

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Sur les fonctions à p -variations bornées et la
composition dans certains espaces de Besov

Présenté par :
NOUBAT ZINEB

Devant le jury composé de :

M^r Dahmane Achour

Université de M'sila **Président**

M^r Nassim Ferahtia

Université de M'sila **Encadreur**

M^r Tahar Blizak

Université de M'sila **Examineur**

Remerciements

Je remercie, en premier lieu, **ALLAH** qui m'a donné la force et la patience pour réaliser ce travail.

Le sujet de cette thèse m'a été proposé par **Dr N. Ferahtia**, que je remercie très sincèrement, pour ses conseils et suivis continuels pendant ces années de réalisation de ce travail.

Je tiens à **Dr D. Achour** remercier pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie aussi vivement **Dr T. Blizak** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury.

Dédicaces

Nous présentons cette thèse à nos chers parents qui étaient avec nous dans chaque petit et grand à mon chers frère et sœurs et à ma chère frangine ASMA. A celle que son départ m'a privé mon sourire habituel. Paix à ton âme,

A toute la famille NOUIBAT

A tous nos amis qui nous ont aidés dans ce travail, grâce à eux à tous les gens que nous aimons

Table des matières

Notations	3
Introduction	4
1 Quelques résultats préliminaires	6
1.1 Série de Littelwood-Paley	6
1.2 Espace de Besov et espace de Lizorkin-Triebel	9
1.2.1 Espace de Besov $B_{p,q}^s$	9
1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$	9
1.3 La relation entre $F_{p,q}^s$ et $B_{p,q}^s$	10
1.4 Quelques inégalités classiques	11
1.5 Les fonctions à p -variations bornées	13
1.6 Exemple de fonction dans l'espace de Besov	14
2 Fonctions qui opèrent sur certains espaces fonctionnels	16
2.1 Quelques fonctions de test	17
2.2 Résultats préliminaires	18
2.3 Preuve des Théorèmes 2.0.1 et 2.0.2	20
2.3.1 Preuve du Théorème 2.0.1	21
2.3.2 Preuve du Théorème 2.0.2	23
3 propriété de composition dans le cas critique de l'espace de Besov	26
3.1 Localisation d'un espace de distribution	28
3.2 propriété de composition dans l'espace de Besov	33

Conclusion	37
Bibliographie	37

Notations

$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	désigne l'espace de Besov.
$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	désigne l'espace de Lizorkin-Triebel.
(e_1, e_2, \dots, e_n)	est la base canonique dans \mathbb{R}^n .
$x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$	est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .
$ x $	désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .
$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$	est le produit de convolution des fonctions f et g .
E_{lu}	désigne l'espace localisé uniforme d'un espace fonctionnel.
$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)_{lu}$	désigne l'espace localisé uniforme de l'espace de Besov.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	est l'espace de Schwartz.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	est l'espace des distributions tempérées.
$\text{supp } f$	est le support de f .
p'	est l'exposant conjugué de p , $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, où $p \in [1, +\infty]$.

Introduction

La composition sur certains espaces fonctionnels est un problème qui intéresse par les mathématiciens depuis les années 1960. Où S. Igari [13] en 1965, a étudié les fonctions qui opèrent sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1$, où il a trouvé que ce sont les fonctions localement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R})$, les fonctions globalement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$. La notion de la localisation uniforme jouent un rôle dans l'analyse fonctionnelle, il y a plusieurs chercheurs qui sont intéressés l'étude dans ce point, et puisque depuis quelques années la version localisée uniforme d'un espace normé sur \mathbb{R}^n est connue par une fonction auxiliaire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.e., on a la relation suivante

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f\|_E < +\infty,$$

où τ_a désigne l'opérateur de translation, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive, non identiquement nulle. On peut montrer que l'espace localisé uniforme noté E_{lu} , ne dépend pas du choix de la fonction auxiliaire φ .

Dans ce mémoire, on va étudier les fonctions à p -variations bornées et une propriété de composition dans l'espace de Besov localisé uniforme.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres

- Dans le premier chapitre, on va rappeler les notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques Lemmes et résultats principaux qu'on va utiliser dans la suite.
- Dans le deuxième chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces de Besov de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

nous étudions les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

- Dans le troisième chapitre, on va étudier l'opérateur de composition $T_f = f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov avec $p \in [1, +\infty]$, $q \in]1, +\infty]$ et $s = \frac{n}{p} > 1$. Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors f' appartient localement uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.
- Finalement, des conclusions générales et des perspectives sont tirées.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler les notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques Lemmes et résultats principaux qu'on va utiliser dans la suite.

1.1 Série de Littelwood-Paley

Dans cette section on va rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- (i) $\text{supp } \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$,
- (ii) $\phi(\xi) \geq 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$,
- (iii) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)$, on obtient une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}.$$

Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) est appelé la partition de l'unité. A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolutions

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{cases} \widehat{(\Delta_k f)}(\xi) = \phi(2^{-k}\xi) \widehat{f}(\xi) & k \geq 1 \\ \widehat{(Q_j f)}(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi) & j \geq 0 \end{cases},$$

avec la notation $\Delta_0 = Q_0$.

Ecrivons la notation (1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors

$$\varphi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par \widehat{f} , donc

$$\varphi(2^{-j}\xi) \widehat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) \widehat{f} = \widehat{f} \quad (1.2)$$

pour $j = 0$, on obtient :

$$\varphi(\xi) \widehat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) \widehat{f} = \widehat{f},$$

i.e.

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f.$$

Et alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f.$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur (1.2), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f,$$

alors

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f,$$

donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f.$$

Définition 1.1.1 [15] Soit $f \in \mathcal{S}'$ et $a > 0$. On définit les opérateurs maximaux associés aux Δ_k et Q_k par

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a} \quad \text{et} \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a}.$$

Définition 1.1.2 [14] Soit A_1 et A_2 deux espaces de Banach. On dit que A_1 est s'injecte dans A_2 et on écrit $A \hookrightarrow A_2$, si pour toute fonction f appartenant à A_1 , on a f appartenant à A_2 . De plus il exist $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}.$$

Définition 1.1.3 [10] Soit $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel. On dit que $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si $E_{p,q}^s \cdot E_{p,q}^s \hookrightarrow E_{p,q}^s$. De plus, il exist une constante $c > 0$ telle que pour toute f et g appartenant à $E_{p,q}^s$ on a

$$\|f \cdot g\|_{E_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{E_{p,q}^s} \|g\|_{E_{p,q}^s}.$$

Proposition 1.1.1 [10] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty \text{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \text{ou} \\ 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq 1 \text{ et } s = \frac{n}{p}. \end{array} \right.$

Proposition 1.1.2 [10] Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < p < q \leq \infty \text{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \text{ou} \\ 0 < q \leq p < \infty \text{ et } s > \frac{n(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})}{2}. \end{array} \right.$$

1.2 Espace de Besov et espace de Lizorkin-Triebel

Pour toute les définitions, les propositions et les propriétés de $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ de ce paragraphe ,on peut consulter les livres de Triebel [15] et [16], on pourra aussi voir le livre de T.Runst et W.Sickel [14].

1.2.1 Espace de Besov $B_{p,q}^s$

Définition 1.2.1 [14] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. L'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} (\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty & \text{pour } q \neq \infty \\ \sup_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p) < +\infty & \text{pour } q = \infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.2.2 (i) $B_{\infty,\infty}^s = \mathcal{C}^s$ si $s > 0$ et $s \notin \mathbb{N}$.

(ii) $B_{p,q}^s$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).

(iii) $B_{p,q_0}^{s+\epsilon} \hookrightarrow B_{p,q_1}^s$ si $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) Soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, alors

$$B_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p_1,q_1}^{s_1} \quad \text{avec } (0 < p_0 < p_1 \leq \infty).$$

1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$

Définition 1.2.3 [14] Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\| (\sum_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty & \text{pour } q \neq \infty \\ \left\| \sup_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|) \right\|_p < +\infty & \text{pour } q = \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.1 Dans la formule (1.3) (resp. (1.4)) on peut remplacer Δ_j par $\Delta_j^{*,a}$ avec $a > \frac{n}{p}$ (resp. $a > \frac{n}{\min(p,q)}$), et on obtient ainsi une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (resp. $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$).

Proposition 1.2.1 (i) $F_{p,q}^s$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).

(ii) $F_{p,2}^0 = L^p$ et $F_{p,2}^s = H_p^s$ pour $1 < p < \infty$

(iii) $F_{p,q_0}^{s+\epsilon} \hookrightarrow F_{p,q_1}^s$ si $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$. alors

$$F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p_1,q_1}^{s_1} \quad \text{avec } (0 < p_0 < p_1 < \infty)$$

1.3 La relation entre $F_{p,q}^s$ et $B_{p,q}^s$

Nous allons énoncer quelques inclusions entre $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$, où les démonstrations se trouvent dans le livre de Runst et Sickel [14].

Lemme 1.3.1 (i) soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, alors

$$B_{p,\min(p,q)}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s.$$

(ii) soient $0 < p < p_1 \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,p}^{s_1}.$$

En plus si $0 < u \leq p \leq v \leq \infty$ et $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$B_{p_0,u}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,v}^{s_1}.$$

Définition 1.3.1 soient $s \in \mathbb{R}$. $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, alors l'espace $L^p(\ell^{s,q})$ est

$$L^p(\ell^{s,q}) = \left\{ \{f_k\} \subset \mathcal{S}' / \text{supp } \widehat{f}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\} | L^p(\ell^{s,q})\| = \|\{2^{ks} f_k\} | L^p(\ell^q)\| = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty.$$

soient $s \in \mathbb{R}$. $0 < p, q \leq \infty$, alors l'espace $\ell^{s,q}(L^p)$ est

$$\ell^{s,q}(L^p) = \left\{ \{f_k\} \subset \mathcal{S}' : \text{supp } \widehat{f}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\} | \ell^{s,q}(L^p)\| = \|\{2^{ks} f_k\} | \ell^q(L^p)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

1.4 Quelques inégalités classiques

Dans ce paragraphe, on va donner quelques estimations (Young, Hölder, Bernstein) comme outils de la suite de notre travail.

Théorème 1.4.1 (*Inégalité de Hölder*) soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec

$$1 \leq p, q \leq +\infty \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Alors}$$

$$f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.4.2 (*Inégalité de Young*) soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Alors, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve. Fixons $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et considérons l'opérateur $T_f = f \star g$. on a

$$T_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

i.e.,

$$|T_f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |g(x-y)| |f(y)|^{\frac{1}{q'}} dy.$$

Donc

$$\|T_f\|_q \leq \|g\|_q \|f\|_1,$$

de plus, par Hölder on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right| \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.$$

Finalement $T : L^1 \rightarrow L^q$ et $T : L^{q'} \rightarrow L^\infty$, par interpolation on obtient alors

$$T : L^p \longrightarrow L^r \text{ avec } \frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}, \quad \theta \in]0, 1[,$$

et

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

■

Théorème 1.4.3 (*Inégalité de Bernstein*) soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il exist une constante $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ telle que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$, on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$.

on pose $\varphi_R(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{R})$ telle que $\varphi_R(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$, alors on a

$$\widehat{f}(\xi) = \varphi_R(\xi) \widehat{f}(\xi), \quad \text{et} \quad f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)} \star f.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \left\| (\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)} \right\|_r \|f\|_p, \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}(Rx),$$

donc

$$\left\| (\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)} \right\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \left\| (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)} \right\|_r,$$

i.e.,

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p, \quad \text{avec} \quad c = \left\| (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)} \right\|_r.$$

■

Lemme 1.4.1 Soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$, alors pour tout suite réelle positive $\{\epsilon_k\} \in \ell^q$, on a

$$\left\| a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j \right\|_{\ell^q} + \left\| a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^j \epsilon_j \right\|_{\ell^q} \leq c \|\epsilon_k\|_{\ell^q},$$

avec

$$\left(c = 2 \left(1 - a^{\min(1,q)} \right)^{\frac{-1}{\min(1,q)}} \right).$$

Preuve. le cas $1 \leq q \leq \infty$, on pose

$$\eta_k = a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j, \quad \eta'_k = a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^j \epsilon_j,$$

donc

$$\begin{aligned}\eta_k &= a^k \sum_{j=0}^k a^{-j} \epsilon_j \\ &= \sum_{j=0}^k a^{(k-j)\frac{1}{q}} \epsilon_j a^{(k-j)\frac{1}{q'}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\eta_k^q \leq \left(\sum_{j=0}^k a^{(k-j)} \epsilon_j^q \right) \left(\sum_{j=0}^k a^{(k-j)\frac{q}{q'}} \right),$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^N \eta_k^q &\leq \left(\sum_{i=0}^N a^i \right)^{\frac{q}{q'}} \left(\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=j}^{k=N} a^{(k-j)} \right) \\ &\leq \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left(\sum_{j \geq 0} \epsilon_j^q \right),\end{aligned}$$

donc

$$\|\eta_k\|_{\ell^q} \leq \frac{1}{1-a} \|\epsilon_j\|_{\ell^q}.$$

De même pour η' .

Pour le cas $0 < q < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^N \eta_k^q \leq \left(\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=j}^{k=N} a^{(k-j)q} \right).$$

Donc

$$\|\eta_k\|_{\ell^q} \leq \left(\frac{1}{1-a^q} \right)^{\frac{1}{q}} \|\epsilon_j\|_{\ell^q}.$$

■

1.5 Les fonctions à p -variations bornées

Dans cette section, nous rappelons quelques Définitions et propriétés concernant les fonctions à p -variations bornées.

Définition 1.5.1 [17] Soit $p \in [1, +\infty[$, alors une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à p -variation bornée, s'il existe $c > 0$ telle que

$$\sum_{K+1}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \leq c^p,$$

pour toutes les suites réelles finies $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ de I , le minimum de ses constantes c est noté par $\nu_p(f, I)$. Nous désignons par $\nu_p(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ à p -variations bornées.

• Nous utiliserons les abréviations $\nu_p = \nu_p(\mathbb{R})$ et $\nu_p(f) = \nu_p(f, \mathbb{R})$. En considérant une suite avec deux termes, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq \nu_p(f, I), \quad \forall x, y \in I. \quad (1.5)$$

Par conséquent, toute fonction de $\nu_p(I)$ est bornée.

• On peut facilement prouver que $\nu_p(I)$ devient un espace de Banach, s'il est muni de la norme suivante

$$\|f\|_{\nu_p(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)| + \nu_p(f, I), \quad \forall f \in \nu_p(I).$$

Proposition 1.5.1 Soit $a \in I^\circ$ et $I_1 =]-\infty, a[\cap I$, $I_2 = [a, +\infty[\cap I$

1. Si $f \in \nu_p(I)$, alors

$$\nu_p^p(f, I_1) + \nu_p^p(f, I_2) \leq \nu_p^p(f, I). \quad (1.6)$$

2. Si $f_j \in \nu_p(I_j)$ pour $j = 1, 2$, alors la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_{I_j} = f_j$ pour $j = 1, 2$, appartient à $\nu_p(I)$, de plus

$$\nu_p(f, I) \leq \nu_p(f_1, I_1) + \nu_p(f_2, I_2) + \sup_{I_1} |f_1| + \sup_{I_2} |f_2|. \quad (1.7)$$

Preuve. Voir [10] ■

1.6 Exemple de fonction dans l'espace de Besov

Dans cette section, on va donner un exemple de fonction dans l'espace de Besov

$$f(x) = vp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ (la valeur principal de } \frac{1}{x} \text{)}.$$

On a

$$\widehat{f}(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn} \xi$$

et

$$\sup p\widehat{\Delta_j} f \subset \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

D'après l'inégalité de Bernstein , on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2). \quad (1.8)$$

D'autre part , on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \widehat{\Delta_j f} \right\|_2, & (\text{plancherel}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \varphi(2^{-j}\cdot) \widehat{f} \right\|_2 \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}}, \end{aligned}$$

car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Alors l'équation (1.8) devient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1-\frac{1}{p})}, \quad c = c_1 c_2,$$

d'où

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s+\frac{1}{p})}.$$

La série $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p})q}$, $1 \leq q \leq +\infty$ converge si $s < -\frac{1}{p}$, ce qui donne $f(x) = vp\left(\frac{1}{x}\right) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans les deux cas suivants

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{p}, & 2 \leq p \leq +\infty, & q = +\infty, \\ s < -\frac{1}{p}, & 2 \leq p \leq +\infty, & 1 \leq q \leq +\infty. \end{cases}$$

Chapitre 2

Fonctions qui opèrent sur certains espaces fonctionnels

Dans ce chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. i.e., nous étudions les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

Nous avons alors les résultats suivants:

Théorème 2.0.1 [1] Soit $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, alors f est localement lipschitzienne.

Théorème 2.0.2 [1] Soit $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$). Si T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.

2.1 Quelques fonctions de test

Lemme 2.1.1 *soient $s > 0$. Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $c = c(u, s, p, q, n) > 0$ telle que*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jk} 2^{j((\frac{n}{p})-s)} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{jk}|^p \right)^{q/p} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jk} 2^{j((\frac{n}{p})-s)} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (|\alpha_{jk}| 2^{j\frac{n}{p}} \chi(2^j(\cdot) - k))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p,$$

où χ désigne la fonction caractéristique de Q .

Démonstration. Les estimations résultent des Théorèmes 3.1 de [12] et 5.3 de [11], appliqués à chaque fonction coordonnée de u . ■

Lemme 2.1.2 *pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.il existe une constante $c = c(u, s, p, q, n) > 0$ telle que*

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_k u(\cdot - k) \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^p \right)^{1/p}.$$

Démonstration. En faisant $j = 0$ dans le lemme 2.1.1, on a le résultat. ■

Lemme 2.1.3 *On suppose que $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit $0 < s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$), alors il existe une suite $(\phi_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , portées par Q , telles que $\phi_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et*

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\phi_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Démonstration. Dans le cas $s < \frac{n}{p}$, on pose $\phi_\nu(x) = \varphi(2^\nu x)$. l'estimation

$$\|\phi_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\nu(\frac{n}{p}-s)} \|\varphi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

■

permet de conclure.

Supposons maintenant $s = \frac{n}{p}$ et posons

$$\phi_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{1 \leq j \leq \nu} \varphi(2^j x).$$

On a donc $\phi_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$ et $\phi_\nu(x) = 0$ hors de Q .

Le lemme 2.1.1 donne les inégalités

$$\begin{aligned} \|\phi_\nu\|_{B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \nu^{-1} \sum_{1 \leq j \leq \nu} \varphi(2^j x) \right\|_{B_{p,q}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c\nu^{\left(\frac{1}{q}\right)-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\phi_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$

2.2 Résultats préliminaires

Lemme 2.2.1 soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Soit vérifier par toute fonction g portée par Q .

Démonstration. Supposons au contraire . que pour tout cube \mathcal{R} et tous nombres M et δ . on puisse trouver une fonction g .portée par \mathcal{R} . telle que

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \text{ et } \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} > M.$$

■

Donnons -nous une suite $(\mathcal{R}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de cube disjoints et des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ($j \geq 0$) telles que $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}\mathcal{R}_j$, et $\varphi_j(x) = 0$ hors de \mathcal{R}_j . On notr M_j la norme de l'opérateur $g \rightarrow \varphi_j g$, agissant sur $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. et on choisit des fonction

$$g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

telles que

$$\text{supp } g_j \subset \frac{1}{2}\mathcal{R}_j, \quad \|g_j\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-j}, \quad \|f \circ g_j\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} > jM_j.$$

Alors la fonction $g = \sum_{j \geq 0} g_j$ appartient à $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a $\varphi_j(f \circ g) = f \circ g_j$.
Donc

$$jM_j \leq \|(f \circ g) \varphi_j\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M_j \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour tout } j.$$

ce qui absurde.

Lemme 2.2.2 soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

soit vérifier par toute fonction g portée par Q .

Démonstration. En utilisant la même démonstration comme le lemme 3.4 ■

Lemme 2.2.3 soient $s > 0$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. alors quel que soit $a \in \mathbb{R}$. il existe un opérateur non linéaire

$$U_a : B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n).$$

et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$U_a g(x) = f(a + g(x)) - f(a), \quad \forall x \in Q.$$

et

$$\|U_a g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

pour toute fonctions $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. à support dans Q . satisfaisant

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_a g(x) = \varphi(x) (f(a + g(x)) - f(a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

■

On a alors

$$V_{a'}g(x) = \varphi(x)(f(\varphi(x/2))(a' + g(x))) - f(\varphi(x/2)a'), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$V_{a'}$ envoie donc $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ et, en raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.4. on voit qu'il existe un cube $Q' \subset Q$ et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \implies \|V_{a'}g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp } g \subset Q'$. Posons $Q' = rQ + b$, avec $r > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$, et

$$U_{a'}g(x) = V_{a'}(g(r^{-1}(\cdot - b)))(rx + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$U_{a'}g(x) = \varphi(rx + b)(f(a' + g(x)) - f(a')), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Par l'inclusion $Q' \subset Q$. nous avons $\varphi(rx + b) = 1$ sur Q .

Proposition 2.2.1 *soit $0 < s < \ell$ avec ℓ entier. une distribution f appartient à $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$N_{p,\ell}(f, t) = \sup_{0 < t \leq 1} t^{-s} \omega_{p,\ell}(f, t) < +\infty,$$

où $\omega_{p,\ell}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. De plus $\|f\|_p + N_{p,\ell}(f)$ est une norme équivalente dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. voir (14) ■

2.3 Preuve des Théorèmes 2.0.1 et 2.0.2

Soit b, b' dans \mathbb{R} . $N \geq 1$ et r, v qui seront choisis en fonction de b et b' . Nous considérons l'ensemble

$$A_N = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \leq N, \quad \forall j = 1, \dots, n\},$$

et nous définissons

$$\alpha = \frac{1}{2\ell+1},$$

où ℓ est un entier fixé tel que $\ell > s$, et la fonction

$$g(x) = \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right) (b\ell - b) + \phi_\nu(x) b.$$

Le lemme (3.2) donne l'inégalité

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \leq cr^{\left(\frac{n}{p}\right)-s} N^{\frac{n}{p}}.$$

2.3.1 Preuve du Théorème 2.0.1

Supposons l'opérateur de composition T_f envoie l'espace de Besov $B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ (c'est suffisant puisque l'espace $B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge dans tous les $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Soit un nombre réel a' qui reste fixé dans la suite de la preuve. Alors nous obtenons un opérateur $U_{a'}$ et des constantes δ, M selon le lemme (3.6). On prend $\nu = 1$ et

$$r = \frac{1}{6N}.$$

Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$, les cubes $r(2\alpha Q + k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjoints. par définition de r , nous avons $r(Q + k) \subset Q/2$ pour tout $k \in A_N$. Alors

$$U_{a'}g(x) = f(a'\ell + b\ell) - f(a'\ell), \quad \text{si } x \in r(\alpha Q + k) \text{ pour } k \in A_N,$$

$$U_{a'}g(x) = f(a'\ell + b) - f(a'\ell), \quad \text{si } x \in (Q/2) \setminus \cup_{k \in A_N} r(2\alpha Q + k).$$

Grâce au choix de r , on a

$$c^{-1}r^{s-\frac{n}{p}}N^{-\frac{n}{p}} \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{\infty} = c^{-1}6^{\frac{n}{p}-s}N^{-s} \|\varphi\|_{\infty} \leq c\ell.$$

On obtient

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 r^{\frac{n}{p}-s} N^{\frac{n}{p}}.$$

En utilisant la relation entre r et N , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) (b\ell - b) + \phi_\nu(x) b \right\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |b\ell - b| \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} + |b| \|\phi_1\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |b\ell - b| (c_1 N^s) + c|b| \\ &\leq c_2 N^s |b\ell - b| + c_2 |b| \\ &\leq c_2 (N^s |b\ell - b| + |b|) \end{aligned}$$

Maintenant on suppose

$$\max(|b|, |b - b'|) \leq \frac{\delta}{2c_2},$$

et on définit N par la propriété

$$N^s \leq \frac{\delta}{2c_2|b-b'|} < (N+1)^s.$$

Remarquons que la définition de N implique

$$N^s \geq \frac{\delta}{2^{s+1}c_2|b-b'|}.$$

Par la condition (3.5) et par définition de N . nous avons

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} &\leq c_2(N^s |b' - b| + |b|) \\ &\leq c_2 N^s |b' - b| + c_2 |b| \\ &\leq \frac{\delta}{2|b'-b|} |b' - b| + c_2 \frac{\delta}{2c_2} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

Puisque le support de g est inclus dans Q .on en déduit

$$\|U_{a'}g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\alpha Q^+ + k)$. nous avons

$$\begin{aligned} x + jr\alpha e_1 &\in r(Q + k), \quad \forall j = 0. \dots .\ell. \\ x + jr\alpha e_1 &\notin r(2\alpha Q + k), \quad \forall j = 1. \dots .\ell. \end{aligned}$$

Les relatios (3.3) et (3.4) donne aussitôt

$$|\Delta_{r\alpha e_1}^\ell(U_{a'}g)(x)| = |f(a' + b') - f(a' + b)|$$

Par la proposition 3.1 nous obtenons

$$\begin{aligned} \|U_{a'}g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} &\geq (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |\Delta_{r\alpha e_1}^\ell(U_{a'}g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |f(a' + b') - f(a' + b)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq c_3 |f(a' + b') - f(a' + b)| r^{-s} N^{\frac{n}{p}} r^{\frac{n}{p}} \\ &= c_4 N^s |f(a' + b') - f(a' + b)|. \end{aligned}$$

En prenant en compte les inégalités (3.6) et (3.7) . nous voyons que la conditions (3.5) implique

$$|f(a' + b') - f(a' + b)| \leq \frac{2^{s+1}Mc_2}{c_4\delta} |b - b'|,$$

qui signifie que f est lipschizienne dans un voisinage de a' .

2.3.2 Preuve du Théorème 2.0.2

Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du Théorème (3.2) on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma > 0$ et $K > 0$ telles que $|b' - b| \leq \delta$ entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq K |b' - b|,$$

quels que soient b et b' dans \mathbb{R} .

Soit la fonction g telle que

$$g(x) = \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right) (b' - b) + \phi_\nu(x) b.$$

Les entiers positifs ν et N .ainsi que le nombre $r \in]0, 1]$.seront précisé dans un instant.

Le lemme (3.3) nous autorise à choisir ν tel que

$$|b| \|\phi_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{2},$$

de sorte que N et r devront satisfaire les relations:

$$\begin{aligned} \delta (3 |b' - b|)^{-1} &< c_1 r^{\frac{n}{p}-s} N^{\frac{n}{p}} &\leq \delta (2 |b' - b|)^{-1}, \\ rN &< &2^{-\nu-2} \end{aligned}$$

L'estimation (3.2) et la relation (3.8) entraineront

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|g\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |b' - b| \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} + |b| \|\phi_\nu\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |b' - b| cN^{\frac{n}{p}} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \delta (2 |b' - b|)^{-1} |b' - b| + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta |b' - b|}{2 |b' - b|} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.9) nous garantit l'inclusion

$$r(Q+k) \subset 2^{-\nu}Q, \quad \text{pour } k \in A_N$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} g(x) &= b', & \text{si } x \in r(\alpha Q + k), \quad k \in A_N, \\ g(x) &= b, & \text{si } x \in 2^{-\nu}Q \setminus \bigcup_{k \in A_N} r(2\alpha Q + k). \end{aligned}$$

Pour $s < \frac{n}{p}$, il suffit de poser

$$r = \left(\delta (2c_1 |b' - b|)^{-1} N^{-\frac{n}{p}} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{p} - s}},$$

alors $rN = c |b' - b|^{\frac{1}{s - \frac{n}{p}}} N^{\frac{s - \frac{n}{p}}{s - \frac{n}{p}}}$ est de l'ordre de grandeur de $N^{\frac{s - \frac{n}{p}}{s - \frac{n}{p}}}$, l'hypothèse $0 < s < \frac{n}{p}$, un choix convenable $N = N(\delta, |b' - b|)$ permet d'avoir (3.9).

Supposons maintenant $s = \frac{n}{p}$.

Si $|b' - b| \leq \frac{\delta}{3}$. il est possible de trouver un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait (3.8). On choisit alors r assez petit pour avoir (3.9). il vient alors

$$\|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\alpha Q^+ + k)$. nous avons

$$x + jr\alpha e_1 \in r(Q+k) \setminus \bigcup_{k' \in A_N} r(2\alpha Q + k'), \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Alors (3.10), (3.11) et (3.12) nous donnent

$$|\Delta_{r\alpha e_1}^\ell (f \circ g)(x)| = |f(b') - f(b)|.$$

Par la Proposition (3.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} &\geq (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |\Delta_{r\alpha e_1}^\ell (f \circ g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |f(b') - f(b)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (r\alpha)^{-s} |f(b') - f(b)| \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (r\alpha)^{-s} |f(b') - f(b)| |r\alpha Q^+|^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in A_N} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |f(b') - f(b)| (2N+1)^{\frac{n}{p}} (r\alpha)^{-s} |r\alpha Q^+|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

L'encadrement (3.8) implique

$$\begin{aligned} |f(b') - f(b)| &\leq \frac{\|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)}}{(2N+1)^{\frac{n}{p}} (r\alpha)^{-s} |r\alpha Q|^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq c_1 M r^{s-\frac{n}{p}} N^{-\frac{n}{p}} \\ &\leq c_2 M \delta^{-1} |b' - b|, \end{aligned}$$

que signifie que f est globalement Lipschitzienne.

Chapitre 3

propriété de composition dans le cas critique de l'espace de Besov

Le calcul fonctionnel dans les espaces localisés-uniformes jouent un rôle dans diverses questions d'analyse mathématiques. Par exemple, si E est une algèbre de Banach de fonctions pour la multiplication usuelle, il est naturel de conjecturer que l'ensemble des multiplicateurs de E est précisément E_{lu} , conjecture confirmée dans le cas des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \frac{n}{2}$, plus de détaille (voir, [5]).

Ils interviennent aussi dans la caractérisation des fonctions , qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces fonctionnels. Ainsi, les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui opèrent, en ce sens, sur l'espace de Sobolev critique $W_p^m(\mathbb{R}^n)$. où l'entier m vérifie $m = \frac{n}{p} > 1$. sont précisément celles dont les dérivées appartiennent localement-uniformément à $W_p^{m-1}(\mathbb{R})$, voir [6]. L'extension de ce Théorème aux espaces de Sobolev fractionnaires est une question ouverte. Dans ce chapitre on va étudier L'opérateur de composition $T_f = f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov avec $p \in [1, +\infty]$, $q \in]1, +\infty]$ et $s = \frac{n}{p} > 1$. Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. alors f' appartient localement uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Définition 3.0.1 on dit que $f \in E_{loc-unif}$, si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

- (a) $(\tau_a \varphi) \cdot f \in E \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n),$
- (b) $\exists C_\varphi > 0$ tel que $\|(\tau_a \varphi) \cdot f\|_E \leq C_\varphi \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n).$

Proposition 3.0.1 *Si E est une algèbre, alors*

$$M(E) = E_{loc-unif}$$

Démonstration. *Soit $g \in M(E)$, on a*

$$\begin{aligned} \|(\tau_a \varphi) \cdot g\|_E &\leq \|g\|_{M(E)} \|\tau_a \varphi\|_E \\ &= \|g\|_{M(E)} \|\varphi\|_E = C_\varphi. \end{aligned}$$

■

D'où $g \in E_{loc-unif}$.

Inversement, soient $f \in E_{loc-unif}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi\psi = \varphi$, on a

$$\begin{aligned} \|f\varphi\|_E &= \|(f\psi)\varphi\|_E \\ &\leq \|f\psi\|_E \|\varphi\|_E. \end{aligned}$$

Car, $f\psi = f\tau_0\psi \in E$ et E est une algèbre, de plus

$$\|f\psi\|_E = \|f\tau_0\psi\|_E \leq C_\psi \quad (\text{par définition}),$$

d'où, $\|f\varphi\|_E \leq C\|\varphi\|_E$, par conséquent $f \in M(E)$.

Théorème 3.0.1 *pour $1 \leq p \leq \infty$. Alors on a*

$$M(L^p) = L^\infty.$$

Démonstration. Voir [5]

Définition 3.0.2 *Soit E est un E.B.D et m un entier positif l'espace de Sobolev $W^m(E)$ d'ordre m de base E est défini par*

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq m \}.$$

■

$W^m(E)$ est un E.B.D pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E$$

Lemme 3.0.1 [1] Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que $T_f = f \circ g$ envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par Q .

3.1 Localisation d'un espace de distribution

Définition 3.1.1 Soit E un espace de Banach de distribution dans \mathbb{R}^n . On dit que l'espace E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module si $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$.

Définition 3.1.2 Soit E un espace de Banach de distribution dans \mathbb{R}^n . E_{loc} est l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.1.1 Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \varphi f$ est bornée sur E , pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On a

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in \mathcal{C}^\infty \text{ donc } \varphi \text{ est continue.} \\ f \in E \implies \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ donc } f \text{ est continue} \end{cases}$$

■

Alors, φf est continue et puisque E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module (i.e., $\varphi f \in E$), donc on a

$$H : E \rightarrow E$$

$$f \rightarrow H(f) = \varphi f$$

est un opérateur linéaire et continue sur $E \implies H$ est bornée sur E .

Proposition 3.1.2 soit E un espace isométriquement invariant par translation. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, alors

$$\|\tau_a \varphi\|_{M(E)} = \|\varphi\|_{M(E)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 \|\tau_a \varphi\|_{M(E)} &= \sup_{\|f\|_E=1} \|\tau_a \varphi f\|_E \quad \forall f \in E, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \\
 &= \sup_{\|f\|_E=1} \|\varphi \tau_{-a} f\|_E \quad \forall f \in E, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \\
 &= \sup_{\|\tau_{-a} f\|_E=1} \|\varphi \tau_{-a} f\|_E, \quad \text{car } \tau_{-a} f \in E \\
 &= \|\varphi\|_{M(E)}.
 \end{aligned}$$

Proposition 3.1.3 Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module et si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les trois propriétés sont équivalentes

■

(i) $f \in E_{loc}$.

(ii) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a \varphi_0) f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

(iii) pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un cube ouvert D dans \mathbb{R}^n contenant a et $g \in E$ tels que $g/D = f/D$.

Démonstration. . (i) \implies (ii) ■

Si $f \in E_{loc} \implies \varphi f \in E, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

On a $\tau_a \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in (\mathbb{R}^n)$, donc $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive telle que

$$(\tau_a \varphi_0) f \in E$$

(ii) \implies (iii)

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{sur } \frac{1}{2}Q \\ \text{supp } \varphi \subset Q \end{cases}$$

(où Q est un cube ouvert dans \mathbb{R}^n contenant 0).

On a $\tau_a \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par (ii) $(\tau_a \varphi) f \in E$, et on a $\tau_a \varphi(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}Q + a$, donc

$$(\tau_a \varphi) f = f \quad \text{sur } \frac{1}{2}Q + a.$$

(iii) \implies (i)

Supposons que f à la propriété (iii), il existe les intervalles $I_j =$ et distributions $g_j \in E$ pour $j \in J = \{1, \dots, n\}$ telles que $g_j / D_j = f / D_j$.

On considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\text{supp}\varphi \subset \cup_{j \in J} D_j$.

Soit $(\varkappa_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité relative recouvrement $(D_j)_{j \in J}$ de $\text{supp}\varphi$ i.e., $\varkappa_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\sum_{j \in J} \varkappa_j(x) = 1$ pour $x \in \cup_{j \in J} D_j$, donc $\varphi = \varphi \sum_{j \in J} \varkappa_j$ i.e.,

$$\begin{aligned} f\varphi &= \sum_{j \in J} \varphi \varkappa_j f \\ &= \sum_{j \in J} \varphi \varkappa_j g_j \in E \end{aligned}$$

Donc $f \in E_{loc}$.

Définition 3.1.3 Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution f appartient (E_{lu}) localement uniformément à E si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a \varphi_0) f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et $\|f\|_{E_{lu}} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_E < +\infty$.

(ii) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a $(\tau_a \varphi) f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f\|_E < +\infty.$$

Proposition 3.1.4 [2] On a

$$(i) \Leftrightarrow (ii)$$

Démonstration. (i) \implies (ii) ■

Soient $\varphi, \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et Q un cube ouvert de \mathbb{R}^n tel que φ_0 ne s'annule pas sur Q .

On a $\text{supp}\varphi$ compacte $\implies \exists x_1, x_2, \dots, x_n$ dans \mathbb{R}^n tel que $\text{supp}\varphi \subset \cup_{j=1}^n (Q + x_j)$.

Il existe une fonction $\varkappa \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \varkappa(\tau_{x_j} \varphi_0).$$

Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 \|(\tau_a \varphi) f\|_E &\leq \sum_{j=1}^n \|(\tau_a \mathcal{X}) (\tau_{a+x_j} \varphi_0) f\|_E \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^n \|\tau_a \mathcal{X}\|_E \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^n \sup_{\|f\|_E=1} \|(\tau_a \mathcal{X}) f\|_E \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^n \|\tau_a \mathcal{X}\|_{M(E)} \\
 &\leq n \|\mathcal{X}\|_{M(E)} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

(ii) \implies (i) évidente.

Remarque 3.1.1 E_{lu} est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module isométriquement invariant par translation pour la norme $\|-\|_{E_{lu}}$.

Proposition 3.1.5 [2] Soit $p \in]0, +\infty[$. Alors une fonction mesurable f sur \mathbb{R}^n appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

où Q est un cube ouvert donné dans \mathbb{R}^n .

Démonstration. 1) Soit f une fonction telle que $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

■

On considère la fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\text{supp} \varphi_0 \subset Q \quad \text{et} \quad (\tau_a \varphi_0) f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 \|(\tau_a \varphi_0) f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{Q+a} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sup_{x \in (Q+a)} |\tau_a \varphi_0(x)| \right) \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sup_{x \in Q} |\varphi_0(x)| \right) \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|\varphi_0\|_\infty \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

2) On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ i.e., pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, On a $(\tau_a \varphi) f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et $\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f\|_p < \infty$.

On considère $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tel que $\psi(x) = 1$ sur Q , On obtient

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{Q+a} |(\tau_a \psi)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \psi) f\|_p \right) \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Proposition 3.1.6 [2] Soit E un $E.B.D.$ Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, isométriquement ininvariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}).$$

Démonstration. On a ■

$W^m(E)$ est un $E.B.D.$ pour la norme $\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E$.

$\varphi f \in W^m(E)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ car $\varphi f \in E$, donc $W^m(E)$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module.

$\tau_a f \in W^m(E)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $\|\tau_a f\|_{W^m(E)} = \|f\|_{W^m(E)}$ car $\varphi f \in E$, donc $W^m(E)$ est un isométriquement invariant par translation

$$\begin{aligned} f \in (W^m(E))_{lu} &\iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), (\tau_a \varphi) f \in (W^m(E)) \\ &\quad \text{pour } a \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f\|_{W^m(E)} < +\infty \\ &\iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), ((\tau_a \varphi) f)^{(\alpha)} \in E \\ &\quad \text{pour } a \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f^{(\alpha)}\|_E < +\infty, \quad |\alpha| < m \\ &\iff f \in (W^m(E_{lu})). \end{aligned}$$

Donc

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}).$$

3.2 propriété de composition dans l'espace de Besov

Soit f, g deux fonction quelconques

$$\text{On a } \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad h \in \mathbb{R}^n$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta_h(fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) \\ &= (\Delta_h f(x))\tau_{-h}g(x) + f(x)(\Delta_h g(x)). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h}g) + f(\Delta_h g), \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta_h^2(fg)(x) &= \Delta_h(\Delta_h(fg)(x)) \\ &= (\Delta_h^2 f(x))(\tau_{-2h}g(x)) + (\Delta_h^2 g(x))(\tau_{-h}f(x)) + (\Delta_h f(x))(\Delta_{2h}g(x)). \end{aligned}$$

i.e.,

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h}g), \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Delta_h^k = 2^{-k} \Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2, \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Pour tout sous ensemble borélien A de \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$\begin{aligned}\omega_{p,A}(f,t) &= \sup_{|u| \leq t} \left(\int_A |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \eta_{p,A}(f,t) &= \sup_{|u| \leq t} \left(\int_A |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Donc les cas $A = \mathbb{R}^n$, on pose

$$\begin{aligned}\omega_{p,\mathbb{R}^n} &= \omega_p, \\ \eta_{p,\mathbb{R}^n} &= \eta_p.\end{aligned}$$

Lemme 3.2.1 Soient $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$, alors il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , portées par $4Q$, telles que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{2-\nu}Q$ et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Démonstration. voir [1]. ■

Théorème 3.2.1 Soit $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors $f' \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$ localement uniformément.

Démonstration. On suppose que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$s = \frac{n}{p}, \quad m < s \leq m + 1 \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}, \quad q > 1.$$

■

Donc il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de classe \mathcal{C}^∞ , portées par $4Q$, telles que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{2-\nu}Q$ et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$

Par le lemme 3.0.1, il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans $4Q$.

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M. \quad (3.4)$$

Soit φ une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $4Q$ tel que $\varphi(x) = x$ sur $2Q$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $\nu \geq 1$, nous définissons la fonction g par

$$g(x) = a\theta_\nu(x) + b\varphi(2^\nu x). \quad (3.5)$$

On choisit $\nu = \nu(a) \geq 1$ tel que $\|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{2a}$, et on a

$$\|\varphi(\lambda(\cdot))\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c\lambda^{s-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (3.6)$$

On définit b par l'égalité

$$b = \frac{\delta}{2\|\varphi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} &\leq |a| \|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} + b \|\varphi(2^\nu(\cdot))\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

Par la construction de g , on voit que

$$\Delta_h(f \circ g)'(x) = c\Delta_h f'(2^\nu bx + a). \quad (3.7)$$

Nous avons f est lipschitzienne, donc on obtient

$$f' \in L^p(\mathbb{R})_{lu}. \quad (3.8)$$

Etape 1 Le cas $m < s < m + 1$.

Par l'implication (3.4) et la propriété, on obtient

$$\|(f \circ g)'\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leq M. \quad (3.9)$$

En appliquant (3.9) et (3.7), on voit aussitôt que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{m-s} \left(\int_{2^{-\nu}Q_n} |\Delta_{2^{-\nu}t}(f')(2^\nu bx + a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_1.$$

et donc

$$\left(\int_0^b \left(t^{m-s} \left(\int_{bQ_k+a} |\Delta_t(f')(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2. \quad (3.10)$$

pour $a \in \mathbb{R}^n$, on obtient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^b (t^{m-s} \omega_{p,bQ_k+a}(f',t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2.$$

i.e.,

$$f' \in (B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))_{lu}.$$

Etape 2 Le cas $s = m + 1$.

En utilisant l'implication (3.4) et la propriété, on obtient

$$\|(f \circ g)'\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leq M. \quad (3.11)$$

Par l'estimation (3.11) et l'égalité (3.7) nous obtenons

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^b (t^{-1} \eta_{p,bQ_k+a}(f', t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

i.e.,

$$f' \in (B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))_{lu}.$$

Conclusions générales et perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces de Besov de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. On a cherché à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, i.e., on a étudié les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

Finalement, on a étudié l'opérateur de composition $T_f = f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov avec $p \in [1, +\infty]$, $q \in]1, +\infty]$ et $s = \frac{n}{p} > 1$. Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors f' appartient localement uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

- Dans les travaux futurs, nous étudierons la propriété de composition sur d'autres espaces fonctionnels localisés uniformes.

Bibliographie

- [1] S.E. Allaoui, *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles*. Annales Mathématiques Blaise Pascal. **16** (2009), 399–429.
- [2] S.E. Allaoui, INTE'GRALES SINGULIE'RES. Thèse de Doctorat Université de Batna, 2011.
- [3] G. Bourdaud, *Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers*, Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.
- [4] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 983–986
- [5] G. Bourdaud, *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*. Pub. Math. Univ. Paris 7, (1987).
- [6] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev*, Invent. Math., **104** (1991) 435-446.
- [7] G. Bourdaud, D. Kateb, *Calcul fonctionnel dans certains espaces de Besov*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 153–162.
- [8] G. Bourdaud, D. Kateb, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1067–1076.
- [9] B. E. J. Dahlberg, *A note on Sobolev spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. **35** (1979), 183–185.

- [10] N. Ferahtia, Localisations sur les espaces de Lizorkin-Triebel et composition dans certains espaces de Besov localisés uniformes. Thèse de Doctorat Université de M'sila, 2021.
- [11] M. Frazier, B. Jawerth, *Decomposition of Besov Spaces*. Indiana Univ. Math. J. **84** (1985), 777–799.
- [12] M. Frazier, B. Jawerth, *A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces*. J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.
- [13] S. Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace A^2* . Ann. Inst. Fourier (Gronoble) **15** (1965), 525–536.
- [14] T. Runst, W. Sickel, Sobolev spaces of fractional order, Nemytzkij operators and non-linear partial differential equations. De Gruyter, Berlin, 1996.
- [15] H. Triebel, Theory of Function Spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [16] H. Triebel, Theory of Function Spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [17] N. Wiener, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. J. Math. Phys. **3**(1924), 72-94.

ملخص :

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة خصائص الدوال التي تؤثر بالتركيب على فضاءات بيزوف $B_{p,q}^s(R^n)$ ، من أجل $s > 0$ ، $p, q \in [1, +\infty]$. أي بمعنى، قمنا بدراسة الشروط الضرورية الخاصة بالدوال الليبشتيزية من أجل $s > 0$. أخيراً، قمنا بدراسة مؤثر التركيب $T_f = f \circ g$ على فضاءات بيزوف من أجل $p \in [1, +\infty], q \in [1, +\infty]$ و $s = \frac{n}{p} > 1$.

الكلمات المفتاحية : فضاءات بيزوف، مؤثرات التركيب، الدوال محدودية التغيرات ذات الرتبة p ، المحلية المنتظمة.

Abstract :

In this memory, we studied the functions which operate by left composition on the Besov spaces $B_{p,q}^s(R^n)$, where $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. i. e., we have studied the necessary Lipschitz conditions for $s > 0$. Finally, we studied the composition operator $T_f = f \circ g$ acting on Besov spaces with $p \in [1, +\infty], q \in [1, +\infty]$ and $s = \frac{n}{p} > 1$.

Key words: Besov spaces, Composition operators, Functions with bounded p -variations, Uniform localization.

Résumé:

Dans ce mémoire, on a étudié les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur les espaces de Besov $B_{p,q}^s(R^n)$, où $s > 0, p, q \in [1, +\infty]$. i.e., on a étudié les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$. Finalement, on a étudié l'opérateur de composition $T_f = f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov avec $p \in [1, +\infty], q \in [1, +\infty]$ et $s = \frac{n}{p} > 1$.

Mots-clés: Espaces de Besov, Opérateurs de composition, Les fonctions à p -variations bornées, Localisation uniforme.