

Table des matières

0.1	Remerciements	2
0.2	Notation générale	3
0.3	Résumé	4
0.4	Introduction	5
1	Préliminaire	6
1.1	Espaces de fonctions continues et intégrables	6
1.2	Bidual d'un espace normé et espace de Banach réflexif	7
1.3	Application transposées ou adjoints	10
1.4	Espace de Hilbert	12
1.5	Topologies faible et *-faible	13
1.6	Les opérateurs (p,q) -sommants	14
2	L'espace des suites Cohen fortement p-sommables	21
2.1	Définitions et propriétés	21
2.2	Dualité	24
3	L'idéal $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ des opérateurs linéaires fortement (p, q)-sommants	30
3.1	Définitions et propriétés élémentaires	30
3.2	Relation entre $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(X, Y)$	40
3.3	Théorèmes de domination et de factorisation de Pietsch	42
3.4	Quelques propriétés pour les espaces de Hilbert	46

0.1 Remerciements

Je ne peux commencer et finir ce travail sans remercier ALLAH.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire ACHOUR Dahman qui par ses conseils et ses critiques a guidé mes réflexions et a accepté de me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je suis très sincèrement reconnaissant envers les membres du jury Monsieur DAHIA Elhadj et Monsieur MEZRAG Lahcène, d'avoir accepté de juger ce mémoire.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères mes sœurs pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement tous mes amis Pour leur sincère amitié et confiance.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Enfin, à tout ceux que je n'ai pas pu citer et qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail, j'adresse mes remerciements les plus vifs.

0.2 Notation générale

p^*	L'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
B_X	Boule unité fermée de l'espace X .
\mathbb{K}	Corps des scalaires réels ou complexes.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .
$\sigma(X^*, X)$	Topologie faible- $*$ définie sur X^* .
$L(\Omega, \Sigma, \mu)$	Espace des classes d'équivalences des fcts mesurables sur Ω .
$C(K)$	Espace des fcts continues sur un compact K à valeurs réelles.
$l_p(X)$	Espace des suites $(x_i)_{i=1}^{+\infty} \in X$ absolument p -sommables.
$\Pi_p(X, Y)$	Espace des opérateurs p -sommants de X dans Y .
$\Pi_{p,q}(X, Y)$	Espace des opérateurs (p, q) -sommants de X dans Y .
$\mathcal{D}_p(X, Y)$	Espace des opérateurs fortement p -sommants de X dans Y .
$\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$	Espace des opérateurs fortement (p, q) -sommants de X dans Y .
$(r_n)_{n \geq 1}$	Suite de fonctions de Rademacher $r_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

0.3 Résumé

Titre : Opérateurs fortement (p, q) -sommants

Ce mémoire, qui concerne la classe des opérateurs fortement (p, q) -sommant, est divisée en trois parties. Dans la première partie, nous introduisons quelques notions et outils que nous aurons déjà à utiliser. Dans la deuxième partie, nous étudions $\ell_p \langle X \rangle$ l'espace des suites Cohen fortement p -sommable. Dans la troisième partie, nous introduisons l'idéal des opérateurs linéaires fortement $(p; q)$ -sommants. Parmi les résultats de cette recherche nous présentons la relation entre ces opérateurs et les opérateurs $(p; q)$ -sommants et plus précisément, si $p = q$, nous présentons le théorème de Pietsch (Domination/Factorisation). Nous prouvons en particulier des théorèmes pour les opérateurs fortement p -sommants aux espaces de Hilbert.

Mots clés : Espace de Banach, Espaces de suite cohen fortement p -sommable, Factorisation des opérateurs, Opérateurs (p, q) -sommants, Opérateurs fortement (p, q) -sommants, Théorème de Pietsch.

0.4 Introduction

Les travaux de ce mémoire se situent dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et sont dédiés au développement de quelques théorèmes de sommabilité des opérateurs linéaires.

L'idéal \mathcal{D}_p des opérateurs fortement p -sommants ($1 < p \leq \infty$) est défini par Cohen [8] pour caractériser le dual d'un opérateur p -sommant. Cet idéal a été étendu au cas des opérateurs linéaires fortement (p, q) -sommants par Apiola [2] et généralisée par Achour-Mezrag en 2007 dans [1] pour les opérateurs multinéaires. Dans ce mémoire nous étudions la notion des opérateurs fortement $(p; q)$ -sommants. Nous donnons les relations entre ces opérateurs et les opérateurs $(p; q)$ -sommants. Pour $p = q$ nous prouvons les types du théorème de Pietsch (les deux, Théorèmes de domination et de factorisation).

Ce travail est divisé en trois chapitres qui sont les suivants :

Dans le chapitre 1, on rappelle diverses conventions et définitions, et des résultats classiques qui seront utilisés par la suite.

Le chapitre 2. Il a pour le but de définir et de donner des premiers résultats sur $\ell_p \langle X \rangle$ " l'ensemble des suites Cohen fortement p -sommables, où X un espace de Banach". Parmi les résultats étudiés, la relation avec les espaces de suites sommable et faiblement p -sommables. En terminant ce chapitre par le problème de dualité.

On introduit dans le chapitre 3, la notion des opérateurs fortement (p, q) -sommants. Nous donnons la définition et signalons les propriétés d'idéal possédées par les espaces des opérateurs fortement (p, q) -sommants. On cherche à étudier, la relation entre ces opérateurs et les opérateurs absolument (p, q) -sommants. Si $p = q$, nous prouvons le théorème de domination de Pietsch. Nous montrons ensuite, grâce au théorème de factorisation de Pietsch des opérateurs p -sommants, le théorème de factorisation pour les opérateurs fortement p -sommants. La dernière partie du chapitre 3 est consacrée aux applications des résultats précédents aux espaces de Hilbert.

Chapitre 1

Préliminaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire, dans le cadre générale des espaces de Banach, les notions et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire. Pour plus de détails voir [10]. Nous présentons le concept des opérateurs (p, q) -sommant avec quelques propriétés.

1.1 Espaces de fonctions continues et intégrables

Les espaces des suites

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Rappelons que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p$ converge. Alors $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, on a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites de scalaires $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement ℓ_∞ . On notera $c_0(\mathbb{N})$ ou tout simplement c_0 le sous-espace fermée de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro.

L'espaces des fonctions continues

Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans \mathbb{K} muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$$

L'espaces des fonctions intégrables

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ -mesurable. Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{ a > 0; \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-a, a])) = 0 \} \quad \text{si } p = +\infty$$

avec $|f(t)| \leq a$ μ presque par tout.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ -mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$.

1.2 Bidual d'un espace normé et espace de Banach réflexif

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|\cdot\|_X$ ou simplement $\|\cdot\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X . On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y .

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes ($X \sim Y$) s'il existe un opérateur inversible I (dit isomorphisme) de X dans Y . Un opérateur linéaire continu

$T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques ($X \simeq Y$) si il existe une isométrie entre X et Y .

Définition 1.2.1 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Le dual topologique de l'espace de Banach X^* s'appelle le **bidual topologique** de X et se note X^{**} .

Proposition 1.2.2 [10] Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors on a :

1. pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{aligned} J(x) : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est linéaire continue. Ainsi, on a $J(x) \in X^{**}$.

2. L'application

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) \end{aligned}$$

est linéaire et isométrie, appelé **l'application canonique** de X dans son bidual X^{**} .

Ainsi, on identifie X à un sous-espace normé de son bidual X^{**} .

Démonstration. 1. Il est claire que $J(x)$ est linéaire. Pour tout $f \in X^*$, on a $|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$. Donc l'application $J(x)$ est continue et on a $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

2. Pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $f \in X^*$, on a

$$J(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = J(x)(f) + \lambda J(y)(f) = (J(x) + \lambda J(y))(f).$$

D'où on a $J(x + \lambda y) = J(x) + \lambda J(y)$. Ainsi, J est une application linéaire. Soit $x \in X$ tel que $x \neq 0$, par le théorème de Hahn-Banach (théorème de prolongement), il

existe $f \in X^*$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Alors on a $\|x\| = |f(x)| = |J(x)(f)| \leq \|J(x)\| \|f\| = \|J(x)\| \leq \|x\|$, d'où on a $\|J(x)\| = \|x\|$.

Donc J est une isométrie. ■

Corollary 1.2.3 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors pour tout $x \in X$, on a :

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| < 1} |f(x)| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{f \in X^*, \|f\| = 1} |f(x)| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

De plus, la borne supérieure est atteinte dans l'égalité $\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| = 1} |f(x)|$.

Remarque 1.2.4 (*Une autre construction du complété d'un espace normé.*)

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et X^{**} son bidual topologique. On vient de voir que l'application canonique $J : X \longrightarrow X^{**}$ est linéaire et isométrique. Ainsi, on identifie l'espace normé $(X, \|\cdot\|)$ à son image $J(X)$ qui est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach X^{**} . Posons $\widehat{X} = \overline{J(X)}$ l'adhérence de $J(X)$ dans X^{**} , alors \widehat{X} est un espace de Banach et $(X, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel dense dans \widehat{X} . On obtient ainsi une construction du complété d'un espace normé X .

Remarque 1.2.5 L'application canonique $J : X \longrightarrow X^{**}$ n'est pas toujours surjective.

En effet, si $X = c_0$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $X^* = \ell_1, X^{**} = \ell_\infty$ et l'application canonique $J : X \longrightarrow X^{**}$ correspond à l'injection canonique $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$. Donc J n'est pas surjective.

Définition 1.2.6 Un espace de Banach E est dit réflexif si l'application

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) \end{aligned}$$

est bijective.

Notons que si X est un espace normé et si l'application canonique $J : X \longrightarrow X^{**}$ est bijective, alors nécessairement X est un espace de Banach, car X^{**} est un espace de Banach et J est une application linéaire bijective et isométrique.

Exemple 1.2.7 1. Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.

2. Pour tout $p \in]1, \infty[$, ℓ_p est réflexif.

Proposition 1.2.8 [10] Soit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach réflexif. Alors pour tout $f \in X^*$, il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = |f(x)|$.

Démonstration. Soit $f \in X^*$. On peut supposé $f \neq 0$. On appliquant le le théorème de Hahn-Banach (théorème de prolongement) à f et à X^* , on obtient un élément $\xi \in X^{**}$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\xi(f) = \|f\|$. Comme X réflexif, alors il existe $x \in X$ tel que $\xi = J(x)$. D'où on a $\|x\| = 1$ et $\|f\| = f(x) = |f(x)|$. ■

La réciproque de la proposition précédente est aussi vraie. Autrement dit, si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach tel que pour tout $f \in X^*$ il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = |f(x)|$, alors $(X, \|\cdot\|)$ est réflexif.

Remarque 1.2.9 Puisque le dual topologique de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ et le dual topologique de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ est $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, on déduit par la proposition précédente que les espaces c_0, ℓ_1 et ℓ_∞ ne sont pas réflexifs.

1.3 Application transposées ou adjoints

Définition 1.3.1 Soient X, Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. L'application

$$\begin{aligned} Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

est appelée la **transposé** ou **l'adjoint** de T et on la note tT ou T^* .

pour mieux retenir la définition ci-dessus, il suffit de mémoriser le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ T & \mathbb{K} \end{array}$$

Exemple 1.3.2 Soient X un espace normé, E un sous-espace vectoriel de X et $i : E \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Alors $i^* : X^* \longrightarrow E^*$ est l'application de restriction. Autrement dit, pour tout $f \in X^*$, on a $i^*(f) = f|_E$.

Remarque 1.3.3 Soient X un espace normé et $J : X \longrightarrow X^{**}$ l'application canonique.

Alors l'application transposée $J^* : X^{***} \longrightarrow X^*$ est surjective. En effet, notons d'abord que pour tout $\phi \in X^{***}$, on a $J^*(\phi) = \phi \circ J$. Soit $x^* \in X^*$, alors $x^* \circ J^{-1} : J(X) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur $J(X)$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\phi \in X^{***}$ qui prolonge $x^* \circ J^{-1}$. D'où on a $J^*(\phi) = \phi \circ J = x^*$.

Notation 1.3.4 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$, on note :

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x).$$

L'application

$$\begin{aligned} X \times X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, x^*) &\longmapsto \langle x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

est clairement bilinéaire et continue car on a $|\langle x, x^* \rangle| \leq \|x^*\| \|x\|$.

Soient X, Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors pour tout $x \in X$ et tout $y^* \in Y^*$, on a :

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle.$$

Remarque 1.3.5 Soient $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|')$ deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Soit G un sous-espace vectoriel de Y tel que $T(X) \subset G$. Soit $S \in \mathcal{L}(X, G)$ tel que pour tout $x \in X$, on ait $S(x) = T(x)$. Alors on a $\text{Im}(S^*) = \text{Im}(T^*)$. En effet, Soient $f \in G^*$ et $\tilde{f} \in Y^*$ tels que $\tilde{f}|_G = f$. Pour tout $x \in X$, on a $S^*(f)(x) = f \circ S(x) = \tilde{f} \circ T(x) = T^*(\tilde{f})(x)$. Donc on a $S^*(f) = T^*(\tilde{f})$, d'où $\text{Im}(S^*) = \text{Im}(T^*)$.

Proposition 1.3.6 Soient X, Y et G trois espaces normés.

1. Pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on a $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.

2. L'application suivante est linéaire.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*) \\ T &\longmapsto T^*. \end{aligned}$$

3. Pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et tout $S \in \mathcal{L}(Y, G)$, on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Remarque 1.3.7 Soient E, F deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $x \in X$, on a $T^{**}(J_X(x)) = J_Y(T(x))$.

1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.4.1 Soit X un espace vectoriel. Un produit scalaire sur X est une forme Hermitienne définie positive sur E . Autrement dit, un produit scalaire sur E est une application :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

vérifiant, pour tout $x, x', y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes :

1. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ et $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Le nombre $\langle x, y \rangle$ est appelé le produit scalaire des x et y .

Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$ est un espace normé pour la norme définie par $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et, naturellement, un tel espace est

toujours considéré comme un espace métrique pour la distance correspondante $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Définition 1.4.2 1. Un espace **préhilbertien** est un couple $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où X est un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur X .

2. Un espace de **Hirbert** ou espace **hilbertien** est un espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 1.4.3 ℓ_2 est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_2$ défini par : pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\|x\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$2|x_n \overline{y_n}| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2, \text{ donc la série de terme général } x_n \overline{y_n} \text{ est convergente dans } \mathbb{K}.$$

On pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ_2 et pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$, on $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Donc $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilber

1.5 Topologies faible et *-faible

On se contentera ici d'un bref exposé sur les topologies faibles, et l'on renvoie à [4] pour un exposé beaucoup plus détaillé sur le sujet.

Sur l'espace de Banach X est définie, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ noté aussi ω qui est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les formes linéaires sur X .

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de X , et $x \in X$. On dit que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers x et on écrit $x = \omega\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ si

$$\langle x^*, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle, \forall x^* \in X^*.$$

Il est clair que les ouverts (respectivement les fermés) pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ sont des ouverts (respectivement des fermés) pour la topologie forte.

Sur l'espace X^* outre la topologie de la norme $\|\cdot\|_{X^*}$ et la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, est définie la topologie $*$ -faible (préfaible) $\sigma(X^*, X)$ notée aussi ω^* qui est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_x : X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x^* &\longmapsto \varphi_x(x^*) = \langle x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Soit $(x_n^*)_{n \geq 1}$ une suite de X^* , $x^* \in X^*$. On dit que $(x_n^*)_{n \geq 1}$ converge préfaiblement vers x^* dans X^* et on écrit $x^* = \omega^* \text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*$ si

$$\langle x^*, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki.

La boule unités B_{X^*} est compacte pour la topologie $*$ -faible.

Théorème de Goldstine.

La boule unités B_X de X est $\sigma(X^{**}, X^*)$ -dense dans la boule unité $B_{X^{**}}$ de X^{**} .

1.6 Les opérateurs (p, q) -sommants

Terminons ce chapitre par la notion des opérateurs (p, q) -sommants voir [9]. Une présentation générale des "idéaux d'opérateurs " est donnée par Pietsch [14]

Soient $n \in \mathbb{N}$, X un espace de Banach. Pour $p \in [1, \infty]$, on appelle exposant conjugué de p le nombre $p^* \in [1, \infty]$ tel que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$. Cette relation est symétrique; on dit que $(p; p^*)$ est un couple d'exposants conjugués. On notera que si $1 < p < \infty$, cela implique que $p^*(p - 1) = p$ et de façon symétrique, $p(p^* - 1) = p^*$; on pourra aussi noter que $(p - 1)(p^* - 1) = 1$.

Définition 1.6.1 *Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $\ell_p(X)$ (resp $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites*

absolument p -sommables d'éléments de X dont la norme est :

$$\|(x_n)_n\|_p = \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{resp. } \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}),$$

pour $p = +\infty$, on note $\ell_\infty(X)$ (resp $\ell_\infty^n(X)$) l'espace des suites $(x_n)_n \subset X$ bornées, normées par :

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} = \sup_n \|x_n\|.$$

Théorème 1.6.2 1- $[\ell_p(X)]$ est un espace de Banach.

2- $[9]$ Pour $1 \leq p < +\infty$, on a : $\ell_p(X)^* = \ell_{p^*}(X^*)$ isométriquement.

Définition 1.6.3 Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $\ell_{p,\omega}(X)$ (resp $\ell_{p,\omega}^n(X)$) l'espace des suites $(x_n)_n \subset X$ faiblement p -sommables, c'est à dire des suites $(x_n)_n \subset X$ vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \varphi, x_n \rangle|^p < \infty$ pour tout $\varphi \in X^*$ muni de la norme

$$\|(x_n)_n\|_{p,\omega} = \|(x_n)_n\|_{\ell_{p,\omega}(X)} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \varphi, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\text{resp. } \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{p,\omega} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}).$$

Si $p = +\infty$

$$\ell_{\infty,\omega}(X) = \left\{ (x_n)_n \subset X / \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle \varphi, x_n \rangle| < +\infty, \varphi \in X^* \right\},$$

on muni $\ell_{\infty,\omega}(X)$ par la norme :

$$\|(x_n)_n\|_{\infty,\omega} = \|(x_n)_n\|_{\ell_{\infty,\omega}(X)} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle \varphi, x_n \rangle|.$$

Nous considérons les relations de la dualité entre les espaces des suites.

Proposition 1.6.4 1- Si $1 \leq p < \infty$, on a

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : (x_n^*)_{n=1}^\infty \in X^*, \| (x_n^*)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (1.1)$$

particulièrement, pour $X = \mathbb{K}$, on a $\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}$

2- $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right\| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}$

3- Pour $p = \infty$, on a $\ell_{\infty,\omega}(X) = \ell_\infty(X)$ isométriquement.

4- Soit $1 \leq p < +\infty$, alors, $\ell_p(X) \subset \ell_{p,\omega}(X)$ et $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} \leq \| (x_n)_n \|_p$ pour tout $(x_n)_n \in \ell_p(X)$.

Proposition 1.6.5 [9]

1- $\ell_{p,\omega}(X) = \ell_p(X)$ pour $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est fini.

2- Si $1 < p \leq +\infty$, on a $\ell_{p,\omega}(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ isométriquement.

3- Si $p = 1$ on a $\ell_{p,\omega}(X) = \mathcal{L}(c_0, X)$ isométriquement.

Définition 1.6.6 (Opérateur linéaire de rang fini)

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini s'il est somme fini d'opérateurs de la forme :

$$\begin{aligned} x^* \otimes y : X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow x^* \otimes y(x) = x^*(x) y \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$

L'espace des opérateurs linéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Définition 1.6.7 (Idéal linéaire)

Un idéal d'opérateur linéaire \mathcal{I} est un classe d'opérateurs tels que : pour tout espaces de Banach X et Y , on a :

1) $\mathcal{I}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$.

2) $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Y)$

3) Propriétés d'idéal : si $T \in \mathcal{I}(X, Y)$, $u \in \mathcal{L}(E, X)$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$, on a :

$$v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(E, F)$$

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait:

i) $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (Banach)

$$\text{ii) } \left\| \begin{array}{l} A : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \rightarrow A(\lambda) = \lambda \end{array} \right\|_{\mathcal{I}} = 1$$

$$\text{iii) } \|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|,$$

alors, $(\mathcal{I}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal (de Banach) des opérateurs linéaires.

Définition 1.6.8 Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on dit que T est p -sommant pour $(1 \leq p < +\infty)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, on a

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w}. \quad (1.2)$$

On note

$$\pi_p(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ linéaires } p\text{-sommants}\}$$

et $\pi_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant (1.2)}\}$.

Définition 1.6.9 Soient $1 \leq q \leq p \leq \infty$ et X, Y deux espaces de Banach, un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est absolument (p, q) -sommant (ou (p, q) -sommant) si :

$\forall (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$ l'opérateur :

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_{q,w}(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_i)_{i=1}^{\infty} &\longmapsto \tilde{T}((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (T(x_i))_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

est bien défini. (i.e., $\tilde{T}(\ell_{q,w}(X)) \subset \ell_p(Y)$).

La classe des opérateurs linéaires (p, q) -sommants de X dans Y , noté $\pi_{p,q}(X, Y)$. Pour $p = q$, on a $\pi_{p,q}(X, Y) = \pi_p(X, Y)$.

D'après le théorème du graphe fermé, on peut définir l'espace des suites linéaires (p, q) –sommants comme suit :

$$\pi_{p,q}(X, Y) = \left\{ T \in \mathcal{L}(X, Y) / \exists c > 0 : \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\}$$

Exemple 1.6.10 Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p < \infty$.

(i) Pour tout $\varphi \in L_p(\mu)$, l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \cdot \varphi \end{aligned}$$

est p –sommant avec $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

(ii) L'opérateur canonique

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est p –sommant avec $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 1.6.11 1- Soit X_0 un sous espace d'un espace de Banach X et $T \in \pi_p(X, Y)$.

Alors

$$T/X_0 \in \pi_p(X_0, Y) \text{ et } \pi_p(T/X_0) \leq \pi_p(T)$$

2- (Injectivité). Si $i : Y_0 \longrightarrow Y$ est une isométrie, alors

$$T \in \pi_p(X, Y_0) \iff i \circ T \in \pi_p(X, Y)$$

Dans ce cas, on a $\pi_p(T) = \pi_p(i \circ T)$.

Théorème 1.6.12 1- [9](Théorème de Dvoretzky-Rogers,1950). Si $p \geq 1$, alors

$$id_X \in \pi_p(X, Y) \text{ si et seulement si } \dim X < \infty.$$

2- [6](Théorème de Grothendieek). Tout opérateur linéaire continu $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ est 1-sommant.

3- [12](Théorème de domination de Pietsch,1967). Soient $1 \leq p < \infty, T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, T est p -sommant si et seulement s'il existe une mesure μ sur $(B_{X^*}, \sigma(X, X^*))$ et $C > 0$ telle que :

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in X. \quad (1.3)$$

Dans ce cas $\pi_p(T) \leq C$.

L'inégalité (1.3) de Pietsch implique qu'il existe \tilde{T} dans $\mathcal{L} \left(\overline{j_p i(X)}^{L_p(\mu, K)}, Y \right)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ i(X) & \xrightarrow{\tilde{J}_p} & \overline{j_p(i(X))}^{L_p(\mu, K)} \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mu, K) \end{array}$$

avec $T = \tilde{T} \circ \tilde{J}_p \circ i$ et $\|\tilde{T}\| = \pi_p(T)$.

Où $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X)), C(K) = \{\text{des fonctions continues sur } K\}, i : X \longrightarrow i(X), i(x) = \varphi_x$ qui est une isométrie injective, $i(X) = \{\varphi_x, x \in X \text{ avec } \varphi_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle\}$ qui est un sous espace fermé de $C(K), J_p : C(K) \longrightarrow L_p(K, \mu)$ est l'injection naturelle, et $\pi_p(J_p) = 1$ (\tilde{J}_p est J_p restreint à $i(X)$).

Théorème 1.6.13 (Théorème d'inclusion). Soit $T \in q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$ et $\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$, alors

$$\pi_{p_1, q_1}(X, Y) \subset \pi_{p_2, q_2}(X, Y) \text{ et } \pi_{p_2, q_2}(T) \leq \pi_{p_1, q_1}(T).$$

Proposition 1.6.14 *Si H est un espace de Hilbert, alors*

$$\pi_2(H, Y) = \pi_1(H, Y).$$

Chapitre 2

L'espace des suites Cohen fortement p -sommables

Nous allons étudier dans ce chapitre l'espace des suites fortement p -sommables qui a été introduit par Cohen en 1973.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 [8] Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ et $1 < p \leq \infty$. La suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est Cohen fortement p -sommables si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_{p^*, \omega}(X^*)$. On note $\ell_p \langle X \rangle$ l'espace des suites Cohen fortement p -sommables.

Lemme 2.1.2 Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_{p^*, \omega}(X^*)$ si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)|$ est convergente aussi pour tout $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_{p^*, \omega}(X^*)$.

Démonstration. Pour le cas réel, on prend

$$z_n^* = \begin{cases} x_n^* & \text{si } x_n^*(x_n) \geq 0 \\ -x_n^* & \text{si } x_n^*(x_n) < 0 \end{cases}$$

et pour le cas complexe, on prend

$$z_n^* = x_n^* \exp(-i\theta_n), \text{ où } \theta_n = \arg(x_n^*(x_n)).$$

Dans les deux cas, $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n^*(x_n)$ est convergente d'après l'hypothèse.

Et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n^*(x_n)$$

est convergente. L'inverse est clair. ■

Théorème 2.1.3 $\ell_p \langle X \rangle$ est un espace normé pour la norme $\|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\langle p \rangle}$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p \langle X \rangle$, on a

$$\|(x_n)_{n \geq 1}\|_{\langle p \rangle} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : \|(x_n^*)_{n \geq 1}\|_{p^*, \omega} \leq 1 \right\}.$$

Démonstration.

Soit $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_p \langle X \rangle$, il suffit de montrer que $\| \cdot \|_{\langle p \rangle}$ est fini.

soit $f \in [\ell_{p^*, \omega}(X^*)]^*$ une forme lineaire définit par :

$$f((x_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$$

On définit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des formes lineaire dans $\ell_{p^*, \omega}(X^*)$ par :

$$f_n((x_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i).$$

Il est facile de prouver que toutes les f_n sont continues, et par définition de f_n et f , on a f_n converge vers f pour tout les points de $\ell_{p^*, \omega}(X^*)$, et comme $\ell_{p^*, \omega}(X^*)$ est complet; on applique le théorème de Banach Steinhaus, on obtient : f est continue et

$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle} = \sup_{\|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*, \omega} \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| = \|f\| < \infty$, alors, $\| \cdot \|_{\langle p \rangle}$ satisfait les conditions de la norme. ■

Proposition 2.1.4 1) Soit $1 < p \leq +\infty$, on a

$\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p (X) \subset \ell_{p,\omega} (X)$ et

$$\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p,\omega} \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_p \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle p \rangle}$$

pour tout $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p (X)$.

2) Si $p = 1$, on a

$$\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1 (X) \text{ et } \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_1 = \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle 1 \rangle}$$

3) Si $p = \infty$, on a

$$\ell_{\infty} \langle X \rangle = \ell_{\infty} (X).$$

Démonstration.

1) On a : $\ell_p (X) \subset \ell_{p,\omega} (X)$ et $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} \leq \| (x_n)_n \|_p$.

D'autre part, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$, d'après (1.1) et comme $B_{\ell_{p^*} (X^*)} \subset B_{\ell_{p^*,\omega} (X^*)}$ on a

$$\begin{aligned} \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \| x_n \|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*} (X^*)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &\leq \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega} (X^*)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle p \rangle} \end{aligned}$$

alors, $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p (X)$ et $\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_p \leq \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle p \rangle}$

2) Pour $p = 1, p^* = \infty$, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \langle X \rangle$, d'après (1.1) on a :

$$\begin{aligned} \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| = \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty} (X^*)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty,\omega} (X^*)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \blacksquare \\ &= \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle 1 \rangle} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.5 $\ell_p \langle X \rangle$ est un espace de Banach.

Démonstration. D'après le Théorème 2.1.3 $\| \cdot \|_{\langle p \rangle}$ est une norme. Donc, il suffit de montrer que $\ell_p \langle X \rangle$ est complet.

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $\ell_p \langle X \rangle$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \| x_n - x_m \|_{\langle p \rangle} < \varepsilon$$

d'après la Proposition 2.1.4 on a

$$\| x_n - x_m \|_p \leq \| x_n - x_m \|_{\langle p \rangle} < \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\ell_p(X)$. On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

on a

$$\| x_n - x_m \|_{\langle p \rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X^*)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_{m,i}) \right| < \varepsilon$$

pour $m \rightarrow \infty$, cela donne

$$\sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X^*)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_i) \right| < \varepsilon$$

Ce qui implique que $\| x_n - x \|_{\langle p \rangle} < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \| x \|_{\langle p \rangle} &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) + x_i^*(x_{n,i}) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup_{\| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) \right| + \sup_{\| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i}) \right| \\ &< \varepsilon + \| x_n \|_{\langle p \rangle} \\ &< \infty \end{aligned}$$

donc, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ dans $\ell_p \langle X \rangle$, d'où $\ell_p \langle X \rangle$ est complet. ■

2.2 Dualité

Théorème 2.2.1 [2] Soit $1 \leq p \leq \infty$.

1. Soit $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n \in \ell_{p^*,\omega}^n(X^*)$. L'application :

$$\begin{aligned} f_{x^*} &: \ell_p^n \langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_i)_{i=1}^n &\longmapsto f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur $\ell_p^n \langle X \rangle$.

2. L'application

$$\begin{aligned} f &: \ell_{p^*,\omega}^n(X^*) \longrightarrow [\ell_p^n \langle X \rangle]^* \\ x^* = (x_i^*)_{i=1}^n &\longmapsto f_{x^*} \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique.

Autrement dit, si $1 \leq p \leq \infty$, alors le dual topologique de $\ell_p^n \langle X \rangle$ est $\ell_{p^*,\omega}^n(X^*)$.

Démonstration.

1. Il est clair que f_{x^*} est linéaire. Soient $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n \in \ell_{p^*,\omega}^n(X^*)$. Pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_p^n \langle X \rangle$, on a

$$\begin{aligned} |f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n)| &= \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(x_i)}{\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}} \right| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \\ &< \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \\ &= \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p \rangle} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} . \end{aligned}$$

Donc f_{x^*} est bien défini et est continu et $\|f_{x^*}\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}$.

2. Par (1) on a

$$\|f((x_i^*)_{i=1}^n)\| = \|f_{x^*}\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}$$

alors, f est continue et $\|f\| \leq 1$.

On va montrer la surjectivité de f , soit $f_{x^*} \in [\ell_p^n \langle X \rangle]^*$.

On pose $x_i^* = f_{x^*} \circ \psi_i$, telle que ψ_i est l'injection canonique de X dans $\ell_{p,\omega}^n(X)$ avec

$$\psi_i(x) = (\delta_{ij}x)_j$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est clair que $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$ et $f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i), \forall (x_i)_{i=1}^n \in \ell_p^n \langle X \rangle$

donc

$$f((x_i^*)_{i=1}^n) = f_{x^*}.$$

Il reste à montrer que $\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \leq \| f_{x^*} \|$.

Si $\| x \| \leq 1$ et $\| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \| (\lambda_i x)_{i=1}^n \|_{\langle p \rangle} &\leq \sup_{\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(\lambda_i x) \right| \\ &\stackrel{\text{I.H}}{\leq} \| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \sup_{\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i^*(x)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \sup_{\| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \leq 1} \| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \| (x_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, \omega} &= \sup_{\| x \| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x(x_i^*)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \sup_{\| x \| \leq 1} \sup_{\| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(x) \right| \\ &= \sup_{\| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \leq 1, \| x \| \leq 1} \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i^*(\lambda_i x) \right) \right| \\ &\leq \sup_{\| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_{\langle p \rangle} \leq 1} \sup_{\| (\lambda_i)_{i=1}^n \|_p \leq 1, \| x \| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(\lambda_i x) \right| \\ &\leq \sup_{\| (x_i)_{i=1}^n \|_{\langle p \rangle} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| \\ &= \| f_{x^*} \| . \end{aligned}$$

Donc, l'application f est une isométrie surjective qui permet d'identifier le dual de $\ell_p^n \langle X \rangle$ avec $\ell_{p^*, \omega}^n (X^*)$. ■

Théorème 2.2.2 [2] Soit $1 \leq p \leq \infty$, $[\ell_{p, \omega}^n (X)]^* = \ell_{p^*}^n \langle X^* \rangle$ isométriquement.

Démonstration.

On définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \ell_{p^*}^n \langle X^* \rangle &\longrightarrow [\ell_{p,\omega}^n(X)]^* \\ (x_i^*)_{i=1}^n &\longmapsto f((x_i^*)_{i=1}^n) = f_{x^*} \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned} f_{x^*} : \ell_{p,\omega}^n(X) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_i)_{i=1}^n &\longmapsto f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i). \end{aligned}$$

Soient $(x_i^*)_{i=1}^n, (y_i^*)_{i=1}^n \in \ell_{p^*}^n \langle X^* \rangle$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_{p,\omega}^n(X)$ on a :

$$\begin{aligned} f((x_i^*)_{i=1}^n + \lambda(y_i^*)_{i=1}^n)((x_i)_{i=1}^n) &= \sum_{i=1}^n (x_i^* + \lambda y_i^*)(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^n x_i^*(y_i) \\ &= f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) + \lambda f_{x^*}((y_i)_{i=1}^n) \end{aligned}$$

alors f est linéaire. D'autre part d'après le Théorème de Goldstine, pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_{p,\omega}^n(X)$ on a :

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega} \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \leq 1 \right\},$$

alors

$$\begin{aligned} |f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n)| &\leq \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(x_i)}{\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega}} \right| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \leq 1 \right\} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega} \leq 1 \right\} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \\ &= \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,\omega} \end{aligned}$$

donc, $\|f_{x^*}\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle}$, d'où

$$\|f((x_i^*)_{i=1}^n)\| = \|f_{x^*}\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle}.$$

Ce qui implique que f est continue et $\|f\| \leq 1$.

On va montrer la surjectivité de f , soit $f_{x^*} \in \ell_{p,\omega}^n(X)^*$. On pose $x_i^* = f_{x^*} \circ \psi_i$, telle que ψ_i est l'application $X \rightarrow \ell_{p,\omega}^n(X)$ défini par

$$\psi_i(x) = (\delta_{ij}x)_j \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est clair que $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$ et $f((x_i^*)_{i=1}^n)((x_i)_{i=1}^n) = f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = f_{x^*}((\delta_{ij}x_i)_j)$

$$f_{x^*}((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i), \forall (x_i)_{i=1}^n \in \ell_{p,\omega}^n(X)$$

donc $f((x_i^*)_{i=1}^n) = f_{x^*}$, alors f est surjective. Il reste à montrer que $\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle} \leq \|f((x_i^*)_{i=1}^n)\|$.

Soient $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$, $\varepsilon > 0$, et F le sous espace engendré par $\{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$, d'après le principe de réflexivité local, il existe $S \in \mathcal{L}(F; X)$ telle que $\|S\| \leq 1 + \varepsilon$ et

$$x_i^*(Sx_i^{**}) = x_i^{**}(x_i^*), i = 1, \dots, n$$

Donc

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| = \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(Sx_i^{**}) \right| = |f((Sx_i^{**})_{i=1}^n)| \leq \|f_{x^*}\| \|(Sx_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega}$$

de plus

$$\begin{aligned} \|(Sx_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega} &= \sup \{ \|S(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**})\| : \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{p^*} \leq 1 \} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \sup \{ \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**}\| : \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{p^*} \leq 1 \} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| \leq (1 + \varepsilon) \|f_{x^*}\| \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega}$$

alors,

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*) \right| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,\omega} \leq 1 \right\} \leq (1 + \varepsilon) \|f_{x^*}\|$$

donc

$$\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{\langle p^* \rangle} \leq \|f_{x^*}\|.$$

D'où, l'application f_{x^*} est une isométrie surjective qui permet d'identifier le dual de $\ell_{p,\omega}^n(X)$ avec $\ell_{p^*}^n\langle X^* \rangle$. ■

Corollary 2.2.3 *Soit $1 \leq P \leq \infty$. On a les identifications suivantes :*

1- $[\ell_p^n(X)]^{**} = \ell_p^n(X^{**})$.

2- $[\ell_{p,\omega}^n(X)]^{**} = \ell_{p,\omega}^n(X^{**})$.

3- $[\ell_p^n\langle X \rangle]^{**} = \ell_p^n\langle X^{**} \rangle$.

Chapitre 3

L'ideal $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ des opérateurs linéaires fortement (p, q) -sommants

L'ideal \mathcal{D}_p des opérateurs fortement p -sommants ($1 < p \leq \infty$) est introduit par Cohen [8] pour caractériser le dual d'un opérateur p -sommant. Cet idéal a été généralisé au cas des opérateurs linéaires fortement (p, q) -sommants par Apiola [2].

Dans ce chapitre nous introduisons et étudions la notion des opérateurs fortement (p, q) -sommants. Parmi notre résultats, les relations entre ces opérateurs et les opérateurs (p, q) -sommants sont représentées. Plus précisément, si $p = q$ nous prouvons un nouveau type du théorème de Pietsch (les deux, Théorèmes de domination et de factorisation).

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 3.1.1 Soit X, Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $1 \leq q, p \leq \infty$. On dit que T est fortement (p, q) sommant si l'opérateur linéaire induit est bien défini :

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_q(X) &\longrightarrow \ell_p\langle X \rangle \\ (x_i)_i &\longrightarrow \tilde{T}((x_i)_i) = (T(x_i))_i \end{aligned}$$

(i.e., $\tilde{T}(\ell_q(X)) \subset \ell_p\langle X \rangle$)

On note

$$\mathcal{D}_{p,q}(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaire fortement } (p, q) \text{ sommable}\}$$

Pour $p = 1$, on a : $\mathcal{D}_{1,q}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Pour $p = q$, on a $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires fortement p -sommants.

Proposition 3.1.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $1 \leq q, p \leq \infty$, les propriétés suivant sont équivalentes.*

- 1- $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$
- 2- $\exists c > 0 : \|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\langle p \rangle} \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_q, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$
- 3- $\exists c > 0 : \sum_{i=1}^n | \langle T(x_i), y_i^* \rangle | \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega}, x_1, \dots, x_n \in X, y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$
- 4- $\exists c > 0 : \|(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}\|_{\langle p \rangle} \leq c \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_q, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_q(X)$

Dans ce cas,

$$d_{p,q}(T) = \inf \{c : c \text{ vérifiant (2) ou (3) ou (4)}\}$$

de plus, $d_{p,q}(T) = \|\tilde{T}\|$.

Démonstration.

(1) \implies (2) Nous allons montrons que \tilde{T} est de graphe fermé. Soit $(x^k)_{k=1}^\infty$ ($x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$) une suite converge vers $x = (x_n)_n \in \ell_q(X)$ et $\tilde{T}(x^k)$ converge vers $y = (y_n)_n \in \ell_p\langle X \rangle$, on montre que $y = \tilde{T}(x)$. Comme $(x^k)_k$ converge vers $x = (x_n)_n$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq N : \|x^k - x\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^k - x_n\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \implies \forall k \geq N : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^k - x_n\|^q &\leq \varepsilon^q, \forall n \in \mathbb{N} \implies \forall k \geq N : \|x_n^k - x_n\|^q \leq \varepsilon^q, \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies \forall k \geq N : \left\| \begin{matrix} x_n^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{matrix} \right\| &\leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

alors, pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^k)_k$ converge vers $(x_n)_n$ en X .

Comme T est continu, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T(x_n^k) = T\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^k\right) = T(x_n) \quad (3.1)$$

d'autre part on a :

$\tilde{T}(x^k) = (T(x_n^k))_k$ converge vers $y = (y_n)_n$ en $\ell_p\langle Y \rangle$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left\| \tilde{T}(x^k) - y \right\|_{\ell_p\langle Y \rangle} = \sup_{\|(y_n^*)_{n=1}^\infty\|_{p^*, \omega}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(x_n^k) - y_n, y_n^* \rangle| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \implies & \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(x_n^k) - y_n, y_n^* \rangle| \leq \varepsilon \|(y_n^*)_n\|_{p^*, \omega} \\ \implies & |\langle T(x_n^k) - y_n, y_n^* \rangle| \leq \varepsilon \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} |\langle \varphi, y_n^* \rangle|, \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies & \sup_{y_n^* \in B_{Y^{**}}} |\langle T(x_n^k) - y_n, y_n^* \rangle| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies & \|T(x_n^k) - y_n\|_Y \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T(x_n^k) = y_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

(3.1) et (3.2) donnent

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T(x_n^k) = T(x_n) = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

alors $(T(x_n))_n = (y_n)_n = y$, d'où $\tilde{T}((x_n)_n) = \tilde{T}(x) = y$ alors, \tilde{T} est de graphe fermé, donc \tilde{T} est continu.

Alors, $\forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}((x_i)_{i=1}^n) \right\|_{\ell_p\langle Y \rangle} &= \|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_p\langle Y \rangle} \\ &\leq \left\| \tilde{T} \right\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q\langle X \rangle}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

D'où

$$\exists c : c = \left\| \tilde{T} \right\| \text{ telle que : } \left\| \tilde{T}((x_i)_{i=1}^n) \right\|_{\ell_p\langle Y \rangle} \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q\langle X \rangle}$$

(2) \implies (3) Soit $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_q(X)$, on a :

$$\sup_{\|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q(X)}$$

$$\iff \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q(X)} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega}$$

(3) \implies (4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q(X)} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \\ \implies \|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{\ell_p(X)} &\leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q(X)} \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \|(T(x_n))_n\|_{\ell_p(Y)} &= \sup_{\|(y_n^*)_{n=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{n=1}^\infty |\langle T(x_n), y_n^* \rangle| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq c \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|(T(x_n))_n\|_{\ell_p(Y)} \leq c \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q \quad (3.4)$$

(4) \implies (1) On montre que : si $(x_n)_n \in \ell_q(X)$, alors, $\tilde{T}((x_n)_n) = (T(x_n))_n \in \ell_p(Y)$. Soit $(x_n)_n \in \ell_q(X)$, donc $\|(x_n)_n\|_q < +\infty$.

D'après (3.4) on a :

$$\sup_{\|(y_n^*)_{n=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{n=1}^\infty |\langle T(x_n), y_n^* \rangle| \leq c \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q < +\infty$$

par (3.4) et d'après la définition de l'infimum on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \sup_{(x_n)_n \in B_{\ell_q(X)}} \|\tilde{T}((x_n)_n)\|_{\ell_p(Y)} \\ &\leq c \sup_{(x_n)_n \in B_{\ell_q(X)}} \|(x_n)_n\|_q \\ &\leq c \\ &< d_{p,q}(T) + \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

alors

$$\left\| \tilde{T} \right\| \leq c < d_{p,q}(T) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \quad (3.5)$$

(3.3) et (3.5) donnent

$$d_{p,q}(T) \leq \left\| \tilde{T} \right\| < d_{p,q}(T) + \varepsilon.$$

Finalement, on a

$$d_{p,q}(T) = \left\| \tilde{T} \right\|$$

De plus T est fortement (p, q) -sommant. ■

Proposition 3.1.3 *Si $q > p$, on a :*

$$\mathcal{D}_{p,q}(X, Y) = \{0\}.$$

Démonstration.

Si $q > p$, on a $1 > \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*} = \frac{q+p^*}{qp^*} = \frac{1}{\frac{qp^*}{q+p^*}}$.

Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_{\frac{qp^*}{q+p^*}} - \ell_1$, on suppose que $T \neq 0$ et $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$. On prend

$(\lambda_i x)_{1 \leq i \leq n} \subset X$ et $y^* \in Y^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(\lambda_i x), y^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |y^*(T(\lambda_i x))| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{p^*}} y^*(T \left(\lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{q}} x \right)) \right| \\ &\leq d_{p,q}(T) \left\| \left(\lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{q}} x \right)_i \right\|_q \left\| \left(\lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{p^*}} y^* \right)_i \right\|_{p^*, \omega} \\ &= d_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \left\| \lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{q}} \right\|_q \left\| \lambda_i^{\frac{qp^*}{q+p^*} \cdot \frac{1}{p^*}} \right\|_{p^*}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| \sum_{i=1}^n |\lambda_i| &\leq d_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= d_{p,q}(T) \|x\| \|y^*\| \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{\frac{qp^*}{q+p^*}} \right)^{\frac{1}{q+p^*}} \end{aligned}$$

On prend le sup sur B_{Y^*} , puis sur B_X , on obtient

$$\|T\| \left\| (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_1 \leq d_{p,q}(T) \left\| (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{\frac{qp^*}{q+p^*}}$$

ce qui implique que $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_1$, contradiction avec l'hypothèse $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_{\frac{qp^*}{q+p^*}} - \ell_1$
donc $T = 0$, d'où $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y) = \{0\}$. ■

Proposition 3.1.4 Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$

1) Si $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leq d_{p,q}(T)$.

2) $(\mathcal{D}_{p,q}(X, Y), d_{p,q}(\cdot))$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration.

1)-Soit $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, pour $n = 1$, on a :

$$\sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle y^*, T(x) \rangle| \leq d_{p,q}(T) \|x\|$$

alors, $\|T(x)\| \leq d_{p,q}(T) \|x\|$

donc T est continu et $\|T\| \leq d_{p,q}(T)$

2)-soient $T, S \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$

• pour $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |\langle (T+S)(x_i), y_i^* \rangle| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| + \sum_{i=1}^n |\langle S(x_i), y_i^* \rangle| \\ & \leq d_{p,q}(T) \|(x_i)_{i=1}\|_q \|(y_i^*)_{i=1}\|_{p^*, \omega} + d_{p,q}(S) \|(x_i)_{i=1}\|_q \|(y_i^*)_{i=1}\|_{p^*, \omega} \\ & = [d_{p,q}(T) + d_{p,q}(S)] \|(x_i)_{i=1}\|_q \|(y_i^*)_{i=1}\|_{p^*, \omega} \end{aligned}$$

alors, $T+S \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T+S) \leq d_{p,q}(T) + d_{p,q}(S)$.

• Soit $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle (\lambda T)(x_i), y_i^* \rangle| &= |\lambda| \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq |\lambda| d_{p,q}(T) \|(x_i)_{i=1}\|_q \|(y_i^*)_{i=1}\|_{p^*, \omega} \end{aligned}$$

alors, $\lambda T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et

$$d_{p,q}(\lambda T) \leq |\lambda| d_{p,q}(T) \quad (3.6)$$

On a :

$$\begin{aligned} d_{p,q}(T) &= d_{p,q}\left(\frac{1}{|\lambda|}\lambda T\right) \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} d_{p,q}(\lambda T) \end{aligned}$$

alors,

$$d_{p,q}(\lambda T) \geq |\lambda| d_{p,q}(T) \quad (3.7)$$

de (3.6) et (3.7) On a :

$$d_{p,q}(\lambda T) = |\lambda| d_{p,q}(T)$$

• Soit $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ tel que $d_{p,q}(T) = 0$

on a $\|T\| \leq d_{p,q}(T) = 0 \implies T = 0$.

Alors, $(\mathcal{D}_{p,q}(X, Y), d_{p,q}(T))$ est un sous-espace vectoriel normé de $\mathcal{L}(X, Y)$. ■

Proposition 3.1.5 $(\mathcal{D}_{p,q}(X, Y), d_{p,q}(\cdot))$ est un idéal de Banach.

Démonstration.

(i) $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel.

(ii) $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, il suffit de montrer que tout opérateurs de rang 1 est fortement (p, q) sommant.

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $T(x) = \varphi(x)y$, pour $\varphi \in X^*$ et $y \in Y$

soit $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ puisque $\ell_q(X) \subset \ell_p(X)$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle \varphi(x_i)y, y_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)| |\langle y, y_i^* \rangle| \\ &\stackrel{I.H}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|\varphi\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y_i^* \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|\varphi\| \|y\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \sup_{\psi \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \psi, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} / \psi = \frac{y}{\|y\|} \end{aligned}$$

alors, $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T) \leq \|\varphi\| \|y\|$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)y\| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \|y\| \\
&= \|\varphi\| \|y\| \\
&\leq d_{p,q}(T)
\end{aligned}$$

donc

$$d_{p,q}(T) = \|\varphi\| \|y\|$$

pour $T : X \longrightarrow Y$ de rang fini on a

$$T(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) y_k, \forall \varphi_k \in X^*, y_k \in Y$$

comme $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est un espace vectoriel, $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$

(iii) Propriété d'idéal :

a)-Soient $u \in \mathcal{L}(E, X)$, $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, $v \in \mathcal{L}(Y, F)$,

soit $(z_i)_{i=1}^n \subset E$, $(f_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |\langle v \circ T \circ u(z_i), f_i^* \rangle| \\
&= \sum_{i=1}^n |\langle T \circ u(z_i), v^*(f_i^*) \rangle| \\
&\leq d_{p,q}(T) \left(\sum_{i=1}^n \|u(z_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, v^*(f_i^*) \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= d_{p,q}(T) \|u\| \left(\sum_{i=1}^n \|z_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|v^{**}\| \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \left\langle \frac{v^{**}(\varphi)}{\|v^{**}\|}, f_i^* \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|u\| d_{p,q}(T) \|v\| \left(\sum_{i=1}^n \|z_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\psi \in B_{F^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \psi, f_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} / \psi = \frac{v^{**}(\varphi)}{\|v^{**}\|} \\
&\leq \|u\| d_{p,q}(T) \|v\| \|(z_i)_{i=1}^n\|_q \|(f_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega}
\end{aligned}$$

alors, $v \circ T \circ u \in \mathcal{D}_{p,q}(E, F)$ et $d_{p,q}(v \circ T \circ u) \leq \|v\| d_{p,q}(T) \|u\|$.

b)-Soit l'opérateur

$$A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda$$

on a

$\|A\| = \sup_{|\lambda| \leq 1} |\lambda| = 1$, alors $d_{p,q}(A) \geq 1$. Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle A(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i, y_i^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i^*\| \\ &\stackrel{I.H}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,\omega} \text{ puisque } \ell_{p^*}(\mathbb{K}) = \ell_{p^*,\omega}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

alors, A est fortement (p, q) -sommant et $d_{p,q}(A) \leq 1$, donc $d_{p,q}(A) = 1$

(iv) $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est complet

Soit $(T_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{D}_{p,q}(X, Y), d_{p,q}(T))$

on a $\|T\| \leq d_{p,q}(T)$, donc $(T_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(X, Y)$, donc elle converge.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nous montrons que $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$

$T_n \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_n : \ell_q(X) &\longrightarrow \ell_p\langle Y \rangle \\ (x_k)_{k=1}^\infty &\longmapsto \widetilde{T}_n((x_k)_{k=1}^\infty) = (T_n(x_k))_{k=1}^\infty \end{aligned}$$

est bien défini, de plus $\|\widetilde{T}_n\| = d_{p,q}(T_n)$

comme $(T_n)_n$ une suite de Cauchy, alors, $(\widetilde{T}_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans

$\mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p\langle Y \rangle)$, comme $\ell_p\langle X \rangle$ est complet, alors, $\mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p\langle Y \rangle)$ est un espace de Banach,

donc $(\widetilde{T}_n)_{n=1}^\infty$ converge dans $\mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p\langle Y \rangle)$

on pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{T}_n = S \in \mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p\langle Y \rangle)$, pour tout $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q(X)$ soit $\varepsilon > 0$, alors,

il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$n \geq N \implies \left\| \widetilde{T}_n - S \right\|_{\mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p\langle Y \rangle)} \leq \varepsilon$$

alors,

$$n \geq N \implies \left\| \widetilde{T}_n((x_k)_{k=1}^\infty) - S((x_k)_{k=1}^\infty) \right\|_{\ell_p(Y)} \leq \varepsilon, \forall (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q(X)$$

posons

$$(y_k)_{k=1}^\infty = S((x_k)_{k=1}^\infty) \in \ell_p(Y)$$

alors, $\forall (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q(X)$

$$n \geq N \implies \sup_{(y_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*, \omega}(Y^*)}} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle T_n(x_k) - y_k, y_k^* \rangle| \leq \varepsilon$$

donc

$$n \geq N \implies \sup_{(y_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{Y^*}} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle T_n(x_k) - y_k, y_k^* \rangle| = \|T_n(x_k) - y_k\|_Y \leq \varepsilon$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x_k) = y_k \tag{3.8}$$

comme $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{L}(X, Y)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x_k) = T(x_k) \tag{3.9}$$

de (3.8) et (3.9) on a

$$(T(x_k))_{k=1}^\infty = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y)$$

alors, si on définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : \ell_q(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (y_k)_{k=1}^\infty &\longmapsto \widetilde{T}((y_k)_{k=1}^\infty) = (T(x_k))_{k=1}^\infty \end{aligned}$$

alors pour tout $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q(X)$ on a

$$\widetilde{T}((x_k)_{k=1}^\infty) = (T(x_k))_{k=1}^\infty = (y_k)_{k=1}^\infty = S((x_k)_{k=1}^\infty) \in \ell_p(Y).$$

Alors, $\tilde{T} = S \in \mathcal{L}(\ell_q(X), \ell_p(Y))$ est bien défini, et par suite $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$, alors, $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est complet
d'où, $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ est un idéal de Banach. ■

Théorème 3.1.6 Soient $q_1 \leq q_2$, $p_1 \leq p_2$, on a

$$\mathcal{D}_{p_2, q_2}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_{p_1, q_1}(X, Y) \text{ et } d_{p_1, q_1}(T) \leq d_{p_2, q_2}(T)$$

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{D}_{p_2, q_2}(X, Y)$;

alors, pour tout x_1, \dots, x_n dans X , y_1^*, \dots, y_n^* dans Y^* on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq d_{p_2, q_2}(T) \|((x_i))_{i=1}^n\|_{q_2} \|((y_i^*))_{i=1}^n\|_{p_2^*, \omega} \\ &\leq d_{p_2, q_2}(T) \|((x_i))_{i=1}^n\|_{q_1} \|((y_i^*))_{i=1}^n\|_{p_1^*, \omega}. \end{aligned}$$

On conclure que $T \in \mathcal{D}_{p_1, q_1}(X, Y)$ et $d_{p_1, q_1}(T) \leq d_{p_2, q_2}(T)$. ■

3.2 Relation entre $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $\pi_{p,q}(X, Y)$

Théorème 3.2.1 Soit X, Y deux espaces de Banach.

(i) Soit $1 \leq p < \infty$. L'opérateur T est dans $\pi_{p,q}(X, Y)$ si et seulement si son opérateur adjoint T^* est fortement (q^*, p^*) -sommant de Y^* dans X^* et $d_{q^*, p^*}(T^*) = \pi_{p,q}(T)$.

(ii) Soit $1 < p \leq \infty$. L'opérateur T est dans $\mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ si et seulement si son opérateur adjoint T^* est (q^*, p^*) -sommant de Y^* dans X^* et $\pi_{q^*, p^*}(T^*) = d_{p,q}(T)$.

Démonstration.

(i) Soit $T \in \pi_{p,q}(X, Y)$, alors l'opérateur linéaire induit est continu

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_{q, \omega}^n(X) &\longrightarrow \ell_p^n(Y) \\ ((x_i))_{i=1}^n &\longrightarrow \tilde{T}((x_i))_{i=1}^n = (T(x_i))_{i=1}^n \end{aligned}$$

de plus, $\|\tilde{T}\| = \pi_{p,q}(T)$,

par les théorèmes 1.6.2 et 2.2.2 l'adjoint de \tilde{T}

$$\begin{aligned} \tilde{T}^* : [\ell_p^n(Y)]^* &\xrightarrow{f_2} \ell_{p^*}^n(Y^*) && \xrightarrow{(\tilde{T})^*} [\ell_{q,\omega}^n(X)]^* \xrightarrow{f_1} \ell_{q^*}^n(X^*) \\ (y_i^*)_{i=1}^n &&& \longmapsto \tilde{T}^*((y_i^*)_{i=1}^n) = (T^*y_i^*)_{i=1}^n \end{aligned}$$

est bien défini, ce qui entraîne que T^* dans $\mathcal{D}_{q^*,p^*}(Y^*, X^*)$ et $\|\tilde{T}^*\| = d_{q^*,p^*}(T^*)$ comme $\|\tilde{T}^*\| = \|\tilde{T}\|$ on obtient $d_{q^*,p^*}(T^*) = \pi_{p,q}(T)$.

(ii) la même démonstration que (i). ■

Corollary 3.2.2 Soit $1 < q \leq p \leq \infty$, et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire on a : T est fortement (p, q) -sommant si et seulement si T^{**} est fortement (p, q) -sommant.
et

$$d_{p,q}(T^{**}) = d_{p,q}(T)$$

Théorème 3.2.3 Il existe des espaces de Banach X et Y telles que :

$$\pi_p(X, Y) \neq \mathcal{D}_{p^*}(X, Y), 1 \leq p < \infty$$

Démonstration.

(i) Peitsh a montré que l'opérateur canonique $I : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ est p -sommant ($I \in \pi_p(\ell_1, \ell_2)$) pour $1 \leq p < 2$,
mais l'opérateur adjoint $I^* : \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty$ n'est pas p -sommant ($I^* \notin \pi_p(\ell_2, \ell_\infty)$), pour $1 \leq p < 2$ (voir [13], p.338). Donc d'après le Théorème 3.2.1 on a

$$I \notin \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_2),$$

pour $2 \leq p^* \leq \infty$.

De même façon, l'opérateur $I^* \in \mathcal{D}_{p^*}(\ell_2, \ell_\infty)$, pour $2 \leq p^* \leq \infty$, mais $I^* \notin \pi_p(\ell_2, \ell_\infty)$ pour $1 \leq p < 2$.

(ii) Maintenant, Considérons l'opérateur $I_0 = J \circ I$ défini par :

$$\begin{array}{ccc}
\ell_1 & \xrightarrow{I} & \ell_2 \\
& \searrow^{I_0} & \downarrow J \\
& & \ell_p
\end{array}$$

dans ce diagramme, I et J sont les inclusions canoniques.

Si J est continu, d'après la propriété d'ideal $I_0 \in \pi_p(\ell_1, \ell_p)$ pour tout $p \geq 2$, mais l'opérateur adjoint $I_0^* : \ell_p^* \longrightarrow \ell_\infty$ n'est pas p -sommant, en effet si $x_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ une suite avec 1 dans la $i^{\text{ème}}$ position et 0 ailleurs, alors

$$\begin{aligned}
\|(I_0^*(x_i))_{i=1}^\infty\|_p &= \left(\sum_{i=1}^\infty \|I_0^*(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} = \infty.
\end{aligned}$$

Bien que

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,\omega} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^\infty |\langle x^*, x_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Si $I_0^* \in \pi_p(\ell_p^*, \ell_\infty)$, alors $+\infty \leq 1$ qui est impossible.

Donc $I_0^* \notin \pi_p(\ell_p^*, \ell_\infty)$, et d'après le Théorème 3.2.1 $I_0 \notin \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_p)$.

De même façon, l'opérateur $I_0 \in \pi_p(\ell_1, \ell_p)$, mais, $I_0 \notin \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_p)$. ■

3.3 Théorèmes de domination et de factorisation de Pietsch

Théorème 3.3.1 Soient $1 < p < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors T est fortement p -sommant si seulement si s'il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ (muni de la topologie $*$ -faible) et une constante positive c , telle que pour tout $x \in X$, $y^* \in Y^*$, on a

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq c \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.10)$$

et $d_p(T) \leq c$.

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$, alors $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*)$ et $\pi_{p^*}(T^*) = d_p(T)$, alors d'après le théorème de domination de Pietsch (le cas des opérateurs p -sommant) : il existe *une* probabilité de Radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(X, X^*))$ telle que :

$$\|T^*(y^*)\| \leq \pi_{p^*}(T^*) \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}, \forall y^* \in Y^*$$

Donc pour tout $x \in X, y^* \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle x, T^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|x\| \|T^*(y^*)\| \\ &\leq \|x\| \pi_{p^*}(T^*) \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= d_p(T) \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

D'où le resultat.

Inversement, Supposons que (3.10) est vérifiant pour tout $x \in X$. Nous montrons que $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$.

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in X, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, 3.10 implique

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq c \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^{**}(y_i^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \right) \\ &\stackrel{I.H}{\leq} c \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |y_i^{**}(y_i^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= c \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \left(\int_{B_{Y^{**}}} \sum_{i=1}^n |y_i^{**}(y_i^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq c \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i^{**}(y_i^*)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

alors, $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ et $d_p(T) \leq c$. ■

Proposition 3.3.2 Soient $1 < q \leq p < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supposons qu'il existe une mesure μ positive sur $B_{Y^{**}}$ (muni de la topologie $*$ -faible) et une constante $c > 0$ telle que

pour tout $x \in X$, $y^* \in Y^*$ on a

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.11)$$

Alors $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y)$ et $d_{p,q}(T) \leq c$.

Démonstration.

Supposons que (3.11) est vérifiant pour tout $x \in X$. Nous montrons que $T^* \in \pi_{q^*, p^*}(Y^*, X^*)$.

On a

$$|y^*(T(x))| \leq c \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}},$$

on prend le sup sur $x \in B_X$ nous obtient

$$\sup_{x \in B_X} |y^*(T(x))| \leq \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

alors

$$\|T^*(y^*)\| \leq c \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}, \forall y^* \in Y^*$$

par le théorème de domination de Pietsch (cas des opérateurs p -sommants) l'opérateur T^* est p^* -sommant (i.e (p^*, p^*) -sommant).

Pour $p^* \leq q^*$, et d'après le théorème d'inclusion des opérateurs (p, q) -sommants on a :

$$T^* \in \pi_{q^*, p^*}(Y^*, X^*) \text{ et } \pi_{q^*, p^*}(T^*) \leq \pi_{p^*, p^*}(T^*) \leq c$$

d'où

$$T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, Y) \text{ et } d_{p,q}(T) \leq c.$$

■

Théorème 3.3.3 (Théorème de factorisation de Pietsch) Soient $1 < p \leq \infty$, X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$.

(ii) Il existe une mesure de probabilité de Borel μ sur $B_{Y^{**}}$, un espace de Banach $S_{p^*}(\mu)$ (un sous espace fermé de $L_p(\mu, K)$ où $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$) et un opérateur linéaire continu $v : X \longrightarrow (S_{p^*}(\mu))^*$ tels que

$$k_Y \circ T = i_{Y^*}^* \circ J_{p^*}^* \circ v.$$

Démonstration.

(i) \implies (ii) Soit $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$, alors $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*)$ avec $d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*)$. D'après le Théorème 1.6.12, on obtient la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} Y^* & \xrightarrow{T^*} & X^* \\ i_{Y^*} \downarrow & & \uparrow u \\ i_{Y^*}(Y^*) & \xrightarrow{J_{p^*}^*} & S_{p^*}(\mu) \end{array}$$

donc par dualité, on trouve

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & & \searrow & & \swarrow \\ X & \xrightarrow{k_X} & X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \\ & \searrow v & \downarrow u^* & & \uparrow i_{Y^*}^* \\ & & (S_{p^*}(\mu))^* & \xrightarrow{J_{p^*}^*} & (i_{Y^*}(Y^*))^* \end{array}$$

où v est un opérateur linéaire défini comme suit:

$$\begin{aligned} \langle v(x), J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*) \rangle &:= \langle u^* \circ k_X(x), J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*) \rangle \\ &= u(J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*))(x). \end{aligned}$$

Pour tout $y^* \in Y^*, x \in X$. L'application v est bien défini et continu puisque :

$$|\langle v(x), J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*) \rangle| \leq \|J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*)\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \mu)} \|u\| \|x\|.$$

$$\sup \left\{ |\langle v(x), J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*) \rangle|, \|J_{p^*} \circ i_{Y^*}(y^*)\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \mu)} \leq 1 \right\} \leq \|u\| \|x\|$$

Donc

$$\|v(x)\| \leq \|u\| \|x\| \text{ et } \|v\| \leq \|u\|.$$

(ii) \implies (i) Soit $k_Y \circ T = i_{Y^*}^* \circ J_{p^*}^* \circ v = (J_{p^*} \circ i_{Y^*})^* \circ v$. L'application $J_{p^*} \circ i_{Y^*}$ est p^* -sommant. Alors $(J_{p^*} \circ i_{Y^*})^*$ est fortement p -sommant. Par conséquent, $(J_{p^*} \circ i_{Y^*})^* \circ v$ est aussi fortement p -sommant. Alors

$$T^* = v^* \circ (J_{p^*} \circ i_{Y^*})^{**} \circ k_{Y^*} \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*)$$

car $k_Y^* \circ k_{Y^*} = id_{Y^*}$.

Ce qui entraîne que

$$T \in \mathcal{D}_p(X, Y).$$

■

3.4 Quelques propriétés pour les espaces de Hilbert

Nous utilisons dans ce paragraphe l'inégalité de Khintchine et aussi l'inégalité de Kahane, avant ça on commence par rappeler les variables aléatoires de Rademacher. Elles sont définies comme suit : pour chaque n dans \mathbb{N} , soit la fonction

$$\begin{aligned} r_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto r_n(t) \end{aligned}$$

$$\text{avec } r_n(t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t)) = \begin{cases} 1, & \text{pour } \sin(2^n \pi t) > 0, \\ 0, & \text{pour } \sin(2^n \pi t) = 0, \\ -1, & \text{pour } \sin(2^n \pi t) < 0. \end{cases}$$

La suite $(r_n)_n$ est dite la suite des fonctions de Rademacher.

les fonctions $r_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ peut être décrit comme :

$$r_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \end{cases}$$

$$r_{n+1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \bigcup_{s=1}^{2^n} [\frac{2s-2}{2^{n+1}}, \frac{2s-1}{2^{n+1}}] \\ -1 & \text{si } t \in \bigcup_{s=1}^{2^n} [\frac{2s-1}{2^{n+1}}, \frac{2s}{2^{n+1}}] \end{cases}.$$

Les fonctions de Rademacher ont été introduites par Rademacher en 1922. Nous référons au lecteur ([9]) pour plus de détails sur cette notion.

Définition 3.4.1 *La suite de Rademacher $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ est une suite de variable aléatoire définies sur Ω à valeur dans $\{-1, 1\}$ indépendantes, c'est-à-dire :*

$$P \{t : r_n(t) = +1\} = P \{t : r_n(t) = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Théorème 3.4.2 [7] *(Inégalité de Khintchine).*

Soit $n \in \mathbb{N}$; $1 < p < \infty$, il existe des constantes positives A_p, B_p telle que pour toute scalaires $(a_n)_n$, on a

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot r_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.4.3 [7] *(Inégalité de Kahane).*

Soit $1 < p, q < \infty$, soit X un espace de Banach et $(x_n)_n$ une suite dans X , alors il existe une constante positive K_{pq} telle que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{pq} \left(\int_0^1 \|r_k(t) x_k\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Caractérisation sur les espaces de Hilbert

Théorème 3.4.4 *Soit H un espace de Hilbert et $2 < p \leq \infty$, alors*

$$\mathcal{D}_p(X, H) = \mathcal{D}_2(X, H) \text{ et } d_p(T) = d_2(T).$$

Démonstration. D'après le théorème d'inclusion (3.1.6), pour $2 < p \leq \infty$ on a

$$\mathcal{D}_p(X, H) \subset \mathcal{D}_2(X, H) \text{ et } d_2(T) \leq d_p(T).$$

Pour la deuxième inclusion, soit $T \in \mathcal{D}_2(X, H)$, alors d'après le théorème (3.2.1), l'adjoint

$$T^* \in \pi_2(H^*, X^*) \text{ et } \pi_2(T^*) = d_2(T)$$

et donc $T^* \in \pi_1(H^*, X^*)$ et $\pi_1(T^*) = d_2(T)$ et d'après le théorème (1.6.13) $T^* \in \pi_{p^*}(H^*, X^*)$ et $\pi_{p^*}(T^*) \leq \pi_1(T^*) = d_2(T)$, et par le théorème (3.2.1)

$$T \in \mathcal{D}_p(X, H) \text{ et } d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*) \leq d_2(T).$$

■

Nous comparons maintenant la notion des opérateurs p -sommants et les opérateurs fortement p -sommants pour certains espaces de Hilbert.

Dans [7], Q. Bu a généralisé le Théorème (4.2.2, (ii)) de ([8]) pour tout p et q ($1 < p, q < \infty$), (i.e., $\Pi_p(H, Y) \subset \mathcal{D}_q(H, Y)$) à la place de $p = q = 2$ cité dans [[8], Théorème 4.2.2], où H est un espace de Hilbert quelconque et $\Pi_p(H, Y)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires p -sommants.

Théorème 3.4.5 *Soit $1 < p, q < \infty$, et H un espace de Hilbert. Alors*

$$\pi_p(H, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(H, Y),$$

de plus

$$d_q(T) \leq \frac{1}{A_{q^*}} \cdot B_p \cdot K_{p,q^*} \cdot \pi_p(T).$$

Démonstration.

Sans restreindre la généralité, on peut remplacer H par l_2^m pour $m \in \mathbb{N}$. Car, si on prend

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset H$, alors il existe $m \in N$ tel que : il existe un isométrie avec l_2^m .

On utilise la projection $P : H \longrightarrow l_2^m$ puis on retourne au cas initiale. Soit $T \in \pi_p(H, Y)$.

D'après le Théorème 1.6.12, il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{l_2^m}$ telle que pour tout $x \in l_2^m$, on a

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.12)$$

Pour $x_1, \dots, x_n \in l_2^m$ et $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a $x_i = \sum_{k=1}^m x_{i,k} e_k$, $i = 1, \dots, n$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n \left| \left\langle \sum_{k=1}^m x_{i,k} T(e_k), y_i^* \right\rangle \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^m x_{i,k} \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |x_{i,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^m |\langle T(e_k), y_i^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\|_{l_2^m} \left(\sum_{k=1}^m |\langle T(e_k), y_i^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne d'après l'inégalité de Khintchine que

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\|_{l_2^m} \frac{1}{A_{q^*}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m r_k(t) \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \right).$$

D'où encore par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m r_k(t) \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^m r_k(t) \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} \sum_{i=1}^n \frac{\left| \sum_{k=1}^m y_i^*(r_k(t) T(e_k)) \right|^{q^*}}{\left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*}} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\leq \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^m y_i^*(r_k(t) T(e_k)) \right|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}}
\end{aligned}$$

et donc inférieure ou égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} \left(\|y_i^*\|_{l_{q^*, \omega}^{m, (Y^*)}} \right)^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \frac{1}{A_{q^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \|y_i^*\|_{l_{q^*, \omega}^{m, (Y^*)}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Nous intéressons maintenant à la quantité $\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}}$

d'après l'inégalité de Kahane on a

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq K_{p, q^*} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

et d'après (3.12), on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} &\leq K_{p, q^*} \pi_p(T) \left(\int_0^1 \left(\int_{B_{l_2^m}} \left| \left\langle \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k), x^* \right\rangle \right|^p d\mu(x^*) \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_{p, q^*} \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \int_0^1 \left| \left\langle \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k), x^* \right\rangle \right|^p d\mu(x^*) dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Khintchine

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} &\leq K_{p,q^*} B_p \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \left(\sum_{k=1}^m |\langle e_k, x^* \rangle|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K_{p,q^*} B_p \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \|x^*\|_{l_2^m}^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_{p,q^*} B_p \pi_p(T).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^m r_k(t) T(e_k) \right\|^{q^*} dt \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq K_{p,q^*} B_p \pi_p(T). \quad (3.14)$$

En combinant (3.13) et (3.14) on a en conclusion

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \frac{1}{A_{q^*}} K_{p,q^*} B_p \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|y_i^*\|_{l_{q^*,\omega}^n(Y^*)}.$$

Ce qui implique que

$$T \in \mathcal{D}_q(H, Y)$$

et

$$d_q(T) \leq \frac{1}{A_{q^*}} K_{p,q^*} B_p \pi_p(T).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 3.4.6 Soit $1 < p, q < \infty$, et H un espace de Hilbert. Alors

$$\mathcal{D}_q(Y, H) \subseteq \pi_p(Y, H),$$

de plus

$$\pi_p(T) \leq \frac{1}{A_p} K_{q^*,p} B_{q^*} d_q(T).$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}_q(Y, H)$, d'après le théorème (3.2.1) l'adjoint $T^* : H^* \longrightarrow Y^*$ est absolument q^* -sommant, et

$$\pi_{q^*}(T^*) = d_q(T).$$

Donc par le théorème précédent T^* est fortement p^* -sommant et

$$d_{p^*}(T^*) \leq \frac{1}{A_p} K_{q^*,p} B_{q^*} \pi_{q^*}(T^*) = \frac{1}{A_p} K_{q^*,p} B_{q^*} d_q(T)$$

finalement par le théorème(3.2.1) T est est absolument p -sommant et

$$\pi_p(T) = d_{p^*}(T^*) \leq \frac{1}{A_p} K_{q^*,p} B_{q^*} d_q(T).$$

■

Bibliographie

- [1] D. Achour AND L. Mezrag. On the Cohen strongly p -summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 2007;327 :550–563.
- [2] H. Apiola. Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity. Math. Ann. 219 (1976) 53-64.
- [3] A. Belacel. Thèse de Doctorat, Université de M'sila 2015.
- [4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson (1987) .
- [5] Q. Bu and Z. Shi . On Cohen almost multilinear operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications. (2012), Article in press.
- [6] Q. Bu. On Banach spaces verifying Grothendieck's theorem. Bull. London Math. Soc. 35 (2003) 738-748.
- [7] Q. Bu. Some mapping properties of p -summing operators with Hilbertian domain. Contemporary Mathematics 328(2003) , 145-149.
- [8] J. S. Cohen. Absolutely p -summing, p -Nuclear operators and Thier Conjugates. Math. Ann. 201, 177-200 (1973) Springer-Verlag 1973.
- [9] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [10] N. Elhage Hassan. Topologie générale et espaces normés. Dunod, paris,2011.
- [11] G. Hanna and T. Viscarro. Dual et préduel d'un espace de Banach.(27 mai 2011) .

- [12] D. Li, H. Queffélec. (Cours Spécialisés 12) Introduction à l'étude des espaces de Banach _ Analyse et probabilités-SMF (2005).
- [13] A. Pietsch, Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967), 333–353.
- [14] A. Pietsch, “Operator Ideals. Deutsch”, Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.