

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de
Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème

A collocation method to solve the linear Volterra-Fredholm integral equations via Vieta-Pell Lucas polynomials

Présenté par:

Guidah Khadidja

Soutenu publiquement le : 10/6/2024

Devant le jury composé de :

<i>Amina KHIRANI</i>	<i>M.C.A,</i>	<i>Université de M'sila</i>	<i>Président</i>
<i>Noui DJAIDJA</i>	<i>M.C.B,</i>	<i>Université de M'sila</i>	<i>Encadreur</i>
<i>Nabila SEGHIRI</i>	<i>M.A.A,</i>	<i>Université de M'sila</i>	<i>Examineur</i>

Année universitaire : 2023/2024

الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا-فرد هولم التكاملية من النوع الثاني باستخدام كثيرات حدود فيتا بال لوكاس بالإضافة إلى ذلك، يتم تقديم بعض الأمثلة للتحقق من فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية لفولتيرا – المعادلات التكاملية فريدهولم – المعادلات فولتيرا-فرد هولم -التكاملية –كثيرات حدود فيتا بال ليكاس –طريقة التجميع

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est de trouver des solutions approximatives à l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du deuxième espèce en utilisant les polynômes de Vieta-Pell-Lucas. Des exemples sont donnés pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée.

les mots clés :

Equation intégrale de Volterra, Equation intégrale de Fredholm, Equation intégrales de Volterra-Fredholm, Polynôme Vieta-Pell Lucas, Méthode de collocation.

Abstract

The objective of this memory is to find approximate solutions to the Volterra-Fredholm integral equation of the second kind using Vieta-Pell-Lucas polynomials. Examples will be provided to illustrate the proposed method.

Keywords :

Volterra Integral Equations, Fredholm Integral Equations, Volterra-Fredholm Integral Equations, Vieta-Pell-Lucas Polynomials, Collocation method.

Remerciements

Je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr. Noui DJAIDJA** on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous les professeurs **Bachir GAGUI** et **KHIRANI Amina** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse et d'examiner ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail :

À la mémoire de mes grands-parents...

À mes parents, pour leurs sacrifices incommensurables, leur amour inconditionnel, leur tendresse infinie,

À mes sœurs et mes frères...

À ceux qui font mon bonheur chaque jour.

Table des matières

Introduction	iii
1 Notion d'analyse fonctionnelle	1
1.1 Espaces fonctionnelles	1
1.1.1 Espaces vectoriels normés	1
1.1.2 Espaces de Banach	1
1.1.3 Espaces de Hilbert	2
1.2 Opérateurs	2
1.2.1 Opérateurs linéaires	2
1.2.2 Opérateurs continus	3
1.2.3 Opérateurs bornés	3
1.2.4 Opérateurs compacts	3
1.2.5 Opérateurs intégraux	4
2 Equations intégrales	6
2.1 Classification des équations intégrales	6
2.1.1 Equations intégrales linéaires de Volterra	6
2.1.2 Equations intégrales linéaires de Fredholm	7
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm	7
2.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm	8
2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	11

2.3.1	La méthode de développement en Série	11
2.3.2	La méthode de décomposition d'Adomian	12
3	Résolution Numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm	14
3.1	Polynômes de vieta-pell-lucas	14
3.1.1	Polynômes de Vieta-Pell	14
3.1.2	Polynômes de Lucas	14
3.1.3	Polynômes de vieta-pell-lucas	14
3.2	Résolution Numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm	16
3.2.1	Méthode de collocation Vieta-Pell-Lucas:	16
3.3	Exemples Numériques	17
Conclusion		23
Bibliographie		25

Introduction

Les équations intégrales occupent une place fondamentale dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, chimiques et biologiques. Parmi les types d'équations intégrales, les équations de Volterra-Fredholm qui ont la forme:

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^x k_v(x,t)\varphi(t)dt - \lambda_2 \int_a^b k_f(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Résoudre analytiquement ces équations s'avère très difficile en raison de leur nature hautement complexe. En effet, les méthodes analytiques traditionnelles, ne sont souvent applicables qu'à des cas très spécifiques. Par conséquent, il est essentiel de développer des méthodes numériques précises pour obtenir des solutions approximatives de ces équations.

L'objectif principal de ce travail est de développer et de démontrer une méthode de collocation efficace utilisant les polynômes de Vieta-Pell-Lucas, permettant de trouver des solutions numériques précises à ces équations complexes.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

Premier chapitre : Nous introduisons les concepts fondamentaux et les théories de l'analyse, y compris les espaces de Hilbert et de Banach, ainsi que la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux. Cette base théorique est essentielle pour comprendre les équations intégrales et les méthodes de résolution.

Deuxième chapitre : Nous explorons l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales de Volterra-Fredholm et présentons plusieurs méthodes analytiques de résolution, telles que la méthode de solution en série et la méthode de décomposition d'Adomian. Des exemples illustratifs sont fournis pour chaque méthode.

Troisième chapitre : Nous détaillons la méthode numérique de collocation basée sur les polynômes de Vieta-Pell-Lucas. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de cette approche.

Chapitre 1

Notion d'analyse fonctionnelle

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) on appelle norme sur l'espace E toute application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant

Pour tout x, y dans E et $\lambda \in \mathbb{k}$

1- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

2- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.1.2 (suite de Cauchy). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une suite (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.3 (*Espace complet ou espace de Banach*). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente

Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach

Exemple: $(C[a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, est un espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.4 (*Produit scalaire*). Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Un produit scalaire sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{k}$

telle que pour tout x, y, z dans H et α, β dans \mathbb{k} on a :

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
4. $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 1.1.5 (*Espaces de Hilbert*). Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. Si, en plus, H est complet par rapport à la norme engendrée par le produit scalaire, alors H est dit un espace de Hilbert.

1.2 Opérateurs

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur $A : E \rightarrow F$ est dit linéaire si:

Pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$,

$$A(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha A(\varphi_1) + \beta A(\varphi_2)$$

1.2.2 Opérateurs continus

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire. On dit que A est continu si pour tout $x \in H_1$ et toute suite (x_n) dans H_1 telle que $x_n \rightarrow x$ dans H_1 la suite (Ax_n) converge vers Ax dans H_2 , c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = A(x)$$

Il est facile à voir que A est continue si A est continue au point zéro.

1.2.3 Opérateurs bornés

Une application linéaire A entre les espaces vectoriels normés E et F est appelée opérateur borné s'il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|Ax\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur A , il est facile de voir que A est borné si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{x \leq 1} \|Ax\| < \infty$$

1.2.4 Opérateurs compacts

Définition 1.2.2 Soient E et F deux espaces normés et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que A est compact si l'image par A de tout sous ensemble borné de E est relativement compact.

Définition 1.2.3 Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Théorème 1.2.1 Soient E et F deux espaces normés et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

A est compact si pour toute suite bornée $(\varphi_n) \subset E$, on peut extraire de la suite $A(\varphi_n) \subset F$ une sous suite $A(\varphi_{n(k)})$ qui converge dans F .

Preuve. Soit (φ_n) une suite bornée dans E , comme A est compact, alors $A(\varphi_n)$ est relativement compact dans F , cette propriété nous donne que $A(\varphi_n)$ contient une sous suite convergente dans F .

Inversement, prenons un sous-ensemble borné G dans E , et soit (ψ_n) une suite dans $A(G)$. Alors il existe une suite bornée (φ_n) dans G , telle que $A(\varphi_n) = \psi_n$. Par hypothèse $A(\varphi_n) = \psi_n$

contient une sous suite $(\psi_{n(k)})$ convergente dans F .

Donc $A(G)$ est relativement compact, car pour toute suite bornée (ψ_n) dans $A(G)$ il existe une sous suite $(\psi_{n(k)})$ convergente dans F ;

Autrement dit, pour toute ensemble borné $G \subset E$, l'ensemble $A(G)$ est relativement compact dans F , d'où A est compact. ■

Théorème 1.2.2 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateur compact.

Théorème 1.2.3 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

1.2.5 Opérateurs intégraux

Définition 1.2.4 On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,t)\varphi(t) dt, \quad x \in G_1$$

où $k(x, t)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(t)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Théorème 1.2.4 *L'opérateur intégral $A : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ défini par :*

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy \quad x, y \in \Omega$$

avec un noyau $k(x, y)$ continu est un opérateur compact.

Chapitre 2

Equations intégrales

Définition 2.0.5 Une équation intégrale est défini comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration , la forme générale d'une équation intégrale est:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt$$

où $f(x)$, $k(x, t)$, sont des fonctions données , Ω un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension fini (x et t points de cet espace), λ est un paramètre numérique et $\varphi(x)$ la fonction inconnue

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales linéaires de Volterra

Définition 2.1.1 La forme générale de l'équation intégrale linéaire de Volterra est :

$$P(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt, \quad a < x, t < b. \quad (2.1.1)$$

où $P(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

1) Si $P(x) = 0$ l'équation (2.1.1) s'écrit sous la forme:

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

et appelée équation intégrale linéaire de Volterra du premier espèce.

2) Si $P(x) = 1$ l'équation (2.1.1) s'écrit sous la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt$$

et appelée équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce.

2.1.2 Equations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 2.1.2 La forme générale de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est :

$$P(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt, \quad a < x, t < b. \quad (2.1.2)$$

où $P(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

1) Si $P(x) = 0$, l'équation (2.1.2) s'écrit sous la forme:

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

et appelée équation intégrale linéaire de Fredholm du premier espèce.

2) Si $P(x) = 1$ l'équation (2.1.2) s'écrit sous la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt$$

et appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce.

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Définition 2.1.3 L'équation intégrale de Volterra-Fredholm a la forme suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_v(x, t)\varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_f(x, t)\varphi(t) dt \quad a \leq x, t \leq b \quad (2.1.3)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer, $f(x)$, $k_v(x, t)$, $k_f(x, t)$ sont des fonctions données, λ_1, λ_2 sont des paramètres réels

2.2. Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale mixte de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt dx$$

Exemple 2.1.1

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3x^2 + x + \int_0^x x \varphi(t) dt - \int_0^1 t \varphi(t) dt \\ \varphi(x) &= x + \frac{17}{2} x^2 - \int_0^x \int_0^1 (x-t) \varphi(t) dt dx \end{aligned}$$

2.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.3)

Définition 2.2.1 (Norme de Bielecki). L'application $\|\cdot\|_B : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\|\varphi\|_B = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| e^{-c(x-a)}, \quad c > 0$$

est appelée la norme de Bielecki

Définition 2.2.2 Soit E un espace normé. Un opérateur $A : E \rightarrow E$ est un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in E$ unique telque:

$$A(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n(\varphi) = \varphi_0 \text{ pour tout } \varphi \text{ de } E.$$

Théorème 2.2.1 (principe de contraction). Soit E un espace normé. Si $A : E \rightarrow E$ un opérateur de contraction admet un point fixe unique φ_0 , alors T est un opérateur de Picard et

$$\|\varphi_0 - A^n(\varphi)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - A(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2.2. Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Théorème 2.2.2 [6] (d'existence et d'unicité). On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_v(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_f(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \quad (2.2.1)$$

Si:

1- $f \in C[a,b]$, $k_v \in C(D_1)$, $k_f \in C(D_2)$, tel que $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x \leq b\}$ et $D_2 = (a,b) \times [a,b]$.

2- $M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_v(x,t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_f(x,t)|$

3- Supposons qu'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\frac{1}{c}[M_1 + M_2e^{c(b-a)}] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C[a,b]$.

Preuve. Soit l'opérateur integral $A : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$, défini par:

$$A\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_v(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_f(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x) - A\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_v(x,t)(\varphi(t) - \psi(t))dt + \int_a^b k_f(x,t)(\varphi(t) - \psi(t))dt \right| \\
&\leq \int_a^x |k_v(x,t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt + \int_a^b |k_f(x,t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\
&\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} e^{c(t-a)} dt + M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} e^{c(t-a)} dt \\
&\leq M_1 \max_{t \in [a,b]} |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} \int_a^x e^{c(t-a)} dt + \\
&\quad M_2 \max_{t \in [a,b]} |(\varphi(t) - \psi(t))| e^{-c(t-a)} \int_a^b e^{c(t-a)} dt \\
&\leq M_1 \|\varphi - \psi\|_B \int_a^x e^{c(t-a)} dt + M_2 \|\varphi - \psi\|_B \int_a^b e^{c(t-a)} dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c} (e^{c(x-a)} - 1) + \frac{M_2}{c} (e^{c(b-a)} - 1) \right] \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c} e^{c(x-a)} + \frac{M_2}{c} e^{c(x-a+b-x)} \right] \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-x)}) \|\varphi - \psi\|_B \\
&\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| e^{-c(x-a)} \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B \text{ Pour tout } x \in [a, b]$$

Par conséquent,

$$\|A\varphi(x) - A\psi(x)\|_B \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|_B$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)})$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Ainsi, nous appliquons le principe de contraction. ■

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

2.3.1 La méthode de développement en Série

la méthode de développement en série sera appliquée d'une façon semblable pour résoudre les équation intégrales linéaires de Volterra-Fredholm . Cette méthode consiste à représenter la solution de l'équation intégrale comme une série infinie de fonctions, et a déterminer les coefficients de la série en utilisant les propriétés de l'équation intégrale.

Rappelons que la formule de Taylor á $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

Nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégral linéaire de volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_v(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_f(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.2)$$

Pour résoudre cette équation intégrale a l'aide de la méthode des solution sous forme de série nous supposons que la solution $\varphi(x)$ peut être représentée par une série infinie de fonction de la forme donné en (2.3.1) .En Substituant cette expression dans l'équation (2.3.2) nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt$$

ou $T(f(x))$ est le devloppement de Taylor de la fonction f pour plus de simplicité on utilise

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots &= T(f(x)) + \int_0^x k_v(x, t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt + \\ &\int_a^b k_f(x, t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt \\ &= T(f(x)) + \left(\int_0^x k_v(x, t)a_0dt + \int_0^x k_v(x, t)a_1tdt + \int_0^x k_v(x, t)a_2t^2dt + \dots\right) + \\ &\left(\int_a^b k_f(x, t)a_0dt + \int_a^b k_f(x, t)a_1tdt + \int_a^b k_f(x, t)a_2t^2dt + \dots\right) \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1

$$\varphi(x) = 2 - x - x^2 - 6x^3 + x^5 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt \quad (2.3.3)$$

En remplaçant $\varphi(x)$ dans l'équation (2.3.3) par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.4)$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 - x - x^2 - 6x^3 + x^5 + \int_0^x (t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) dt + \int_{-1}^1 ((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt$$

En évaluant les intégrales du côté droit, en utilisant quelques termes des deux côtés, et en collectant les coefficients de puissances similaires de x , nous trouvons:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots &= 2 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 + (-1 + 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4) x + \\ &(-1 + \frac{1}{2} a_0) x^2 + (-6 + \frac{1}{3} a_1) x^3 + \frac{1}{4} a_2 x^4 + (1 + \frac{1}{5} a_3) x^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

En égalant les coefficients de puissances similaires de x des deux cotés de (2.3.5) et en résolvant le système d'équations résultant, nous obtenons

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -5, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0$$

La solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = 2 + 3x - 5x^3$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian

la méthode de décomposition Adomien consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ de l'équation (2.3.2) en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série suivante:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$$

En plaçant cette série dans l'équation (2.3.2), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x k_v(x, t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t) \right) dt + \int_a^b k_f(x, t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t) \right) dt$$

La composante $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus dans le signe intégral

Par conséquent, les composantes $\varphi_j(x), j \geq 1$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminées en définissant la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_{n+1}(x) &= \int_0^x k_v(x, t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_f(x, t) \varphi_n(t) dt \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

l'équation sous forme de série s'obtient facilement en utilisant l'hypothèse de série décrite on voit clairement que la méthode de décomposition convertissait l'équation intégral en une détermination élégante

de composantes calculables.

Exemple 2.3.2 Utilisez la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante:

$$\varphi(x) = \cos(x) - \sin(x) + 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^\pi (x-t) \varphi(t) dt$$

L'équation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = \cos(x)$$

$$\varphi_1(x) = -\sin(x) - 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^1 (x-t) \varphi(t) dt = 0$$

par conséquent la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos(x)$$

Chapitre 3

Résolution Numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Polynômes de vieta-pell-lucas

3.1.1 Polynômes de Vieta-Pell

Les polynomes de pell $P_n(x)$ sont definis par la relation de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 0, P_1(x) = 1 \\ P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x), n \geq 2 \end{array} \right\}$$

3.1.2 Polynômes de Lucas

Les polynomes de pell $L_n(x)$ sont definis par la relation de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2, L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) &= xL_n(x) + L_{n-1}(x), n \geq 1, \end{aligned}$$

3.1.3 Polynômes de vieta-pell-lucas

Les polynômes de Vieta-Pell Lucas $S_n(x)$ sont définis par la relation de récurrence suivante:

$$S_0(x) = 2, \quad S_1(x) = 2x$$

$$S_n(x) = 2xS_{n-1}(x) - S_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

Les premiers termes de $S_n(x)$ sont les suivants:

$$S_0(x) = 2$$

$$S_1(x) = 2x$$

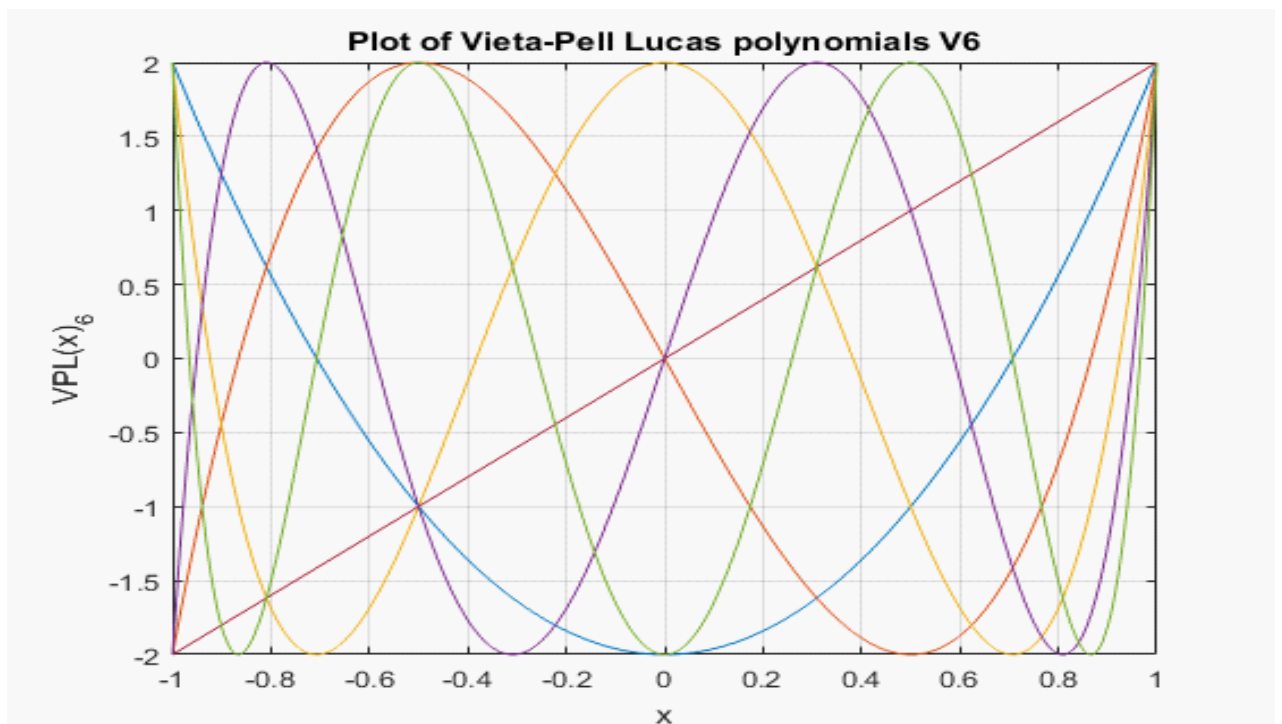
$$S_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$S_3(x) = 8x^3 - 6x$$

$$S_4(x) = 16x^4 - 16x^2 + 2$$

$$S_5(x) = 32x^5 - 40x^3 + 10x$$

$$S_6(x) = 64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 2$$



3.2 Résolution Numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.2.1 Méthode de collocation Vieta-Pell-Lucas:

On considère l'équation de volterra-fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_v(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_f(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b \quad (3.2.1)$$

on suppose que

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^n b_j S_j \quad (3.2.2)$$

où $S_n(x)$ sont les polynomes de vieta-pell-lucas de degré n défini sur $[a, b]$ et b_j des coefficients à déterminer.

Substituant (3.2.1) dans(3.2.2) on obtient

$$\sum_{j=0}^n b_j S_j(x) = f(x) + \int_a^x k_v(x, t) \sum_{j=0}^n b_j S_j(t)dt + \int_a^b k_f(x, t) \sum_{j=0}^n b_j S_j(t)dt$$

d'où

$$\sum_{j=0}^n b_j (S_j(x) - \int_a^x k_v(x, t)S_j(t)dt - \int_a^b k_f(x, t)S_j(t)dt) = f(x). \quad (3.2.3)$$

l'équation (3.2.3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n b_j W_j(x) &= f(x) \\ W_j(x) &= S_j(x) - \int_a^x k_v(x, t)S_j(t)dt - \int_a^b k_f(x, t)S_j(t)dt \end{aligned}$$

alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points x_i

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=0}^n b_j W_j(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

l'équation (3.2.4) représente un système linéaires de $(n + 1)$ inconnue qui s'écrit sous la forme

$$MB = F$$

$$M = W_{ji}, j, i = 0, 1, \dots, n$$

$$B = (b_0, b_1, \dots, b_n)^t, F = (f_0, f_1, \dots, f_n)^t$$

$$B = M^{-1}F$$

3.3 Exemples Numériques

Dans cette section, nous allons traiter quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm par la méthode de collocation basée sur les polynômes de VPL.

Exemple 01.

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce:

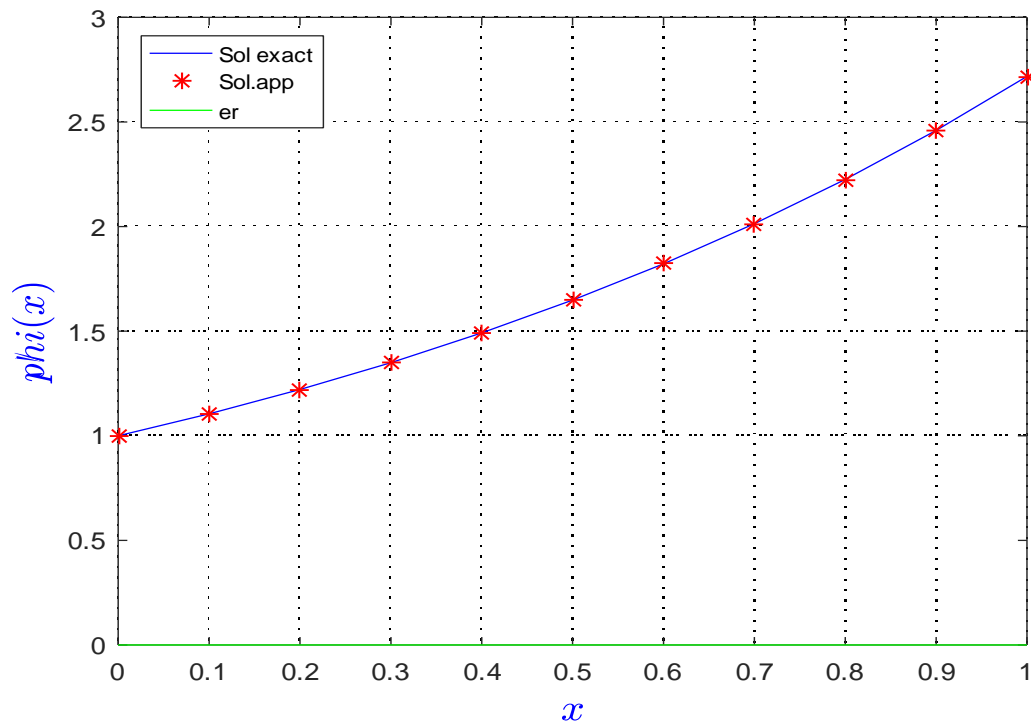
$$\varphi(x) = e^x + (x-1)e^x - xe^{-x^2} (e^x - 1) + 1 + \int_0^x (x^2 - t)\varphi(t)dt + \int_0^1 (xt+x)\varphi(t)dt =, 0 \leq x, t \leq 1,$$

la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(x).$$

Table 01. Nous présentons la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basée sur les polynômes de VPL. , l'erreur est calculée pour $N = 10$

val x	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	err
0	1.0000e+00	1.0000e+00	6.8775e-10
$1.0000e - 01$	1.1052e+00	1.1052e+00	5.2904e-10
$2.0000e - 01$	1.2214e+00	1.2214e+00	3.8006e-10
$3.0000e - 01$	1.3499e+00	1.3499e+00	2.3399e-10
$4.0000e - 01$	1.4918e+00	1.4918e+00	8.0708e-11
$5.0000e - 01$	1.6487e+00	1.6487e+00	8.8719e-11
$6.0000e - 01$	1.8221e+00	1.8221e+00	2.7769e-10
$7.0000e - 01$	2.0138e+00	2.0138e+00	4.8036e-10
$8.0000e - 01$	2.2255e+00	2.2255e+00	6.7919e-10
$9.0000e - 01$	2.4596e+00	2.4596e+00	8.4427e-10
$1.0000e + 00$	2.7183e+00	2.7183e+00	9.3463e-10

**Exemple 02.**

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 \sin(x-t)\varphi(t)dt =, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

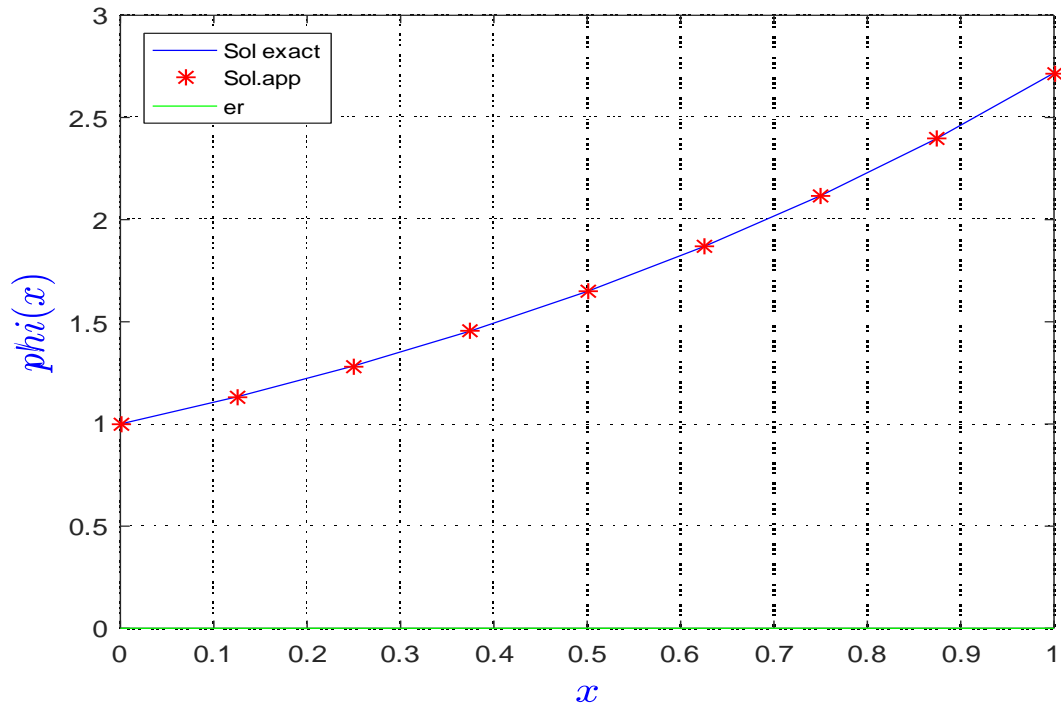
$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\exp(x)) - \frac{1}{2}e \cos(1) \cos(x) - \frac{1}{2}e(\cos(1) \sin(x)) + \frac{1}{2} \sin(1) \cos(x) - \frac{1}{2}e \sin(1) \sin(x)$$

la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(x).$$

Table 02. Nous présentons la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basée sur les polynômes de VPL. , l'erreur est calculée pour $N = 8$

val x	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	err
0	1.0000e+00	1.0000e+00	5.0112e-11
1.2500e-01	1.1331e+00	1.1331e+00	3.7862e-11
2.5000e-01	1.2840e+00	1.2840e+00	3.6335e-11
3.7500e-01	1.4550e+00	1.4550e+00	2.7555e-11
5.0000e-01	1.6487e+00	1.6487e+00	1.5260e-11
6.2500e-01	1.8682e+00	1.8682e+00	3.2605e-12
7.5000e-01	2.1170e+00	2.1170e+00	2.5379e-11
8.7500e-01	2.3989e+00	2.3989e+00	5.5010e-11
1.0000e+00	2.7183e+00	2.7183e+00	7.2926e-11

**Exemple 03.**

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce:

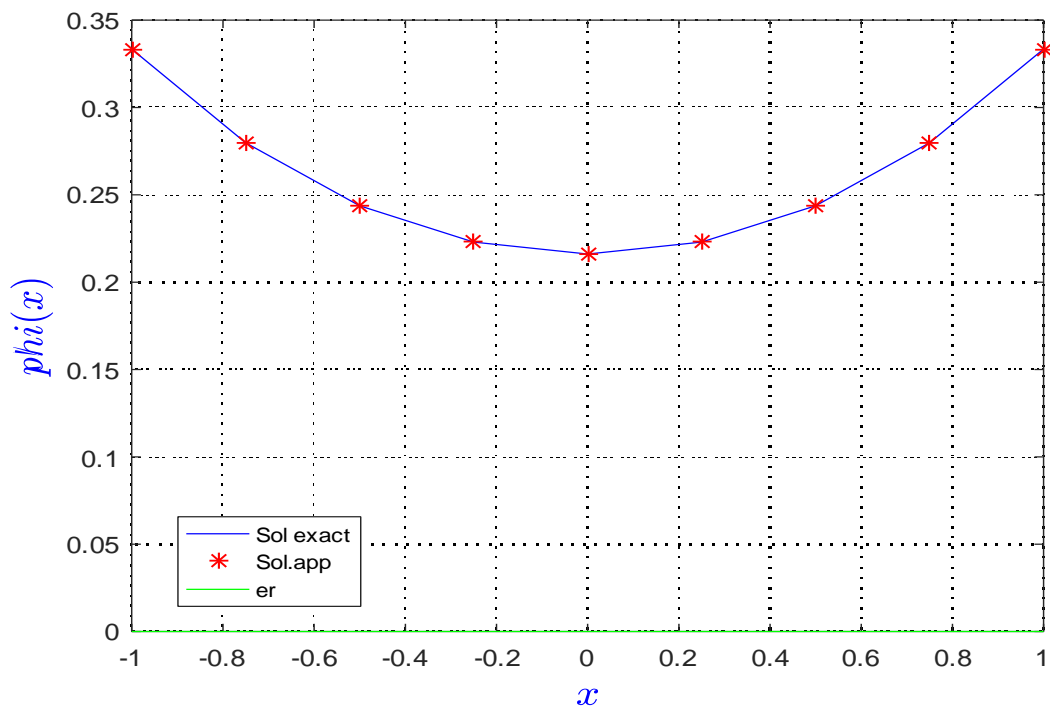
$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-1}^x xt\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 2 \cosh(x+t)\varphi(t)dt, \quad -1 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de sorte que la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(2) + 1}.$$

Table 03. Nous présentons la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basée sur les polynômes de VPL. , l'erreur est calculée pour $N = 8$

val x	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	err
-1.0000e+00	3.3350e-01	3.3350e-01	3.7578e-10
-7.5000e-01	2.7982e-01	2.7982e-01	2.4618e-10
-5.0000e-01	2.4371e-01	2.4371e-01	2.3257e-10
-2.5000e-01	2.2292e-01	2.2292e-01	2.0129e-10
0	2.1613e-01	2.1613e-01	1.7327e-10
2.5000e-01	2.2292e-01	2.2292e-01	1.5590e-10
5.0000e-01	2.4371e-01	2.4371e-01	1.5459e-10
7.5000e-01	2.7982e-01	2.7982e-01	1.8888e-10
1.0000e+00	3.3350e-01	3.3350e-01	1.1721e-10



Exemple 04.

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce:

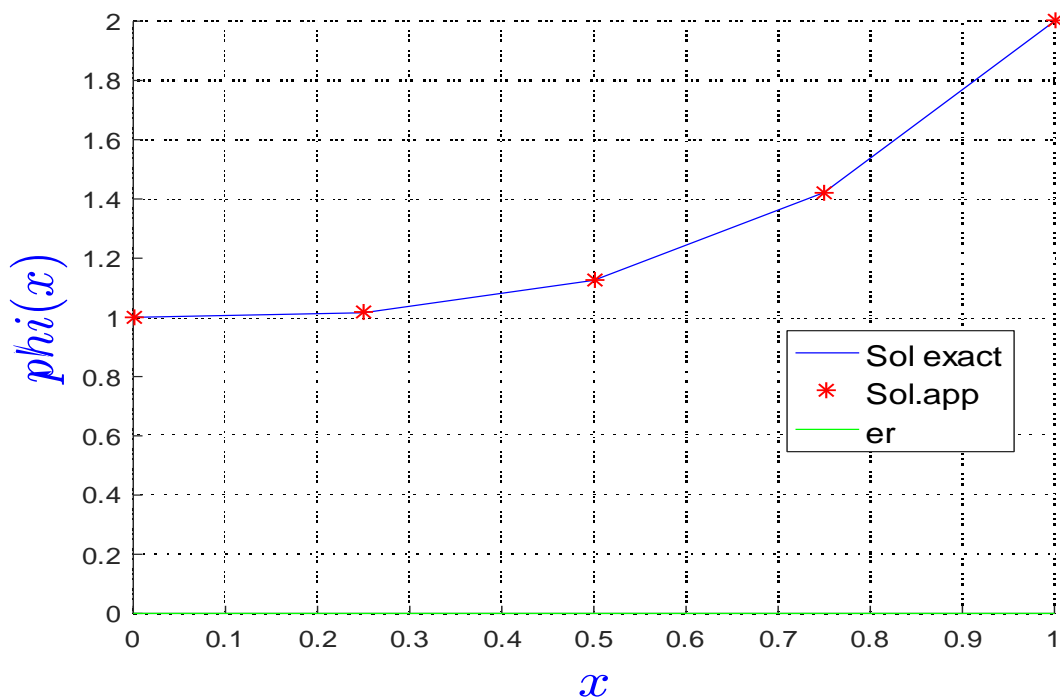
$$\varphi(x) = -\frac{2}{5}x^7 - \frac{5}{4}x^4 + x^3 - \frac{59}{20}x + 1 + \int_0^x (2x^2t + 1)\varphi(t)dt + \int_0^1 x(t+1)\varphi(t)dt =, \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ donnée par:

$$\varphi_{ex}(x) = x^3 + 1.$$

Table 04. Nous présentons la solution approchée φ_{app} obtenue par la méthode de collocation basée sur les polynômes de VPL. , l'erreur est calculée pour $N = 4$

val x	$\varphi_{ex}(x)$	φ_{app}	err
0	1.0000e+00	1.0000e+00	1.8541e-14
2.5000e-01	1.0156e+00	1.0156e+00	1.9984e-14
5.0000e-01	1.1250e+00	1.1250e+00	2.0872e-14
7.5000e-01	1.4219e+00	1.4219e+00	1.9762e-14
1.0000e+00	2.0000e+00	2.0000e+00	1.3767e-14



Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté plusieurs méthodes analytiques pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de seconde espèce, notamment la méthode des solutions sous forme de série et la méthode de décomposition d'Adomian. Sur le plan numérique, nous avons utilisé la méthode de collocation basé sur les polynômes de Vieta-Pell Lucas pour approximer ces équations . La méthode de collocation consiste à projeter cette équation dans un sous-espace de dimension finie, où nous cherchons à approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des éléments de la base de Vieta-Pell Lucas. Nous fournissons également quelques exemples pour illustrer l'applicabilité de cette méthode.

Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples démontrent l'efficacité et la précision de cette méthode.

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] A.M Wazwaz linear and nonlinear intigral equation.methods and application soint xavier iniversity
- [3] Noui DJAIDJA,Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [4] Sarra Gouadria ,Sur la réolution numéreqes des équations integrales de Volterraa-Fredholm, Thèse de Master,Université de M'sila.2023.
- [5] F. Calio , E. Marchetti, V. Muresan, On some Volterra-Fredholm integral equations,International Journal of Pure and Applied Mathematics,Volume 31 No. 2 2006, 174-184.
- [6] Brunner, H. (1990). On the numerical solution of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by collocation methods. SIAM Journal on Numerical Analysis, 27(4), 987-1000.
- [7] Hasan, P. M. A., & Sulaiman, N. A. (2018). Numerical treatment of mixed Volterra-Fredholm integral equations using trigonometric functions and laguerre polynomials. ZANCO J. Pure Appl. Sci, 30, 97-106.
- [8] Wang, K.Y.; Wang, Q.S.Lagrange collocation method for solving Volterra–Fredholm integral equations. Appl. Math. Comput. 219, 10434–10440 (2013).

- [9] Tasci, D., & Yalcin, F. (2013). Vieta-Pell and Vieta-Pell-Lucas polynomials. *Advances in Difference Equations*, 2013, 1-8.
- [10] Nemati, S. (2015). Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using Legendre collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 278, 29-36.
- [11] Ahmad, A. (2021). Solving of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations via Modification of Block Pulse Functions. *Jurnal Matematika Integratif*, 17(1), 33-42.
- [12] Negarchi, N., & Nouri, K. (2018). Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using the collocation method based on a special form of the Müntz–Legendre polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 344, 15-24.
- [13] Horadam, A. F., & Mahon, J. M. (1985). Pell and pell-lucas polynomials. *Fibonacci Quart*, 23(1), 7-20.
- [14] Mustafa, M. M., & Ghanim, I. N. (2014). Numerical solution of linear Volterra-Fredholm integral equations using Lagrange polynomials. *Mathematical Theory and Modeling*, 4(5), 137-146.
- [15] Hesameddini, E., Khorramizadeh, M., & Shahbazi, M. (2017). Bernstein polynomials method for solving Volterra-Fredholm integral equations. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 59-68.