REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

# *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique
**Filière** : Mathématiques
**Option** : EDPs et applications

# Thème

---

*Étude d'une équation de la chaleur dans des domaines plans*

---

**Présentée par :**
*LAKEL* Nadjett

**Devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M^r$ *MOKHTARI* Abdelhak | M.C.B, | Université de M'sila | **Président**. |
| $M^r$ *SAADI* Abderachid | M.C.A, | Université de M'sila | **Encadreur**. |
| $M^r$ *MIHOUBI* Hamza | M.C.B, | Université de M'sila | **Examinateur**. |

Année universitaire 2019/2020

# Remerciements


Je remercie avant tous ALLAH pour son aide, se ALLAH
qui m'a donné la force, la volonté et la moral pour accomplir mon étude en master en mathématique

Ainsi, je tiens également à ex
dreur **Mr. SAADI Abderachid** pour avoir d'abord pro
suivi continuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et il n'a pas ce

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr. MOKHTARI Abdelhak** et **Mr. MIHOUBI Hamza** d'avoir acce

Je remercie évidemment me
couragé
étude

Je voudrais également remercier tous me
de deuxième année Master EDP et applications, et nous le
bonheur et réussite dans la vie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

A tous MERCI

# Dédicaces

Je dédie ce mode

À me

À me

À ma chère soeur ; Soumia.

À toute ma famille.

À me

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.

NADJETT

# Table des matières

# Notation

| | |
|---|---|
| $\lvert\cdot\rvert$ | La valeur absolue. |
| $(.,.)$ | Produit scalaire. |
| $\langle .,. \rangle$ | Produit de dualité (crochet de dualité) entre l'espace et son dual. |
| $\mathcal{D}(\Omega)$ | L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\Omega$. |
| $\mathcal{L}(E,F)$ | L'espace des opérateurs linéaires continues de $E$ dans $F$. |
| $L(E,F)$ | L'espace des opérateurs linéaires de $E$ dans $F$. |
| $\chi(L)$ | L'indice de $L$, $\chi(L) = \dim Ker(L) - \dim CoKer(L)$. |
| $\dim CoKer(L)$ | $=$ codim $Im(L)$. |
| $Ker(L)$ | $= \{u \in E : L(u) = 0_F\} \subseteq E$. |
| $Im(L)$ | $= \{L(u) \in F : u \in E\} \subseteq F$. |
| $\hookrightarrow_c$ | L'injection compact. |
| $q$ | L'exposant conjugué de $p$, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. |
| $B_E$ | La boule d'unité fermée de l'espace $E$, i.e. $B_E := \{x \in E, \lVert x\rVert \leq 1\}$. |
| $B(0,1)$ | La boule d'unité ouverte de centre $0$ et de rayon $1$, i.e. $B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \lVert x\rVert < 1\}$. |
| $\nabla u$ | Gradient de $u$, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. |
| $W^{1,p}(\Omega)$ | $= \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in L^p(\Omega)\}$. |
| $J_G(t,x)$ | La matrice Jacobienne de $G$ au point $(t,x)$. |
| $\lvert J_G(t,x)\rvert$ | Le déterminant de la matrice Jacobienne de $G$ (le Jacobien). |
| $p.p.$ | Presque partout. |
| $\overline{\Omega}$ | La fermeture de $\Omega$. |

# Introduction générale

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, décrit par les variables $(t, x)$ et dont le bord $\Gamma$ est orienté dans le sens direct. On note $\Gamma_N$ (resp. $\Gamma_C$) l'ensemble (éventuellement vide) des segments de $\Gamma$ qui sont parallèles à l'axe des $x$ et orientés dans le sens direct (resp. dans le sens opposé).

On définit les espaces :

$$H_\sigma^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L_\sigma^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\sigma^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x} \in L_\sigma^2(\Omega); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_\sigma^2(\Omega) \right\},$$

où $\sigma$ est une fonction de $t$ strictement positive et continûment dérivable dans un intervalle borné qu'on précisera. $L_\sigma^2(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\sigma dt dx$. $H^{1,2}(\Omega)$ désignera l'espace $H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ correspondant au poids $\sigma \equiv 1$.

$$E = \left\{ u \in H_\sigma^{1,2}(\Omega) : u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0 \right\}.$$

Le but de ce travail est de déterminer des conditions (suffisantes) sur l'ouvert non rectangulaire $\Omega$ et le poids $\sigma$ pour que l'opérateur de la chaleur $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ soit un isomorphisme de $E$ dans $L_\sigma^2(\Omega)$, en d'autres termes on se propose de résoudre le problème (1) suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_\sigma^{1,2}(\Omega) : \\ Lu = f \in L_\sigma^2(\Omega) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Plus précisément on considère un ouvert borné $\Omega$ tel que :

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b\, ,\, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\},$$

où $(\varphi_i)_{i=1,2}$ désigneront toujours des fonctions lipschitziennes dans $]a, b[$ et vérifiant :

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in ]a, b[,$$

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [a, b].$$

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous allons faire un rappel sur les espaces fonctionnels, principalement espaces de fonctions continues, espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev et espaces de Sobolev et de Lebesgue avec poids, ensuite on donnera quelques définitions et propriétés utiles sur les opérateurs linéaires et les fonctions lipschitziennes.
Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), dans un domaine plan rectangulaire (i.e. $\Omega = ]0, T[\times]0, 1[$).
Dans le dernier chapitre, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), dans un domaine qui se ramène à un rectangle par un changement de variables conservant le temps, i.e. lorsque $\Omega$ est tel que

$$\varphi_1(a) < \varphi_2(a) \text{ et } \varphi_1(b) < \varphi_2(b) \quad (\text{i.e. } \Gamma_C \neq \emptyset \text{ et } \Gamma_N \neq \emptyset).$$

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

# Préliminaires et notions de base

Dans ce chapitre préliminaire, on donnera quelques généralités sur les espaces fonctionnels, principalement espaces de fonctions continues, espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev et espaces de Sobolev et de Lebesgue avec poids, et quelques définitions et notions de base dans ce travail sur les opérateurs linéaires et les fonctions lipschitziennes.

## 1.1 Espaces fonctionnels

On appelle espace fonctionnel un ensemble des fonctions ayant une structure d'espace vectoriel.

Dans ce que suit, on considère $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue $dx$.

### 1.1.1 Espaces de fonctions continues

On note $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq m$, la dérivée $D^\alpha \varphi$ existe et est continue sur $\Omega$.

On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont dérivables de dérivées premières $D\varphi$ continues sur $\Omega$.

On note $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables (c'est-à-dire, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ la dérivée $D^\alpha \varphi$ existe, elle sera alors forcément continue sur $\Omega$). Nous notons $\mathcal{C}^m(\Omega) = \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R})$.

### 1.1.2 Espaces de Lebesgue

**Définition 1.1.** Soit $1 \leq p < +\infty$, on pose

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

**Corollaire 1.1.** *Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on peut muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx \, ; \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

**Définition 1.2.** On pose

$$L^{\infty}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et il existe } c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf \{c : |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

**Définition 1.3.** **(Espaces $L^p(a, b; H), 1 \leq p \leq +\infty$).** Soient $H$ un espace de Hilbert et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On désigne par $L^p(a, b; H)$ l'espace des classes des fonctions

$$\begin{array}{rcccl} f & : & ]a,b[ & \longrightarrow & H, \\ & & t & \longmapsto & f(t), \end{array}$$

vérifiant

(i) $f$ est mesurable,

(ii) $\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|_H^p \, dt < +\infty$ pour $1 \leq p < +\infty$,

(iii) $\displaystyle\sup_{t \in ]a,b[} \text{ess} \, \|f(t)\|_H < +\infty$ pour $p = +\infty$.

L'espace $L^p(a, b; H)$ est de Banach muni de la norme

$$\begin{cases} \left[\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|_H^p \, dt\right]^{1/p} & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\sup_{t \in ]a,b[} \text{ess} \, \|f(t)\|_H & \text{si} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

**Remarque 1.1.** Si $p = 2$, $L^2(a, b; H)$ est un espace de Hilbert et l'application

$$(u, v) \longmapsto (u, v)_{L^2(a,b;H)} = \int_a^b (u(t), v(t))_H \, dt$$

définit un produit scalaire sur $L^2(a, b; H)$.

**Proposition 1.1.** *(**Inégalité de Hölder**). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $q$ l'exposant conjugué de $p$ c-à-d : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

*Alors on a*

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^q(\Omega)}. \end{cases}$$

### 1.1.3 Espaces de Sobolev

**Définition 1.4.** Soient $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On appelle espace de Sobolev d'ordre $m$ et on le note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ est la dérivée partielle de $u$ d'ordre $\alpha$ au sens des distributions définie par :

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha u \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{avec } \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } \ 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } \ p = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.2.** *$(W^{m,p}(\Omega); \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

**Remarque 1.2.** L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est :

1. réflexif pour $1 < p < +\infty$,
2. séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

**Définition 1.5.** Pour $p = 2$, on pose

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\right\},$$

muni de la produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

**Proposition 1.3.** *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

**Définition 1.6.** On pose

$$H^1(\Omega) := \left\{ u : u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme correspondante sera notée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Définition 1.7.** (**Espace** $H_0^1(\Omega)$). Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\Omega$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

C'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

**Définition 1.8.** (**Espaces de Sobolev fractionnaire.** Voir [2, page 194]).
Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in ]1,+\infty[$. On définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

**Proposition 1.4.** *(Voir [2, page 194]). Pour $s \in ]0,1[$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dxdy \right)^{1/p},$$

*est un espace de Banach.*

**Proposition 1.5.** *(Voir [2, page 189]). Soient $s \in ]0,1[$ , $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$. On pose*

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

**Théorème 1.1.** *(**Théorème de traces.** Voir [6, volume 2, page 10]).*
*Soit $\Sigma$ est la frontière de $Q$, avec $Q = \Omega \times ]0, T[$. Pour $u \in H^{r,s}(Q)$ [1] avec $r > \frac{1}{2}$, $s \geq 0$, on peut définir*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^j u}{\partial \eta^j} \quad sur \quad \Sigma \quad si \quad j < r - \dfrac{1}{2} \quad (j \; entier \geq 0), \\ \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \eta^j} \in H^{\mu_j,\nu_j}(\Sigma) \quad (\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \;\; \text{dérivée normale à } \Sigma, \text{ orientée vers l'intérieur de } Q), \end{cases}$$

*où*

$$\frac{\mu_j}{r} = \frac{\nu_j}{s} = \frac{r - j - \frac{1}{2}}{r} \qquad (\nu_j = 0 \quad si \quad s = 0),$$

*les applications $u \longmapsto \dfrac{\partial^j u}{\partial \eta^j}$ étant linéaires continues de $H^{r,s}(Q) \longrightarrow H^{\mu_j,\nu_j}(\Sigma)$.*

*On peut également définir, si $s > \frac{1}{2}$, $r \geq 0$ :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) \quad sur \quad \Omega \quad si \quad k < s - \dfrac{1}{2} \quad (k \; entier \geq 0), \\ \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) \in H^{p_k}(\Omega), \end{cases}$$

*où*

$$p_k = \frac{r}{s}(s - k - \frac{1}{2}),$$

*les applications $u \longmapsto \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0)$ étant continues de $H^{r,s}(Q) \longrightarrow H^{p_k}(\Omega)$.*

1. Pour la définition de l'espace $H^{r,s}(Q)$ voir [6, volume 2, page 07-10].

### 1.1.4 Espaces de Sobolev et de Lebesgue avec poids

Soit $\sigma : \Omega \longrightarrow ]0, +\infty[$ une fonction strictement positive et continûment dérivable dans $\Omega$.

**Définition 1.9. (Espaces $L^p_\sigma(\Omega), 1 \leq p < +\infty$).** On appelle espace de Lebesgue avec poids $\sigma$ et on le note $L^p_\sigma(\Omega)$ l'espace :

$$L^p_\sigma(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega \sigma(x) \left| f(x) \right|^p dx < +\infty \right\}.$$

$L^p_\sigma(\Omega)$ est le Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^p_\sigma(\Omega)} = \left[ \int_\Omega \sigma(x) \left| f(x) \right|^p dx \right]^{1/p}.$$

**Corollaire 1.2.** *Pour $p = 2$, l'espace $L^2_\sigma(\Omega)$ défini par*

$$L^2_\sigma(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ mesurable et } \int_\Omega \sigma(x) \left| f(x) \right|^2 dx < +\infty \right\},$$

*est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{L^2_\sigma(\Omega)} = \int_\Omega \sigma(x) f(x) g(x) dx \,; \quad \forall f, g \in L^2_\sigma(\Omega).$$

*La norme correspondante sera notée*

$$\|f\|_{L^2_\sigma(\Omega)} = \left[ \int_\Omega \sigma(x) \left| f(x) \right|^2 dx \right]^{1/2}.$$

**Définition 1.10. (Espace $H^{1,2}_\sigma(\Omega)$).** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On définit l'espace de Sobolev avec poids $H^{1,2}_\sigma(\Omega)$ par :

$$H^{1,2}_\sigma(\Omega) = \left\{ f \in L^2_\sigma(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^2_\sigma(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_2} \in L^2_\sigma(\Omega), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \in L^2_\sigma(\Omega) \right\},$$

c'est un espace de Hilbert, muni de la norme :

$$\|f\|_{H^{1,2}_\sigma(\Omega)} = \left[ \|f\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \right]^{1/2}.$$

## 1.2 Opérateurs linéaires compacts

**Définition 1.11.** (Opérateur linéaire). Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$.
On dit que l'application $U$ définie sur $E$ dans $F$ est une application linéaire ou un opérateur linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

**Définition 1.12.** (Opérateur borné). Soient $(E; \|.\|_E)$ et $(F; \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $U$ défini sur $E$ dans $F$ est dit borné (continue) s'il existe une constante positive $C \geq 0$ telle que

$$\|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E ; \quad \forall x \in E.$$

**Définition 1.13.** (Opérateur compact). Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur borné. On dit que $T$ est un opérateur compacte si l'image par $T$ de la boule unité $B_E$ est relativement compacte dans $F$. C-à-d

$$T \text{ est compacte} \Leftrightarrow \overline{T(B_E)} \text{ est compacte dans } F.$$

**Définition 1.14.** (Opérateur isomorphisme). Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Si l'application linéaire $L : E \longrightarrow F$ est bijective continue et $L^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue, on dit que

$$L \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F.$$

**Définition 1.15.** (Opérateur linéaire à indice. Voir [4, page 01]).
On dit qu'un opérateur $L \in L(E, F)$ admet un indice si $Ker(L)$ et $CoKer(L)$ sont de dimension finie, l'indice de $L$ est alors la quantité

$$\chi(L) = \dim Ker(L) - \dim CoKer(L).$$

**Théorème 1.2.** *(Voir [4, page 06]). Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur à indice. Pour tout opérateur compact $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a*

$$L + T \text{ admet un indice et } \chi(L + T) = \chi(L).$$

## 1.3 Fonctions lipschitziennes

**Définition 1.16.** Soient $(E; \|.\|_E)$ et $(F; \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que $f$ est lipschitzienne s'il existe une constante positive $M > 0$ telle que

$$\forall x, y \in E \text{ on a } \|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x - y\|_E.$$

**Définition 1.17.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $f$ est localement lipschitzienne si, pour tout $x$ de $I$, il existe un intervalle $]a, b[$ contenant $x$ et un réel $K$ tel que

$$\forall u, v \in ]a, b[ \text{ on a } |f(u) - f(v)| \leq K |u - v|.$$

**Théorème 1.3.** *(**Théorème de Cauchy-Lipshitz**). Soit le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

*Si la fonction $f$ est continue et lipshitzienne par rapport a $y$ sur $I \times \Omega$ ( avec $I, \Omega \subset \mathbb{R}$ ), alors*

*il existe une solution unique $y = h(x)$ du problème (1.1).*

**Théorème 1.4.** *(**Théorème de Rademacher.** Voir [3, page 216]). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lipschitzienne, alors*

*$f$ est differentiable p.p. sur $\Omega$.*

**Définition 1.18.** (**Domaine lipschitzien**). Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega$ est borné. Alors $\Omega$ est appelé un domaine lipschitzien ou **«à frontière lipschitzienne»** s'il existe des ouverts $(\Omega_i)_{i=0,\ldots,n} = \{\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et des application $(\varphi_i)_{i=0,\ldots,n}$, telles que :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$,
- $\varphi_i : \Omega_i \longrightarrow B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ bijectives et $\varphi_i$ et $\varphi_i^{-1}$ sont lipschitziennes,
- $\varphi_i(\Omega_i \bigcap \Omega) = B(0,1) \bigcap \mathbb{R}^n_+$ où $\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x, y) : x \in \mathbb{R}^*_+, y \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}$,
  $\varphi_i(\Omega_i \bigcap \partial\Omega) = B(0,1) \bigcap \{(0, y) : y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Chapitre 2

# Équation de la chaleur dans des ouverts rectangulaires

Dans ce chapitre on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition aux limite homogène de Dirichlet-Neumann, dans un domaine plan rectangulaire.

## 2.1 Position du problème

On considère le problème :

$$\begin{cases} Lu = f \in L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{dans } \Omega = ]0, T[\times]0, 1[, \\ u|_{\Gamma\backslash\Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma\backslash\Gamma_N} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec

$\sigma \in \mathcal{C}^1([0, T])$ une fonction strictement positive,

$L : E \longrightarrow L^2_\sigma(\Omega)$ un opérateur défini par

$$Lu(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \tag{2.2}$$

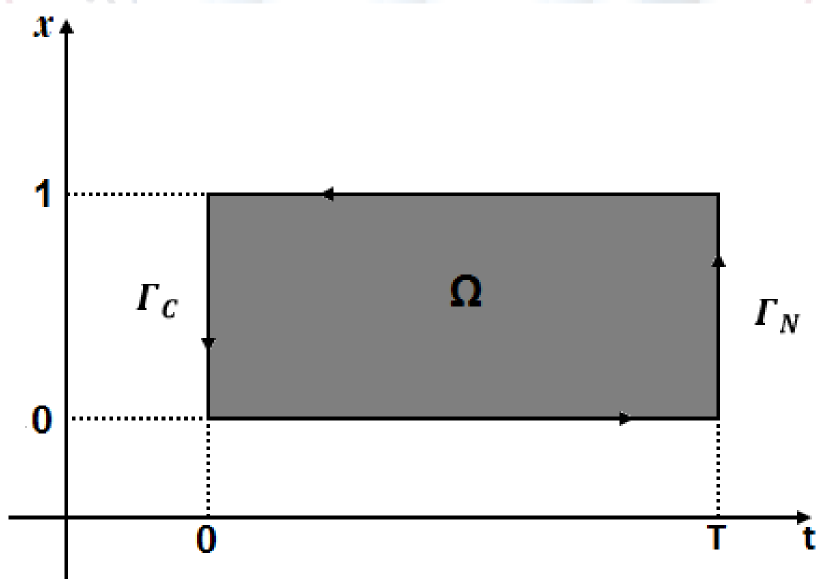
$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée dans $L^2_\sigma(\Omega)$.

$\Gamma$ est la frontière de $\Omega$.

$\Gamma_N = \{T\} \times [0, 1]$ est le segment de $\Gamma$ et orienté dans le sens de l'axe des $x$.

$\Gamma_C = \{0\} \times [0, 1]$ est le segment de $\Gamma$ et orienté dans le sens opposé.

**Voir figure**



Posons :

$$AU = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad BU = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad U' = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Donc, l'opérateur $L$ devient

$$LU = AU + U'.$$

Le problème (2.1) se ramène à :

$$\begin{cases} LU = AU + U' = f \in L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{dans } \Omega = ]0, T[\times]0, 1[, \\ BU = g \quad \text{sur } \Gamma, \\ U(0, x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ U \in H^{1,2}_\sigma(\Omega), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $g \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma)$ ( d'après le Théorème de traces 1.1 ), avec $g = 0$ sur $\Gamma \backslash \Gamma_N$.

## 2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

On va démontrer ici qu'il existe une solution unique du problème (2.3) et nous obtenons le même résultat pour le problème originale (2.1).

**Pour cela, on a les cas suivants :**

### 2.2.1 Cas où $\sigma \equiv 1$ et $g \equiv 0$

**Théorème 2.1.** *Le problème (2.3) admet une solution unique $U \in H^{1,2}(\Omega)$ quand $f \in L^2(\Omega)$ et $g \equiv 0$.*

**Démonstration.**

**• L'existence :**

On va considérer $A$ comme un opérateur non borné dans $H = L^2(\Omega)$, avec

$$D(A) = \left\{ V \in H^2(\Omega) : BV = 0 \, \text{sur} \, \Gamma \right\}.$$

Soit $\mathcal{D}'_+(H)$ [1] l'espace des distributions dépendant de $t$, à valeur dans $H$ et nulles pour $t < 0$.

1. Pour la définition de l'espace des distributions $\mathcal{D}'_+(H)$ voir [6, volume 2, page 22].

Soit $w$ une distribution vérifiant :

$$\begin{cases} w \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{L}\,(H, D(A))), \\ \left(A + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) * w = \delta \otimes I_H, \\ w * \left(A + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) = \delta \otimes I_{D(A)}, \end{cases}$$

où

$\delta$ la mesure de Dirac, $I_H$ l'identité dans $H$ et $I_{D(A)}$ l'identité dans $D(A)$.

"$\otimes$" produit tensoriel[2] , "$*$" produit de convolution en $t$[3] .

L'existence de $w$ est assurée d'après **la démenstration du Théorème 3.1** (voir [6, volume 2, page 23]). De plus, $w$ admet un transfomation de Laplace en $t$[4] et à support dans $\{t \geq 0\}$.

Soit $\widetilde{f}$ le prolongement de $f$ par $0$ hors de $]0, T[$.

Posons

$$U = w * \widetilde{f}, \tag{2.4}$$

on a

$$\begin{aligned} AU + U' &= A\left(w * \widetilde{f}\right) + \left(w * \widetilde{f}\right)' \\ &= Aw * \widetilde{f} + \frac{\partial w}{\partial t} * \widetilde{f} \\ &= \left(Aw + \frac{\partial w}{\partial t}\right) * \widetilde{f} \\ &= (\delta \otimes I_H) * \widetilde{f} \\ &= \widetilde{f}. \end{aligned}$$

Alors

$$U' = \widetilde{f} - AU.$$

Donc $U' \in L^2(\Omega)$.

2. Pour la définition du produit tensoriel de distributions, avec quelques propriétés générales voir [5, tome 1, page 207-212].

3. Pour la définition du convolution de distributions, avec quelques propriétés générales voir [5, tome 1, page 213-226].

4. Pour la transfomation de Laplace en $t$ (au sens des distributions) voir [11].

Maintenant, par définition de $U$ on a

$$U = 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \quad \text{et} \quad U(0) = 0,$$

et on a

$$U \in D(A) \quad \text{implique} \quad BU = 0.$$

Donc $U = U|_{]0,T[}$ est la solution du problème (2.3).

• **L'unicité :**

Soient $U_1, U_2$ deux solutions du problème (2.3), alors

$$U = U_1 - U_2,$$

est une solution du problème (2.3) pour $f = 0$.

Soit $\widetilde{U}$ le prolongement de $U$ par $0$ hors de $]0, T[$.

D'après **la démenstration du Théorème 3.2** (voir [6, volume 2, page 25]), nous avons :

$$A\widetilde{U} + \left(\widetilde{U}\right)' = U(T) \otimes \delta(t - T),$$

on a aussi d'après **la démenstration du Théorème 3.1** (voir [6, volume 2, page 23]) :

$$\begin{aligned} \widetilde{U} &= w * (U(T) \otimes \delta(t - T)) \\ &= w(t - T)U(T), \end{aligned}$$

mais on a

$$w(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0,$$

donc

$$w(t - T) = 0 \quad \text{si} \quad t < T.$$

C'est-à-dire

$$\widetilde{U} = 0 \quad \text{sur} \quad ]0, T[.$$

Alors

$$U = \widetilde{U}|_{]0,T[} = 0.$$

Ce qui donne l'unicité ($U_1 = U_2$). ■

### 2.2.2 Cas où $\sigma \equiv 1$ et $g \neq 0$

**Théorème 2.2.** *Le problème (2.3) admet une solution unique $U \in H^{1,2}(\Omega)$ pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma)$ avec $g = 0$ sur $\Gamma \backslash \Gamma_N$.*

**Démonstration.**
Posons

$$U = U_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Donc

$$U_0(0, x) = 0.$$

Alors

$$BU_0 = g = 0 \quad \text{sur} \quad ]0, T[\times \{0, 1\} \, ,$$

qui est un relation de compatibilité.
Donc d'après la **Remarque 4.1** (voir [6, volume 2, page 30]), il existe un solution unique du problème (2.3). ∎

### 2.2.3 Cas où $\sigma \in \mathcal{C}^1([0,T])$

**Théorème 2.3.** *Le problème (2.1) admet une solution unique* $u \in H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ *pour* $f \in L_\sigma^2(\Omega)$.

**Démonstration.**

Puisque $\sigma = \sigma(t)$ (ne depend que de $x$). On a

$$\frac{\partial(\sigma u)}{\partial t} - \sigma' u = \sigma \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2(\sigma u)}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \ \text{ implique } \ \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sigma f.$$

Donc

$$\frac{\partial(\sigma u)}{\partial t} - \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \sigma u + \frac{\partial^2(\sigma u)}{\partial x^2} \right) = \sigma f.$$

Posons

$$\sigma u = v \quad \text{et} \quad \sigma f = h.$$

L'équation précédent devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left( \frac{\sigma'}{\sigma} v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = h.$$

D'autre par, on a

$$f \in L_\sigma^2(\Omega) \quad \text{implique} \quad h \in L^2(\Omega).$$

Aussi, on a

$$u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0 \quad \text{implique} \quad v|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0,$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \frac{\partial(\sigma u)}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \sigma \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N},$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0 \quad \text{implique} \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0.$$

Nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\sigma'}{\sigma} v - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = h \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \ \Omega = ]0,T[\times]0,1[, \\ v|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \dfrac{\partial v}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Posons

$$Av = -\frac{\sigma'}{\sigma}v - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v' \quad \text{et} \quad Bv = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

On revient au problème :

$$\begin{cases} Av + v' = h \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega = ]0,T[\times]0,1[, \\ Bv = g, \\ v(0,x) = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où $g$ est considère comme dans (2.4) .

D'après le **paragraphe 6** (voir [6, volume 2, page 36]), on trouve le

**Théorème 2.4.** *Le problème (2.6) admet une solution unique $v \in H^{1,2}(\Omega)$, pour $h \in L^2(\Omega)$.*

**Il reste de montrer que $u \in H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ :**

On a $v \in H^{1,2}(\Omega)$, alors

1. $\displaystyle\int_\Omega v^2 dtdx < +\infty,$
2. $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dtdx < +\infty,$
3. $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dtdx < +\infty,$
4. $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dtdx < +\infty.$

• On a

$$\int_\Omega \sigma u^2 dtdx = \int_\Omega \frac{1}{\sigma} v^2 dtdx.$$

Comme $\sigma \in \mathcal{C}^1([0,T])$ et $\sigma \neq 0$, alors

$$\frac{1}{\sigma} \in \mathcal{C}^1([0,T]) \quad \text{implique} \quad \frac{1}{\sigma} \in L^\infty([0,T]),$$

on a aussi

$$\sigma' \in \mathcal{C}([0,T]) \quad \text{implique} \quad \sigma' \in L^\infty([0,T]).$$

Donc

$$\int_\Omega \sigma u^2 dtdx \leq \left\| \frac{1}{\sigma} \right\|_{L^\infty([0,T])} \|v\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

D'où $u \in L^2_\sigma(\Omega)$.

• D'autre par, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dtdx &= \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dtdx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\sigma'}{\sigma}v\right)^2 dtdx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 v^2 - 2\frac{\sigma'}{\sigma}v\frac{\partial v}{\partial t}\right] dtdx \\
&\overset{-2ab\leq a^2+b^2}{\leq} \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 v^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dtdx \\
&= \int_\Omega \frac{2}{\sigma}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 v^2\right] dtdx \\
&\leq \left\|\frac{2}{\sigma}\right\|_{L^\infty([0,T])}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{2\sigma'^2}{\sigma^3}\right\|_{L^\infty([0,T])}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2_\sigma(\Omega)$.

•Et on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dtdx &= \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dtdx \\
&\leq \left\|\frac{1}{\sigma}\right\|_{L^\infty([0,T])}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2_\sigma(\Omega)$.

• Et on a aussi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dtdx &= \int_\Omega \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dtdx \\
&\leq \left\|\frac{1}{\sigma}\right\|_{L^\infty([0,T])}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2_\sigma(\Omega)$.

On obtient finalement $u \in H^{1,2}_\sigma(\Omega)$. ■

CHAPITRE 3

# ÉQUATION DE LA CHALEUR DANS DES OUVERTS SE RAMENANT À UN RECTANGLE

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition aux limite homogène de Dirichlet-Neumann, dans un domaine plan non rectangulaire.

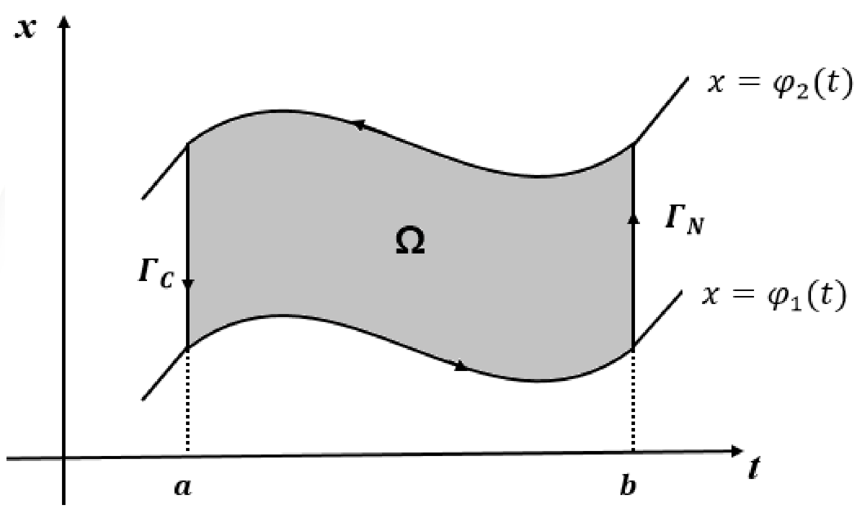
## 3.1 Position du problème

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ décrit par les variables $(t, x)$, tel que

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b\,,\, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\},$$

où $\varphi_1(a) < \varphi_2(a)$, $\varphi_1(b) < \varphi_2(b)$ et $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont des fonctions lipschitziennes.

**Voir figure**




avec :

$\Gamma$ est la frontière de $\Omega$.

$\Gamma_N$ est le segment (éventuellement vide) de $\Gamma$ et orienté dans le sens de l'axe des $x$.

$\Gamma_C$ est le segment (éventuellement vide) de $\Gamma$ et orienté dans le sens opposé.

Nous considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} Lu = f \in L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma\setminus\Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma\setminus\Gamma_N} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où

$\sigma \in \mathcal{C}^1([a, b])$ une fonction strictement positive,

$L : E \longrightarrow L^2_\sigma(\Omega)$ un opérateur défini par

$$Lu(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \tag{3.2}$$

$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée dans $L^2_\sigma(\Omega)$.

Pour étudier ce problème, on va le transformer à un problème de domaine rectangulaire, on va alors transformer $\Omega$ vers $R = ]a,b[\times]0,1[$, en utilisant le changement de variables suivant :

## 3.2 Changement de variable

On pose :

$$\begin{array}{rcccl} F_t & : & [\varphi_1(t), \varphi_2(t)] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & F_t(x) = Ax + B, \end{array}$$

telle que pour tout $t \in ]a,b[$, on a

$$\begin{cases} F_t(\varphi_1(t)) = 0, \\ F_t(\varphi_2(t)) = 1, \end{cases}$$

alors

$$A\varphi_1(t) + B = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi_2(t) + B = 1,$$

donc

$$A = \frac{1}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)},$$

d'où il vient

$$F_t(x) = \frac{x - \varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}, \qquad \forall t \in ]a,b[.$$

On définit le changement de variables comme suit :

$$\begin{array}{rcccl} G & : & \Omega & \longrightarrow & R = ]a,b[\times]0,1[, \\ & & (t,x) & \longmapsto & G(t,x) = \left(t, \dfrac{x - \varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}\right) = (\tau, \xi). \end{array}$$

On remarque que $G$ est une fonction affine, et on a $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a,b[$, alors $G$ est une fonction lipschitzienne sur $\Omega$. D'après le Théorème de Rademacher 1.4 , $G$ est differentiable p.p. sur $\Omega$.

**Proposition 3.1.** *Le changement de variables $G$ conserve les directions parallèles à l'axe des $x$.*

**Preuve.** Claire, car le changement de variable qui transforme l'ensemble des segments $[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ qui sont parallèles à l'axe des $x$ vers $[0,1]$ est une fonction affine, et ceci pour tout $t \in [a,b]$. ■

## 3.3 Problème rectangulaire

Soit $u(t,x) = v(\tau,\xi)$, $f(t,x) = g(\tau,\xi)$ et $\widetilde{L}$ un opérateur défini sur $R$ tel que

$$\widetilde{L}v(\tau,\xi) = \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + a(t,x)\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) - b(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\tau,\xi),$$

où $a(t,x)$ et $b(\tau)$ sont des coefficients à déterminer.

Nous obtenons un problème dans un domaine rectangulaire $R = ]a,b[\times]0,1[$ suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{L}v = g \in L^2_\sigma(R) \quad \text{dans } \; R = ]a,b[\times]0,1[, \\ v|_{\Gamma\setminus\Gamma_N} = \dfrac{\partial v}{\partial \xi}|_{\Gamma\setminus\Gamma_N} = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

avec

$\sigma \in \mathcal{C}^1([a,b])$ une fonction strictement positive,

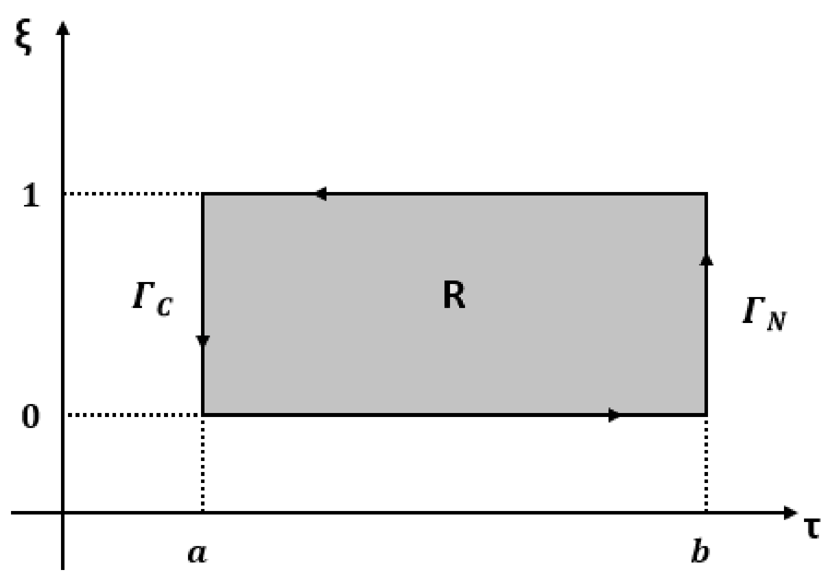
$v : R \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue et $g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée dans $L^2_\sigma(R)$.

$\Gamma$ est la frontière de $R$.

$\Gamma_N = \{b\} \times [0,1]$ est le segment de $\Gamma$ et orienté dans le sens de l'axe des $\xi$.

$\Gamma_C = \{a\} \times [0,1]$ est le segment de $\Gamma$ et orienté dans le sens opposé.

**Voir figure**



**Les coefficients** $a(t,x)$ **et** $b(\tau)$

D'après le changement de variables précédent, on a

$$\tau = t \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}.$$

On déduit que

1. $\dfrac{\partial \tau}{\partial t}(t,x) = 1 \quad$ **et** $\quad \dfrac{\partial \tau}{\partial x}(t,x) = 0.$
2. $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(t,x) = \dfrac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}.$
3. $$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t}(t,x) &= \frac{-\varphi_1'(t)[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)] - [x-\varphi_1(t)][\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)]}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2} \\ &= \frac{-\varphi_1'(t)\varphi_2(t)+\varphi_1(t)\varphi_1'(t) - x\varphi_2'(t)+\varphi_1(t)\varphi_2'(t)+x\varphi_1'(t)-\varphi_1(t)\varphi_1'(t)}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2} \\ &= \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)(\varphi_1(t)-x)}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2}.\end{aligned}$$

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)(\varphi_1(t)-x)}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \\ &= \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) + \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi)\right) \\ &= \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi}(\tau,\xi) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\tau,\xi)\right)\end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\tau,\xi).$$

En fin l'opérateur de $L$ définie par (3.2), donne après changement de variables

$$\widetilde{L}v(\tau,\xi) = \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)(\varphi_1(t)-x)}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) - \frac{1}{(\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau))^2}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \xi}(\tau,\xi).$$

Dans la suite on note

$$a(t,x) = \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)(\varphi_1(t)-x)}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2},$$

$$b(\tau) = \frac{1}{(\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau))^2}.$$

**Remarque 3.1.** Les deux problèmes (3.1) et (3.3) sont équivalentes.

## 3.4 Lemmes fondamentales

Dans cette section, nous allons montrer que le changement de variables $G$ conserve les espaces de Sobolev.

**Lemme 3.1.** *Si l'on pose $u(t,x) = v(\tau,\xi)$ alors :*

$$u \in H^{1,2}(\Omega) \quad \textit{équivaut à} \quad v \in H^{1,2}(R).$$

**Preuve.** (Voir [10, page 21]). ■

**Lemme 3.2.** *Si l'on pose $u(t,x) = v(\tau,\xi)$ alors :*

$$u \in H_\sigma^{1,2}(\Omega) \quad \textit{équivaut à} \quad v \in H_\sigma^{1,2}(R).$$

D'après le changement de variables $G$ précédent, on a :
La matrice Jacobienne de $G$ vaut :

$$J_G(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial t}(t,x) & \frac{\partial\tau}{\partial x}(t,x) \\ \frac{\partial\xi}{\partial t}(t,x) & \frac{\partial\xi}{\partial x}(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(t,x) & \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne (le Jacobien) de $G$ vaut :

$$|J_G(t,x)| = \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}.$$

Comme $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a,b[$, alors $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont continues sur $]a,b[$ ( i.e. $(\varphi_i)_{i=1,2} \in L^\infty(]a,b[)$ ) et pour tout $t \in ]a,b[$, on a

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t).$$

Alors pour tout $t \in ]a, b[$ et $M > 0$, on a

$$0 < \frac{1}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)} \leq M.$$

Donc $|J_G(t, x)|$ est borné.

Clairement $G$ est une fonction bijective, alors la fonction inverse $G^{-1}$ existe.

**Cherchons la fonction inverse $G^{-1}$ de $G$ :**

On a

$$G(t, x) = \left( t, \frac{x - \varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)} \right) = (\tau, \xi),$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \tau = t, \\ \xi = \dfrac{x - \varphi_1(t)}{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}, \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} t = \tau, \\ x = (\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau))\xi + \varphi_1(\tau). \end{cases}$$

On obtient

$$G^{-1}(\tau, \xi) = (t, x) = (\underbrace{\tau}_{\eta(\tau,\xi)}, \underbrace{(\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau))\xi + \varphi_1(\tau)}_{\psi(\tau,\xi)}).$$

La matrice Jacobienne de $G^{-1}$ est :

$$J_{G^{-1}}(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial \tau}(\tau, \xi) & \frac{\partial \eta}{\partial \xi}(\tau, \xi) \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau, \xi) & \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\tau, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ (\varphi_2'(\tau) - \varphi_1'(\tau))\xi + \varphi_1'(\tau) & \varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne (le Jacobien) de $G^{-1}$ est :

$$|J_{G^{-1}}(\tau, \xi)| = \varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau).$$

Comme $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a, b[$, alors $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont continues sur $]a, b[$ ( i.e. $(\varphi_i)_{i=1,2} \in L^\infty(]a, b[)$ ) et pour tout $\tau \in ]a, b[$, on a

$$\varphi_1(\tau) < \varphi_2(\tau).$$

Donc pour tout $\tau \in ]a, b[$ et $M > 0$, on a

$$0 < \varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau) \leq M.$$

D'où $|J_{G^{-1}}(\tau, \xi)|$ est borné.

**Démonstration du Lemme 3.2.**

($\Rightarrow$) Condition nécessaire :

Supposons que

$$u \in H_{\sigma}^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L_{\sigma}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{\sigma}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in L_{\sigma}^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_{\sigma}^2(\Omega) \right\},$$

et montrons que

$$v \in H_{\sigma}^{1,2}(R) = \left\{ v \in L_{\sigma}^2(R), \frac{\partial v}{\partial \tau} \in L_{\sigma}^2(R), \frac{\partial v}{\partial \xi} \in L_{\sigma}^2(R), \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \in L_{\sigma}^2(R) \right\}.$$

• Soit $u \in L_{\sigma}^2(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \left[u(t,x)\right]^2 dtdx < +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{R} \sigma(\tau) \left[v(\tau,\xi)\right]^2 d\tau d\xi &= \int_{\Omega} \sigma(t) \left[u(t,x)\right]^2 \underbrace{\left|J_G(t,x)\right| dtdx}_{d\tau d\xi} \\
&\leq M \int_{\Omega} \sigma(t) \left[u(t,x)\right]^2 dtdx < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $v \in L_{\sigma}^2(R)$.

• Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t)) - \varphi_2'(t)(x-\varphi_1(t))}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi). \\
&(b) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) = (\varphi_2(t)-\varphi_1(t)) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x). \\
&(c) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\tau,\xi) = (\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).
\end{aligned}$$

D'après $(b)$ et $(c)$, on déduit que si

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \in L_{\sigma}^2(\Omega); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_{\sigma}^2(\Omega) \right\},$$

implique

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} \in L_{\sigma}^2(R); \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \in L_{\sigma}^2(R) \right\}.$$

• Il reste de montrer que $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} \in L^2_\sigma(R)$ :
Les égalités $(a)$ et $(b)$ impliquent que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \underbrace{\frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t)) - \varphi_2'(t)(x-\varphi_1(t))}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}}_{A(t)}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - A(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x).
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2_\sigma(\Omega)$, donc il suffit de prouver que $A(t)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est dans $L^2_\sigma(\Omega)$.
On a

$$\left|A(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| \leq C\left|\varphi_1'(t)\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| + C\left|\varphi_2'(t)\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|$$

où $C$ est une constante provenant des majorations des termes en $(\varphi_i)_{i=1,2}$.
On a $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a,b[$, alors

$$(\varphi_i')_{i=1,2} \text{ sont bornées sur } ]a,b[ \quad (\text{i.e. } (\varphi_i')_{i=1,2} \in L^\infty(]a,b[)).$$

Donc pour tout $M > 0$, on a

$$\left|A(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| \leq M\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|.$$

Alors

$$\int_\Omega \sigma(t)\left|A(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 dtdx \leq M\int_\Omega \sigma(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 dtdx < +\infty, \ \ (\text{car } \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2_\sigma(\Omega)).$$

D'où $A(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2_\sigma(\Omega)$.

($\Leftarrow$) Condition suffisante :

Supposons maintenant que

$$v \in H^{1,2}_{\sigma}(R) = \left\{ v \in L^2_{\sigma}(R), \frac{\partial v}{\partial \tau} \in L^2_{\sigma}(R), \frac{\partial v}{\partial \xi} \in L^2_{\sigma}(R), \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \in L^2_{\sigma}(R) \right\},$$

et montrons que

$$u \in H^{1,2}_{\sigma}(\Omega) = \left\{ u \in L^2_{\sigma}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2_{\sigma}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2_{\sigma}(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2_{\sigma}(\Omega) \right\}.$$

• Soit $v \in L^2_{\sigma}(R)$ c'est-à-dire

$$\int_R \sigma(\tau) \left[v(\tau,\xi)\right]^2 d\tau d\xi < +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(t) \left[u(t,x)\right]^2 dt dx &= \int_R \sigma(\tau) \left[v(\tau,\xi)\right]^2 \underbrace{|J_{G^{-1}}(\tau,\xi)|\, d\tau d\xi}_{dtdx} \\ &\leq M \int_R \sigma(\tau) \left[v(\tau,\xi)\right]^2 d\tau d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

Donc, on obtient $u \in L^2_{\sigma}(\Omega)$ .

• Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} &(a') \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t)) - \varphi_2'(t)(x-\varphi_1(t))}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi). \\ &(b') \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi). \\ &(c') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\tau,\xi). \end{aligned}$$

D'après $(b')$ et $(c')$, on déduit que si

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} \in L^2_{\sigma}(R); \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \in L^2_{\sigma}(R) \right\},$$

implique

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2_{\sigma}(\Omega); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2_{\sigma}(\Omega) \right\}.$$

• Il reste de montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2_\sigma(\Omega)$ :
D'après l'égalité $(a')$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,\xi) + \underbrace{\frac{\varphi_1'(t)(x-\varphi_2(t)) - \varphi_2'(t)(x-\varphi_1(t))}{(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))^2}}_{B(t)} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi).$$

Comme $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} \in L^2_\sigma(R)$, donc il suffit de montrer que $B(t)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}$ est dans $L^2_\sigma(R)$.
On a $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a,b[$, alors

$$(\varphi_i')_{i=1,2} \text{ sont bornées sur } ]a,b[ \quad (\text{i.e. } (\varphi_i')_{i=1,2} \in L^\infty(]a,b[)).$$

Donc pour tout $N > 0$, on a

$$\left| B(t)\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \right| \leq N \left| \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \right|.$$

Alors

$$\int_R \sigma(\tau) \left| B(t)\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \right|^2 d\tau d\xi \leq N \int_R \sigma(\tau) \left| \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau,\xi) \right|^2 d\tau d\xi < +\infty, \quad (\text{car } \frac{\partial v}{\partial \xi} \in L^2_\sigma(R)).$$

D'où $B(t)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}$ est dans $L^2_\sigma(R)$. ■

## 3.5 Existence et unicité du problème

Nous allons étudier ici qu'il existe une solution unique du problème non rectangulaire (3.1).

D'après le problème rectangulaire (3.3), on a

$$\widetilde{L}v(\tau,\xi)=\underbrace{\frac{\partial v}{\partial\tau}(\tau,\xi)-b(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}(\tau,\xi)}_{\widehat{L}v(\tau,\xi)}+\underbrace{a(t,x)\frac{\partial v}{\partial\xi}(\tau,\xi)}_{Tv(\tau,\xi)}=g(\tau,\xi).$$

• La propriété de la corne de Besov (voir [1]) est vérifiée dans $R$ relativement à l'espace $H^{1,2}(R)$ et $H^{1,2}_\sigma(R)$, donc l'opérateur $Tv=a(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial\xi}$ est compact de $H^{1,2}(R)$ dans $L^2(R)$ ($H^{1,2}(R)\hookrightarrow_c L^2(R)$) il l'est aussi de $H^{1,2}_\sigma(R)$ dans $L^2_\sigma(R)$ ($H^{1,2}_\sigma(R)\hookrightarrow_c L^2_\sigma(R)$).
• L'opérateur $\widehat{L}v=\dfrac{\partial v}{\partial\tau}-b(\tau)\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}$ admet un indice (car $Ker(\widehat{L})$ est de dimension finie et $Im(\widehat{L})$ est de codimension finie) et $\chi(\widehat{L})=\dim Ker(\widehat{L})-\text{codim}\, Im(\widehat{L})$, de plus on a $\widehat{L},T\in\mathcal{L}(H^{1,2}_\sigma(R),L^2_\sigma(R))$. Dans ce cas, en appliquant la Théorème 1.2 , on obtient

$\widehat{L}+T$ admet un indice et $\chi(\widehat{L}+T)=\chi(\widehat{L})$(i.e. les opérateurs $\widehat{L}+T$ et $\widehat{L}$ ont le même indice).

Il suffit donc d'étudier l'opérateur

$$\widehat{L}v(\tau,\xi)=\frac{\partial v}{\partial\tau}(\tau,\xi)-b(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}(\tau,\xi).$$

Pour cela on pose

$$\tau=h(s)\quad\text{implique}\quad s=h^{-1}(\tau),$$

où $h:]a,b[\longrightarrow]a,b[$ est une fonction continue et bijective sur $]a,b[$, $h^{-1}$ la fonction réciproque de $h$ est dérivable sur $]a,b[$ et on a

$$(h^{-1}(\tau))'=\frac{1}{h'\circ h^{-1}(\tau)}=\frac{1}{h'(s)}.$$

En utilisant la règle de chaînes, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial\tau}(\tau,\xi)&=\frac{\partial s}{\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial s}(s,\xi)+\frac{\partial\xi}{\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial\xi}(s,\xi)\\&=\frac{1}{h'(s)}\frac{\partial v}{\partial s}(s,\xi).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}(\tau,\xi)=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}(s,\xi).$$

Alors l'opérateur précédent devient

$$\widehat{L}v(s,\xi) = \frac{1}{h'(s)}\frac{\partial v}{\partial s}(s,\xi) - b(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(s,\xi).$$

Posons encore $b(\tau) = \dfrac{1}{h'(s)}$, on obtient

$$h'(s) = \left[\varphi_2(h(s)) - \varphi_1(h(s))\right]^2, \tag{3.4}$$

c'est une équation différentielle ordinaire, d'après le Théorème de Cauchy-Lipshitz 1.3 , l'équation (3.4) admet une solution $h$ quand son second membre est lipschitzien par rapport à $h$.

**Vérifieons le second membre est lipschitzien par rapport à $h$ :**

Soit $h_1, h_2 \in ]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}\left|(\varphi_2(h_1)-\varphi_1(h_1))^2-(\varphi_2(h_2)-\varphi_1(h_2))^2\right| &= |\varphi_2(h_1)-\varphi_1(h_1)-\varphi_2(h_2)+\varphi_1(h_2)|\,|\varphi_2(h_1)-\varphi_1(h_1)\\ &\quad +\varphi_2(h_2)-\varphi_1(h_2)|\\ &\le |\varphi_2(h_1)-\varphi_1(h_1)+\varphi_2(h_2)-\varphi_1(h_2)|\,(|\varphi_2(h_1)-\varphi_2(h_2)|\\ &\quad +|\varphi_1(h_1)-\varphi_1(h_2)|).\end{aligned}$$

On a $(\varphi_i)_{i=1,2}$ sont des fonctions lipschitziennes dans $]a,b[$, d'où il vient

$$\left|(\varphi_2(h_1)-\varphi_1(h_1))^2-(\varphi_2(h_2)-\varphi_1(h_2))^2\right| \le M\,|h_1-h_2|\,; \quad \forall M>0.$$

On est donc ramené à l'opérateur $L$ moyennant un changement de poids dans les espaces de Sobolev.

Le nouveau poids est positif (car $h'\sigma > 0$), mais il n'est pas dans $\mathcal{C}^1([a,b])$ il est **lipschitzien** et ce la suffit pour que la Théorème 2.3 soit valable. On a finalement le

**Théorème 3.1.** *$L$ est un isomorphisme de $E$ dans $L^2_\sigma(\Omega)$.*

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème parabolique dans un domaine bidimenstionnel, c'est l'équation de la chaleur, avec des conditions mixtes (de Dirichlet et de Neumann) sur le bord. Le domaine est un domaine rectangulaire ou un domaine peut ramener à un domaine rectangulaire.

Ce mémoire est basé sur l'article de Sadallah [7], et le livre de J. L. Lions - E. Magenes [6].

Notons qu'il y a une poursuite de ce travail concernant les domaines trigonométriques, que nous n'avons pas pu aborder car elle fera le mémoire plus long.

# Bibliographie


[1] O. V. Besov, *The continuation of functions in $L_p^l$ and $W_p^l$*, Proc. SteKlov Inst. Math., 88 (1967), AMS (1969).

[2] F. Demengel et G. Demengel, *Espaces fonctionnels - Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences/CNRS Éditions, Paris, 2007.

[3] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1969.

[4] P. Grisvard, *Opérateurs à indice - lemme de compacité*, Sém. Henri Cartan, tome 16, 1 (1963-1964), exp. 12, p. 1-9.

[5] V. K. Khoan, *Distributions - Analyse de Fourier - Opérateurs aux dérivées partielles*, tomes 1, 2, Vuibert, Paris, 1972.

[6] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, 2, Dunod, Paris, 1968.

[7] B. K. Sadallah, *Etude d'un problème 2m-parabolique dans des domaines plans non rectangulaires*, Bol U.M.I (6) 2-B (1983), 51-112.

[8] B. K. Sadallah, *Régularité de la solution de l'équation de la chaleur dans un domaine plan non rectangulaire*, Bol U.M.I (5) 13-B (1976), 32-54.

[9] B. K. Sadallah, *Une équation 2m-parabolique dans un domaine plan singulier*, C. R Acad. Sc. Paris Sér. A, 287 (1978), 1025-1027.

[10] B. K. Sadallah, *Thèse de Spécialité*, Nice, 1976.

[11] L. Schwartz, *Transfomation de Laplace des distributions*, Sém. Math. Univ. Lund, tome dédié à M. Riesz, 1952, 196-206.

**ملخص:** ليكن $\Omega$ مفتوحا محدودا من $\mathbb{R}^2$، معطى بالإحداثيات $(t, x)$ ذا حافة $\Gamma$ موجهة توجيها مباشرا. نرمز بـ $\Gamma_N$ (على التوالي $\Gamma_C$) لمجموعة القطع المستقيمة من $\Gamma$ الموازية لمحور $x$ والموجهة توجيها مباشرا (على التوالي غير مباشر). الهدف من هذا العمل هو بيان أن المسألة الموالية تقبل حلا وحيدا في $H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ تحت شروط معينة على $\Omega$ و $\sigma$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \in L^2_\sigma(\Omega) : \quad \Omega \quad \text{في}, \\ u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0. \end{cases}$$

**كلمات مفتاحية:** فضاءات سبولاف ولوبيغ الثقالية، مسألة مكافئة، شروط حدية.

---

**Résumé :**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, décrit par $(t, x)$ dont le bord $\Gamma$ est orienté dans le sens direct. On note $\Gamma_N$ (resp. $\Gamma_C$) l'ensemble des segments de $\Gamma$ qui sont parallèles à l'axe des $x$ et orientés dans le sens direct (resp. le sens opposé). Le but de ce travail est de déterminer des conditions sur $\Omega$ et $\sigma$ pour que le problème suivant admet une solution unique dans $H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \in L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0. \end{cases}$$

**Mots-Clés :** Espaces de Sobolev et de Lebesgue avec poids, problème parabolique, conditions aux limites.

---

**Abstract :**

Let $\Omega$ be a bounded open of $\mathbb{R}^2$, described by $(t, x)$ including edge $\Gamma$ is oriented in the direct direction. We note $\Gamma_N$ (resp. $\Gamma_C$) all segments of $\Gamma$ that are parallel to the $x$ axis and oriented in the direct direction (resp. the opposite direction). The purpose of this work is to determine conditions on $\Omega$ and $\sigma$ so that the following problem admits a single solution in $H_\sigma^{1,2}(\Omega)$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \in L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma \setminus \Gamma_N} = 0. \end{cases}$$

**Keywords :** Spaces of Sobolev and Lebesgue with weights, parabolic problem, boundary conditions.