q)}$	19
2.3.3 La classe A_p^*	20
3 La continuité de l'opérateur maximal à valeur vectorielle	21
3.1 La continuité sur les espaces de Herz et de Herz faibles avec poids	21
3.2 Applications	29
3.2.1 La continuité des opérateurs sous-linéaire	29
Conclusion	33
Bibliographie	34

Notation

$\mathbb{N}$	Est la collection de tous les nombres naturels.
$\mathbb{R}^n$	L'espace Euclidien.
$\mathbb{Z}$	L'ensemble de tout les nombres entiers.
$\ \cdot\ $	La norme.
$L(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires définies de E dans F .
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires et continues définies de E dans F .
$X_1 \hookrightarrow X_2$	Soient X_1 et X_2 deux espaces. s'il existe $c > 0$, telle que $\ f\ _{X_2} \leq c\ f\ _{X_1}, \forall f \in X_1$.
χ_E	Désigne la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ est definit par $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$
$ B $	La mesure de Lebesgue de $B \subseteq \mathbb{R}^n$.
B_k	$B_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 2^k\}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
C_k	$C_k := B_k \setminus B_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
$\{\tilde{\chi}_k\}_{k=0}^\infty$	Nous définissons l'ensemble par $\tilde{\chi}_0 := \chi_{B_0}$ et $\tilde{\chi}_k := \chi_{C_k}$ si $k \geq 1$.
$L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$	Pour tout $\omega \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et un ensemble compact $F \subset \mathbb{R}^n$, on écrit $\omega(F) := \int_F \omega(x)dx$.
$B(x, r)$	La boule de centre x et de rayon r , definit par $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : y - x < r\}$.
ϑ_n	Le volume de la boule unité $\{x \in \mathbb{R}^n : x < 1\}$

Introduction

En mathématiques et plus particulièrement en analyse, la fonction maximale de Hardy-Littlewood est un opérateur qui associe à toute fonction localement intégrable f en tout point x sur $\mathbb{R}^n$ comme étant la borne supérieure des valeurs moyennes de $|f|$ sur les boules centrées en x . La notion de fonction maximale est intervenue pour la première fois dans un article publié en 1930 par Godfrey Harold Hardy et John Edensor Littlewood [10]. La fonction maximale et ses diverses généralisations jouent un rôle important dans diverses branches de l'analyse telles que la théorie de l'approximation, les équations aux dérivées partielles, la théorie des espaces de fonctions, etc.

Depuis les années 1930, plusieurs chercheurs ont étudiés la continuité de la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur des espaces de fonctions, comme les espaces de Lebesgue L^p , BMO , Herz et autres.

Un résultat bien connu de Fefferman et Stein dans [6] indique que si M désigne l'opérateur maximal de Hardy -Littlewood, alors M satisfait les inégalités de type faible et de type fort des normes vectorielles valuées. Dans [1], Andersen et John ont établi une version pondérée du résultat de Fefferman-Stein et ont montré que lorsque M est remplacé par des intégrales singulières les mêmes conclusions sont toujours valables. Ces inégalités se montrent aujourd'hui des outils d'analyse très utiles.

Le but de ce mémoire est de donner la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle sur les espaces de Herz avec poids et les espaces de Herz faibles avec poids, ce sont les résultats démontrés par T.Lin, et Y.Dachun [18].

Ce travail de recherche est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre sont abordés les espaces de Lebesgue où sont données quelques propriétés comme d'inégalités classiques telles que celle de Hölder, Minkowski, et en plus de certaines notations sur la fonction maximale de Hardy-Littlewood sont nécessaires aux chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on donne les définitions des espaces de Herz homogène $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ et non homogène $K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ avec poids, les espace de Herz faibles homogène $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ et non homogène $WK_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ avec poids, quelques propriétés principales de

ces espaces, et en termine par des notions sur les classes de Muckenhoupt.

Dans le troisième chapitre on étudier la continuité de opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle et on termine ce chapitre par des application de cette étude. Le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notation préliminaires fondamentales, nécessaires dans ce mémoire, concernant les espaces fonctionnels et la fonction maximale de Hardy-Littelwood.

1.1 Notation sur certains espaces fonctionels

Nous sommes maintenant en mesure de définir certains espaces fonctionels.

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.1 (L'espace de suites p sommable) Soit $0 < p \leq \infty$. On appelle $\ell^p(\mathbb{Z})$ l'espace de suites $\{f_j\}_{j \geq 0}$ à valeurs réelles ou complexes telles que

$$\|\{f_j\}_{j \geq 0}\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{si } 0 < p < \infty.$$

et

$$\|\{f_j\}_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |f_j| < \infty.$$

Remarque 1.1

1. Ces espaces sont des Banach pour $p \geq 1$.
2. Si $0 \leq p \leq q \leq \infty$, alors on a $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$.

Définition 1.2 Soient $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$.

Remarque 1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.2 L'espace de Lebesgue localement intégrable

Définition 1.3 Soient $0 < p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue localement intégrable est défini par $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ mesurable} : f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ pour tous les sous-ensembles compacts } K \subset \mathbb{R}^n\}$.

1.1.3 L'espace de Lebesgue avec poids

Définition 1.4 On dit que ω est une fonction de poids, si est une fonction localement intégrable non négative sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5 Soient $0 < p \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et ω une fonction de poids, on pose

$$L^p(\Omega, \omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega, \omega)} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^q(\Omega, \omega)} = \|f\|_{q, \omega} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} \omega(x) |f(x)|, & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^q(\mathbb{R}^n, \omega) = L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.3

i) Les espaces $L^q(\Omega, \omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq q \leq \infty$.

ii) Si $\omega = 1$, nous notons simplement $L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ par $L^q(\mathbb{R}^n)$.

1.1.4 L'espace de Lebesgue localement intégrable avec poids

Définition 1.6 Soient $0 < q \leq \infty$. L'espace de Lebesgue localement intégrable est défini par

$$L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \omega) = \{f \text{ mesurable} : f\chi_K \in L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tous les sous-ensembles compacts } K \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Si $\omega = 1$, nous notons simplement $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \omega)$ par $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.5 Certain inégalités élémentaires

Nous rappelons dans cette subsection quelque inégalités classiques, dans les espaces $L^q(\mathbb{R}^n)$ qui sont nécessaires pour la suite de ce mémoire.

Lemme 1.1 Pour $0 < p \leq 1$, nous avons utilisé l'inéquation bien connue suivante

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p.$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f \cdot g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Minkowski) Soient $f, g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $f + g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f + g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Théorème 1.3 (Inégalité de Minkowski généralisée) Soient $0 < \gamma \leq \beta \leq \infty$ et $\{f_j\}_{j=0}^\infty \subset L_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^\gamma dy \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j(x)|^\beta dx \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} dy \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (1.1)$$

1.2 La fonction maximale de Hardy-Littlewood

Nous donnons ici la définition de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, qui joue un rôle très important en analyse harmonique.

Définition 1.7 Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^n$, Mf est dite fonction maximale si :

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy. \quad (1.2)$$

Le résultat d'intégrabilité suivant, également connu sous le nom de théorème maximal, joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines de l'analyse mathématique.

Théorème 1.4 (Hardy-Littlewood-Wiener) Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, alors :

- a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fonction Mf est finie presque-partout.
- b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C = C(n) > 0$ telle que

$$|\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx. \quad (1.3)$$

- c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ et $(Mf) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.4)$$

où C_p dépendent de p .

Preuve. Pour la preuve voir [12, 19, 27]. ■

Chapitre 2

Les espaces de type Herz avec poids

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles dans le cadre générale et de donné quelques propriétés sur certains espaces fonctionnels et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire.

2.1 Définition et quelque propriétés des espace de Herz

L'objet de cette partie est de rappeler quelques définitions et notations essentielles de l'espace de Herz avec poids et de donné quelques propriétés principales.

2.1.1 Définition les espaces de Herz

Nous utilisons la notation suivante pour définir les espaces de Herz.

$B_k := B(0, 2^k)$, $C_k := B_k \setminus B_{k-1}$ et $\chi_k = \chi_{C_k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{C}_k = C_k$, $\tilde{C}_k = B_0$, et $\tilde{\chi}_k = \chi_{C_k}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Nous commençons par définir de l'espace de Herz *homogène* et non *homogène*.

Définition 2.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$.

1. On définit l'espace de Herz homogène par :

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f \chi_k\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. On définit l'espace de Herz non homogène par :

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f \tilde{\chi}_k\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avec les modifications habituelles faites lorsque $p = \infty$ et / ou $q = \infty$.

Proposition 2.1 ([16]) *La relation entre Herz homogène et non homogène est donnée par :*

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$

2.1.2 Quelques propriétés de base

Dans cette sous-section, on va donner certains propriétés des espaces de Herz.

Proposition 2.2 ([16])

1. Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$, alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach.
2. Si $\alpha = 0$ et $0 < p \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^n) = K_p^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^n$, alors on a

$$\dot{K}_p^{\frac{\alpha}{p},p}(\mathbb{R}^n) = K_q^{\frac{\alpha}{q},q}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha).$$

4. Si $p_1 \leq p_2$, alors on a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad K_q^{\alpha,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_q^{\alpha,p_2}(\mathbb{R}^n).$$

5. Si $\alpha_2 \leq \alpha_1$, alors on a

$$K_q^{\alpha_1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_q^{\alpha_2,p}(\mathbb{R}^n)$$

6. Si $q_2 \leq q_1$, alors on a

$$\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{q_2}^{\alpha-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}),p}(\mathbb{R}^n), \quad K_{q_1}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{q_2}^{\alpha-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}),p}(\mathbb{R}^n)$$

7. Si $0 < q_1 \leq q < \infty$, $\frac{-n}{q} < \alpha < n(1 - \frac{1}{q})$ et $0 < p < \infty$, alors on a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_{Loc}^{q_1}(\mathbb{R}^n).$$

2.1.3 Définition les espaces de Herz avec poids

Nous allons maintenant définir l'espace de Herz homogène et non homogène avec poids.

Définition 2.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ et ω_1, ω_2 sont des fonctions de poids non négatives.

1. L'espace de Herz homogène avec poids $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ est défini en termes de

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \|f \chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

avec

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \omega_2) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} < \infty \right\}.$$

2. L'espace de Herz non homogène avec poids $K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ est défini en termes de

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} = \left\{ \|f \chi_{B_0}\|_{L_{\omega_2}^q}^p + \sum_{k=1}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \|f \chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

avec

$$K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n, \omega_2) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} < \infty \right\}.$$

Ici, les modifications habituelles ont été appliquées lorsque $p = \infty$ où $q = \infty$.

Remarque 2.1

- i) Si $\omega_1 = \omega_2 = 1$, nous notons simplement $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ et $K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ respectifs, par $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ et $K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.
- ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. La relation entre Herz homogène et non homogène est donnée par

$$K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2) = \dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2) \cap L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}).$$

et

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} = \|f\|_{L_{\omega_2}^q} + \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Proposition 2.3

- 1. Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$, alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ sont des espaces de Banach.
- 2. Si $\alpha = 0, 0 < q \leq \infty$ et $\omega_1, \omega_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\omega_1, \omega_2 > 0$. Alors

$$\dot{K}_q^{0,q}(\omega_1, \omega_2) = K_q^{0,q}(\omega_1, \omega_2) = L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)$$

- 3. Si $p_1 \leq p_2$, alors on a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(\omega_1, \omega_2) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2}(\omega_1, \omega_2) \quad \text{et} \quad K_q^{\alpha,p_1}(\omega_1, \omega_2) \hookrightarrow K_q^{\alpha,p_2}(\omega_1, \omega_2).$$

- 4. Si $\alpha_2 \leq \alpha_1$, alors on a

$$K_q^{\alpha_1,p}(\omega_1, \omega_2) \hookrightarrow K_q^{\alpha_2,p}(\omega_1, \omega_2).$$

Lemme 2.1 ([15]) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq q$, $\omega_1 \in A_{q_1}$

et $\omega_2 \in A_{q_2}$. Supposons que

$$\omega_1 = \omega_2, q_1 = q_2, \text{ et } -\frac{n}{q} < \alpha < n \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q} \right),$$

$$-\frac{\sigma_2 n}{q_1 q} < \alpha < \frac{n}{q_1} \left(1 - \frac{q_2}{q} \right).$$

Alors l'ensemble de toutes les fonctions infiniment différentiables à support compact est dense dans $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ et dans $K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$

Enfin, nous exposons la dualité des espaces de Herz par Hernandez et Yang [13]. Ils donnent le résultat pour le cas sans poids. Nous obtenons la dualité suivante pour le cas avec poids par le même argument que leur preuve. Soit X^* désigne l'espace dual d'un espace de Banach X .

Lemme 2.2 ([15]) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\omega_1 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\omega_1 > 0$ a.e., et $\omega_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\omega_2 > 0$ a.e. et $\omega_2^{-1/(q-1)} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Il s'ensuit que*

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)^* = \dot{K}_{q'}^{-\alpha,p'}(\omega_1, \omega_2^{-1/(q-1)}).$$

et

$$K_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)^* = K_{q'}^{-\alpha,p'}(\omega_1, \omega_2^{-1/(q-1)}).$$

Ici, p' signifie ∞ si $0 < p \leq 1$.

2.2 Définition et quelque propriétés des espace de Herz faibles avec poids

Nous allons rappeler la définition de l'espace de Herz faibles avec poids. Ils peuvent être considérés comme un complément aux espaces $WL^q(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Définition les espaces de Lebesgue faibles avec poids

Rappelons d'abord la notion d'une fonction de distribution et l'espace de Lebesgue faible.

Fonction de distribution

Définition 2.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ensemble mesurable, tel que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction mesurable. La fonction $m(\lambda, f)$ est dite une fonction de distribution de f , Si $\forall \lambda \in [0, \infty)$, l'égalité suivante est vérifiée*

$$m(\lambda, f) = \text{mes}\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}.$$

Lemme 2.3 *De la définition on peut déduire :*

1. $m(\lambda, f) = m(\lambda, |f|)$.
2. Si $f \sim g$ alors $m(\lambda, f) = m(\lambda, g)$ sur $[0, \infty)$.

3. Si p.p sur Ω $|f| > |g|$ alors : $m(\lambda, f) \geq m(\lambda, g)$, $\forall \lambda \in [0, \infty)$.

Preuve.

1. $m(\lambda, f) = m(\lambda, |f|)$ évidente.

2. Soient $\Omega = (0, \infty)$, $\lambda \in [0, \infty[$ et $g \sim f$,

$$g \sim f \Leftrightarrow (g \neq f \text{ sur } \Omega_1 \subset \Omega \text{ tels que : } mes\{\Omega_1\} = 0)$$

$$\text{et } (g = f \text{ sur } \Omega/\Omega_1 = \Omega_2),$$

$$\text{tel que } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

$$\begin{aligned} m(\lambda, g) &= mes\{x \in \Omega : |g(x)| > \lambda\} \\ &= mes\{x \in \Omega_1 : |g(x)| > \lambda\} + mes\{x \in \Omega_2 : |g(x)| > \lambda\} \\ &= mes\{x \in \Omega_2 : |g(x)| > \lambda\} \\ &= mes\{x \in \Omega_2 : |f(x)| > \lambda\} \\ &= mes\{x \in \Omega_1 : |f(x)| > \lambda\} + mes\{x \in \Omega_2 : |f(x)| > \lambda\} \\ &= mes\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\} \\ &= m(\lambda, f). \end{aligned}$$

Donc

$$m(\lambda, f) = m(\lambda, g).$$

3. On pose

$$\begin{aligned} m(\lambda, f) &= mes\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\} = mes\{\Omega_1\}, \\ m(\lambda, g) &= mes\{x \in \Omega : |g(x)| > \lambda\} = mes\{\Omega_2\}. \end{aligned}$$

Donc

$$|g(x)| > \lambda \implies |f(x)| > \lambda.$$

Alors si

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega_2 \implies x \in \Omega_1\} &\implies \Omega_2 \subset \Omega_1 \\ &\implies mes\{\Omega_2\} \leq mes\{\Omega_1\} \\ &\implies m(\lambda, g) \leq m(\lambda, f). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ensemble mesurable, f est une fonction mesurable sur Ω , alors

1. Si $1 < p < \infty$ on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda, f) d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(- \int_0^\infty \lambda^p dm(\lambda, f) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

2. Si $p = \infty$ on a

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ \lambda : m(\lambda, f) = 0 \}. \quad (2.2)$$

3. Si $p=1$ on a

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \|m(\lambda, f)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (2.3)$$

Preuve.

1. Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda, f) d\lambda &= \int_0^\infty \frac{\lambda^p}{\lambda} m(\lambda, f) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^p}{\lambda} \left(\int_{\{x: |f| > \lambda\}} d\mu \right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^p}{\lambda} \left(\int_\Omega \chi_{\{x: |f| > \lambda\}} d\mu \right) d\lambda, \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\lambda^p}{\lambda} \int_\Omega \chi_{\{x: |f| > \lambda\}} d\mu d\lambda &= \int_\Omega \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\lambda^p}{\lambda} d\lambda \right) d\mu \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p} |f(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_\Omega |f(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p &= \int_0^\infty \lambda^p m(\lambda, f) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \|f\|_{L^p}^p &= p \int_0^\infty \lambda^p m(\lambda, f) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \|f\|_{L^p} &= \left(p \int_0^\infty \lambda^p m(\lambda, f) \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

2. Pour $p = \infty$ on a par définition

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ \lambda \geq 0, \text{mes} \{ x \in \Omega : |f(x)| > \lambda \} = 0 \},$$

et d'après la définition de $m(\lambda, f)$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\lambda : m(\lambda, f) = 0\}.$$

3. On remplace dans (2.1) $p = 1$ on obtient

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^\infty m(\lambda, f) d\lambda = \|m(\lambda, f)\|_{L^1(\Omega)}.$$

■

L'espace de Lebesgue faible

Définition 2.4 Soient $0 < p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω un ensemble mesurable et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $0 < p < \infty$, on dit que $f \in WL^p(\Omega)$ (espace faible) si f est mesurable sur Ω et

$$\|f\|_{WL^p(\Omega)} = \sup_{\lambda \in [0, \infty)} \lambda(m(\lambda, f))^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dans le cas $p = \infty$, on a $WL^\infty = L^\infty$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $WL^p(\mathbb{R}^n) = WL^p$.

Remarque 2.2 Il est facile de vérifier que pour $0 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq WL^p(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.4 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha > 0$, $E_\alpha = \{x : |g(x)| > \alpha\}$ et g intégrable, alors

$$m(\alpha) \leq \frac{A}{\alpha}$$

tels que $(A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy)$ et $m(\alpha)$ désigne la mesure de E_α , appelée distribution de fonction g).

Preuve.

$$\begin{aligned} A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy &\geq \int_{E_\alpha} |g(y)| dy \geq \int_{E_\alpha} \alpha dy \\ &\geq \alpha \int_{E_\alpha} dy = \alpha m(\alpha). \end{aligned}$$

■

2.2.2 Définition les espaces de Herz faibles avec poids

Nous utilisons la notation suivante pour définir les espaces de Herz faibles avec poids. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et toute fonction mesurable $f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ soit

$$m_\omega^k(\lambda, f) = \omega(\{x \in C_k : |f(x)| > \lambda\}),$$

pour $k \in \mathbb{R}$, soit

$$\tilde{m}_\omega^k(\lambda, f) = m_\omega^k(\lambda, f)$$

et

$$\tilde{m}_\omega^0(\lambda, f) = \omega(\{x \in B_0 : |f(x)| > \lambda\}).$$

Définition 2.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$ et $0 < p \leq \infty$.

1- On dit d'une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ qu'elle appartient à l'espace Herz homogène faibles avec poids $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$, si

$$\|f\|_{W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\{ m_{\omega_2}^k(\lambda, f)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

où la modification habituelle est faite lorsque $p = \infty$.

2- Une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ est dit appartenir à l'espace Herz non-homogène faibles avec poids $WK_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$, si

$$\|f\|_{WK_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\{ \tilde{m}_{\omega_2}^k(\lambda, f)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

où la modification habituelle est faite lorsque $p = \infty$.

Remarque 2.3 Les espaces de Herz faibles sont étudiés par Hu, Lu et Yang dans [14] lorsque $\omega_1, \omega_2 = 1$.

1. Il est clair que pour tout $q \in (0, \infty)$, on a

$$W\dot{K}_q^{0,q}(\omega_1, \omega_2) = WK_q^{0,q}(\omega_1, \omega_2) = WL_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)$$

L'habituel espace de Lebesgue faible avec poids.

2. Si $\omega_1 = \omega_2 = 1$, nous notons simplement $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ et $WK_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$ respectifs, par $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ et $WK_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Les classes de Muckenhoupt

Pour plus de détails concernant la classe de Muckenhoupt, nous nous référons à [7, 23, 28]. Pour $\omega \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et un ensemble compact $F \subset \mathbb{R}^n$, on écrit $\omega(F) = \int_F \omega(x) dx$.

2.3.1 La classe A_p

Définition 2.6

1. Soit $1 < p < \infty$, et $\omega \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\omega > 0$ et $\omega^{-1/(p-1)} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. La classe de poids A_p est constituée de tous les ω satisfaisant

$$A_p(\omega) = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \omega(B) \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq \infty,$$

et chaque $\omega \in A_p$ est un A_p poids.

2. Soit $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\omega > 0$. La classe de poids A_1 est constituée de tous les ω satisfaisant

$$A_1(\omega) = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \omega(B) \right) \|\omega(x)^{-1}\|_{L^\infty} \leq \infty,$$

et chaque $\omega \in A_1$ est un A_1 poids.

Exemple 2.1 ([9]) La fonction $\omega(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$ est en A_p si et seulement si $-n < \alpha < n(p-1)$

Preuve. Une mesure positive $d\mu$ est dite doublée si pour tout $C < \infty$

$$\mu(2B) \leq C\mu(B). \quad (2.4)$$

Pour $1 < p < \infty$, on examine pour quel α l'expression suivante est finie :

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^\alpha dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^{-\alpha \frac{p'}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p'}} \quad (2.5)$$

pour toute boule B . Nous démontrons que les mesures $|x|^\alpha dx$ doublent lorsque $\alpha > -n$. Nous divisons toutes les boules $B(x_0, R)$ dans $\mathbb{R}^n$ en deux catégories : boules de type I qui satisfont $|x_0| \geq 3R$ et de type II qui satisfont $|x_0| < 3R$. Pour les boules de type I, on observe que

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, 2R)} |x|^\alpha dx &\leq \vartheta_n (2R)^n \begin{cases} (|x_0| + 2R)^\alpha & \text{si } \alpha \geq 0, \\ (|x_0| - 2R)^\alpha & \text{si } \alpha < 0, \end{cases} \\ \int_{B(x_0, R)} |x|^\alpha dx &\geq \vartheta_n R^n \begin{cases} (|x_0| - R)^\alpha & \text{si } \alpha \geq 0, \\ (|x_0| + R)^\alpha & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Depuis $|x_0| \geq 3R$, nous avons $|x_0| + 2R \leq 4(|x_0| - R)$ et $|x_0| - 2R \geq \frac{1}{4}(|x_0| + R)$ à partir de dont (2.4) avec $C = 2^{3n} 4^{|\alpha|}$.

Pour les boules de type II, on a $|x_0| \leq 3R$ et nous notons deux choses : premièrement

$$\int_{B(x_0, 2R)} |x|^\alpha dx \leq \int_{|x| \leq 5R} |x|^\alpha dx = C_n R^{n+\alpha},$$

et deuxièmement, puisque $|x|^\alpha$ est décroissante radialement pour $\alpha < 0$ et croissant radialement pour $\alpha \geq 0$, nous avons

$$\int_{B(x_0, R)} |x|^\alpha dx \geq \begin{cases} \int_{B(0, R)} |x|^\alpha dx & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \int_{B(3R \frac{x_0}{|x_0|}, R)} |x|^\alpha dx & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pour $x \in B(3R \frac{x_0}{|x_0|}, R)$ nous devons $|x| \geq 2R$, et donc les deux intégrales à droite sont au moins un multiple de $R^{n+\alpha}$. Ceci établit (2.5) pour les boules de type II.

Si $B = B(x_0, R)$ est de type I, alors pour x satisfaisant $|x - x_0| \leq R$, nous devons avoir

$$\frac{2}{3}|x_0| \leq |x_0| - R \leq |x| \leq |x_0| + R \leq \frac{4}{3}|x_0|,$$

ainsi, l'expression à l'intérieur de la somme supérieure dans (2.5) est comparable à

$$|x_0| (|x_0|^{-\alpha \frac{p'}{p}})^{\frac{p}{p'}} = 1.$$

Si $B(x_0, R)$ est une boule de type II, alors $B(0, 5R)$ a une taille comparable à celle de $B(x_0, R)$ et le contient. Puisque la mesure $|x| dx$ est doublée, les intégrales de la fonction ω sur $B(x_0, R)$ et sur $B(0, 5R)$ sont comparables. Il suffit donc d'estimer l'expression à l'intérieur du supremum dans (2.5), dans laquelle nous avons remplacé $B(x_0, R)$ par $B(0, 5R)$. Mais c'est

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\vartheta_n(5R)^n} \int_{B(0, 5R)} |x|^\alpha dx \right) \left(\frac{1}{\vartheta_n(5R)^n} \int_{B(0, 5R)} |x|^{-\alpha \frac{p'}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p'}} \\ &= \left(\frac{n}{(5R)^n} \int_0^{5R} r^{\alpha+n-1} dr \right) \left(\frac{n}{(5R)^n} \int_0^{5R} r^{-\alpha \frac{p'}{p} + n-1} dr \right)^{\frac{p}{p'}}, \end{aligned}$$

dont on voit facilement qu'elle est finie et indépendante de R exactement lorsque $-n < \alpha < n \frac{p}{p'}$. Nous concluons que ω est un poids A_p , $1 < p < \infty$, si et seulement si $-n < \alpha < n(p-1)$.

La preuve précédente peut être modifiée de manière appropriée pour inclure le cas $p = 1$. Dans ce cas on obtient que ω est un poids A_1 si et seulement si $-n < \alpha \leq 0$. Comme on l'a vu, la mesure ω est en double sur la gamme la plus large $-n < \alpha < \infty$. Ainsi pour $\alpha > n(p-1)$, la fonction ω fournit un exemple d'une mesure de doublement qui n'est pas dans A_p ■

2.3.2 La classe $A_{(p,q)}$

Maintenant, rappelons la définition de la classe de fonctions avec poids $A_{(p,q)}$.

Définition 2.7 ([16]) Une fonction non négative et localement intégrable ω sur $\mathbb{R}^n$ est dite appartenir à $A_{(p,q)}$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ si

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B [\omega(x)]^q dx \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|B|} \int_B [\omega(x)]^{-p'} dx \right)^{1/p'} \leq C_0$$

est valable pour toute boule B avec une certaine constante positive C_0 . La plus petite constante C satisfaisant l'inégalité ci-dessus sera appelée $A_{(p,q)}$ -constante de ω .

2.3.3 La classe A_p^*

Définition 2.8 $A_p^*(1 < p < \infty)$. Une paire de fonctions (u, v) est dit appartenir à $A_p^*(1 < p < \infty)$ si

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C.$$

Proposition 2.4 Les propriétés élémentaires de $A_p(1 < p < \infty)$

1. $A_{p_1} \subset A_{p_2}$, si $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$.
2. $\omega \in A_p$, si et seulement si $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$.
3. $\omega \in A_p$, si et seulement si $\omega^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$.
4. Si $\omega \in A_p$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ telle que $p - \varepsilon > 1$ et $\omega \in A_{p-\varepsilon}$.
5. Si $\omega(x) \in A_p$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ telle que $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_p$.
6. Si $\omega(x) \in A_p$, alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $\omega(x)^\varepsilon \in A_p$.
7. Si $\omega(x) \in A_p$, alors il y a $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ telle que, pour tout $Q \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \leq C \left(\int_Q \omega(x) dx \right)^{1+\varepsilon}.$$

Proposition 2.5 Les propriétés élémentaires de $A_p^*(1 < p < \infty)$

1. $A_{p_1}^* \subset A_{p_2}^*$, si $1 < p_1 < p_2 < \infty$.
2. $(u, v) \in A_p^*$, si et seulement si $(v^{1-p'}, u^{1-p'}) \in A_{p'}^*$.
3. $S_p^* \subset A_p^*$, pour $1 < p < \infty$.
4. Si $(u, v) \in A_p^*$, alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in S_p^*$.
5. Si $(u, v) \in A_p^*$ et $u(x), v(x) \in A_p$, alors $(u, v) \in S_p^*$ et $(v^{1-p'}, u^{1-p'}) \in S_p^*$.
6. Si $(u, v) \in A_p^*$ et $u(x), v(x) \in A_p$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ telle que $(u^{1+\varepsilon}, v^{1+\varepsilon}) \in A_p^*$ et $(v^{(1-p')(1+\varepsilon)}, u^{(1-p')(1+\varepsilon)}) \in A_p^*$.
7. Si $(u, v) \in A_p^*$ et $u(x), v(x) \in A_p$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ telle que $p - \varepsilon > 1$ et $(u, v) \in A_{p-\varepsilon}^*$.

En utilisant les propriétés élémentaires des poids A_p dans [6], on peut facilement voir les relation entre A_p et $A_{(p,q)}$, A_p^* et $A_{(p,q)}^*$

Proposition 2.6 Supposons que $0 < \alpha < n, 1 < p < n/\alpha, 1/q = 1/p - \alpha/n$, les conclusions suivantes s'imposent :

$$\omega \in A_{(p,q)} \Leftrightarrow \omega^q \in A_{q(n-\alpha)/n} \Leftrightarrow \omega^{-p'} \in A_{1+p'/q} \quad (2.6)$$

$$(u, v) \in A_{(p,q)}^* \Leftrightarrow (u^q, v^q) \in A_{q(n-\alpha)/n}^* \Leftrightarrow (v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_{1+p'/q}^* \quad (2.7)$$

Preuve. Les équations (2.6) et (2.7) se déduisent des définitions de A_p et $A_{(p,q)}$, A_p^* et $A_{(p,q)}^*$, respectivement. ■

Chapitre 3

La continuité de l'opérateur maximal à valeur vectorielle

Dans le chapitre suivante, nous donnons la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle sur les espaces de Herz avec poids et les espaces de Herz faibles avec poids, ce sont les résultats démontrés par T.Lin, et Y.Dachun [18].

Nous commençons par la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeurs vectorielles sur les espaces de type Herz avec poids, qui est une révision avec poids des inégalités maximales à valeurs vectorielles de Fefferman-Stein dans [6] dans l'ensemble des espaces de Lebesgue avec poids et sera utilisé dans la preuve de nos autres théorèmes.

3.1 La continuité sur les espaces de Herz et de Herz faibles avec poids

Énonçons d'abord la version avec poids suivante des inégalités maximales vectorielles de Fefferman-Stein dans [1].

Théorème 3.1 ([1]) *Soit $1 < r < \infty$. Si $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une série de fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$,*

$$M(f) = \{M(f_k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{et} \quad |f(x)|_r = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

alors

i) Pour $1 < q < \infty$ et $\omega \in A_q$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M(f)(x)|_r^q \omega(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_r^q \omega(x) dx.$$

ii) Pour $1 \leq q < \infty$ et $\omega \in A_q$, on a

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : |M(f)(x)|_r > a\}) \leq Ca^{-q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_r^q \omega(x) dx.$$

Où $a > 0$ est un nombre positif quelconque et $C > 0$ indépendant de f et de a .

Pour la continuité de l'opérateur maximal à valeur vectoriel M sur les espaces de Herz avec poids et Herz faible avec poids, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2 ([18]) Soit f, f_k, r et M les mêmes que dans le théorème 3.1. Si $\omega \in A_1, \omega_1 \in A_{m_1}, \omega_2 \in A_{m_2}, 1 \leq m_1 < \infty, 1 \leq m_2 \leq q$, et $-\sigma_2 n / (\sigma_1 q) < \alpha < n(1 - m_2/q)/m_1$, où $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ ne dépendent que de A_{m_1} — constante de ω_1 , A_{m_2} — constante de ω_2 , respectivement, alors

i) Pour $1 < q < \infty$ et $0 < p \leq \infty$ on a

$$\| |M(f)|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)},$$

ii) Pour $1 \leq q < \infty$ et $0 < p \leq 1$ on a

$$\| |M(f)|_r \|_{W\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega_1, \omega_2)} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{p}),q}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Avant de prouver le théorème, nous besoin de lemme suivante.

Lemme 3.1 ([8], P. 401) Si F est une boule ou un cube et E est tout sous-ensemble mesurable de F , $\omega_1 \in A_{m_1}$ et $\omega_2 \in A_{m_2}$, alors il existe $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$ ne dépendent que de A_{m_1} — constante de ω_1 , A_{m_2} — constante de ω_2 , respectivement, telle que

$$\frac{\omega_1(E)}{\omega_1(F)} \leq C \left(\frac{|E|}{|F|} \right)^{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2(E)}{\omega_2(F)} \leq C \left(\frac{|E|}{|F|} \right)^{\sigma_2}. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1 Ces σ_1 et σ_2 sont juste les σ_1 et σ_2 apparaissant dans le théorème 3.2. Évidemment, si $\omega_1 = \omega_2$, alors $\sigma_1 = \sigma_2$ et la valeur de α dans le théorème devient $-n/q < \alpha < n(1 - 1/q)$, qui est le meilleur possible ; voir [17]. La conclusion (ii) du théorème 3.2 est également le meilleure possible lorsque $r = 1$ et $\omega = 1$; voir [14].

Remarque 3.2 Le théorème 3.2 est toujours vrai si nous remplaçons les espaces homogènes avec poids de type Herz par des espaces non homogènes avec poids de type Herz. La preuve étant similaire, nous omettons les détails.

Preuve du théorème 3.2. Montrons d'abord (i). Nous ne montrons que le cas $0 < p < \infty$. Le cas $p = \infty$ est facile et nous omettons les détails. Soit $|f|_r \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)$. On écrit

$$f_j(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_j(x) \chi_i(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_j^i(x), \quad |f^i(x)|_r = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^i(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Alors, par l'inégalité de Minkowski, nous avons

$$\begin{aligned}
 \| |M(f)|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{j=1}^{\infty} (M(f_j))^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} M(f_j^i) \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &+ C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{i=k-1}^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &+ C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{i=k+2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= E_1 + E_2 + E_3,
 \end{aligned}$$

où et dans ce qui suit, on note $[M(f)]^r$ simplement par $M^r(f)$.

Pour E_2 , d'après (i) du théorème 3.1, on a

$$\begin{aligned}
 E_2 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{i=k-1}^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (M(f_j^i))^r \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right\|_{L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \left[\sum_{j=1}^{\infty} (f_j^k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega_2}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.
 \end{aligned}$$

Pour E_1 , en utilisant $i \leq k-2, x \in C_k, 1 < r < \infty$, et l'inégalité de Minkowski généralisée (1.1), on a

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i)(x) \right]^{\frac{1}{r}} &\leq C \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^i(y)| dy \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C 2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^i(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy. \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, par $\alpha < n(1 - m_2/q)/m_1$, on a

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} [\omega_2(B_k)]^{\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^i(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dx \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \times \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} [\omega_2(B_k)]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \left(\int_{B_i} \omega_2(x)^{-\frac{q'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \times \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} [\omega_2(B_k)]^{\frac{1}{q}} |B_i|^{\frac{1}{q'}} \left[\frac{|B_i|}{\omega_2(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} 2^{(i-k)n} \left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_i)} \right]^{\frac{\alpha}{n}} \left[\frac{\omega_2(B_k)}{\omega_2(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Pour $1 < p < \infty$. Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha p}{n}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]p} \right]^{\frac{p}{p'}} \right\}^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq C \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=i+2}^{\infty} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha p}{n}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right] \right\}^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq C \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)}. \end{aligned}$$

Si $0 < p \leq 1$. Par le lemme 1.1, on trouve

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]p} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha p}{n}} \| |f_i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=i+2}^{\infty} 2^{(i-k)[n-\alpha m_1-m_2 n/q]p} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha p}{n}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.
 \end{aligned}$$

Pour E_3 , de la même façon que E_1 , pour $i \geq k+2$ et $x \in C_k$ par $1 < r < \infty$ et (1.1), on a

$$\begin{aligned}
 \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i)(x) \right]^{\frac{1}{r}} &\leq C \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-in} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^i(y)| dy \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq C 2^{-in} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^i(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy.
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, en utilisant (3.1) et $\alpha\sigma_1 + \sigma_2 n/q > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 E_3 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left[\sum_{i=k+2}^{\infty} 2^{-in} [\omega_2(B_k)]^{\frac{1}{q}} |B_i|^{\frac{1}{q'}} \left[\frac{|B_i|}{\omega_2(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=k+2}^{\infty} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} \left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_i)} \right]^{\frac{\alpha}{n}} \left[\frac{\omega_2(B_k)}{\omega_2(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=k+2}^{\infty} [\omega_1(B_i)]^{\frac{\alpha}{n}} 2^{(k-i)(n\sigma_1+\sigma_2 n/q)} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq C \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{i\alpha p} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)},
 \end{aligned}$$

où nous avons omis des techniques de calcul similaires à celles utilisées pour E_1 . Ainsi (i) est prouvé.

Passons maintenant au proe (ii). Pour $f \in \dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega, \omega)$, on écrit

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j) \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{WK_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega, \omega)} \\
 & \leq C \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \times \omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j)(x) \right]^{\frac{1}{r}} > \lambda \right\} \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq C \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \times \omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & + C \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \times \omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & + C \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \times \omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r \left(\sum_{i=k+2}^{\infty} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & = F_1 + F_2 + F_3.
 \end{aligned}$$

Pour F_2 , puisque M est de type faible avec poids (p, q) et $0 < p \leq 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
 F_2 & \leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \left\| \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} |f_j^i| \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^k| \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega, \omega)}.
 \end{aligned}$$

Pour F_1 , en utilisant $i \leq k-2$, $x \in C_k$, et l'inégalité de Minkowski généralisée (1.1), on a

$$\begin{aligned}
 \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} &\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} M(f_j^i)(x) \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \sum_{i=-\infty}^{k-2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i)(x) \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq C \sum_{i=-\infty}^{k-2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^i(y)| dy \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq C \sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} |f^i(y)|_r dy \\
 &\leq C \sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \left(\int_{B_i} |f^i(y)|_r^q \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_i} \omega(y)^{-\frac{q'}{q}} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \\
 &\leq C \sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} |B_i|^{\frac{1}{q'}} \left[\frac{|B_i|}{\omega(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega}^q} \\
 &\leq C \omega(B_k)^{-1} \sum_{i=-\infty}^{k-2} 2^{(i-k)n} [\omega(B_i)]^{1-\frac{1}{q}} \frac{\omega(B_k)}{\omega(B_i)} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega}^q} \\
 &\leq C \omega(B_k)^{-1} \sum_{i=-\infty}^{k-2} [\omega(B_i)]^{1-\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega}^q} \\
 &\leq C \omega(B_k)^{-1} \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)},
 \end{aligned}$$

où et dans la suite, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Pour F_3 , en utilisant $i \geq k+2$, $x \in C_k$, et l'inégalité de Minkowski généralisée (1.1), on a

$$\begin{aligned}
 \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r \left(\sum_{i=k+2}^{\infty} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} &\leq C \sum_{i=k+2}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j^i)(x) \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq C \sum_{i=k+2}^{\infty} 2^{-in} \int_{\mathbb{R}^n} |f^i(y)|_r dy \\
 &\leq C \sum_{i=k+2}^{\infty} 2^{-in} \left(\int_{B_i} |f^i(y)|_r^q \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_i} \omega(y)^{-\frac{q'}{q}} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \\
 &\leq C \sum_{i=k+2}^{\infty} 2^{-in} |B_i|^{\frac{1}{q'}} \left[\frac{|B_i|}{\omega(B_i)} \right]^{\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega}^q} \\
 &\leq C \omega(B_k)^{-1} \sum_{i=k+2}^{\infty} [\omega(B_i)]^{1-\frac{1}{q}} \| |f^i|_r \|_{L_{\omega}^q} \\
 &\leq C \omega(B_k)^{-1} \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)},
 \end{aligned}$$

de $0 < p \leq 1$. Ainsi pour tout $\lambda > 0$, si

$$\omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[M^r \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \right) \neq 0,$$

ou bien

$$\omega \left(\left\{ x \in C_k : \left[M^r \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} f_j^i \right) (x) \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{3} \right\} \right) \neq 0,$$

alors

$$\frac{\lambda}{3} \leq C [\omega(B_k)]^{-1} \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)}.$$

Depuis $\omega \in A_1$, par (1.2), on peut trouver un nombre entier maximum k_λ telle que

$$\omega(B_{k_\lambda}) \leq C \lambda^{-1} \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)}.$$

De ce, pour $v = 1, 3$, on déduit

$$\begin{aligned} F_v &\leq C \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_\lambda} [\omega(B_k)]^{(1-\frac{1}{q})p} [\omega(B_k)]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \sup_{\lambda > 0} \lambda \omega(B_{k_\lambda}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_\lambda} 2^{(k-k_\lambda)n\sigma p} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \sup_{\lambda > 0} \lambda \omega(B_{k_\lambda}) \\ &\leq C \sup_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \frac{3C}{\lambda} \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)} \right\} \\ &= C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)}, \end{aligned}$$

où $\sigma > 0$ ne dépend que de A_1 – constant de ω : voir ([8], p.401).

Ceci termine la preuve du théorème 3.2. ■

Remarque 3.3 Nous remarquons que lorsque $r = \infty$, le théorème 3.2 est également vrai. En effet, soit $\bar{M}_\infty$

$f(x) = \sup_j |Mf_j(x)|$; alors $\bar{M}_\infty f \leq M(|f|_\infty)$. A partir de là, il est facile d'obtenir les résultats souhaités.

Remarque 3.4 Dans le théorème 3.2

1. Si $\alpha = 0, p = q$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$, on trouve le théorème 1.4.
2. Si $\alpha = 0, p = q$ et $\omega_1 = \omega_2$, on trouve le théorème 3.1.

3.2 Applications

Maintenant, donnons des application du théorème 3.2.

3.2.1 La continuité des opérateurs sous-linéaire

Théorème 3.3 *Soit $f, f_k, r, p, q, \alpha, \omega, \omega_1$ et ω_2 soit le même que celui du théorème 3.2. Supposons que un opérateur sous-linéaire T satisfait les conditions suivantes*

$$|Tf(x)| \leq C|x|^{-n}\|f\|_{L^1}, \quad (3.2)$$

lorsque $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \geq 2^{k+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et que

$$|Tf(x)| \leq C2^{-kn}\|f\|_{L^1}, \quad (3.3)$$

lorsque $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \leq 2^{k-2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si nous remplaçons M dans le Lemme 3.1 par l'opérateur T . et (i) et (ii) de Lemme 3.1 est toujours valable, alors

(i) Pour $1 < q < \infty$ et $0 < p \leq \infty$, on a

$$\| |Tf|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)}.$$

(ii) Pour $1 \leq q < \infty$ et $0 < p \leq 1$, on a

$$\| |Tf|_r \|_{W\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega, \omega)} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega, \omega)}.$$

Preuve. Nous montrons d'abord (i). Ecrire f comme dans la preuve du théorème 3.2 et définir

$$\begin{aligned} \| |Tf|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{j=1}^{\infty} (Tf_j)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| T^j \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} f_j^i \right) \right|^r \right]^{\frac{1}{r}} \right\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &+ C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (Tf_j^i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right) \right\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &+ C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left\| \chi_k \left(\sum_{i=k+2}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (Tf_j^i)^r \right]^{\frac{1}{r}} \right) \right\|_{L_{\omega_2}^q}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= G_1 + G_2 + G_3. \end{aligned}$$

L'estimation de G_2 est facile en utilisant les hypothèses du théorème. Nous omettons les détails. Pour G_1 , par (3.2), nous avons d'abord que pour $x \in C_k$

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| T \left(\sum_{i=-\infty}^{k-2} f_i \right) (x) \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} &\leq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| |x|^{-n} \int_{|x-y| \leq 3|x|/2} \sum_{i=-\infty}^{k-2} f_j^i(y) dy \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} M^r(f_j)(x) \right\}^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, par le théorème 3.2, nous obtenons

$$G_1 \leq C \| |M(f)|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1, \omega_2)},$$

c'est ce que nous voulions.

Pour G_3 , noter que si $x \in C_k, y \in C_j$; et $j \geq k+2$, alors $2|x| \leq |y|$. A partir de là, (3.3) et l'inégalité (1.1), il s'ensuit que pour $x \in C_k$,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |T f_j^i(x)|^r \right]^{\frac{1}{r}} &\leq C \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-in} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^i(y)| dy \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C 2^{-in} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^i(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy. \end{aligned}$$

A partir de là, par une estimation similaire à E_3 , nous pouvons déduire une estimation désirable pour G_3 . Ceci termine la preuve de (i).

La preuve de (ii) est similaire à celle du théorème 3.2 (ii), nous omettons les détails. Ceci termine la preuve du théorème 3.3. ■

Nous avons un théorème similaire pour les espaces non homogènes et nous omettons les détails.

Théorème 3.4 *Soit $f, f_k, r, p, q, \alpha, \omega, \omega_1$ et ω_2 sont les mêmes que dans le théorème 3.3. Supposons qu'un opérateur sous-linéaire T satisfasse les conditions suivantes*

$$|Tf(x)| \leq C|x|^{-n} \|f\|_{L^1}; \quad (3.4)$$

quand $\text{supp } f \subset B_0$ et $|x| > 2$ ou $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \geq 2^{k+1}$ avec $k \in \mathbb{N}$, et que

$$|Tf(x)| \leq C 2^{-kn} \|f\|_{L^1}; \quad (3.5)$$

quand $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \leq 2^{k-2}$ avec $k \geq 2$. Si nous remplaçons M dans le théorème 3.1 par l'opérateur T , et (i) et (ii) du théorème 3.1 sont toujours valables, alors

(i) Pour $1 < q < \infty$ et $0 < p \leq \infty$, on a

$$\| |Tf|_r \|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} \leq C \| |f|_r \|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}$$

(ii) Pour $1 \leq q < \infty$ et $0 < p \leq 1$, on a

$$\| |Tf|_r \|_{WK_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)} \leq C \| |f|_r \|_{K_q^{n(1-\frac{1}{q}),p}(\omega,\omega)}.$$

Nous avons le corollaire simple suivant qui est pratique pour les applications.

Corollaire 3.1 Soit $\alpha, p, q, r, \omega, \omega_1$ et ω_2 sont les mêmes que dans le théorème 3.3.

Si un opérateur sous-linéaire T satisfait que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact et $x \notin \text{supp } f$,

$$|Tf(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy$$

et T satisfait (i), (ii) du Lemme 3.1, alors T satisfait aussi (i), (ii) du théorème 3.3 et (i),(ii) du théorème 3.4.

C'est évident, soit T^* est un opérateur intégral singulier maximal dans ([1],p.26). Alors, par les théorèmes 5.1 et 5.2 dans [1], T^* satisfait (i) et (ii) du lemme 3.1; par conséquent, (i) et (ii) des théorèmes 3.3 et 3.4 sont également valables pour T^* . D'autres applications peuvent être données en combinant le théorème 3 de [29] avec certains résultats connus nous omettons les détails.

Grâce à ce fait et à une procédure similaire à celle du théorème 3.2 avec des calculs plus compliqués, nous pouvons prouver les versions fractionnaires suivantes des théorèmes 3.3 et 3.4. Nous omettons les détails pour des raisons de simplicité.

Théorème 3.5 Soit $0 < l < n$. Supposons qu'un opérateur sous-linéaire $T_l f$ satisfasse à la condition suivante

$$|T_l f(x)| \leq C |x|^{-(n-l)} \|f\|_{L^1}, \quad (3.6)$$

quand $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \geq 2^{k+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et que

$$|T_l f(x)| \leq C 2^{-k(n-l)} \|f\|_{L^1}, \quad (3.7)$$

quand $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \leq 2^{k-2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 < n/l$, $1/q_2 = 1/q_1 - l/n$,
 $-n/q_1 + l < \alpha < n(1 - 1/q_1)$, $1 \leq r \leq \infty$, $\omega^{q_2} \in A_1$, $\omega_1 \in A_{m_1}$, $\omega_2^{q_2} \in A_{m_2}$,
 $1 \leq m_1 < \infty$, $1 \leq m_2 \leq q_2(n-l)/n$ et $-\sigma_2 n/(\sigma_1 q_2) < \alpha < (n-l - nm_2/q_2)/m_1$,

où σ_1 et σ_2 ne dépendent que de Am_1 — constante de ω_1 et Am_2 — constante de $\omega_2^{q_2}$, respectivement. Si l'opérateur $|T_l f|_r$ est continué de $L_{\omega_2^{q_1}}^q(\mathbb{R}^n)$ dans $L_{\omega_2^{q_2}}^q(\mathbb{R}^n)$, où $1 < q_1 < n/l$, et $L_{\omega_2^{q_1}}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $WL_{\omega_2^{q_2}}^{n/(n-l)}(\mathbb{R}^n)$, alors

(i) Pour $1 < q_1 < n/l$ et $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, on a

$$\| |T_l f|_r \|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha, p_2}(\omega_1, \omega_2^{q_2})} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha, p_1}(\omega_1, \omega_2^{q_1})}$$

(i) Pour $1 \leq q_1 < n/l$ et $0 < p_1 \leq 1$, on a

$$\| |T_l f|_r \|_{\dot{K}_{q_2}^{n(1-\frac{1}{q_1}), p_2}(\omega^{q_2}, \omega^{q_2})} \leq C \| |f|_r \|_{\dot{K}_{q_1}^{n(1-\frac{1}{q_1}), p_1}(\omega^{q_2}, \omega^{q_1})}$$

Théorème 3.6 Soit $p_1, p_2, q_1, q_2, l, r, \alpha, \omega, \omega_1$, et ω_2 sont les mêmes que dans le théorème 3.5. Supposons qu'un opérateur sous-linéaire T_l satisfasse les conditions suivantes

$$|T_l f(x)| \leq C |x|^{-(n-l)} \|f\|_{L^1}, \quad (3.8)$$

quand $\text{supp } f \subset B_0$ et $|x| > 2$ ou $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \geq 2^{k+1}$, avec $k \in \mathbb{N}$, et que

$$|T_l f(x)| \leq C 2^{-k(n-l)} \|f\|_{L^1}, \quad (3.9)$$

quand $\text{supp } f \subset C_k$ et $|x| \leq 2^{k-2}$ avec $k \geq 2$, Si l'opérateur $|T_l f|_r$ est continué de $L_{\omega_2^{q_1}}^q(\mathbb{R}^n)$ dans $L_{\omega_2^{q_2}}^q(\mathbb{R}^n)$, où $1 < q_1 < n/l$ et $L_{\omega_2^{q_1}}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $WL_{\omega_2^{q_2}}^{n/(n-l)}(\mathbb{R}^n)$, alors

(i) Pour $1 < q_1 < n/l$ et $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, on a

$$\| |T_l f|_r \|_{K_{q_2}^{\alpha, p_2}(\omega^{q_2}, \omega^{q_2})} \leq C \| |f|_r \|_{K_{q_1}^{\alpha, p_1}(\omega^{q_2}, \omega^{q_1})}$$

(ii) Pour $1 \leq q_1 < n/l$ et $0 < p_1 \leq 1$, on a

$$\| |T_l f|_r \|_{WK_{q_2}^{n(1-\frac{1}{q_1}), p_2}(\omega^{q_2}, \omega^{q_2})} \leq C \| |f|_r \|_{K_{q_1}^{n(1-\frac{1}{q_1}), p_1}(\omega^{q_2}, \omega^{q_1})}$$

Remarque 3.5 Soit $0 < l < n$. Si $T_l f$ satisfait

$$|T_l f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-l}} dy, \quad (3.10)$$

pour toute fonction intégrable f à support compact et $x \notin \text{supp } f$, alors $T_l f$ satisfait évidemment (3.8) et (3.9). en particulier, si T_l est l'intégrale fractionnaire standard I_l ou l'opérateur maximal fractionnaire suivant M_l défini par

$$M_l f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-l}} \int_{B(x,y)} |f(y)| dy,$$

alors T_l satisfait évidemment à (3.10) et donc à (3.8) et (3.9). De plus, par (1.1), nous avons

que pour $1 \leq r \leq \infty$,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_l f_j(x)|^r \right\}^{\frac{1}{r}} + \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |M_l f_j(x)|^r \right\}^{1/r} \leq C I_l \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}}(x).$$

Par ce biais et en combinant les résultats de [23], on peut obtenir les conclusions suivantes ; voir également [26].

Lemme 3.2 Soit $0 < l < n$ et r , f et $|f|_r$ sont les mêmes que dans le théorème 3.1.

Si $1 \leq q_1 < n/l$, $1/q_2 = 1/q_1 - l/n$, $M_l f = \{M_l(f_j)\}_{j=1}^{\infty}$, et $I, F \{I_l(f_j)\}_{j=1}^{\infty}$, alors

(i) Pour $1 < l < n/l$ et $\omega \in A_{(q_1, q_2)}$, on a

$$\| |M_l f|_r \|_{L_{\omega}^{q_2}} + \| |I_l f|_r \|_{L_{\omega}^{q_2}} \leq C \| |f|_r \|_{L_{\omega}^{q_1}}$$

(ii) Pour $1 \leq q_1 < n/l$ et $\omega \in A_{(q_1, q_2)}$, on a

$$[\omega^{q_2}(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_l f(x)|_r > \lambda\})]^{\frac{1}{q_2}} + [\omega^{q_2}(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_l f(x)|_r > \lambda\})]^{\frac{1}{q_2}} \leq C \lambda^{-1} \| |f|_r \|_{L_{\omega}^{q_1}}.$$

Ainsi, les conclusions des théorèmes 3.5 et 3.6 sont vraies pour M_l et I_l . Nous omettons les détails.

Conclusion

Nous avons atteint les dernières lettres de ce mémoire, et ce fut un bon voyage dans le monde de l'analyse mathématique et en particulier dans l'analyse fonctionnelle.

Au cours ce modeste travail, nous avons rencontré de nouveaux concepts, des idées intéressantes et des résultats importants, tels que la fonction maximale de Hardy-Littlewood, les espaces de Herz, les espaces de Herz avec poids, les espaces de Lebesgue faibles avec poids, l'espace de Marcinkiewicz, la classe A_p de Muckenhoupt, les espaces de Herz faibles avec poids, ...etc.

Dans ce mémoire nous avons étudié la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle sur les espaces de Herz et de Herz faibles avec poids de plus les applications sublinéaire et sous-linéaire.

Comme il est bien connu qu'aucun effort humain ne peut être parfait, sans défauts et sans lacunes, le lecteur de ce mémoire trouvera des fautes et des erreurs involontaires.

Bibliographie

- [1] K. F. Andersen, and R. T. John, Weighted Inequalities for Vector-Valued Maximal Functions and Singular Integrals, *Studia. Math.* , T. LXIX (1980), 19-31.
- [2] A. Baernstein II and E.T. Sawyer, Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$, *Mem. Amer. Math. Soc.* 1985, 53(318).
- [3] N. M. Chuong, P. G. Ciarlet, P. Lax, D. Mumford and D.H. Phong, D.H. (eds.), *Advances in Deterministic and Stochastic Analysis*. World Scientific 2007.
- [4] A. Djeriou, R. Heraiz, Some results concerning localization property of generalized Herz, Herz-type Besov spaces and Herz-type Triebel-Lizorkin spaces. *Carpathian Mathematical Publications*, 2021, 13(1) :217-228.
- [5] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [6] C. Fefferman, E. M. Stein, Some Maximal Inequalities. , *Amer. J. of Math.* , 93(1971), 107-115.
- [7] J. Garcia-Cuerva, and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [8] J. Garcia-Cuerva , and J. L. Rubio de Franeia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math Studiu 116, North-Holland, Amsterdam. , 1985.
- [9] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*. Vol. 2. New York Springer, 2008.
- [10] G. H. Hardy et J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Mathematica*, vol. 54, 1930, p.81-116.
- [11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, London, UK, 1934.
- [12] G.H. Hardy, J.E. Littlewood , G. Pólya, *Inequalities*, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (1967).
- [13] E. Hernandez and D. Yang, Interpolation of Herz spaces and applications, *Math. Nachr.* 205 (1999), 69-87.
- [14] G. Hu, S. Lu, and D. Yang, The applications of Weak Herz Spaces. , *Adv. in Math. (Chiha)*, 26(1997) ,417-428.
- [15] M. Izuki and K. Tachizawa, Wavelet characterizations of weighted Herz *spaces** , *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics* 825 (2007), 1-13

- [16] A. Kufner and L.E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific, Singapore, 2003.
- [17] X. Li, and D. Yang, Boundedness of Some Sublinear Operators on Herz Spaces. , *Illinois j. Math.*, 40(1996), 485- 501.
- [18] T. Lin, and Y. Dachun, Boundedness of vector-valued operators on weighted Herz spaces, *Approximation Theory and Its Applications* 16.2 (2000) : 58-70.
- [19] S. Lu, Y. Ding, D. Yan, *Singular Integrals and Related Topics*. Beijing Normal University. China, December, 2006.
- [20] S. Lu and L. Xu, Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces, *Hokkaido Mathematic*.
- [21] S. Lu, and D. Yang, The Decomposition of Weighted Herz Space on $\mathbb{R}^n$ and its Applications. *Sci. in China (Ser A)*. , 38(1995), 147-158.
- [22] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 165 (1972), 207-226.
- [23] B. Muckenhoupt, and R. L. Wheeden, Weighted Norm Inequalities for Fractional Integrals. , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192(1974), 261-274.
- [24] E. Nakai, N. Tomita and K. Yabuta, Density of the set of all infinitely differentiable functions with compact support in weighted Sobolev spaces, *Sci. Math. Jpn.* 60 (2004), 121-127.
- [25] J. Peetre, On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces. *J. Funct. Anal.*, (1969), 4(1) : 71–87.
- [26] J. L. Rubio de Francia, Weighted Norm Inequalities and Vector Valued Inequalities. In : *Lecture Notes in Math*, No. 908, Sprlnger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1982, 86-101.
- [27] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
- [28] E. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1993, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1993
- [29] D. K. Watson , Vector-Valued Inequalities, Factorization, and Extrapolation for a Family of Rough Operators., *J. Funct Anal.*, 121(1994), 389-415.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la continuité des opérateurs maximal de Hardy-Littlewood à valeur vectorielle sur certains espaces de type Herz avec poids, comme les espaces de Herz avec poids et les espaces de Herz faibles avec poids.

Mots clés : L'opérateur maximal de Hardy-Littlewood, Espaces de Herz, Espace de Herz faible.

Abstract

The principal objective of this memory is to study the continuity of maximal vector-valued Hardy-Littlewood operators on certain Herz spaces with weights, such as weighted Herz spaces Herz spaces with weights and weak Herz spaces with weights.

Key words : The maximal Hardy-Littlewood operator, Herz spaces, Weak Herz space.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة استمرارية القيمة القصوى للمتجهات مشغلي هاردي ليتلوود في فضاءات معينة من هيرز بأوزان ، مثل فضاءات هيرز ذات أوزان و فضاءات هيرز الضعيفة ذات أوزان .

كلمات مفتاحية : مؤثر الأقصى هاردي ليتلوود ، فضاءات هيرز ، فضاء هيرز ضعيفة.